

ISSN 2616-7182  
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

# ХАБАРШЫСЫ

---

**BULLETIN**  
of L.N. Gumilyov Eurasian  
National University

**ВЕСТНИК**  
Евразийского национального  
университета имени Л.Н. Гумилева

**МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА** сериясы

**MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS** Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№1(126)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

**Нұр-Сұлтан, 2019**  
**Nur-Sultan, 2019**  
**Нур-Султан, 2019**

**БАС РЕДАКТОРЫ**  
ф.-м.ғ.д., проф  
**Темірғалиев Н.** (Қазақстан)

*Бас редактордың орынбасары* **Жұбанышева А.Ж.**, PhD  
(Қазақстан)  
*Бас редактордың орынбасары* **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD  
(Қазақстан)

*Редакция алқасы*

<b>Абакумов Е.В.</b>	PhD, проф. (Франция)
<b>Алексеева Л.А.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Алимхан Килян</b>	PhD, проф. (Жапония)
<b>Бекжан Турдыбек</b>	PhD, проф. (Қытай)
<b>Бекенов М.И.</b>	ф.-м.ғ.к., доцент (Қазақстан)
<b>Голубов Б.И.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Зунг Динь</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Вьетнам)
<b>Ибраев А.Г.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Иванов В.И.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Иосевич А.</b>	PhD, проф. (АҚШ)
<b>Калиев И.А.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Кобельков Г.М.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Курина Г.А.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Марков В.В.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Мейрманов А.М.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Смелянский Р.Л.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Умирбаев У.У.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (АҚШ)
<b>Холщевникова Н.Н.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Шмайссер Ханс-Юрген</b>	Хабилит. докторы, проф. (Германия)

*Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 408 бөлме.  
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: [vest\\_math@enu.kz](mailto:vest_math@enu.kz)

*Жауапты редактор:* А.Ж. Жұбанышева  
*Жауапты хатшы:* А. Нұрболат

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.**

**МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы**

Меншіктенуші: ҚР БЖҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК  
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.  
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.

Тиражы: 25 дана

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,  
тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410).

**EDITOR-IN-CHIEF**  
Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences  
**Temirgaliyev N.** (Kazakhstan)

*Deputy Editor-in-Chief*                      **Zhubanysheva A.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

*Deputy Editor-in-Chief*                      **Nauryzbayev N.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

*Editorial board*

<b>Abakumov E.V.</b>	PhD, Prof. (France)
<b>Alexeyeva L.A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Alexander Iosevich</b>	PhD, Prof. (USA)
<b>Alimhan Keylan</b>	PhD, Prof. (Japan)
<b>Bekzhan Turdybek</b>	PhD, Prof. (China)
<b>Bekenov M.I.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assoc.Prof. (Kazakhstan)
<b>Golubov B.I.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
<b>Dũng Dinh</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Vietnam)
<b>Ibrayev A.G.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Kazakhstan)
<b>Ivanov V.I.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
<b>Kaliev I.A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
<b>Kobel'kov G.M.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
<b>Kurina G.A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
<b>Markov V.V.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
<b>Meirmanov A.M.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
<b>Smelyansky R.L.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
<b>Umirbaev U.U.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(USA)
<b>Kholshechnikova N.N.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
<b>Schmeisser Hans-Juergen</b>	Dr. habil., Prof. (Germany)

*Editorial address:* 2, Satpayev str., of. 408, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008  
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410)  
E-mail: *vest\_math@enu.kz*

*Responsible Editor-in-Chief:* A.Zh. Zhubanysheva

*Responsible secretary:* A. Nurbolat

**Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.**

**MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series**

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.

Circulation: 25 copies

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;

tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**  
профессор, д.ф.-м.н.  
**Темиргалиев Н.** (Казахстан)

*Зам. главного редактора*                      **Жубанышева А.Ж.**, PhD (Казахстан)

*Зам. главного редактора*                      **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD (Казахстан)

*Редакционная коллегия*

<b>Абакумов Е.В.</b>	PhD, проф. (Франция)
<b>Алексеева Л.А.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Алимхан Килян</b>	PhD, проф. (Япония)
<b>Бекжан Турдыбек</b>	PhD, проф. (Китай)
<b>Бекенов М.И</b>	к.ф.-м.н., доцент (Казахстан)
<b>Голубов Б.И.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Зунг Динь</b>	д.ф.-м.н., проф. (Вьетнам)
<b>Ибраев А.Г.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Иванов В.И.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Иосевич А.</b>	PhD, проф. (США)
<b>Калиев И.А.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Кобельков Г.М.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Курина Г.А.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Марков В.В.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Мейрманов А.М.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Смелянский Р.Л.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Умирбаев У.У.</b>	д.ф.-м.н., проф. (США)
<b>Холщевникова Н.Н.</b>	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Шмайссер Ханс-Юрген</b>	Хабилит. доктор, проф. (Германия)

*Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 408  
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: [vest\\_math@enu.kz](mailto:vest_math@enu.kz)

*Ответственный редактор:* А.Ж. Жубанышева  
*Ответственный секретарь:* А. Нурболат

**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.**  
**Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**  
Собственник:  
РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК  
Периодичность: 4 раза в год.  
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.  
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.  
Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,  
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА	
<i>Темірғалиев Н., Тауғынбаева Ғ.Е., Абикенова Ш.К.</i> Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнмәтінінде дербес туындылы теңдеулерді дискреттеу	8
<i>Алимбаев А.А.</i> Автоморфизмдер топтарында амальгамалы еркін көбейтіндінің құрылымы	52
<i>Бакурадзе М.</i> Надирадзе формалды топтарының заңдарына орай кейбір дәл өрнектер	62
<i>Фарайзаде А.П., Шафи А.</i> Полигамдық функциялар үшін Туран типті және кейбір жаңа теңсіздіктер	68
<i>Ермекбаева Ж.Ж., Шакирова Р.Е., Малекова Ж.М.</i> Жыртқыш-олжа жүйесіндегі бірлесіп қорғану әсері	72

CONTENTS

**MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE**

<i>Temirgaliyev N., Taugynbayeva G.Y., Abikenova Sh.K.</i> Discretization of solutions of partial differential equations in the context of Computational (numerical) diameter	8
<i>Alimbaev A.A.</i> Structure of amalgamated free work in groups automorphisms	52
<i>Bakuradze M.</i> Some explicit expressions concerning the Nadiradze formal group law	62
<i>Farajzadeh A.P., Shafie A.</i> Turán's inequality type for polygamma functions and some new inequalities	68
<i>Yermekbayeva J.J., Shakirova R.E., Malekova Zh.M.</i> The effect of collective protection in the predator-prey system	72

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.  
МЕХАНИКА, №1(126)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

**МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА**

<i>Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абиженова Ш.К.</i> Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника	8
<i>Алимбаев А.А.</i> Структура амальгамированного свободного произведения в группах автоморфизмов	52
<i>Бакурадзе М.</i> Некоторые точные выражения относительно законов формальных групп	62
Надирадзе	
<i>Фарайзаде А.П., Шафи А.</i> Неравенства типа Турана для полигамных функций и некоторые новые неравенства	68
<i>Ермекбаева Ж.Ж., Шакирова Р.Е., Малекова Ж.М.</i> Эффект коллективной защиты в системе хищник-жертва	72

# МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика.  
Информатика. Механика сериясы, 2019, том 126, №1, 8-51 беттер  
<http://bulmathmc.enu.kz>, E-mail: [vest\\_math@enu.kz](mailto:vest_math@enu.kz)

МРНТИ: 27.25.19

Н.Темиргалиев, Г.Е.Таугынбаева, Ш.К.Абикенова

*Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского  
национального университета имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан  
(E-mail: [ntmath10@mail.ru](mailto:ntmath10@mail.ru), [galija\\_1981tau@mail.ru](mailto:galija_1981tau@mail.ru), [shabik\\_29@mail.ru](mailto:shabik_29@mail.ru))*

## Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника

**Аннотация:** С 1996 года последовательно развивалась идея Компьютерного (вычислительного) поперечника, цель которого заключается в оптимальной компьютерной обработке математических моделей в реальных условиях искаженных данных.

К(В)П-схема, как нам представляется, определяет уточненную организацию исследований в Теории приближений, Вычислительной математике и Численном анализе.

Данная статья посвящена освещению К(В)П-подхода в теории уравнений в частных производных. На примерах исторически исходных уравнений Лапласа, Пуассона, теплопроводности, волнового и, сравнительно недавнего Клейна-Гордона, приведены теоремы как иллюстративные результаты качества и эффективности К(В)П-постановок.

Представленные материалы могут послужить для продолжения исследований оптимальной дискретизации решений уравнений в частных производных с дальнейшим расширением и углублением предложенного направления.

**Ключевые слова:** Компьютерный (вычислительный) поперечник (сокращенно – К(В)П), дискретизация решений уравнения в частных производных по точной и неточной информации, предельная погрешность.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-8-51>

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ .....	8
§1. Модельные случаи полного К(В)П-исследования уравнений в частных производных .....	14
§2. Дискретизация решений уравнения Лапласа .....	18
§3. Дискретизация решений уравнения Пуассона .....	23
§4. Дискретизация решений уравнения теплопроводности .....	25
§5. Дискретизация решений волнового уравнения .....	30
§6. Дискретизация решений уравнения Клейна-Гордона .....	35
§7. Численное интегрирование интегральных уравнений Обобщенным методом Смоляка .....	39
§8. Дискретизация в среднем квадратическом относительно вероятностных мер на классах функций .....	42
§9. Заключительные замечания .....	46

## ВВЕДЕНИЕ

Решения уравнений в частных производных, даже в случае их явного выражения посредством рядов Фурье по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора или сверток с соответствующими ядрами, будучи представленными рядами или интегралами, фактически опять же представляют собой бесконечные объекты. Поэтому возникает задача их приближения конечными объектами, математическая формулировка которой содержится в определении Компьютерного



(вычислительного) поперечника (в сокращении – К(В)П, соответствующую историю, сравнения с подобными исследованиями см. в [1]-[5]).

Настоящая статья посвящена именно этой группе задач.

