

4⁰. Новая схема исследований в Теории приближений, Численном анализе и Вычислительной Математике: информационные функционалы в оптимальном вычислительном агрегате вычисляются с ошибкой, причем величина ошибки должна быть такой предельно большой, чтобы сохранялся порядок восстановления по точным значениям функционалов, с одновременным установлением множества операторов восстановления, среди которых изучаемый агрегат будет относиться к наилучшим.

Вся эта постановка носит название Компьютерный (вычислительный) поперечник $K(B)П$ с разбивкой на три последовательные задачи:

K(B)П-1. Восстановление по точной информации, в зависимости от вида функционалов и алгоритмов переработки полученной от них числовой информации, включает в себя всю известную теорию приближений, численный анализ, вычислительную математику, теорию функций – ряды Фурье, базисы;

K(B)П-2. В оптимальном вычислительном агрегате значения информационных функционалов можно заменить на близкие им значения с сохранением оптимальности, поиск наибольших таких расхождений образует самостоятельную задачу нахождения предельных погрешностей – новая оптимизационная задача;

K(B)П-3. Существует или не существует другой вычислительный агрегат со структурой, аналогичной структуре рассматриваемого оптимального вычислительного агрегата, и даже, быть может, более общей, но с большей по порядку предельной погрешностью.

Задача $K(B)П$ в большой полноте исторически и содержательно изложена в статьях

Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. - №3. - С. 8-88.

Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97

Задача восстановления по точной информации (задача $K(B)П-1$) известна и разрабатывалась в течение многих десятилетий в большом количестве публикаций со своими обозначениями. Это работы авторов А.Сарда, С.М.Никольского, Н.С. Бахвалова, И.Бабушки и С.Л.Соболева, Ч.А. Митчелли и Т.Дж. Равлина, Дж.Ф.Трауба, Г.Васильковского, Х.Вожняковского, А. Пинкуса, В.Н.Темлякова, Н.П.Корнейчука, Э. Новака, Х. Вожняковского, Я. Вибирала, Б. Кашина, Е. Косова, И. Лимоновой, В. Темлякова и многих других авторов.

По теме восстановления по неточной информации публикации можно разбить на три группы, отнеся в первую работы Н. Темиргалиева и его соавторов, во вторую – В.М. Тихомирова, Г.Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко, А. Г. Марчука и их соавторов и в третью группу Дж. Трауба, Х. Вожняковского, Л. Плaskоту и их соавторов. Все они различаются как по

постановкам и, что интересно, так и по употребляемым названиям, по сути одних и тех же математических объектов, и, как следствие, по формулировкам результатов. Задача восстановления по неточной информации в контексте второй части К(В)П-2 и К(В)П-3 является новой.

Следующая оценка снизу, полученная для всех возможных вычислительных агрегатов, построенных по произвольной линейной информации $l_1(f), \dots, l_N(f)$, с переработкой по алгоритму $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)$ без каких-либо ограничений, кроме естественных

$$\inf_{\substack{l_1, \dots, l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы}; \varphi_N}} \sup_{f \in W_p^r(0,1)^s} \|f^{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)\|_{L^q(0,1)^s} \\ \gg \begin{cases} N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_s}{s} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}, & \text{если } 2 \leq p \leq q \leq \infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_s}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}, & \text{если } 1 \leq p < 2 \leq q \leq +\infty, \\ N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_s}{s}}, & \text{если } 1 \leq p \leq q < 2 \end{cases}$$

позволяет широко разработанную К(В)П-1 задачу с отдельно изучаемыми случаями объединить в единую схему, через оценки сверху объединяющую и известные поперечники Колмогорова, Корнейчука, Тихомирова, Темлякова и т.п., и аппроксимационные задачи – ряды Фурье-Лебега по всевозможным ортонормированным системам и их средние, разного рода базисы и фреймы, это и активно исследуемая тематика последнего периода, включая вейвлет-системы и жадные (гриды) алгоритмы.

