3^0. Жуықтаулар теориясы, Сандық анализ және Есептеу Математикасы саласындағы жаңа зерттеу схемасы: мәліметтік функционалдар қателіктерімен қоса оптималды есептеу агрегатында есептеліп, қателік шамасы функционалдардың нақты мәндері бойынша жуықтау реттілігін сақтайтындарының ең үлкені анықталады, сонымен қатар, шектік қателіктері зерттеліп отырған агрегаттың шектік қателігінен аспайтын жуықтау операторларының жиыны анықталады.

Есертің бұндай қойылымы «Компьютерлік (есептеуіш) диаметр» (К(Е)Д) деп аталып, біріздiлікті үш есептен тұрады:

К(Е)Д-1. Нақты мәлімет бойынша жуықтау есебі функционалдардың және сандық мәліметтерді өңдеуге арналған алгоритмдерге байланысты белгілі Жуықтаулар теориясы, Сандық анализ, Есептеу Математикасы, функциялар теориясы (Фурье қатарлары, базистер) салаларын қамтиды;

К(Е)Д-2. Оптималды есептеу агрегатында сандық функционалдардың мәндерін оптималділікті сақтай отырып, олардың жуық мәндерімен алмастырылады. Ал осындай қателіктердің ең үлкенін, яғни ең үлкен ауытқуды іздеу өз алдына шекті қателерді табу мәселесін құрайды – бұл жаңа оптимизациялық есеп болып табылады;

К(Е)Д -3. Қарастырылып отырған оптималды есептеу агрегатына ұқсас, тіпті, мүмкін, одан да жалпы құрылымды есептеу агрегаты бар ма немесе жоқ па, бар болса, оның шекті қателігі реттілік бойынша үлкенірек па.

К(Е)Д есебі тарихи және мазмұны жағынан толық түрде келесі мақалаларда баяндалған:

Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. - №3. - С. 8-88.

Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97

Дәл мәлімет бойынша жуықтау мәселесі (К(Е)Д-1 есебі) белгілі және бірнеше ондаған жыл бойы көптеген жарияланымдарда зерттеліп, әртүрлі белгілеулермен ұсынылған. Бұл саладағы еңбектерге А.Сард, С.М.Никольский, Н.С. Бахвалов, И.Бабушки мен С.Л.Соболев, Ч.А. Митчелли мен Т.Дж. Равлин, Дж.Ф.Трауб, Г.Васильковский, Х.Вожняковский, А. Пинкус, В.Н.Темляков, Н.П.Корнейчук, Э. Новак, Х. Вожняковский, Я. Вибирал, Б. Кашин, Е. Косов, И. Лимоновв, В. Темляков сынды авторлардың жұмыстарында орын алады.

Дәл емес мәлімет бойынша жуықтау тақырыбындағына арналған жарияланымдарды үш топқа бөлуге болады. Бірінші топқа – Н. Темірғалиев пен оның бірлескен авторларының еңбектері, екінші топқа – В.М. Тихомиров, Г.Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, А. Г. Марчук пен олардың бірлескен авторлары, үшінші топқа – Дж. Трауб, Х. Вожняковский, Л. Пласкота және олардың бірлескен авторлары кіреді.

Барлық жарияланымдар есептердің қойылымдары бойынша да, қызық жайт болса да, бірдей математикалық объектілердің атауы бойынша да, нәтижелерді тұжырымдау жолдары бойынша да ерекшеленеді.

Дәл емес мәлімет бойынша жуықтау есебі К(Е)Д-2 есебінің екінші бөлігі мен К(Е)Д-3 бөлімдері аясында жаңа болып табылады.

Кез келген $l_1(f),\dots,l_N(f)$ сызықтық мәліметтер және оларды өңдейтін $\varphi_N(z_1,\dots,z_N;\cdot)$ алгоритмі бойынша құрылған барлық мүмкін есептеу агрегаты бойынша құрылған барлық мүмкін болатын есептеу агрегаттары үшін табиғи шектеулерден басқа ешқандай шектеулерсіз алынған

$$\inf_{\substack{l_1,\dots,l_N-\textit{барлық мүмкін}\\ \textit{сызықтық функционалдар};\varphi_N}} \sup_{f\in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(\cdot)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot)\right\|_{L^q(0,1)^s}$$
$$\gg \begin{cases} N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \textit{если} 2\le p\le q\le\infty,\\ N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, \textit{если} 1\le p< 2\le q\le+\infty,\\ N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}}, \textit{если} 1\le p\le q<2\end{cases}$$

төменгі баға К(Е)Д-1 есебін кең түрде зерттеуге, жеке қарастырылған жағдайларды біртұтас біріктіруге мүмкіндік береді және жоғарғы бағалаулар арқылы біріктірілген белгілі Колмогоров, Корнейчук, Тихомиров, Темляков диаметрлерін, Фурье-Лебег қатарлары барлық мүмкін ортонормаланған жүйелер бойынша және олардың орташа мәндері, әртүрлі базистер мен фреймдер, соның ішінде соңғы кезеңде белсенді зерттеліп жатқан вейвлет жүйелері мен «жадты» (greedy) алгоритмдер қамтылған жуықтау есептері де қамтылады.