Исходным в К(В)П-исследовании уравнений в частных производных является следующее определение

$$\begin{aligned} \delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y &\equiv \delta_N(\varepsilon_N; A, B; F; D_N)_Y \equiv \\ &\equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; A, B = B^{(1)} \times \dots \times B^{(k)}; F = F^{(1)} \times \dots \times F^{(k)}; D_N\right)_Y \equiv \\ &\equiv \min_{N=N_1+\dots+N_k} \inf_{(l^{(N_1, \dots, N_k)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N_1, \dots, N_k)}, \varphi_N\right)\right)_Y, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N_1, \dots, N_k)}, \varphi_N\right)\right)_Y &\equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; A, B = B^{(1)} \times \dots \times B^{(k)}; F \equiv F^{(1)} \times \dots \times F^{(k)}; \left(l^{(N_1, \dots, N_k)}, \varphi_N\right)\right)_Y \equiv \\ &\equiv \sup_{\substack{f_1 \in F^{(1)}, \dots, f_k \in F^{(k)} \\ \left|\gamma_{N_j}^{(\tau)}\right| \leq 1 (\tau = 1, \dots, N_j) \\ j = 1, \dots, k}} \|u(y; f_1, \dots, f_k) - \\ &- \varphi_N\left(l_{N_1}^{(1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(1)} \varepsilon_{N_1}^{(1)}, \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(N_1)} \varepsilon_{N_1}^{(N_1)}, \dots, l_{N_k}^{(1)}(f_k) + \gamma_{N_k}^{(1)} \varepsilon_{N_k}^{(1)}, \dots, l_{N_k}^{(N_k)}(f_k) + \gamma_{N_k}^{(N_k)} \varepsilon_{N_k}^{(N_k)}; y\right)\|_Y. \end{aligned}$$

Здесь *математическая модель* задается посредством оператора  $Tf = (Tf)(y) = u(y; f) \equiv u(y; f_1, \dots, f_k)$  – решения уравнения в частных производных  $A \equiv A\left(y = (y_1, \dots, y_n), \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} u}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_n^{\alpha_n}}\right) = 0$  ( $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )-неотрицательные целые числа), удовлетворяющего условиям существования и единственности относительно комплекта  $B \equiv B^{(1)} \times \dots \times B^{(k)}$  начальных, граничных, смешанных и иных условий, заданных посредством функций  $f \in F \Leftrightarrow f = (f_1, \dots, f_k) \in F^{(1)} \times \dots \times F^{(k)}$ , действующих из  $F \equiv F^{(1)} \times \dots \times F^{(k)}$  в  $Y$ , где  $F$  класс функций и  $Y$  – нормированное пространство функций, заданных соответственно на  $\Omega_F$  и  $\Omega_Y$ . Числовая информация  $l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); \dots; l_{N_k}^{(1)}(f_k), \dots, l_{N_k}^{(N_k)}(f_k)$  объема  $N = N_1 + \dots + N_k$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) об  $f = (f_1, \dots, f_k)$  из класса  $F$  снимается с линейных функционалов  $l^{(N)} = l^{(N_1, \dots, N_k)} = (l_1, \dots, l_N)$  (в общем случае не обязательно линейных). Алгоритм переработки информации  $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; y) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C$  есть соответствие, которое при всяком фиксированном  $(z_1, \dots, z_N) \in C^N$  как функция от  $y$  есть элемент  $Y$ . Всюду ниже запись  $\varphi_N \in Y$  будет означать, что  $\varphi_N$  удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, через  $\{\varphi_N\}_Y$  обозначим множество, составленное из всех  $\varphi_N \in Y$ . И, наконец, определим *вычислительный агрегат*  $\varphi_N\left(l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); \dots; l_{N_k}^{(1)}(f_k), \dots, l_{N_k}^{(N_k)}(f_k); y\right) \equiv (l^{(N_1, \dots, N_k)}, \varphi_N) \equiv (l^{(N)}, \varphi_N)$  по *точной информации*. *Вычислительный агрегат по неточной информации* последовательно определяется следующим образом. Сначала точные значения  $l_N^{(\tau)}(f)$  заменяются с заданной точностью  $\varepsilon_N^{(\tau)} \geq 0$  на приближенные значения  $z_\tau \equiv z_\tau(f)$ ,  $\left|z_\tau(f) - l_N^{(\tau)}(f)\right| \leq \varepsilon_N^{(\tau)}$  ( $\tau = 1, \dots, N$ ). Затем числа  $z_\tau \equiv z_\tau(f)$  ( $\tau = 1, \dots, N$ ) перерабатываются посредством алгоритма  $\varphi_N$  до функции  $\varphi_N(z_1(f), \dots, z_N(f); y)$  из  $Y$ , которая и будет составлять *вычислительный агрегат*  $(l^{(N_1, \dots, N_k)}, \varphi_N) \equiv (l^{(N_1, \dots, N_k)}, \varphi_N)_{\varepsilon_N} = \varphi_N(z_1(f), \dots, z_N(f); y)$  по *неточной информации* точности  $\varepsilon_N = \left\{\varepsilon_N^{(\tau)}\right\}_{\tau=1}^N$ .  $D_N \equiv D_{N_1, \dots, N_k}(F)_Y$  – данный набор комплексов  $\{(l^{(N_1, \dots, N_k)}, \varphi_N)\}_{F, Y}$ .

В статье рассматриваются следующие конкретизации  $D_N$ :

$$D_N = L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y = \{(l_1(f), \dots, l_N(f)) : l_\tau(f) - \text{все возможные линейные}\}$$

функционалы на линейной оболочке  $F(\tau = 1, 2, \dots, N) \times \{\varphi_N\}_Y$ ,

а также линейные функционалы, определяемые значениями в фиксированных точках

$$D_N = P_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y = \{l_1(f) = f(\xi_1), \dots, l_N(f) = f(\xi_N) : f \in F, \xi_j \in [0, 1]^s, j = 1, \dots, N\} \times \{\varphi_N\}_Y$$

и (в случае периодических классов)

$$D_N = \Phi_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y = \{l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)}) : f \in F, m^{(1)} \in Z^s, \dots, m^{(N)} \in Z^s\} \times \{\varphi_N\}_Y,$$

здесь и далее для функций  $f(x) \in L^p(0, 1)^s$  через  $\hat{f}(m)$  обозначим тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега функции  $f$

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m,x)} dx.$$

Отдельно отметим, что в качестве банаховых пространств  $Y$  порядку с пространствами Лебеговского типа  $L^p(\Omega)$  и пространств дифференцируемых функций типа  $W, H, B, SW, SH, SB, E$  также будут привлечены и иные структуры.

В рамках приведенных обозначений и определений, К(В)П-проблема оптимального восстановления решений уравнений в частных производных по неточной информации заключается, в собирательном смысле, в последовательном решении трех задач:

При заданных  $A, B, F, Y, D_N$  (фиксированных всюду по последующему контексту):

**К(В)П-1:** Находится порядок  $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; A, B; F; D_N)_Y$  – информативная мощность набора вычислительных агрегатов  $D_N \equiv D_{N_1, \dots, N_k}(F)_Y$ ,

**К(В)П-2:** Производится построение конкретного вычислительного агрегата  $(\bar{l}^{(N_1, \dots, N_k)}, \bar{\varphi}_N)$  из  $D_N \equiv D_{N_1, \dots, N_k}(F)_Y$ , поддерживающего порядок  $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$ , для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности  $\bar{\varepsilon}_N \equiv \bar{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N_1, \dots, N_k)}, \bar{\varphi}_N))_Y \equiv (\bar{\varepsilon}_N^{(1)}, \dots, \bar{\varepsilon}_N^{(N)})$  с неотрицательными компонентами,

– К(В)П-2 – предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату  $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) = (\bar{l}^{(N_1, \dots, N_k)}, \bar{\varphi}_N)$ ) такой, что

$$\delta_N(0; D_N)_Y \asymp \delta_N(\bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \equiv$$

$$\equiv \sup \left\{ \|u(y; f) - \bar{\varphi}_N(z_1(f), \dots, z_N(f); y)\|_Y : f \in F, |\bar{l}_\tau(f) - z_\tau(f)| \leq \bar{\varepsilon}_N^{(\tau)} (\tau = 1, \dots, N) \right\},$$

с одновременным выполнением

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) : \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y}{\delta_N(0; D_N)_Y} = +\infty.$$

**К(В)П-3:** Устанавливается массивность предельной погрешности  $\bar{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y$ : находится как можно большее множество  $M_N(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$  (обычно связанных со структурой исходного  $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ ) вычислительных агрегатов  $(l^{(N)}, \varphi_N)$  таких, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) : \overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y}{\delta_N(0; D_N)_Y} = +\infty.$$

Записи  $\alpha \ll \beta$  ( $\beta \geq 0$ ) и  $\alpha \asymp \beta$  ( $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ ) соответственно означают  $|\alpha| \leq c\beta$  и одновременное выполнение  $\alpha \ll \beta$  и  $\beta \ll \alpha$ . В целях сокращения речи будем говорить "Вычислительный агрегат  $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) \in D_N$  поддерживает оценку снизу  $\vartheta_N \ll \delta_N(0; A, B; F; D_N)_Y$ ", если выполнены неравенства  $\delta_N(0; A, B; F; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \ll \vartheta_N$  (разумеется, константы в  $\ll$  не зависят от  $N$ ).

Сразу же отметим, что с усложнением самих уравнений и классов функций, к которым принадлежат определяющие решения правые части уравнений, граничные, начальные, смешанные и т.п. условия, одновременно будут сложнее устроены оптимальные или

близкие к оптимальным операторы восстановления, достигая границ обозримости, и, тем самым, ограничивая возможности их практического применения.

Сформулированная в общем виде К(В)П-постановка в данной статье изучается только для классических уравнений математической физики – это уравнения теплопроводности, волновое, Лапласа, Пуассона, а также Клейна-Гордона (в связи с чем отметим, что известные результаты по близкой постановке задачи дискретизации решений уравнений в частных производных по неточной информации обсуждались в статье [2,§11]).

