

Жуықтап интегралдау есебі АҚШ-та атом бомбасын жасау жұмыстары барысында ерекше өзектілікке ие болды. Сол кезеңде американдық математик фон Нейман қазіргі кезде кеңінен белгілі «Монте-Карло әдісін» ұсынды. Кейінірек кеңестік математик Н.М. Коробов бұл есеп үшін ЭЕМ тұрғысынан анағұрлым үнемді, сандар теориясына негізделген жаңа тәсілді енгізді, ары қарай бұл бағытта қарқынды зерттеулер Германия Федеративтік Республикасында (Э. Хлавка), Қытайда (оның ішінде өз елінің ядролық жобасына қатысқан ҚХР Ғылым академиясының вице-президенті Хуа Ло-Кен және академик Вань Юань) және басқа да көптеген елдердің математиктері тарапынан жалғастырылды.

Алайда осы халықаралық деңгейдегі ғылыми мектептердің барлық күш-жігеріне қарамастан, бірқалыпты үлестірілген торларды құрудың тиімді алгоритмін табу мәселесі толық шешілмеді.

Н. Темирғалиевтің негізгі жетістіктердің бірі – осы бағыттағы (1989 жыл) көп уақыт бойы шешілмей келген, әртүрлі елдер математиктерінің талпыныстарына қарамастан күрделі болып қалған және американдық «Contemporary Mathematics» журналында «сандық интегралдаудың орталық мәселесі» деп аталып, оның өзектілігі компьютерлік технологиялардың қарқынды дамуымен түсіндірілген есепті шешуі болды.

Ізделінетін көпөлшемді

$$x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(s)}) \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

кездейсоқ тізбек Монте-Карло әдісінен

$$x_k^{(1)} \equiv a_1 k \pmod{N}, \dots, x_k^{(s)} \equiv a_s k \pmod{N},$$

ережесі бойынша алынады, мұнда шексіз өспелі оң бүтін N үшін белгілі бір алгоритм бойынша $a_1, \dots, a_s$ оң бүтін сандары есептеледі. Осы сандарға сәйкес келетін

$$\xi_k(a) = \left(\left\{ \frac{a_1}{N} k \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s}{N} k \right\} \right) \equiv \left(\left\{ a \frac{k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, \dots, N) \quad (*)$$

s -өлшемді тізбек $(\{\dots\} - \text{бөлшек бөлік}, a = (a_1, \dots, a_s))$ бірқалыпты үлестіріледі.

s – оң бүтін сан болсын. s -өлшемді $[0,1]^s$ бірлік кубындағы $\{\eta_k\}_{k=1}^N$ ақырлы нүктелер жиыны тор деп, ал η_k – түйіндер деп аталады.

$[0,1]^s$ бірлік кубындағы $\{\eta_k\}_{k=1}^N$ торы берілсін.

$$D_s(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) =$$

$$\sup \left\{ \left| \frac{G_J}{N} - \frac{|J|}{1} \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_J(\eta_k) - \prod_{j=1}^s (b_j - a_j) \right| : J = \prod_{j=1}^s [a_j, b_j] \subset [0,1]^s \right\}$$

саны $\{\eta_k\}_{k=1}^N$ торының *дискрепансы* (алғашында «интенсивтілік дисперсиясы» ретінде зерттелген, ал терминнің енгізілуі ван дер Корпут есімімен байланыстырылады) деп аталады, мұндағы $J = [0,1]^s$ өстеріне параллель қабырғалы параллелепипед, $|J|$ – оның s -өлшемді көлемі, G_J – J параллелепипедіндегі $\eta_1, \dots, \eta_N$ мүшелерінің саны, ал $\chi_B(x)$ – J жиынының сипаттамалық функциясы.

Дискрепанс — $\eta_1, \dots, \eta_N$ торының J ішіндегі $\frac{G_J}{N}$ үлесінің идеал $\frac{|J|}{1}$ бірқалыпты үлестірілу мәнінен ауытқуын сипаттайтын сандық өлшем болып, нүктелердің кеңістікте «жақсы» үлестірілуінен «нашарын» сандық түрде ажыратуға мүмкіндік береді.

