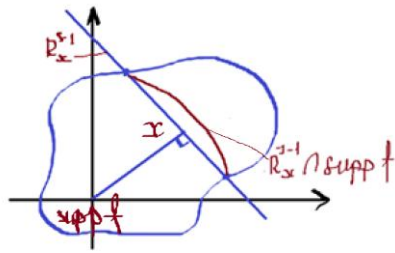


3. Компьютерная томография в эквивалентной связке в двух строках с Компьютерным (Вычислительным) поперечником (К(В)П) в формате Машинного обучения с учителем (ML) с выходом на Искусственный интеллект (AI)

Преобразование Радона функции $f(x)$ есть определенная на R^s действительная функция



$$(Rf)(x) := \int_{y \in R_x^{s-1} \cap \text{supp } f} f(y) dy =: R(f(y))(x),$$

Рисунок 1

где R_x^{s-1} есть перпендикулярное к вектору Ox , проходящее через точку x гиперплоскость размерности $s - 1$ (см. Рисунок 1).

Функция $f(x)$ выражается через преобразование Радона $(Rf)(x)$. Пусть $\Omega = [0, 1]^s$ и пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$ и $f(x) = 0$ для всех $x \in R^s \setminus \text{supp } f$. Тогда для $x \in \Omega$, $x = (\theta, t) \in S^{s-1} \times R^1$

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x) dx + \sum_k' \left(\frac{1}{|k|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Rf\left(\frac{k}{|k|}, \frac{m + k \cdot x}{|k|}\right) - \int_{\Omega} f(x) dx \right),$$

где

$$\theta = \frac{k}{|k|}, t = \frac{m + k \cdot x}{|k|},$$

а $\sum_k'$ означает суммирование по всем таким $k \in Z^s$, что $k_1 > 0$ и наибольший общий делитель $k_1, \dots, k_s$ равен 1.

Понятно, что компьютер, работающий только с конечной информацией, не может обработать этот функциональный ряд как объект бесконечный. Тем самым, задача заключается в построении вычислительного агрегата, который с любой наперед заданной точностью по конечному множеству значений $(Rf)(\xi_1), \dots, (Rf)(\xi_N)$ находит искомую плотность f в любой точке x .

В технической реализации Компьютерной томографии (КТ) наиболее распространённым способом является предварительный отбор точек сканирования $\xi_1, \dots, \xi_N$ с

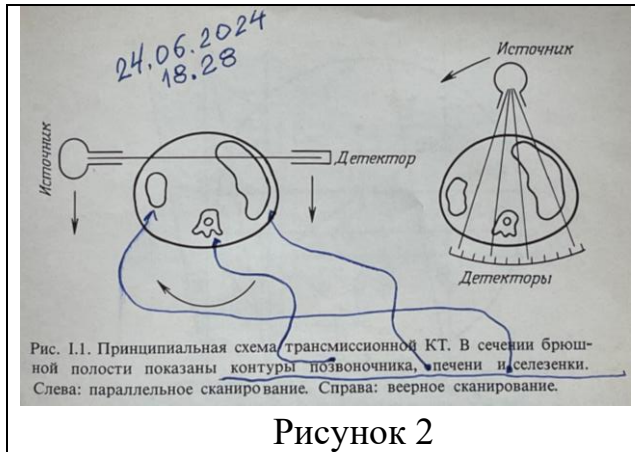


Рисунок 2

с дальнейшим построением теории приближения к искомой функции $f(x)$ по этим данным. В этом случае, естественно, к наиболее простым относятся параллельное и веерное сканирования (см. Рисунок 2).

Вместе с тем, с позиций теоретической математики, возникает задача оптимального выбора узлов сканирования с соответствующим алгоритмом

переработки полученной числовой информации, позволяющей в определенной метрике с любой наперед заданной точностью получить искомую

плотность $f(x)$ в любой точке x рассматриваемого тела, что в рамках $K(V)П$ это есть задача $K(V)П-1$.