Все результаты окончательны в своих постановках и могут быть отнесены к их фундаментальным описаниям, поскольку речь идет об уравнениях, послуживших становлению и развитию всей теории дифференциальных уравнений, по настоящее время не утративших своего значения.

Приведем определения необходимых классов функций (см.,напр., [6])

**1.Классы Соболева**  $W_q^r(0, 1)^s$  ( $s = 1, 2, \dots; r = 0, 1, 2 \dots; 1 \leq q \leq +\infty$ ). Класс Соболева  $W_q^r(0, 1)^s$  есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ , которые в случае целых  $r > 0$  вместе со своими частными производными порядка  $r$  по каждой переменной принадлежат  $L^q(0, 1)^s$  и выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_q^r} \equiv \|f\|_{L^q} + \sum_{j=1}^s \left\| \frac{\partial^r}{\partial x_j^r} f \right\|_{L^q} \leq 1,$$

где для измеримой функции  $g(x)$  положено  $\|g\|_p^p = \int_{[0,1]^s} |g(x)|^p dx$ .

При  $q = 2$  также будем пользоваться эквивалентным определением:  $W_2^r(0, 1)^s$  ( $s = 1, 2, \dots; r \geq 0$ ) есть, по определению, множество всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ , тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега которых удовлетворяют условию

$$\|f\|_{W_2^r(0,1)^s}^2 = \sum_{m \in Z^s} \left| \hat{f}(m) \right|^2 \cdot (\bar{m}_1^{2r} + \dots + \bar{m}_s^{2r}) \leq 1, r > 1$$

где  $Z^s$  – множество всех векторов  $m = (m_1, \dots, m_s)$  с целочисленными компонентами.

**2.Обобщенные классы Соболева**  $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}$ . Для данного действительного числа  $r \geq 1$  всякую непрерывную, неубывающую на  $[0, 1]$  функцию  $\omega_r(\delta)$  такую, что

$$\omega_r(0) = 0 \text{ и } \frac{\omega_r(\eta)}{\eta^r} \leq C(\omega_r) \cdot \frac{\omega_r(\xi)}{\xi^r}$$

при некотором  $C(\omega_r) > 0$  и всех  $0 < \xi < \eta \leq 1$  называют функцией типа модуля гладкости  $r$ -го порядка.

В качестве функций типа модуля гладкости  $r$ -го порядка можно указать функции вида  $\delta^r \log^{r_1} \frac{1}{\delta}$ ,  $\delta^r \log^{r_1} \frac{1}{\delta} \log \log^{r_2} \frac{1}{\delta}$  и т.п., где соответственно  $r \geq 1, 0 < r_1 < +\infty, -\infty < r_2 < +\infty$ .

Класс  $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}$  есть, по определению, множество всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ , тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега  $\hat{f}(m)$  которых удовлетворяют условию

$$\|f\|_{W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}}^2 = \sum_{m \in Z^s} \left| \hat{f}(m) \right|^2 \cdot \left( \frac{1}{\omega_{r_1}^2 \left( \frac{1}{\bar{m}_1} \right)} + \dots + \frac{1}{\omega_{r_s}^2 \left( \frac{1}{\bar{m}_s} \right)} \right) \leq 1,$$

где  $Z^s$  - множество всех векторов  $m = (m_1, \dots, m_s)$  с целочисленными компонентами,  $\bar{m}_j = \max\{1, |m_j|\}, j = 1, \dots, s$ .

В частности, при  $\omega_{r_j}(\delta) = \delta^{r_j}$  классы  $W_2^{\delta^{r_1}, \dots, \delta^{r_s}}$  сводятся к обычным анизотропным классам Соболева  $W_2^{r_1, \dots, r_s}$ .

Нам также потребуется понятие среднего модуля гладкости.

Пусть  $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}$  - система функций типа модуля гладкости порядков  $r_1, \dots, r_s$  соответственно. В дальнейшем, не ограничивая общности (в случае необходимости, переходя к  $\frac{(\omega_{r_j}(\delta) + \delta^{r_j})}{\omega_{r_j}(1) + 1}$ ), будем считать, что все функции  $\omega_{r_j}$  ( $j = 1, \dots, s$ ) строго возрастают на  $[0, 1]$  и  $\omega_{r_j}(1) = 1$ .

Обратную к инъективной функции  $g$  будем обозначать через  $g^{-1}$ . Рассмотрим функции  $\omega_{r_j}^{-1}(\zeta)$ , обратные к  $\omega_{r_j}(\delta)$ , и положим

$$\delta = \tau^{-1}(\zeta) = \prod_{j=1}^s \omega_{r_j}^{-1}(\zeta) \quad (0 \leq \zeta \leq 1).$$

Очевидно, что  $\delta = \tau^{-1}(\zeta)$  является строго возрастающей непрерывной функцией на  $[0, 1]$ , причем  $\tau^{-1}(0) = 0$  и  $\tau^{-1}(1) = 1$ . Функцию  $\zeta = \tau(\delta)$ , обратную к  $\tau^{-1}(\zeta)$ , следуя В.И.Коляде [7], будем называть *средней функцией системы*  $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}$ .

Если  $\omega_{r_1}(\delta) = \delta^{r_1}, \dots, \omega_{r_s}(\delta) = \delta^{r_s}$ , то средний модуль гладкости этой системы есть  $\omega(\delta) = \delta^{(r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1}}$ .

Отметим, что в случае  $\omega_{r_1}(\delta) = \dots = \omega_{r_s}(\delta) = \omega_{r_s}(\delta)$  средняя функция этой системы, очевидно, есть функция  $\zeta = \tau(\delta)$ , обратная к функции  $\delta = \tau^{-1}(\zeta) = (\omega_{r_s}^{-1}(\zeta))^s$ .

**3. Классы Никольского-Бесова.** Пусть  $s = 1, 2, \dots$  и  $k = 0, 1, 2, \dots, I_k = \{m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : -2^k \leq m_j \leq 2^k, j = 1, 2, \dots, s\}$ ,  $I_{-1} = \emptyset, Q_k = I_k \setminus I_{k-1}$ .

Для набора чисел  $\{a(k)\}_{k \in A}$ , где  $A$  - заданное счетное множество, через  $\|a_k\|_{l^\theta(A)}$  обозначим  $\sup_{k \in A} |a(k)|$  при  $\theta = +\infty$  и  $\left(\sum_{k \in A} |a(k)|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$  при  $1 \leq \theta < +\infty$ .

Класс Никольского-Бесова  $B_{p,\theta}^r(0, 1)^s$  ( $s = 1, 2, \dots; r > 0; 1 < p < +\infty; 1 \leq \theta \leq +\infty$ ) состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций  $f(x) \in L^p(0, 1)^s$  таких, что

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left\| 2^{kr} \left\| \sum_{m \in Q_k} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{l^\theta(k \geq 0, k \in Z)} \right\|_p \leq 1.$$

**4. Классы Соболева с доминирующей смешанной производной**  $SW_q^r(0, 1)^s$  ( $r > 0, 1 \leq q \leq +\infty$ ) есть множество всех функций  $f(x)$ , представимых в виде  $(y = (y_1, \dots, y_s))$

$$f(x) = (\varphi * F_r)(x) = \int_{[0,1]^s} \varphi(x+y) 2^s \prod_{j=1}^s \sum_{k_j > 0, k_j \in Z} (2\pi k_j)^{-r} \cos 2\pi(k_j y_j - r/4) dy,$$

где  $\|\varphi\|_{L^q(0,1)^s} \leq 1$ .

**5. Классы Никольского с доминирующей смешанной разностью**  $SH_q^r(0, 1)^s$  ( $r > 0, 1 \leq q \leq +\infty$ ) есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций  $f(x) \in L^q(0, 1)^s$  таких, что для некоторого  $l > r$  выполнено соотношение

$$\left\| \Delta_{h_1}^l \dots \Delta_{h_s}^l f(x_1, \dots, x_s) \right\|_{L^q(0,1)^s} \leq \prod_{j=1}^s |h_j|^r,$$

где  $\Delta_{h_j} f \equiv \Delta_{h_j}^1 f = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, \dots, x_s) - f(x_1, \dots, x_s)$ ,  $\Delta_{h_j}^k = \Delta_{h_j}(\Delta_{h_j}^{k-1})$ .

Тогда, по определению,

$$\|f\|_{SH_p^r} = \sup_{\substack{h_1, \dots, h_s \\ h_1 \dots h_s \neq 0}} \frac{\left\| \Delta_{h_1}^l \dots \Delta_{h_s}^l f(x_1, \dots, x_s) \right\|_{L^q(0,1)^s}}{\prod_{j=1}^s |h_j|^r}.$$

**6.Классы Коробова.**  $E_s^r$  ( $r > 1, s = 1, 2, \dots$ ) состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ , тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$|\hat{f}(m)| \leq \left( \prod_{j=1}^s \max\{|m_j|; 1\} \right)^{-r},$$

причем

$$\|f\|_{E_s^r} = \sup_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)| \cdot \left( \prod_{j=1}^s \max\{|m_j|; 1\} \right)^{-r}.$$

**Классы  $E_s^\theta(\lambda)$ .** Пусть  $\lambda(m) > 0$  ( $m \in Z^s$ ) и класс  $E_s^\theta(\lambda)$  ( $1 \leq \theta \leq +\infty$ ) состоит из 1-периодических по каждой переменной суммируемых функций  $f(x_1, \dots, x_s)$  таких, что

$$\sum_{m \in Z^s} \lambda^{-1}(m) < +\infty$$

и

$$\left\| \lambda(m) \cdot |\hat{f}(m)| \right\|_{l^\theta(Z^s)} \leq 1.$$

Если

$$\lambda(m) = \prod_{j=1}^s \max(|m_j|, 1)^r, \quad r > 1,$$

тогда при  $\theta = +\infty$  множество  $E_s^\infty(\lambda) \equiv E_s^r$  есть класс Коробова, а при  $\theta = 2$  множество  $E_s^2(\lambda) \equiv SW_2^r$  есть класс Соболева с доминирующей смешанной производной.