$\{\eta_k^{(N_t)}\}_{k=1}^{N_t}$ торлар тізбегі $[0,1]^s$ бірлік кубында жатсын, мұндағы $\{N_t\}_{t=1}^\infty$ – жеткілікті тұрғыда тығыз (көпмүшеліктен жылдам емес) өспелі оң бүтін сандар тізбегі берілсін, егер қандай да бір оң $c(s)$ және $\beta(s)$ шамалары үшін барлық $t \geq 1$ мәндерінде

$$D_s \left(\eta_1^{(N_t)}, \eta_2^{(N_t)}, \dots, \eta_{N_t}^{(N_t)} \right) \leq c(s) \frac{\ln^{\beta(s)} N_t}{N_t}$$

теңсіздігі орындалса, онда тізбек бірқалыпты үлестірілген деп аталады.

Тор құрастыру мәселесіне тоқталайық. 1959 жылы Н.М. Коробов кез келген оң бүтін N үшін N санымен өзара жай болатын және олар арқылы құрылған (*) торы бірқалыпты үлестірілген болып табылатын $a_1, \dots, a_s$ бүтін сандарының бар екенін дәлелдеді. Кейіннен (*) түріндегі торлар 1962 жылы Э.Хлавка тарапынан басқа пайымдаулар негізінде қайта ашылды. Сонымен қатар, бөлгіштер (дивизорлар) теориясын қолдану да дәл осындай типтегі торларға әкеледі.

(*) түріндегі торларды құрастыруға қатысты теориялық және практикалық қызығушылық, атап айтқанда, келесі жағдаймен түсіндіріледі. Жалпы жағдайда N көлемді торды сипаттау үшін sN нақты сан қажет. N көлемі тәуелсіз $(N, a_1(N), \dots, a_s(N)) \in \mathbb{Z}^{s+1}$ түріндегі $s+1$ бүтін сандармен толық анықталуы (және де $\approx N$ элементар арифметикалық амалдармен толық есептеледі) (*) түріндегі торлардың артықшылығы болып табылады. Сонымен қатар, тордың әрбір түйінінің әрбір координаты кіші N бөлімді қарапайым бөлшек түрінде беріледі.

Мысалы, $s = 10$ өлшемінде және түйіндер саны $N = 10^6$ болған жағдайда, ЭЕМ жадында торды сақтау үшін $sN = 10^7$ көлем қажет болса, (*) типті тор жағдайында сақтау тек $s + 1 = 11$ бүтін сан арқылы, N көлемге тәуелсіз түрде жүзеге асырылады. Осылайша, бірқалыпты үлестірілген (*)

торлар жағдайында, С.М. Никольскийдің ұсынысы бойынша «Коробов торы» деп аталған бұл құрылымда ақпараттың sN көлемінен $s + 1$ көлеміне дейінгі аса жоғары деңгейдегі сығылуы байқалады. Бұл өз кезегінде ЭЕМ жадын өте үнемді пайдалануға мүмкіндік береді.

$$l \geq 3 - \text{жай сан, } \theta = \cos \frac{2\pi}{l} + i \sin \frac{2\pi}{l} = e^{i \frac{2\pi}{l}} \text{ және}$$

$$N(m) = \prod_{k=1}^s (m_1 + m_2 \theta^k + \dots + m_s \theta^{(s-1)k}),$$

болсын, мұндағы

$$s = l - 1, \quad m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s.$$

Бірқалыпты үлестірілген торларды құру алгоритмі

Теорема А (Е.А. Баилов, М.Б. Сихов, Н. Темиргалиев; *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2014, 54-том, №7, 1059–1077-беттер). $l = s + 1 \geq 3$ жай және $r > 1$ сандары берілсін және $R > 1$,

$$E = \Gamma_R \equiv \{m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : \bar{m}_1 \cdot \dots \cdot \bar{m}_s \leq R\}, \quad \bar{m}_j = \max\{1, |m_j|\} \quad (j = 1, \dots, s)$$

болсын. Онда

1-қадам. $K(E) = \prod_{m \in E} N(m)$ шамасы есептелінеді.