При построении технического прибора Компьютерной томографии исключительную роль играет $K(V)П-2$ – величина предельной погрешности, позволяющая без потери точности получить искомое $f(x)$, тогда как при ее отсутствии точность прибора определяется экспериментальным путем с большими финансовыми затратами.

Задача $K(V)П-3$ показывает, какие вычислительные агрегаты нелучше найденного в $K(V)П-1$ оптимального.

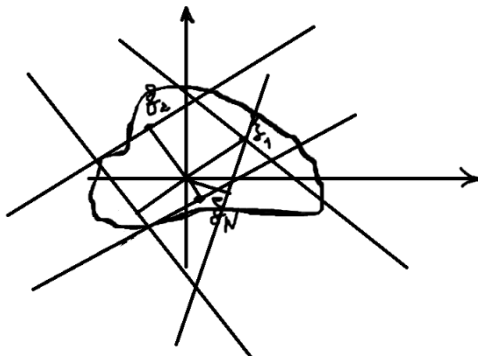


Рисунок 3

Задача Компьютерной томографии оказалась в неожиданной эквивалентной связке с разработанной в Теории приближений задачей оптимального восстановления функций конечной сверткой (см. Рисунок 3):

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_S)} \leq 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \Phi_N(x - \xi_k) \right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_S)} =$$

$$\approx \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y) \cdot \|y\|^{\frac{s-1}{2}}(S^{s-1} \times R^1)}}} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^N (R^2)^{-1} Rf(\xi_k) R(\Phi_N(y - \xi_k))(x) \right\|_{W_2^{\rho(y) \cdot \|y\|^{\frac{s-1}{2}}(S^{s-1} \times R^1)}},$$

где ядро $\Phi_N(x)$ – это 1-периодическая по каждой из s переменных $x = (x_1, \dots, x_s)$ действительная функция.

«Вклад научных теорий и открытий в прогресс общества в целом (Венский университет, 2016 год)»:

Ректор Венского университета (на примере И. Радона) «Часто вещи таковы, что математические теории находятся в абстрактной форме, возможно, рассматриваются как стерильные уловки, которые внезапно оказываются ценными инструментами для физических знаний и, таким образом, неожиданно раскрывают их скрытую силу».

Карл Зигмунд «Йоган Радон исследовал абстрактные проблемы так называемой чистой математики и понятия не имел, что сегодня преобразование Радона является основой компьютерной томографии. Их многочисленные приложения подтверждают правило: нет ничего более практичного, чем хорошая теория».

В свете этих данных результат в две строки (!!!), имеет претензию на усиление до окончательного всех статей от основополагающей 1917 года Йогана Радона по сегодня, включая теоретические обоснования приборов А.Кормака и Г.Хаунсфилда, получивших Нобелевскую премию по медицине в 1979 году и, конечно, всех журналов с любой Наукометрией.

То же в эквивалентной записи

$$f(x) \stackrel{B}{=} \sum_{k=1}^N R^{-1} f(\xi_k) R(\Phi(y - \xi_k))(x) + \alpha_N(B) \quad (*)$$

$$\left(x \in S^{s-1} \times R^1; B = W_2^{\rho(y) \cdot (y_1^2 + \dots + y_s^2)^{\frac{s-1}{2}}(S^{s-1} \times R^1)} \right)$$

на языке фундаментальной Математики показывает чудесный переход от теории к практике – слева функция $f(x)$ как «правило f (неявное, абстрактное), согласно которому каждому x ставится число $f(x)$ », справа явная формула, которая с погрешностью не выше $|\alpha_N|$ заменяет $f(x)$. При этом явная формула (*) в записи $\sum_{k=1}^N R^{-1} f(\xi_k) R(\Phi(y - \xi_k))(x) \stackrel{B}{=} f(x) + \alpha_N(B)$ есть утверждение теории «Машинное обучение с учителем» вычисления значений функции f во всех точках x по значениям $(\xi_1, Rf(\xi_1)), \dots, (\xi_N, Rf(\xi_N))$ с наибольшей ошибкой $\sup\{|\alpha_N(x)|: x \in S^{s-1} \times$

$R^1\}$, стало быть, в качестве КТ-решения превращается в Искусственный интеллект.