**7.Классы Ульянова**  $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$  состоит из всех функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ , 1-периодических по каждой из  $s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) переменных и таких, что  $(\bar{y} = \max\{|y|; 1\})$ :

$$|\hat{f}(m)| \leq \prod_{j=1}^s (\bar{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\bar{m}_j^{\alpha_j - 1}} \psi_j(\bar{m}_j) (m \in Z^s),$$

где  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in R^s$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in (0, 1]^s$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  ( $\alpha_j > 0$  ( $j = 1, \dots, s$ )),  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_s)$  ( $\psi_j(x)$  - медленно колеблющиеся (относительно степенных функций) положительные функции при всех  $j = 1, \dots, s$ , т.е. для всех  $\delta \neq 0$  существуют пределы  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_j(y) y^\delta$  ( $j = 1, \dots, s$ ) и равны 0 или  $+\infty$  в зависимости от того  $\delta < 0$  или  $\delta > 0$ ).

Шкала классов  $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$  представляет собой классификацию функций в широком диапазоне от предельно малой гладкости до аналитических и их подклассов, включая известные классы Коробова [8]  $E_s^r \equiv U_s(-r, \vec{1}, \vec{1}; \vec{1})$ , где  $\vec{b} := (b, \dots, b) \in Z^s$  и  $r = (r_1, r_2, \dots, r_s)$ , причем  $r_j > 1$  при всех  $j = 1, \dots, s$ . Более того, при определенных значениях параметров, класс  $U_s(\beta, \theta, \alpha) \equiv U_s(\beta, \theta, \alpha; \vec{1})$  с точностью до постоянных сомножителей может быть определен не опосредованными типа формул Фурье, а прямыми ограничениями на саму бесконечно дифференцируемую функцию.

Именно, как это доказано в [9], при всех  $\beta \in R^s, \theta \in (0, 1)^s, \alpha \in (0, \frac{1}{2}]^s$  класс  $U_s(\beta, \theta, \alpha)$  в указанном выше смысле совпадает с классом бесконечно дифференцируемых 1-периодических по каждой переменной функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$  таких, что для всех  $k = (k_1, \dots, k_s) \in Z^s$  ( $k_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, s$ )) выполнены неравенства

$$\left\| \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_s}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_s^{k_s}} f(x_1, \dots, x_s) \right\|_{C[0,1]^s} \leq \prod_{j=1}^s \bar{k}_j^{-\alpha_j (\beta_j + \bar{k}_j)} \left( \frac{\alpha_j}{e \ln \frac{1}{\theta_j}} \right)^{\alpha_j \bar{k}_j}.$$

В заключение примем обозначения, используемые на протяжении всей статьи (другие случаи по тексту будут оговорены особо):

1. Запись  $[x]$  есть целая часть действительного числа  $x$ ,
2. Звездочка в сумме  $\sum^*$  означает, что из суммирования исключен член, индексированный знаком 0,
3. Под  $L^\infty(\Omega)$  будем понимать пространство существенно ограниченных на измеримом множестве  $\Omega \subset R^s$  измеримых функций, либо с уточнением  $L^\infty(\Omega) \equiv C(\Omega)$  пространство равномерно непрерывных в области  $\Omega$  функций,
4. Условимся запись  $\|g(x, t)\|_{L^{q,\infty}} \equiv \|g(x, t)\|_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}$  понимать как  $\left\| \|g(x, t)\|_{L^q(0,1)^s} \right\|_{L^\infty[0,+\infty)} = \left\| \|g(x, t)\|_{L_x^q(0,1)^s} \right\|_{L_t^\infty[0,+\infty)}$ , где  $\|g(x, t)\|_{L_x^q(0,1)^s} := \left( \int_{[0,1]^s} |g(x, t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$  и  $\|b(t)\|_{L_t^\infty[0,+\infty)} = \sup_{0 \leq t < \infty} \text{vrai } |b(t)|$ ,
5. Для  $m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s$  положим  $\bar{m}_j = \max\{|m_j|, 1\}$  и  $\bar{\bar{m}} = \bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s$ .
6.  $\Gamma_R \equiv \{m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : \bar{\bar{m}} \leq R\}$ .

**§1. Модельные случаи полного К(В)П-исследования уравнений в частных производных**

Как это уже отмечалось в [1]-[5], качество постановки задачи проверяется через формулировку теоремы как ответ на поднятую проблему, в которой все имеет значение – от информативности до эстетического вида.

В соответствии с чем здесь приведены два примера из рассматриваемой темы исследований.

**1.1 Дискретизация решений уравнения теплопроводности с одной предельной погрешностью.** Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} (x \in R^s, t \geq 0)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = f(x) (x \in R^s).$$

**Теорема 1.1 (Н.Наурызбаев, Б.Оразкулова).** Пусть даны числа  $s(s = 1, 2, \dots)$  и  $r$  такие, что  $r > 2 + \frac{s}{2}$ . Тогда выполнены утверждения

**К(В)П-1:**

$$\begin{aligned} & \delta_N(0; L_N(W_2^r(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \equiv \\ & \equiv \delta_N(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u(x, 0) = f(x) \in W_2^r(0, 1)^s; L_N(W_2^r(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in L_N(W_2^r(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}} \sup_{f \in W_2^r(0, 1)^s} \|u(x, t; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x, t)\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f \in W_2^r(0, 1)^s} \left\| u(x, t; f) - \sum_{\substack{m \in Z^s : |m_j| \leq n \\ (j = 1, \dots, n)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi(m,m)t} \cdot e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp N^{-\frac{r}{s}},$$

**К(В)П-2:** Для функции  $U_N(x, t; f) = \sum_{\substack{m \in Z^s : |m_j| \leq n \\ (j = 1, \dots, n)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi(m,m)t} \cdot e^{2\pi i(m,x)}$ ,  $N =$

$n^s$  величина  $\bar{\epsilon}_N = N^{-\frac{r}{s} - \frac{1}{2}}$  является предельной погрешностью: во-первых,

$$\begin{aligned}
 & \delta_N(0; L_N(W_2^T(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \\
 & \asymp \delta_N(\bar{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}; L_N(W_2^T(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \equiv \\
 & = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in L_N(W_2^T(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}} \sup_{\substack{f \in W_2^T(0, 1)^s \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \ (\tau = 1, \dots, N)}} \|u(x, t; f) - \\
 & \quad - \varphi_N(l_1(f) + \gamma_N^{(1)} \tilde{\varepsilon}_N, \dots, l_N(f) + \gamma_N^{(N)} \tilde{\varepsilon}_N; x, t)\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \\
 & \asymp \sup_{\substack{f \in W_2^T(0, 1)^s \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau = 1, \dots, N)}} \left\| u(x, t; f) - \sum_{\substack{m \in Z^s : |m_j| \leq n \\ (j = 1, \dots, n)}} (\hat{f}(m) + \gamma_N^{(j)} \tilde{\varepsilon}_N) e^{-4\pi(m,m)t} \cdot e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp N^{-\frac{r}{s}},
 \end{aligned}$$

во-вторых, для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left( \eta_N \bar{\varepsilon}_N = \eta_N N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}; U_N(x, t; f) \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}}{\delta_N(0; L_N(W_2^T(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}} = +\infty.$$

**К(В)П-3:** Всякий вычислительный агрегат  $(\varphi_N(0, \dots, 0; x, t) \equiv 0 \text{ на } [0, 1]^s \times [0, +\infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из  $N$  гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности  $U_N(x, t; f)$ : для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left( \eta_N \bar{\varepsilon}_N = \eta_N N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}; \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t) \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}}{\delta_N(0; L_N(W_2^T(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}} = +\infty.$$

Тем самым, в случае, когда гладкость функций определяется принадлежностью к многомерным классическим пространствам Соболева, а информация снимается с произвольных линейных функционалов, задача дискретизации уравнения теплопроводности решена в полном объеме. Именно выписаны правильные порядки

$$\delta_N(0; L_N(W_2^T(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp N^{-\frac{r}{s}}$$

дискретизации решения в случае, когда используются *точные* значения функционалов. Оптимальные вычислительные агрегаты в К(В)П-2 построены по числовой информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье. В продолжение чего найдена величина погрешности вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье  $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}$ , сохраняющая порядок восстановления по точной информации, которую можно понимать как идеализированный показатель, но с определяющим ее дополнительным условием: сколь угодно медленное бесконечное увеличение погрешности  $\bar{\varepsilon}_N$  ведет к потере этого порядка по точной информации. Затем показано, что с лучшей предельной погрешностью вычислительных агрегатов по тригонометрическим коэффициентам Фурье не существует.

**Замечание 1.1.** К(В)П-дискретизация решений уравнения теплопроводности по тригонометрическим коэффициентам Фурье в классах Соболева с гильбертовой нормой полностью решена в [10].

**1.2 Дискретизация решений волнового уравнения с двумя предельными погрешностями.** Исследуется задачи Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} (u = u(x, t), 0 \leq t < \infty, x \in R^s, s = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f_1(x) \in F^{(1)}, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in F^{(2)} (x \in R^s), \quad (2)$$

решение которой описывает, в частности, свободную релятивистскую (псевдо) скалярную частицу массы 1, в случае классов Соболева в метрике  $Y = L^{2, \infty}$ .

Задача заключается в получении совпадающих с точностью до констант оценок сверху и снизу для величины

$$\begin{aligned} & \delta_N(0; L_N(F^{(1)}, F^{(2)}) \times \{\varphi_N\}_Y)_Y \equiv \\ \equiv & \delta_N(0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u(x, 0) = f_1(x) \in F^{(1)}, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in F^{(2)}; L_N(F^{(1)}, F^{(2)}) \times \{\varphi_N\}_Y)_Y \equiv \end{aligned} \quad (3)$$

$$\equiv \min_{N_1+N_2=N} \inf_{(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N) \in L_N(F^{(1)}, F^{(2)}) \times \{\varphi_N\}_Y} \sup_{f_1 \in F^{(1)} f_2 \in F^{(2)}}$$

$$\left\| u(x, t; f_1, f_2) - \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t) \right\|_Y,$$

и в указании вычислительного агрегата, т.е. функции вида

$$\Phi(x, t; f_1, f_2) = \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t),$$

реализующей оценку сверху. Здесь  $u(x, t; f_1, f_2)$  - решение уравнения (1)-(2),  $L_N$ -совокупность всех возможных линейных функционалов  $l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1)$  и  $l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2)$ , определенных на линейной оболочке классов  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  соответственно.