2-қадам. Эратосфен елегі әдісі арқылы $(1, 18s \ln K(E))$ аралығындағы барлық жай сандар табылады.

3-қадам. Әрбір $p, p \equiv 1 \pmod{l}$, $p \in (1, 18s \ln K(E))$ жай санын тікелей тексеру арқылы $K(E)$ санына бөлінбейтін p саны анықталады.

4-қадам. $D_s(\xi_1(a), \dots, \xi_p(a)) << \frac{\ln^{2s} T}{T}$ теңсіздігін қанағаттандыратындай

$$\xi_k(a) = \left(\frac{k}{p}, \left\{ \frac{k}{p} a^{\frac{p-1}{l}} \right\}, \dots, \left\{ \frac{k}{p} a^{\frac{p-1}{l}(s-1)} \right\} \right) \quad (k = 1, \dots, p)$$

торы $T \ln \ln T$ қарапайым арифметикалық амалдарды орындау арқылы құруға мүмкіндік беретін $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ шартын қанағаттандыратын бүтін a саны табылады.

Алайда аталған алгоритмді іс жүзінде жүзеге асыру жеткілікті дәрежеде еңбекті қажет ететін үдеріс болып табылады. Сондықтан $\{\xi_k(a)\}_{k=1}^p$ торын табу үшін есептеу эксперименттеріне жүгінейік.

Айталық

$$b_r(x) = \sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in Z^s} (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{-r} e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

мұндағы $r > 1$ және $\bar{m}_j = \max\{1, |m_j|\}, j = 1, \dots, s$.

Теорема В (М.Б. Сихов, Н. Темиргалиев; *Математические заметки*, 2010, 87-том, №6, 948–950-беттер).

Берілген $r > 1$ және $s = 1, 2, \dots$, үшін кез келген оң бүтін p саны және кез келген бүтін санды $(a_1, \dots, a_s)$ векторы үшін

$$c_3(s) \frac{(\ln p)^{\frac{s-1}{2}}}{p} \leq D_s \left[\left\{ \left(\frac{a_1}{p} k, \dots, \frac{a_s}{p} k \right) \right\}_{k=1}^p \right] \leq c_1(s) \frac{(\ln p)^{\beta_1(s)}}{p}$$

теңсіздігі

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p b_r \left(\frac{a_1}{p} k, \dots, \frac{a_s}{p} k \right) - 1 \right| \leq c_2(s) \frac{(\ln p)^{\beta_2(s)}}{p}$$

теңсіздігі орындалғанда және тек сол жағдайда орындалатындай c_1, c_2, c_3, β_1 және β_2 оң сандары табылады.

Осыдан r оң бүтін мәнді қабылданғанда ғана орын алатын $b_{r(x)}$ функциясы элементар функция түрінде өрнектелетін жағдайларда

$$\left(\frac{k}{p}, \left\{ \frac{a^{\frac{p-1}{l}}}{p} k \right\}, \dots, \left\{ \frac{a^{\frac{p-1}{l}(s-1)}}{p} k \right\} \right) (k = 1, 2, \dots, p)$$

торының бірқалыпты үлестірілуін анықтау

$$\Delta(s, r, a, p) \equiv \left| 1 - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p b_r \left(\frac{k}{p}, \left\{ \frac{a^{\frac{p-1}{l}}}{p} k \right\}, \dots, \left\{ \frac{a^{\frac{p-1}{l}(s-1)}}{p} k \right\} \right) \right|$$

шамасын есептеуге алып келеді, мұндағы r оң бүтін сан болған жағдайда $b_r(x)$ функциясы Бернуллидің алгебралық көпмүшесі болып табылады.

r санының кейбір мәндері үшін $b_{r(x)}$ функцияларын жазайық.