Практические рекомендации инновационного характера в ключе *Автоматическое реагирование вычислительного агрегата на гладкость приближаемой функции* следующие: в соответствии с Математической моделью экспертируемого объекта предлагается использовать прямые формулы Компьютерного сканирования, в которых по наперед заданной точности из Теоремы восстановления находится количество узлов, где необходимо провести сканирование, соответствующая формула превращается в алгоритм, с названной точностью обращающейся в искомую плотность объекта.

В следующей таблице показаны переход от задачи оптимального восстановления функции посредством конечной свертки к восстановлению той же функции по преобразованиям Радона

1 ⁰ . Классы Соболева W и Никольского-Бесова B – сканирование производится в узлах равномерной сетки:	
$\frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k=(k_1, \dots, k_s) \\ k_j=1, \dots, n \ (j=1, \dots, s)}} f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \in Z^s \\ -n \leq m_j \leq n \ (j=1, \dots, s)}} \exp\left(2\pi i \left(m, y - \frac{k}{n}\right)\right)$	$\frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k=(k_1, \dots, k_s) \\ k_j=1, \dots, n \ (j=1, \dots, s)}} (R^2)^{-1} R f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \in Z^s \\ -n \leq m_j \leq n \ (j=1, \dots, s)}} \int_{y \in R_x^{s-1}} \exp\left(2\pi i \left(m, y - \frac{k}{n}\right)\right) dy$
2 ⁰ . Классы Коробова E , Соболева SW и Никольского-Бесова-Аманова SB – сетки Кайрата Шерниязова в виде линейной комбинации сеток Коробова	
$\sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \ \tau\ < n}} \frac{1}{\det A_{n, \tau}} \sum_{k \in K(n, \tau)} f(k(A_{n, \tau}^{-1})') \sum_{m \in \rho(\tau)} \exp\left(2\pi i \left(m, y - k(A_{n, \tau}^{-1})'\right)\right)$	$\sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \ \tau\ < n}} \frac{1}{\det A_{n, \tau}} \sum_{k \in K(n, \tau)} (R^2)^{-1} R f(k(A_{n, \tau}^{-1})') \sum_{m \in \rho(\tau)} \int_{y \in R_x^{s-1}} \exp\left(2\pi i \left(m, y - k(A_{n, \tau}^{-1})'\right)\right) dy$
– сетки типа Смоляка, порождаемые Методом тензорных произведений функционалов	
$\sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega \subset Z_{v_0}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) \left\{ \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=-2^{v_j}-1}^{2^{v_j}-1} [\lambda_{n_j}^{(v_j)}(j) - \right.$ $\left. - \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)}) (1 + (-1)^{k_j} \lambda_{n_j}^{(v_j-1)}(j)) \right] \exp\left(2\pi i n_j \left(y_j - \frac{k_j}{2^{v_j}}\right)\right) \right\}.$	$\sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega \subset Z_{v_0}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (R^2)^{-1} R f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) \int_{y \in R_x^{s-1}} \left\{ \prod_{j=1}^s \sum_{n_j=-2^{v_j}-1}^{2^{v_j}-1} [\lambda_{n_j}^{(v_j)}(j) - \right.$ $\left. - \operatorname{sgn}(v_j - v_j^{(0)}) (1 + (-1)^{k_j} \lambda_{n_j}^{(v_j-1)}(j)) \right] \exp\left(2\pi i n_j \left(y_j - \frac{k_j}{2^{v_j}}\right)\right) \right\} dy.$