Далее предполагается, что  $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; x, t)$  при любых, вообще говоря, комплексных фиксированных значениях  $z_j (j = 1, \dots, N)$  есть функция от переменных  $(x, t)$ , принадлежащая классу  $L^{q, \infty}$ .

Величину  $\delta_N$ , зависящую только от  $L_N$ , согласно [1]-[5], назовем *информативной мощностью всех возможных линейных функционалов  $L_N$* .

Существенным в задаче (1)-(3) является то, что при заданном общем объеме информации  $N = N_1 + N_2$  требуется распределить объемы  $N_1$  и  $N_2$  числовой информации, получаемой соответственно от функции  $f_1$  и  $f_2$  таким образом, чтобы суммарная погрешность  $\delta_N$  была возможно малой – неумлучшаемой или близкой к неумлучшаемой.

Через  $u(x, t; f, 0)$  обозначим решение задачи (1)-(2) в случае

$$f(x) \equiv f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, f_2(x) \equiv 0, \quad (4)$$

через  $u(x, t; 0, f)$  в случае

$$f_1(x) \equiv 0, f(x) \equiv f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s, \quad (5)$$

и через  $u(x, t; f_1, f_2)$  обозначим решение задачи (1)-(2) в случае

$$f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s. \quad (6)$$

Пусть  $l_1, \dots, l_N$  - линейные функционалы. Имеет место следующая

**Теорема 1.2 (Ш.К.Абикенова [11]).** Пусть заданы целые положительные числа  $s, 2 \leq q \leq \infty, r_1$  и  $r_2$  такие, что  $r_1 > 2 + \frac{s}{2}$  и  $r_2 > 1 + \frac{s}{2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbf{K(B)П-1:} \delta_N(\bar{0}_N; L_N(W_2^{r_1}(0, 1)^s, W_2^{r_2}(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0, 1)^s \times L^\infty[0, +\infty)})_{L^2(0, 1)^s \times L^\infty[0, +\infty)} \equiv \\ \equiv & \delta_N(\bar{0}_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s); \end{aligned}$$



$$L_N(W_2^{r_1}(0, 1)^s, W_2^{r_2}(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty) \equiv$$

$$\equiv \min_{\substack{N_1 + N_2 = N, \\ N_1 \geq 1, N_2 \geq 1}} \inf_{\substack{l_{N_1}^{(1)}, \dots, l_{N_1}^{(N_1)} \\ l_{N_2}^{(1)}, \dots, l_{N_2}^{(N_2)}, \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s \\ f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s}}$$

$$\begin{aligned} & \left\| u(x, t; f_1, f_2) - \varphi_N \left( l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1), l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t \right) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s, r_1, r_2}{\asymp} \\ & \asymp \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s \\ f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s}} \left\| u(x, t; f_1, f_2) - \bar{\varphi}_N \left( l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1), l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t \right) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s, r_1, r_2}{\asymp} \\ & \underset{s, r_1, r_2}{\asymp} N^{-\frac{\min\{r_1; r_2+1\}}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

**K(B)II-2:** Для функции  $(n = \lceil \log_2(\sqrt[s]{N} - 1) \rceil - 1)$

$$\bar{\varphi}_{N_1}^{(1)}(l_1(f), \dots, l_{N_1}(f); x, t) = \sum_{\substack{k = (k_1, \dots, k_s) : \\ |k_j| \leq 2^n \ (j = 1, \dots, s)}} \hat{f}(k_1, \dots, k_s) \cos \left( 2\pi \sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2} t \right) e^{2\pi i(x_1 k_1 + \dots + x_s k_s)},$$

$$\bar{\varphi}_{N_2}^{(2)}(l_1(f), \dots, l_{N_2}(f); x, t) = \sum_{\substack{k = (k_1, \dots, k_s) \in Z^s : \\ |k_j| \leq 2^n \ (j = 1, \dots, s)}} \hat{f}(k_1, \dots, k_s) \frac{\sin \left( 2\pi \sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2} t \right)}{\sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2}} e^{2\pi i(x_1 k_1 + \dots + x_s k_s)}$$

и

$$\bar{\varphi}_N(x, t; f_1, f_2) = \bar{\varphi}_{N_1}^{(1)}(l_1(f_1), \dots, l_{N_1}(f_1); x, t) + \bar{\varphi}_{N_2}^{(2)}(l_1(f_2), \dots, l_{N_2}(f_2); x, t)$$

$N$ -мерный вектор  $\bar{\varepsilon}_{N_1, N_2} \equiv (\bar{\varepsilon}_{N_1}, \bar{\varepsilon}_{N_2}) = (\varepsilon_{N_1}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{N_1}^{(N_1)}, \varepsilon_{N_2}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{N_2}^{(N_2)})$  с компонентами  $\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)} =$

$$N_1^{-\frac{r_1}{s} - \frac{1}{2}} \quad (j_1 = 1, 2, \dots, N_1), \quad \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(j_2)} = \begin{cases} N_2^{-\frac{r_2+1}{s}}, & \text{при } s = 1 \\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s}} (\ln N_2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{при } s = 2 \\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{s})} = N_2^{-\frac{r_2}{s} - \frac{1}{2}}, & \text{при } s > 2 \end{cases} \quad \text{является предельной}$$

погрешностью: во-первых,

$$\begin{aligned} & \delta_N(\bar{0}_N; L_N(W_2^{r_1}(0, 1)^s, W_2^{r_2}(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty) \asymp \\ & \asymp \delta_N \left( \bar{\varepsilon}_{N_1}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(0)} = (\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(0)}); L_N(W_2^{r_1}(0, 1)^s, W_2^{r_2}(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty) \equiv \\ & \equiv \min_{\substack{N_1 \in Z_+, N_2 \in Z_+ : \\ N_1 + N_2 = N}} \inf_{\substack{m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)} \\ n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)} \\ \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s; f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s \\ \left| \gamma_{N_1}^{(j_1)} \right| \leq 1 \ (j_1 = 1, \dots, N_1) \\ \left| \gamma_{N_2}^{(j_2)} \right| \leq 1 \ (j_2 = 1, \dots, N_2)}} \left\| u(x, t; f_1, f_2) - \right. \\ & \left. - \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{N_1}^{(1)}, \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(N_1)} \bar{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)}, l_{N_2}^{(1)}(f_2) + \gamma_{N_2}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(1)}, \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2) + \gamma_{N_2}^{(N_2)} \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)}; x, t) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp \\ & \asymp \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s; f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s \\ \left| \gamma_{N_1}^{(j_1)} \right| \leq 1 \ (j_1 = 1, \dots, N_1) \\ \left| \gamma_{N_2}^{(j_2)} \right| \leq 1 \ (j_2 = 1, \dots, N_2)}} \left\| u(x, t; f_1, f_2) - \bar{\varphi}_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{N_1}^{(1)} \right. \\ & \left. , \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(N_1)} \bar{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)}, l_{N_2}^{(1)}(f_2) + \gamma_{N_2}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(1)}, \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2) + \gamma_{N_2}^{(N_2)} \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)}; x, t) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp \\ & \asymp N^{-\frac{\min\{r_1; r_2+1\}}{s}}, \end{aligned}$$

во-вторых, для всякой возрастающей  $k \rightarrow +\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left( \eta_N \bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}}; \bar{\varphi}_N(x, t; f_1, f_2) \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}}{\delta_N(\bar{0}; L_N(W_2^T(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}} = +\infty.$$

где  $N_1^{(0)}$  и  $N_2^{(0)}$  ( $N_1^{(0)} + N_2^{(0)} = N$ ) одна из пар, реализующих минимум погрешности дискретизации,  $\bar{0}_N$  - нулевой  $N$ -мерный вектор.

**К(В)П-3:** Всякий вычислительный агрегат ( $\varphi_N(0, \dots, 0; x, t) \equiv 0$  на  $[0, 1]^s \times [0, +\infty)$ )

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из  $N$  гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности  $\bar{\varphi}_N(x, t; f_1, f_2)$ : для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left( \eta_N \bar{\varepsilon}_N; \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t) \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}}{\delta_N(\bar{0}; L_N(W_2^T(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}} = +\infty.$$

**Замечание 1.2.** Пусть  $\min\{r_1, r_2 + 1\} = r$ . Если  $r_1 = r$ , то  $r_2 + 1 \geq r$  и всякое повышение гладкости  $r_2 > r - 1$  не отразится на порядке погрешности  $\asymp N^{-\frac{r}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}$  при дискретизации решений задачи (1)-(6). При этом самый широкий класс упорядоченных пар функций  $(f_1, f_2)$ ,  $f_1 \in W_2^{r_1}(0,1)^s, f_2 \in W_2^{r_2}(0,1)^s$ , для которых еще выдерживается указанный оптимальный порядок, получится при  $r_1 = r_2 - 1 = r$ .

**Замечание 1.3.** Как это показано в [1]-[5], конкретизируя функционалы  $l_1, \dots, l_N$  и функции  $\varphi_N$ , в качестве вычислительных агрегатов  $\varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x, t)$  можно получать все возможные  $N$ -членные частичные суммы рядов Фурье по всем возможным ортонормированным системам, в их числе и по вейвлет-системам, все возможные  $N$ -членные частичные суммы разложения по всем возможным базисам и также разностные схемы, т.е. фактически весь спектр агрегатов, изучаемых в теории приближений и вычислительной математике. Смысл теоремы состоит в том, что в условиях данной теоремы весь перечисленный арсенал не может дать оценку лучше чем  $\asymp N^{-\frac{\min\{r_1; r_2+1\}}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}$ .

