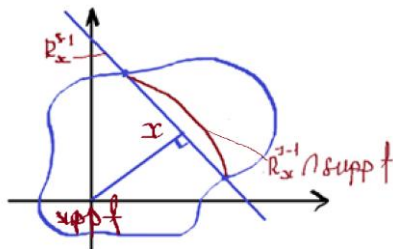


Жасанды интеллектпен (AI) жалғасатын оқытушылы математикалық оқыту (ML) форматындағы Компьютерлік томография мен Компьютерлік (есептеуіш) диаметр K(E)Д есептері арасындағы екі жолдық эквивалентті байланыс

$f(x)$ функциясының Радон түрлендіруі R^s кеңістігінде анықталған нақты мәнді функция болып табылады.



Сурет 1

$$(Rf)(x) := \int_{y \in R_x^{s-1} \cap \text{supp } f} f(y) dy =: R(f(y))(x),$$

мұндағы $R_x^{s-1} - 0x$ векторына перпендикуляр, x нүктесі арқылы өтетін $(s - 1)$ -өлшемді гипержазықтық (1-суретті қараңыз).

$f(x)$ функциясы өзінің $(Rf)(x)$ Радон түрлендіруі арқылы өрнектеледі. Айталық $\Omega = [0,1]^s$ және $f \in C_0^\infty(\Omega)$, әрбір $x \in R^s \setminus \text{supp } f$ үшін $f(x) = 0$ болсын. Онда әрбір $x \in \Omega$, $x = (\theta, t) \in S^{s-1} \times R^1$ үшін

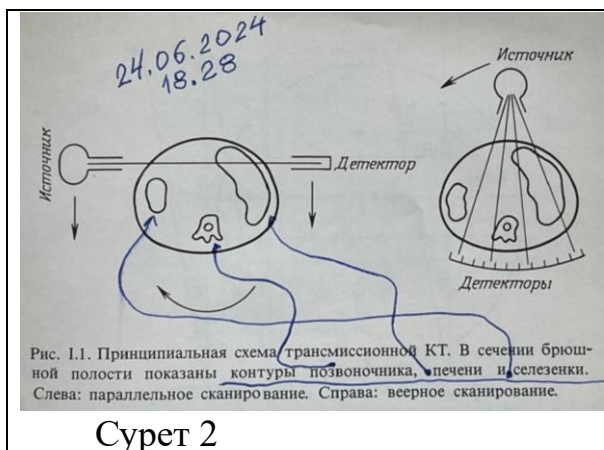
$$f(x) = \int_{\Omega} f(x) dx + \sum_k' \left(\frac{1}{|k|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Rf\left(\frac{k}{|k|}, \frac{m + k \cdot x}{|k|}\right) - \int_{\Omega} f(x) dx \right),$$

мұндағы

$$\theta = \frac{k}{|k|}, t = \frac{m + k \cdot x}{|k|},$$

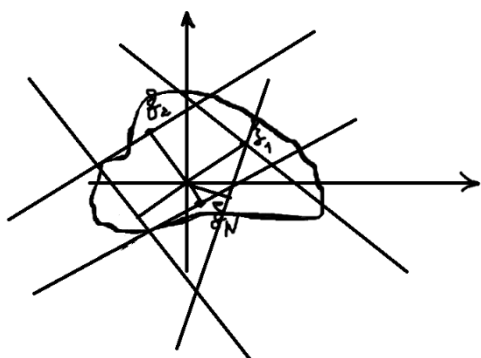
ал $\sum_k'$ таңбасы қосындылау $k_1 > 0$ ең үлкен ортақ бөлгіші 1-ге тең $k_1, \dots, k_s$ және $k_1 > 0$ болатын $k \in \mathbb{Z}^s$ бойынша жүргізілетіндігін білдіреді.

Мәліметтің ақырлы жиынымен ғана жұмыс істейтін компьютер шексіз объект ретінде функционалдық қатарды тікелей өңдей алмайтыны түсінікті. Сол себепті, мәселе $(Rf)(\xi_1), \dots, (Rf)(\xi_N)$ мәндерінің ақырлы жиыны негізінде ізделінді f тығыздық функциясын x нүктесінде алдын ала берілген кез келген дәлдікпен жуықтаутын есептеуіш агрегатты құрудан тұрады.



Сурет 2

Сонымен қатар, теориялық математика тұрғысынан белгілі бір метрикада зерттеліп отырған дененің кез келген x нүктесіндегі ізделінді $f(x)$ тығыздық функциясын алдын ала берілген кез келген дәлдікпен жуықтауға мүмкіндік беретін алынған сандық мәліметті өңдеудің сәйкес алгоритмін түйіндерімен қоса оңтайлы таңдау мәселесі $K(E)D$ аясындағы $K(E)D-1$ есебі ретінде қарастырылады.