$r = 4$ жағдайында:

$$\sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s} (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{-4} e^{2\pi i(m, x)} = \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{\pi^4}{45} - \frac{2\pi^4}{3} x_j^2 (1 - x_j)^2 \right],$$

$r = 6$ жағдайында:

$$\sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s} (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{-6} e^{2\pi i(m, x)} = \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{(2\pi)^6}{6!} \left(\frac{1}{42} - \frac{1}{2} x_j^2 + \frac{5}{2} x_j^4 - 3x_j^5 + x_j^6 \right) \right],$$

$r = 8$ жағдайында:

$$\sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in Z^s} (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^{-8} e^{2\pi i(m, x)} = \prod_{j=1}^s \left(1 + \frac{(2\pi)^8}{8!} \left(\frac{1}{30} - \frac{2}{3} x_j^2 + \frac{7}{3} x_j^4 - \frac{14}{3} x_j^6 + 4x_j^7 - x_j^8 \right) \right),$$

$r = 10$ жағдайында:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in Z^s} (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^{-10} e^{2\pi i(m, x)} = \\ & = \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{(2\pi)^{10}}{10!} \left(\frac{5}{66} - \frac{3}{2} x_j^2 + 5x_j^4 - 7x_j^6 + \frac{15}{2} x_j^8 - x_j^9 + x_j^{10} \right) \right]. \end{aligned}$$

Жүргізілген есептеу эксперименттерінің нәтижелері кесте түрінде берілген, мұндағы p – тордағы түйіндер саны, ал $a - (a, p) = 1$, $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ шартын қанағаттандыратын бүтін сан.

Есептеулер келесі тәртіппен ұйымдастырылады.

$l = s + 1 \geq 3$ жай саны және $r \geq 2$ бүтін саны берілсін және $p, p \equiv 1 \pmod{l}$ шартын қанағаттандыратын жай сандар өсу ретімен жазылады. Олардың ішінен $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1 \pmod{p}$ шартын қанағаттандыратын $a = a(p, s)$ оң бүтін саны табылатын p сандары таңдалынып және әрбір осындай $a(p, s)$ саны үшін

$$a_t \equiv a^{\frac{p-1}{l}(t-1)} \pmod{p}, 1 \leq a_t < p (t = 2, \dots, s), a_1 \equiv 1,$$

шартын қанағаттандыратын оң бүтін

$$a_2 = a_2(a, p, s), \dots, a_s = a_s(a, p, s)$$

сандары анықталады. Ары қарай

$$\Delta \equiv \Delta(s, r, p, a) = \beta_p 10^{-\tau}, 1 \leq \beta_p < 10$$

шамалары есептеледі.

Алынған $\Delta(s, r, p, a)$ мәндері бірдей $\tau (\tau = 1, 2, \dots)$ көрсеткіштері бойынша топтарға бөлінеді. Осы топтардың әрқайсысынан кестеге ең аз p түйіндер саны мен Δ қателіктері ең кіші болатын $a_2, \dots, a_s$ коэффициенттерінің мәндері енгізіледі.

Кестеде коэффициенттер жолдар бойынша рет-ретімен нөмірленеді. Бұл ретте a параметрі екінші бағанға енгізіледі (бірінші баған p түйіндер саны), a_2 коэффициенті үшінші бағанға, әрі қарай дәл осылай s айнымалы жағдайына дейін жалғасады.