## §2. Дискретизация решений уравнения Лапласа

К(В)П-исследованию уравнения Лапласа предположим обширное цитирование из статьи [12] П. Лакса:

"Все знают о достигнутом за последние 50 лет невероятном прогрессе в скорости компьютеров и объёме хранимой ими информации, а также об улучшениях в области графики и программного обеспечения. В результате задачи, ранее находившиеся на грани возможностей компьютера, сейчас могут быть решены гораздо быстрее и дешевле, и мы можем подступать к задачам устрашающей сложности. Но многие люди не подозревают, что в значительной степени этот прогресс обязан не только улучшениям в техническом и программном обеспечении, но и в равной мере новым математическим идеям о том, как решать возникающие вычислительные проблемы.

Вот несколько удивительных примеров.

... Мультисеточный метод. После дискретизирования эллиптических систем уравнений в частных производных - стандартным примером является задача Дирихле для уравнения Лапласа - возникает проблема численного решения получившейся системы линейных алгебраических уравнений. Эффективный итерационный метод для выполнения этой задачи, называемый мультисеточным методом, был предложен в 1960-х годах Р.П. Федоренко [13] и проанализирован Н.С. Базваловым [14]; далее его развивал и применял Аки Брандт [15]. Схематически идея состоит в том, чтобы получать информацию о поведении решения на больших расстояниях путём вычислений на грубой сетке. Для получения более детальной информации используются всё более мелкие сетки".

Здесь выясняются аппроксимативные возможности вычислительных агрегатов, построенных по произвольным алгоритмам, примененным к числовой информации заданного объема  $N$ , полученного от граничных функций посредством  $N$  линейных функционалов, в задаче приближения (в метрике  $L^q$ ) решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

**2.1. Дискретизация решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в бесконечной полосе.** Рассматривается задача дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в бесконечной полосе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x \in R, y \in [0, b]) \quad (7)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \quad (x \in R), \\ u(x, b) &= 0 \quad (x \in R), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $f(x)$  есть  $2\pi$ -периодическая функция из класса  $B_{q,\theta}^r(-\pi, \pi)$  ( $r > \frac{1}{q}$ ).

Функция

$$u(x, y; f) = \hat{f}(0) \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \sum_{m \in Z}^* \frac{\text{sh}(|m|(b-y))}{\text{sh}(|m|b)} \hat{f}(m) e^{imx},$$

является решением уравнения (7) из класса  $C^2((-\infty, \infty) \times [0, b]) \cap C((-\infty, \infty) \times [0, b])$ , удовлетворяющая краевому условию (8).

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 2.1 (М.Берикханова [16]).** Пусть заданы числа  $1 \leq q \leq \nu \leq \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $r > \frac{1}{q}$  и  $u(x, y; f)$  - решение задачи (7)-(8). Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{\xi^{(k)}, \varphi_N} \sup_{f \in B_{q,\theta}^r} \left\| u(x, y; f) - \varphi_N \left( f \left( \xi^{(1)} \right), \dots, f \left( \xi^{(N)} \right); x, y \right) \right\|_{L^\nu[0,\pi] \times L^\infty[0,b]} \underset{r,q,\theta,\nu}{\asymp} \frac{1}{N^{r - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}\right)}}.$$

**Теорема 2.2 (М.Берикханова [16]).** Пусть заданы числа  $1 \leq q \leq \nu \leq \infty$  и  $r > \frac{1}{q}$  - целое положительное число и  $u(x, y; f)$  - решение задачи (7)-(8). Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{\xi^{(k)}, \varphi_N} \sup_{f \in W_q^r} \left\| u(x, y; f) - \varphi_N \left( f \left( \xi^{(1)} \right), \dots, f \left( \xi^{(N)} \right); x, y \right) \right\|_{L^\nu[0,\pi] \times L^\infty[0,b]} \underset{r,q,\nu}{\asymp} \frac{1}{N^{r - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}\right)}}.$$

При этом, оптимальный порядок погрешности в теоремах 2.1 и 2.2 реализуется при дискретизации оператором ( $N = 2^n$ )

$$\bar{\varphi}_N \left( f \left( 2\pi \frac{1}{N} \right), \dots, f \left( 2\pi \frac{N}{N} \right); x, y \right) \equiv (T_N^{(3)} f)(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f \left( 2\pi \frac{k}{N} \right) \cdot V_N \left( x - 2\pi \frac{k}{N}, y \right),$$

где

$$V_N(x, y) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \sum_{m \in Z \cap [-2N, 2N]}^* \frac{\text{sh}(|m|(b-y))}{\text{sh}(|m|b)} \cdot \hat{V}_N(m) \cdot e^{imx}.$$

**2.2. Дискретизация решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0 < x < \pi, 0 < y < b) \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) & (0 \leq x \leq \pi) \\ u(x, b) &= f_2(x) & (0 \leq x \leq \pi) \\ u(0, y) &= f_3(x) & (0 \leq y \leq b) \\ u(\pi, y) &= f_4(x) & (0 \leq y \leq b) \end{aligned} \quad (10)$$

где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  – функции из класса  $B_{q,\theta}^r(0, \pi)$  ( $r > \frac{1}{q}$ ), а  $f_3(x)$  и  $f_4(x)$  – функции из класса  $B_{q,\theta}^r(0, b)$  ( $r > \frac{1}{q}$ ), удовлетворяющие условию  $f_i(0) = f_i(\pi) = 0$  ( $i = 1, 2$ ) и  $f_i(0) = f_i(b) = 0$  ( $i = 3, 4$ ).

Решение задачи (9)-(10) можно представить в виде

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y),$$

где  $u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y), u_4(x, y)$  – решения уравнения (10), удовлетворяющие, соответственно, следующим системам граничных условий:

$$\begin{array}{llll} u_1(x, 0) = f_1(x) & u_2(x, 0) = 0 & u_3(x, 0) = 0 & u_4(x, 0) = 0 \\ u_1(x, 0) = 0 & u_2(x, 0) = f_2(x) & u_3(x, 0) = 0 & u_4(x, 0) = 0 \\ u_1(x, 0) = 0 & u_2(x, 0) = 0 & u_3(x, 0) = f_3(x) & u_4(x, 0) = 0 \\ u_1(x, 0) = 0 & u_2(x, 0) = 0 & u_3(x, 0) = 0 & u_4(x, 0) = f_4(x) \end{array}$$

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 2.3 (М.Берикханова [16]).** Пусть заданы числа  $1 \leq q \leq \nu \leq \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty, r > \frac{1}{q}$  и  $u(x, y; f)$  – решение задачи (10)-(11). Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{\xi^{(k)}, \varphi_N} \sup_{f \in B_{q,\theta}^r} \left\| u(x, y; f) - \varphi_N \left( f \left( \xi^{(1)} \right), \dots, f \left( \xi^{(N)} \right); x, y \right) \right\|_{\nu, r, q, \theta, \nu} \asymp \frac{1}{N^{r - \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu} \right)}}.$$

Здесь норма понимается как

$$\begin{aligned} & \left\| u(x, y; f) - \varphi_N \left( f \left( \xi^{(1)} \right), \dots, f \left( \xi^{(N)} \right), x, y \right) \right\|_{\nu} \equiv \\ & \equiv \sup_{0 \leq y \leq b} \left\| u_1(\cdot, y; f_1) - \varphi_N^{(1)} \right\|_{L^\nu[0, \pi]} + \sup_{0 \leq y \leq b} \left\| u_2(\cdot, y; f_2) - \varphi_N^{(2)} \right\|_{L^\nu[0, \pi]} + \\ & + \sup_{0 \leq x \leq \pi} \left\| u_3(x, \cdot; f_3) - \varphi_N^{(3)} \right\|_{L^\nu[0, b]} + \sup_{0 \leq x \leq \pi} \left\| u_4(x, \cdot; f_4) - \varphi_N^{(4)} \right\|_{L^\nu[0, b]}. \end{aligned}$$

Оптимальный порядок погрешности реализуется при дискретизации оператором ( $N = 2^n$ )

$$\left( T_N^{(4)} f \right) (x, y) = \left( T_N^{(4)} f_1 \right)_1 (x, y) + \left( T_N^{(4)} f_2 \right)_2 (x, y) + \left( T_N^{(4)} f_3 \right)_3 (x, y) + \left( T_N^{(4)} f_4 \right)_4 (x, y).$$

Здесь

$$\left( T_N^{(4)} f_1 \right)_1 (x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_1 \left( 2\pi \frac{k}{N} \right) \cdot V_N^{(1)} \left( x - 2\pi \frac{k}{N}, y \right);$$

$$\left( T_N^{(4)} f_2 \right)_2 (x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_2 \left( 2\pi \frac{k}{N} \right) \cdot V_N^{(2)} \left( x - 2\pi \frac{k}{N}, y \right);$$

$$\left( T_N^{(4)} f_3 \right)_3 (x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_3 \left( b \frac{k}{N} \right) \cdot V_N^{(3)} \left( x, y - b \frac{k}{N} \right);$$

$$\left( T_N^{(4)} f_4 \right)_4 (x, y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_4 \left( b \frac{k}{N} \right) \cdot V_N^{(4)} \left( x, y - b \frac{k}{N} \right);$$

где

$$V_N^{(1)}(x, y) = \sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}} * \frac{sh(|m|(b-y))}{sh(|m|b)} \hat{V}_N(m) \cdot e^{imx};$$

$$V_N^{(2)}(x, y) = \sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}} * \frac{sh(|m|y)}{sh(|m|b)} \hat{V}_N(m) \cdot e^{imx};$$

$$V_N^{(3)}(x, y) = \sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}} * \frac{sh(|m|(\pi-x))}{sh(|m|\pi)} \hat{V}_N(m) \cdot e^{\frac{2\pi}{b}imy};$$

$$V_N^{(4)}(x, y) = \sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}} * \frac{sh(|m|x)}{sh(|m|\pi)} \hat{V}_N(m) \cdot e^{\frac{2\pi}{b}imy}.$$

**Теорема 2.4 (М.Берикханова [16]).** Пусть заданы числа  $1 \leq q \leq \nu \leq \infty$ ,  $r > \frac{1}{q}$  целое положительное число и  $u(x, y; f)$  - решение задачи (9)-(10). Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{\xi^{(k)}, \varphi_N f \in W_q^r} \sup \left\| u(x, y; f) - \varphi_N \left( f \left( \xi^{(1)} \right), \dots, f \left( \xi^{(N)} \right), x, y \right) \right\|_{L_x^\nu[0, \pi]} \asymp \frac{1}{N^{r - \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu} \right)}}$$

При этом оптимальный порядок погрешности реализуется при восстановлении оператором  $(T_N^{(4)} f)(x, y)$  из теоремы 2.3.