3-сурет

$K(E)D-3$ есебі $K(E)D-1$ аясында табылған оңтайлы есептеуіш агрегаттан артық болмайтын, яғни одан жақсы нәтиже бермейтін барлық есептеуіш агрегаттардың класын сипаттайды.

Компьютерлік томография есебі $K(E)D$ теориясында әзірленген функцияларды ақырлы ұйытқысы (свертка) арқылы оңтайлы жуықтау есебімен күтпеген жерден эквивалентті байланыста болып шықты (3-суретті қараңыз).

$$\begin{aligned} & \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_S)} \leq 1} \|f(x) - \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \Phi_N(x - \xi_k)\|_{W_2^{\rho(y)}(E_S)} > < \\ & = \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(\|y\|^{\frac{s-1}{2}}(S^{s-1} \times R^1))} \leq 1} \|f(x) - \sum_{k=1}^N (R^2)^{-1} R f(\xi_k) R (\Phi_N(y - \xi_k))(x)\|_{W_2^{\rho(y)}(\|y\|^{\frac{s-1}{2}}(S^{s-1} \times R^1))}, \end{aligned}$$

Компьютерлік томографияны (КТ) техникалық тұрғыдан жүзеге асыруда ең кең таралған тәсілдердің бірі – алдымен $\xi_1, \dots, \xi_N$ сканерлеу нүктелерін алдын-ала таңдап алып, осы деректер бойынша ізделінетін $f(x)$ функциясын жуықтау теориясын құру болып табылады. Бұл жағдайда ең қарапайым сканерлеу схемаларына параллель және иірім тәрізді сканерлеу әдістері жатады (2-суретті қараңыз).

Компьютерлік томографияның техникалық құрылғысын құру кезінде ізделінді $f(x)$ функциясын дәлдігін жоғалтпай жуықтау мүмкіндік беретін шекті қателік шамасын анықтайтын $K(E)D-2$ есебі айрықша маңызға ие, оған себеп мұндай бағалаулар болмаған жағдайда құрылғының нақты дәлдігі қымбат эксперименттік сынақтар арқылы ғана белгіленетіндігінде.

мұндағы $\Phi_N(x)$ – s айнымалының әрқасысы бойынша 1-периодты $x = (x_1, \dots, x_s)$ айнымалылы нақты мәнді функция.

«Ғылыми теориялар мен ашылымдардың қоғамның жалпы прогресіне қосқан үлесі (Вена университеті, 2016)»:

Вена университетінің Ректоры (И. Радон мысалында): «Көбінесе математикалық теориялар абстрактілі формада болады, олар тек кейде тазартылған әдістер ретінде қарастырылуы мүмкін болғанымен, кенеттен физикалық білім үшін құнды құрал болып, олардың жасырын күшін күтпеген жерден ашып береді».

Карл Зигмунд: «Иоганн Радон таза математика деп аталатын абстрактілі мәселелерді зерттеді және бүгінгі күні Радон түрлендіруі компьютерлік томографияның негізі болатындығын білмеді де. Олардың сан алуан қолданылулары “Жақсы теориядан ешқандай практика асып кетпейді” деген ережені растайды».

Осы тұрғыдан алғанда, небәрі екі жолдан тұратын бұл нәтиже (!!!) 1917 жылғы Иоганн Радонның іргелі жұмысынан бастап бүгінгі күнге дейінгі барлық еңбектерді, соның ішінде 1979 жылы медицина саласы бойынша Нобель сыйлығын алған А.Кормак пен Г.Хаунсфилдтің құрылғыларына берілген теориялық негіздемелерді, сондай-ақ кез келген наукометриялық көрсеткіштері бар журналдарда жарияланған жұмыстарды түпкілікті түрде күшейтуге үміткер бола алады.

Дәл осы

$$f(x) \stackrel{B}{=} \sum_{k=1}^N R^{-1} f(\xi_k) R(\Phi(y - \xi_k))(x) + \alpha_N(B) \quad (*)$$

$$\left(x \in S^{s-1} \times R^1; B = W_2^{\rho(y) \cdot (y_1^2 + \dots + y_s^2)^{\frac{s-1}{2}}} (S^{s-1} \times R^1) \right)$$

эквиваленттілікті фундаменталды математика тілімен айтқанда, өрнек теориядан практикаға «ғажайып өтуді» көрсетеді: сол жақта «әрбір x -ке $f(x)$ санын сәйкес қоятын (жасырын, абстрактылы объект) f ережесі» мағынасындағы $f(x)$ функциясы болса, оң жағында дәл осы функцияны $|\alpha_N|$ -нен аспайтын қателікпен алмастыратын айқын формула беріледі.