$s = 6, s = 10, s = 12$ жағдайлары сәйкесінше 1–3-кестелерде келтірілген

1-кесте – $s = 6$ болғандағы $a_2, \dots, a_s$ коэффициенттерінің және $\Delta(s, r, p, a)$ шамаларының мәндері

p	a		a_3	a_4	a_5	a_6	$\Delta(s, r, p, a)$	
							$r = 4$	$r = 6$
379	2	125	86	138	195	119	7.6E-01	1.4E-01
421	2	359	18	176	324	25	5.9E-01	1.1E-01
449	2	359	18	176	324	25	5.7E-01	1.1E-01
463	2	118	34	308	230	286	5.4E-01	1.1E-01
1009	2	105	935	302	431	859	9.3E-02	5.6E-03
...	...	...	...	...	...	...	...	...
75209	2	66662	23270	39115	63309	26732	9.8E-07	1.2E-10
94207	2	13212	85580	10546	1599	23620	8.5E-07	1.6E-10
109537	2	99712	28528	17583	96411	37901	3.3E-07	2.5E-11
215503	2	57262	58499	206609	160864	149639	7.2E-08	2.7E-12
243671	2	135142	218714	155088	28773	182619	5.2E-08	1.9E-12
476981	2	8824	115073	388584	325788	465806	8.1E-09	1.3E-13
501019	2	130214	200798	32219	332779	353434	8.7E-09	1E-13
965189	2	863106	758445	225078	651860	166036	9.1E-10	3.9E-15

2-кесте – $s = 10$ болғандағы $a_2, \dots, a_s$ коэффициенттерінің және $\Delta(s, r, p, a)$ шамаларының мәндері

p	a	$a_2, \dots, a_{10}$	$\Delta(s, r, p, a)$		
			$r = 4$	$r = 6$	$r = 8$
23231	2	690,9680,9394,21943, 5341,572,21544,9883,9538	7,1E-01	3.9E-02	3.3E-03
25873	2	16747,24562,10860,11103, 18563,10466,10400,17637,671	8.5E-01	5.7E-02	5E-03
28183	2	18418,12136,1475,26321, 4395,5534,15484,535,17763	6.5E-01	4.2E-02	3.7E-03
29569	2	4699,22127,10169,627, 18942,5768,18628,8732,19465	6.1E-01	3.7E-02	3E-03
117833	2	14328,26498,5418,94990, 45570,14307,79109,38125,99045	9.3E-02	3.6E-03	2E-04
298651	2	230692,86617,6507,92918, 62382,231258,147802,52965,192068	9.8E-03	9E-05	1.1E-06

311323	2	275448,6343,21988,72982, 308503,298848,169474,258440,286586	9E-03	7.1E-05	7.5E-07
347887	2	103500,113496,83558,130067, 99148,195161,148506,27566,59713	9.8E-03	1.2E-04	2.1E-06

3-кесте – $s = 12$ болғандағы $a_2, \dots, a_s$ коэффициенттерінің және $\Delta(s, r, p, a)$ шамаларының мәндері

p	a	$a_2, \dots, a_{12}$	$\Delta(s, r, p, a)$		
			$r = 4$	$r = 6$	$r = 8$
232961	2	171101,42214,134770,103107,40199,148535, 72662,111175,189142,142105,168035	5E-01	2.2E-02	1.6E-03
246247	2	77327,95275,112179,168711,241931,167600, 25590,203285,241950,159331,112086	7.5E-01	3.6E-02	2.6E-03
251057	2	136464,19264,24649,39450,89549,15261, 59289,157,85003,11764,104038	8.3E-01	4.5E-02	3.4E-03
251707	2	44381,65886,6347,26074,93115,11289, 120179,244576,166495,103903,46803	9.3E-01	5.1E-02	3.5E-03
255763	2	211008,129972,176812,86160,47951,60328, 110351,24525,118421,244794,108398	8.6E-01	5.3E-02	4.6E-03
258337	2	257215,225536,118868,190333,91073,117546, 123595,53379,42946,123607,39915	8E-01	4.7E-02	4.2E-03

Бұл мәселелердің неғұрлым кеңейтілген баяндалуы

Темиргалиев Н. К вопросу о научно-исследовательской и научно-методологической отчетности и контроле//Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. 2026. Т. 153. № 4. С. 6–91.

еңбегінің 44-66 беттерінде берілген.