**2.3. Дискретизация решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге.** Приведем постановку общей задачи применительно к данной конкретизации. Пусть  $u(\alpha, \theta) \equiv u(\alpha, \theta; f)$  есть решение уравнения Лапласа в полярных координатах (см. [17, стр. 236])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (11)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(\alpha, \theta)|_{\alpha=R} = f(\theta), \quad (12)$$

где  $f$  некоторая  $2\pi$  - периодическая функция, обеспечивающая корректность задачи (11)-(12), более того, принадлежность решения  $u(\alpha, \theta; f)$  заданному нормированному пространству  $Y$ .

Справедлива

**Теорема 2.5 (М.Берикханова, К.Е.Шерниязов, Н.Темиргалиев).** Пусть даны числа  $2 \leq q \leq \nu \leq \infty$ .

a) Пусть  $r$  - целое положительное число. Тогда имеет место двусторонняя оценка ( $N = 1, 2, \dots$ )

$$\delta_N \left( 0; \Delta u = 0, u(R, \theta) = f(\theta) \in W_q^r(0, 2\pi); L^{(N)} \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\nu[0, 2\pi]} \asymp N^{-\left( r - \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu} \right) \right)}.$$

b) Пусть  $rq > 1$  и  $1 \leq \varkappa \leq \infty$  Тогда имеет место двусторонняя оценка ( $N = 1, 2, \dots$ )

$$\delta_N \left( 0; \Delta u = 0, u(R, \theta) = f(\theta) \in B_{q, \varkappa}^r(0, 2\pi); L^{(N)} \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\nu[0, 2\pi]} \asymp N^{-\left( r - \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu} \right) \right)}.$$

При этом в каждом из случаев a) и b) оценку сверху реализует оператор ( $N=2^n$ ,  $n=1, 2, \dots$ )

$$\varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \alpha, \theta) = V_{2^n}(\alpha, \theta; f) = \sum_{k=0}^n Q_k(\alpha, \theta; f),$$

где  $V_{2^k}(\alpha, \theta; f)$  - средние Валле-Пуассена функции  $u(\alpha, \theta; f)$  порядка  $2^k$  по переменной  $\theta$ , а  $Q_0 = V_{2^0}$ ,  $Q_k = V_{2^k} - V_{2^{k-1}}$  при всех  $k \geq 1$  [18, стр. 295-300].

**2.4. Информативная мощность линейных функционалов – значений функции в точках при дискретизации решений задачи Коши для уравнения Лапласа в условиях критерия К. И. Бабенко.**

Как известно, задача Коши для уравнения Лапласа в своей общей постановке относится к некорректным (см.[19, стр.333-334]).

К.И.Бабенко получил необходимые и достаточные условия существования и единственности 1-периодического по  $x$  решения задачи Коши для уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (u = u(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < d), u(x, 0) = f(x), u_y(x, 0) = g(x), \tag{13}$$

закрывающееся в выполнении неравенства

$$\sum_{m \in Z} * \left| \hat{f}(m) + \frac{\hat{g}(m)}{|m|} \right|^2 \exp \{2|m|d\} < \infty.$$

Рассмотрим задачу восстановления решений уравнения (13) по числовой информации, полученной от заданных 1-периодических функций  $f$  и  $g$ . В соответствии с критерием Бабенко определим классы начальных данных задачи (13):

Пусть  $\{\tau_m\}_{m \in Z}$  и  $\{t_m\}_{m \in Z}$  – симметричные, действительные значения последовательности такие, что для всех  $0 \leq n \leq m, 0 < \tau_n \leq \tau_m, 0 < t_n \leq t_m, \sum_{m \in Z} \tau_m^{-2} < \infty$  и  $\sum_{m \in Z} t_m^{-2} < \infty$ .

Положим ( $\bar{m} = \max\{|m|, 1\}$ )

$$F(d, \{\tau_m\}_{m \in Z}) = \left\{ f : \sum_{m \in Z} \left| \hat{f}(m) \right|^2 e^{4\pi|m|d} \tau_m^2 \leq 1 \right\}$$

и

$$G(d, \{t_m\}_{m \in Z}) = \left\{ g : \sum_{m \in Z} \left( \frac{|\hat{g}(m)|}{2\pi\bar{m}} \right)^2 e^{4\pi|m|d} t_m^2 \leq 1 \right\}.$$

В условиях принятых определений и обозначений имеем (см. М.Берикханова [16]):

Пусть числовая информация в объеме  $N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) о каждой из функций  $f$  и  $g$  берется из соответствующих классов  $f \in F(d, \{\tau_m\}_{m \in Z})$  и  $g \in G(d, \{|m| \tau_m\}_{m \in Z})$ . Тогда

$$\tau_{\left[\frac{N}{2}\right]}^{-1} \ll_d \inf_{(\{\xi_k\}_{k=1}^N, \{\eta_k\}_{k=1}^N \in [0,1]; \varphi_{2N})} \sup_{\substack{f \in F(d, \{\tau_m\}_{m \in Z}) \\ g \in G(d, \{|m| \tau_m\}_{m \in Z})}} \|u(x, y; f, g) - \varphi_{2N}(f(\xi_1), \dots, f(\xi_N), g(\eta_1), \dots, g(\eta_N); x, y)\|_{L^2(0,1) \times L^\infty(0,d)} \ll_d \sqrt{\sum_{m \geq \left[\frac{N}{2}\right]} \tau_m^{-2}}.$$

Пусть теперь функции  $f$  и  $g$  берутся из соответствующих классов  $F(d, \{\tau_m\}_{m \in Z})$  и  $G(d, \{|m| \tau_m\}_{m \in Z})$  в произвольном объеме  $N = N_1 + N_2$ ,  $N_2 = \left[\frac{c_1}{c_2} N_1\right]$  ( $N_1 = 1, 2, \dots$ ;  $c_1$  и  $c_2$  - любые положительные числа). Тогда

$$\inf_{(\xi_1, \dots, \xi_{N_1}, \eta_1, \dots, \eta_{N_2} \in [0,1]; \varphi_N)} \sup_{\substack{f \in F(d, \{e^{c_1|m|}\}_{m \in Z}) \\ g \in G(d, \{|m| e^{c_2|m|}\}_{m \in Z})}} \|u(x, y; f, g) -$$

$$-\varphi_N (f(\xi_1), \dots, f(\xi_{N_1}), g(\eta_1), \dots, g(\eta_{N_2}); x, y) \|_{L^2(0,1) \times L^\infty(0,d)} \underset{d}{\asymp} e^{-\frac{N}{2} \left( \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \right)},$$

где оптимальный оператор восстановления есть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_1} \sum_{n=1}^{N_1} f\left(\frac{n}{N_1}\right) \sum_{|k| \leq \left[\frac{N_1}{2}\right], k \in Z} \frac{e^{2\pi k y} + e^{-2\pi k y}}{2} e^{2\pi i k \left(x - \frac{n}{N_1}\right)} + \\ & + \frac{1}{N_2} \sum_{n=1}^{N_2} g\left(\frac{n}{N_2}\right) \sum_{|k| \leq \left[\frac{N_2}{2}\right], k \in Z} \frac{e^{2\pi k y} + e^{-2\pi k y}}{2} e^{2\pi i k \left(x - \frac{n}{N_2}\right)}. \end{aligned}$$

### §3. Дискретизация решений уравнения Пуассона

В этом параграфе результат из знаменитой монографии Н.М.Коробова "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе", опубликованной в 1963 году в серии "Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики" улучшается "в квадрат раз" и на языке Компьютерного (вычислительного) поперечника показано, что дальше улучшить полученное нельзя (см. [8]).

Именно, в [8, с.187-190] была рассмотрена задача дискретизации решений  $u(x; f)$  уравнения Пуассона

$$\Delta u = \Delta u(x_1, \dots, x_s) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f \quad (14)$$

по значениям в точках ее правой части. В предположении, что функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$  нечетна по каждой из  $s$  переменных и принадлежит классу Коробова  $E_s^r$  ( $r > 1, s = 1, 2, \dots$ ), в [8] установлена следующая оценка сверху погрешности дискретизации решения

$$u(x, f) = \sum_{k=1}^N f\left(a \frac{k}{n}\right) \left( -\frac{1}{4\pi^2 N} \sum_{\overline{m} \leq \sqrt{N} \ln^{-\beta/2} N} e^{2\pi i \left(k, x - a \frac{k}{n}\right)} (m, m)^{-1} \right) + O\left(N^{(-\frac{r-1}{2} - \frac{1}{s})} \ln^{r\beta/2+s} N\right), \quad (15)$$

где  $a = (a_1, \dots, a_s) \in Z^s$  - оптимальные коэффициенты по модулю  $N$  и индекса  $\beta$ , т.е. такие взаимно простые с  $N$  целые числа  $a_1 = a_1(N), \dots, a_s = a_s(N)$ , что для некоторых чисел  $\beta$  и  $c = c(s) > 0$  выполнены неравенства

$$\sum_{m_1, \dots, m_s = -(N-1)}^{N-1} \frac{* \chi_{(N)}(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{\overline{m}} \leq c \frac{\ln^\beta N}{N}, \quad (16)$$

в которых  $\chi_{(N)}$  - характеристическая функция решетки  $(N) = ZN$ .

Для того чтобы исследовать на неулучшаемость этот важный в вычислительной математике и в теории приближений результат, привлечем общую постановку задачи восстановления из [1]-[5].

В связи с задачей дискретизации решений уравнений в частных производных, отметим, что одним из наиболее эффективных методов численного решения таких уравнений является метод конечных разностей и его модификации, простейший вариант которого заключается в имитации частных производных соответствующими конечными разностями с последующим переходом к системе линейных уравнений на полученной сетке.