Сонымен қатар, (*) формуласы $\sum_{k=1}^N R^{-1} f(\xi_k) R(\Phi(y - \xi_k))(x) \stackrel{B}{=} f(x) + \alpha_N(B)$ жазуында «оқытушылы машиналық оқыту» теориясындағы f функциясының барлық x нүктелеріндегі мәндерін $(\xi_1, Rf(\xi_1)), \dots, (\xi_N, Rf(\xi_N))$ деректері бойынша $\sup\{|\alpha_N(x)|: x \in S^{s-1} \times R^1\}$ қателікпен есептеу мүмкіндігін сипатап, КТ-есептерінің шешімі ретінде қарастырылғанда, жасанды интеллекттің (AI) қалыптасуына әкелетін теориялық негіз болып табылады.

Инновациялық сипаттағы практикалық ұсыныстар, жуықталатын функцияның тегістігіне есептеуіш агрегаттың автоматты түрде бейімделуі аясында, келесідей тұжырымдалады: сарапталатын объектінің математикалық моделіне сәйкес, компьютерлік сканерлеудің алдын ала берілген дәлдікке сәйкес жықтау теоремасы негізінде сканерлеу жүргізілетін түйіндер саны анықталатын тікелей формулаларын қолдану ұсынылады. Бұндағы формула берілген дәлдікпен объектінің ізделінетін тығыздық функциясына жуықтауды қамтамасыз ететін алгоритмге түрленеді. Келесі кестеде ақырлы ұйытқы (конечная свертка) арқылы функцияны оптималды жуықтау есебінен Радон түрлендірулері арқылы сол функцияны жуықтау есебіне өту көрсетілген.

1 ⁰ . Соболева W және Никольский-Бесов B кластары – сканерлеу бірқалыпты (тең кадамды) тордың түйіндерінде жүргізіледі:	
$\frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k=(k_1, \dots, k_s) \\ k_j=1, \dots, n \ (j=1, \dots, s)}} f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s \\ -n \leq m_j \leq n \ (j=1, \dots, s)}} \exp\left(2\pi i \left(\frac{k}{n} - \frac{m}{n}\right) \cdot y\right)$	$\frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k=(k_1, \dots, k_s) \\ k_j=1, \dots, n \ (j=1, \dots, s)}} (R^2)^{-1} R f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{\substack{m=(m_1, \dots, m_s) \\ -n \leq m_j \leq n \ (j=1, \dots, s)}} \exp\left(2\pi i \left(\frac{k}{n} - \frac{m}{n}\right) \cdot y\right) dy$
2 ⁰ . Коробов E , Соболев SW және Никольский-Бесов-Аманов SB класстары – Коробов торларының сызықтық комбинациясы түрінде анықталған Қайрат Шерниязов торы	
$\sum_{\substack{\tau \in \mathbb{Z}^s: \\ \tau_j > 0, \ \tau\ < n}} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} f\left(k(A_{n,\tau}^{-1})'\right) \sum_{m \in \rho(\tau)} \exp\left(2\pi i \left(k(A_{n,\tau}^{-1})' - m\right) \cdot y\right)$	$\sum_{\substack{\tau \in \mathbb{Z}^s: \\ \tau_j > 0, \ \tau\ < n}} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} (R^2)^{-1} R f\left(k(A_{n,\tau}^{-1})'\right) \sum_{m \in \rho(\tau)} \exp\left(2\pi i \left(k(A_{n,\tau}^{-1})' - m\right) \cdot y\right) dy$
Тензорлық функционалдар көбейтінділері әдісі арқылы туындайтын Смоляк типті торлар.	
$\sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega \subset \mathbb{Z}_{v_0}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) \exp\left(2\pi i \left(y_j - \frac{k_j}{2^{v_j}}\right)\right) \cdot$ $- \operatorname{sgn}\left(v_j - v_j^{(0)}\right) \left(1 + (-1)^{k_j} \lambda_{n_j}^{(v_j-1)}(j)\right) \exp\left(2\pi i n_j \left(y_j - \frac{k_j}{2^{v_j}}\right)\right) \cdot$	$\sum_{(v_1, \dots, v_s) \in \Omega \subset \mathbb{Z}_{v_0}^s} \frac{1}{2^{v_1 + \dots + v_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{v_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{v_s}-1} (R^2)^{-1} R f\left(\frac{k_1}{2^{v_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{v_s}}\right) \exp\left(2\pi i \left(y_j - \frac{k_j}{2^{v_j}}\right)\right) \cdot$ $- \operatorname{sgn}\left(v_j - v_j^{(0)}\right) \left(1 + (-1)^{k_j} \lambda_{n_j}^{(v_j-1)}(j)\right) \exp\left(2\pi i n_j \left(y_j - \frac{k_j}{2^{v_j}}\right)\right) \cdot$