Үш есептен тұратын К(Е)Д-есебін $2\le p\le q\le\infty$, $r>\alpha_1+\dots+\alpha_s+s\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, $N=2^{ns}$ $(n=1,2,\dots)$ үшін $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)-$ Вейль бойынша туынды мысалында көрсетіледі.

К(Е)Д-1: $\delta_N(0;L_N(W_p^r(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s}\equiv$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N-\textit{барлық мүмкін}\\ \textit{сызықтық функционалдар};\phi_N}} \sup_{f\in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(\cdot)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot)\right\|_{L^q(0,1)^s}$$
$$\asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

мұнда дәл мәлімет бойынша жуықтаудың жақсартылмайтын реттілігі анықталған.

К(Е)Д-2: Фурье қатарының дербес қосындысының

$$\overline{\varphi}\left(\{\hat{f}(m)\}_{m\in I_n};x\right)\equiv S_N^{(\alpha_1,\dots\alpha_s)}(f;x)=\sum_{\substack{m=(m_1,\dots,m_s)\in Z^s:\\ |m_j|\le 2^n\ (j=1,\dots,s)}}\hat{f}(m)\prod_{j=1}^{s}\left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\alpha_j)}$$

$(\alpha_1,\dots,\alpha_s)-$*туындысы үшін* $\tilde{\varepsilon}_N\equiv\tilde{\varepsilon}_N(\Phi_N)\equiv\tilde{\varepsilon}_N\left(\Phi_N(W_p^r)\times\{\phi_N\}_{L^q(0,1)^s}\right)=N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)}$,
шамасы шектік қателік болады:
біріншіден,

$$\delta_N(0; L_{\mathrm{N}}(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \succ\prec \delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N(\Phi_N) = N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)}; L_{\mathrm{N}}(W_p^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s})_{L^q(0,1)^s} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,\ldots,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы};\varphi_N}} \sup \left\{ \left\| f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N\left(l_1(f) + \gamma_N^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_N, \ldots, l_N(f) + \gamma_N^{(N)}\widetilde{\varepsilon}_N; \cdot\right) \right\|_{L^q(0,1)^s} : f \in W_p^r(0,1)^s, \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1(\tau = 1,\ldots, N) \right\} \succ\prec$$

$$\succ\prec \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N(\Phi_N) = N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)}; S_N^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(f;x))_{L^q(0,1)^s} \equiv \sup_{\substack{f \in W_p^r(0,1)^s \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1(\tau=1,\ldots,N)}} \left\| f^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(x) - \sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s: \\ |m_j| \le 2^n \ (j=1,\ldots,s)}} \left(\hat{f}(m) + \gamma_N^{(m)}\tilde{\varepsilon}_N\right) \prod_{j=1}^{s} \left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\alpha_j)} \right\|_{L^p(0,1)^s} \succ\prec N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

екіншіден, кез келген өспелі $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *оң тізбек үшін келесі теңдік орындалады:*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s \\ |m_j|\le 2^n (j=1,\ldots,s)}} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^{s} \left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\alpha_j)}\right)_{L^q(0,1)^s}}{\delta_N\left(0; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\phi_N\}_{L^q(0,1)^s}\right)_{L^q(0,1)^s}} = +\infty$$

бұл жерде дәл мәлімет бойынша жуықтаудың жақсартылмайтын реттілігін сандық функционалдарды есептеу кезіндегі **шекті қателіктің дәл реттілігі** анықталған (бұл нәтиже К(Е)Д-1 есебіндегі оптималды есептеу агрегатына тәуелді екендігін ерекше атап өтейік және тағы бір айта кететін тағы бір жәйт бұндай есептеу агрегаттар бірнешеу де болуы мүмкін еекендігін ерекшелеп айта кетейік).

К(Е)Д-3: *гармоникалардың кез келген спектрі негізінде құрылған тригонометриялық Фурье коэффициенттері бойынша құрылған кез келген* $\phi_N(\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)});\ x)$ *есептеу агрегатының шектік қателік реті* $S_N^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}(f;x)$ *есептеу агрегатының шектік қателігінен аспайды:* кез келген өспелі оң тізбек үшін

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \phi_N\left(\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)}); x\right)\right)_{L^q(0,1)^s}}{\delta_N\left(0; L_N(W_p^r(0,1)^s) \times \{\phi_N\}_{L^q(0,1)^s}\right)_{L^q(0,1)^s}} = +\infty$$

теңдігі орындалады.

- мұнда жуықтау жылдамдығы мен шекті қателік ретінің жақсаруына қол жеткізу үшін басқа есептеу агрегатына көшуге бола ма деген мәселе теріс жауабымен жабылады.