К(В)П-постановку в трех задачах продемонстрируем на примере Численного дифференцирования в одном (из трех возможных) случае $2 \leq p \leq q \leq \infty$, $r > \alpha_1 + \dots + \alpha_s + s \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$, $N = 2^{ns}$ ($n = 1, 2, \dots$), когда $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ – производные функции определяются по Вейлю.

$$\text{К(В)П-1: } \delta_N(0; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \equiv \\ \equiv \inf_{\substack{l_1, \dots, l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы}; \varphi_N}} \sup_{f \in W_p^r(0,1)^s} \|f^{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)\|_{L^q(0,1)^s} \\ \gg N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_s}{s} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})},$$

- здесь получен неулучшаемый порядок восстановления по точной информации,

К(В)П-2: Для $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ – производной частичной суммы ряда Фурье

$$\overline{\varphi}(\{\hat{f}(m)\}_{m \in I_n}; x) \equiv S_N^{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(f; x) = \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \in Z^s: \\ |m_j| \leq 2^n \quad (j=1, \dots, s)}} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s (e^{2\pi i m_j x_j})^{(\alpha_j)}$$

величина $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(\Phi_N) \equiv \tilde{\varepsilon}_N(\Phi_N(W_p^r) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s}) = N^{-\frac{r}{s} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}$, является предельной погрешностью: во-первых,

$$\begin{aligned}
& \delta_N(0; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N(\Phi_N) = N^{-\frac{r}{s}\left(1-\frac{1}{p}\right)}; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} = \\
& = \inf_{l_1, \dots, l_N - \text{все возможные линейные функционалы}; \varphi_N} \sup \left\{ \left\| f^{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N(l_1(f) + \gamma_N^{(1)} \tilde{\varepsilon}_N, \dots, l_N(f) + \gamma_N^{(N)} \tilde{\varepsilon}_N) \right\|_{L^q(0,1)^s} : f \in W_p^r(0,1)^s, |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau = 1, \dots, N) \right\} \asymp \\
& \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N(\Phi_N) = N^{-\frac{r}{s}\left(1-\frac{1}{p}\right)}; S_N^{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(f; x))_{L^q(0,1)^s} = \sup_{\substack{f \in W_p^r(0,1)^s \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau = 1, \dots, N)}} \left\| f^{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(x) - \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s: \\ |m_j| \leq 2^n (j=1, \dots, s)}} \left(\hat{f}(m) + \gamma_N^{(m)} \tilde{\varepsilon}_N \right) \prod_{j=1}^s \left(e^{2\pi i m_j x_j} \right)^{(\alpha_j)} \right\|_{L^q(0,1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_s}{s} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)}.
\end{aligned}$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s \\ |m_j| \leq 2^n (j=1, \dots, s)}} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s (e^{2\pi i m_j x_j})^{(\alpha_j)} \right)_{L^q(0,1)^s}}{\delta_N(0; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\phi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s}} = +\infty$$

- здесь найден точный порядок предельной погрешности вычисления информационных функционалов, сохраняющих неулучшаемые порядки восстановления по точной информации (зависящем, особо подчеркнем, от оптимального вычислительного агрегата в К(В)П-1, которых может быть больше одной).

К(В)П-3: Всякий вычислительный агрегат $\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x)$, построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности $S_N^{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)}(f; x)$:
для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности выполнено равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x) \right)_{L^q(0,1)^s}}{\delta_N(0; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\phi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s}} = +\infty$$

-здесь решается вопрос, можно ли с порядковыми улучшениями скорости восстановления и предельной погрешности перейти к другому вычислительному агрегату, с отрицательным ответом.

Подход следует позиции гладкости рассматриваемых объектов от конечно дифференцируемых и аналитических до никак не гладких, но с построением новых математических структур, наделенных какими-то аналогиями разработанных топологий.