Однако вычисленными в отдельных точках  $\xi_k$  значениями определяющей решение уравнения непрерывной функции  $f(x)$  можно распорядиться по-иному, восстанавливая решение  $u(x; f)$  посредством вычислительного агрегата, наиболее приемлемый для достижения поставленной цели вид которого есть конечная свертка (к чему также относится (15))

$$\sum_{k=1}^N f(\xi_k) K_N(x - \xi_k)$$

где  $K_N$  - стандартная функция (ядро).

Именно такой вид в изучаемом здесь случае имеют операторы дискретизации, обеспечивающие оптимальный порядок убывания в степенной шкале величины Компьютерного (вычислительного) поперечника.

Заметим также, что приближения типа  $\varphi_N$  снимают возникающую в разностном методе задачу продолжения решения на остальные точки области по ее значениям в узлах разностной сетки.

Итак, рассмотрим задачу дискретизации решений уравнения Пуассона по значениям в точках правой части  $f$ . Данная задача для классов Соболева  $W_2^r$  и классов Никольского-Бесова  $B_{q,\theta}^r$  рассмотрена в [20]- [21].

Здесь в качестве  $F$  возьмем класс Коробова  $E_s^r$ . Нетрудно убедиться в том, что если  $\hat{f}(0) \neq 0$ , то при любом краевом условии существует непрерывная на  $[0, 1]^s$  функция  $w(x)$ , зависящая от краевого условия, при этом решение уравнения есть

$$u_w(x, f) = w(x) \cdot \hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s} * \frac{\hat{f}(m)}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x)}. \quad (17)$$

Если же  $f(x)$  нечетна по каждой из переменных, то функция

$$u(x, f) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s} * \frac{\hat{f}(m)}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x)}$$

является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона, удовлетворяющего на  $[0, 1]^s$  нулевым граничным условиям (см. [8, с. 187]).

Обратно, как легко проверить, всякая функция вида (17) удовлетворяет уравнению (14) на  $[0, 1]^s$ .

**Теорема 3.1 (Е.А. Баилов, Н.Темиргалиев [22]).** Пусть даны числа  $s(s = 2, 3, \dots)$ ,  $r > 1$  и  $2 \leq q \leq \infty$ . Тогда при восстановлении по значениям в точках  $P_N$  справедливы соотношения:

a) При  $(1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s}) > 0$

$$\frac{1}{N^{r - (1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s})}} \underset{s,r}{\ll} \delta_N(0; \Delta u = f, f \in E_s^r, P_N \times \{\varphi_N\})_{L^q(0,1)^s} \underset{s,r}{\ll} \frac{(\ln N)^{(r + \frac{2}{s})(s-1)}}{N^{r - (1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s})}}$$

b) При  $(1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s}) \leq 0$  или же  $q = 2, s(s = 2, 3, 4)$

$$\frac{1}{N^r} \underset{s,r}{\ll} \delta_N(0; \Delta u = f, f \in E_s^r, P^{(N)} \times \{\varphi_N\})_{L^q(0,1)^s} \underset{s,r}{\ll} \frac{(\ln N)^{r(\beta+s)+s}}{N^r},$$

где  $\beta$  из (16).

Для получения оценки снизу применяется следующее интегральное представление решения уравнения Пуассона (см., например, [23, с. 241]):

$$\bar{u}(x, f) = \int_{[0,1]^s} f(t_1, \dots, t_s) \left\{ \left[ \left( \sum_{j=1}^s (x_j - t_j)^2 \right)^{\frac{s-2}{2}} \right]^{-1} \right\} dt_1 \dots dt_s.$$

Таким образом, оценка  $\frac{r}{2} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{s})$  в (15) улучшена почти в квадрат раз и доведена до окончательной  $r - (1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{s})$  в степенной шкале:

С.С. Кудайбергеновым и С.Г. Сабитовой [24] рассматривалась задача дискретизации решения (16) уравнения Пуассона по значениям в точках правой части  $f$ , когда в качестве  $F$  взят класс Коробова  $E_s^r$ ,  $Y = L^q(0, 1)^s$ ,  $2 \leq q < \infty$ , используя в качестве сетки  $\{\xi_j\}_{j=1}^N$  сетку Смоляка [25] и оператор дискретизации

$$(Jf)(x) = w(x) \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega(\nu(0), q) \subset Z_{\nu(0)}^s} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1)sgn(\nu_j - \nu_j(0))} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) -$$



$$-\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in V_b} * \frac{1}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x)} \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega(\nu(m), q) \in Z_{\nu(m)}^s} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1-1}} \dots$$

$$\dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s-1}} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \text{sgn}(\nu_j - \nu_j(m))} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) e^{-2\pi i(m, \frac{k}{2^\nu})},$$

где  $b > 0$  и

$$V_b = \left\{ (m_1, \dots, m_s) : (m_1, \dots, m_s) \in Z^s, 1 \leq m_1 \cdot \dots \cdot m_s < 2^b \right\}.$$

В этих условиях справедлива

**Теорема 3.2 (С.С. Кудайбергенов, С.Г. Сабитова [24]).** Пусть даны числа  $s (s = 2, 3, \dots)$ ,  $r > 1$  и  $2 \leq p \leq \infty$ . Тогда

$$\sup_{f \in E_s^r} \|u(x; f) - (Jf)(x)\|_{L^q(0,1)^s} \ll \begin{cases} \frac{(\ln N)^{(s-1)(r+\frac{2}{s})}}{N^r}, & \text{при } 1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s} < 0 \\ \frac{(\ln N)^{(s-1)(r+\frac{2}{s})}}{N^{r-(1-\frac{1}{q}-\frac{2}{s})}}, & \text{при } 1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s} > 0 \\ \frac{(\ln N)^{r(s-1)+2s-1-\frac{s}{q}}}{N^r}, & \text{при } 1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s} = 0 \end{cases}$$

Таким образом, в случае  $1 - \frac{1}{p} - \frac{2}{s} > 0$  полученный этот результат совпадает с результатом теоремы 3.1. В остальных двух случаях полученная оценка имеет явный вид, тогда как число  $\beta$ , содержащееся в формулировке теоремы 3.1, требует дополнительных вычислений.

#### §4. Дискретизация решений уравнения теплопроводности

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad (t \geq 0, x \in R^s)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = f(x) \quad (x \in R^s)$$

**4.1 Результаты К.Шерниязова [26].** Для решений уравнения теплопроводности Кайратом Шерниязовым вычислена информативная мощность всех функционалов, являющихся значениями начального условия в точках, точная в степенной шкале. Отличительной особенностью этих результатов является обстоятельство, что восстановление производится по модифицированным сеткам Коробова, вследствие чего оператор восстановления Шерниязова (см. ниже (21)) есть конечная линейная комбинация средних арифметических сумм, что упрощает вычисления в сравнении, например, с формулами восстановления по сетке Смоляка.

**Теорема 4.1 (К.Шерниязов[26]).** Пусть даны целое положительное число  $s$ , число  $1 \leq q \leq \infty$ . Тогда для любого целого положительного числа  $N$  имеют место соотношения:

1. при  $r > 1$  в случае классов Коробова  $E_s^r$

$$\frac{1}{N^{r-1+\frac{1}{q}}} \underset{s,r}{\ll} \delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in E_s^r; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \underset{s,r,q}{\ll} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1+\frac{1}{q}}} \quad (18)$$

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in E_s^r; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \underset{s,r}{\ll} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-\frac{1}{2}}}, \quad (19)$$

2) при  $r > 1/2$  для классов Соболева с доминирующей смешанной производной  $SW_2^r(0, 1)^s$

$$\frac{1}{N^{r-(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \underset{s,r}{\ll} \delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in SW_2^r(0, 1)^s; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \underset{r,s}{\ll} \frac{\ln^{(r+\frac{1}{2})(s-1)} N}{N^{r-\frac{1}{2}}},$$

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in SW_2^r(0, 1)^s; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \underset{s,r}{\asymp} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-\frac{1}{2}}}, \quad (20)$$

3) при  $2r > s$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$  для класса Бесова  $B_{2,\theta}^r(0, 1)^s$

$$\frac{1}{N^{\frac{r}{s} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}} \underset{r,s,q,\theta}{\ll} \delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in B_{2,\theta}^r(0, 1)^s; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \underset{r,s}{\ll} \frac{\ln^{(\frac{r}{s} + \frac{1}{2})(s-1)} N}{N^{\frac{r}{s} - \frac{1}{2}}}.$$

Верхние оценки в этих соотношениях достигаются при восстановлении оператором

$$\begin{aligned} (T_N^{(0)} f)(t, x) = & \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \tau_j > 0, \\ \tau_1 + \dots + \tau_s \leq n}} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{\substack{k \in Z^s : -2^{\tau_1} p_{\tau_1 + \dots + \tau_s} \leq k_1 \leq 2^{\tau_1} p_{\tau_1 + \dots + \tau_s} \\ -2^{\tau_j} \leq k_j \leq 2^{\tau_j} (j = 2, \dots, s)}} f \left( \left\{ (A_{n,\tau}^{-1})' k \right\} \right) \times \\ & \times \sum_{\substack{m \in Z^s : 2^{\tau_j - 1} \leq \max\{1, |m_j|\} < 2^{\tau_j} \\ (j = 2, \dots, s)}} e^{2\pi i \left( m, x - \left\{ (A_{n,\tau}^{-1})' k \right\} - 4\pi^2(m, m)t \right)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где целое положительное число  $n$  определено по  $N$ :  $n = n(N) =$

$$\max \left\{ l \in Z^+ : \text{card} \left[ \bigcup_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < l}} \left\{ k \left( A_{l,\tau}^{-1} \right) : k \in K(l, \tau) \right\} \right] \leq n \right\}.$$

Далее, для всех

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_s) \in Z^s$  таких, что  $\tau_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $\tau_1 + \dots + \tau_s \leq n$  положено

$$A_{n,\tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{\tau_1+\dots+\tau_s} - 2^{\tau_1+1} a_2^{(\tau_1+\dots+\tau_s)} & \dots & \dots & - 2^{\tau_1+1} a_s^{(\tau_1+\dots+\tau_s)} \\ 0 & 2^{2\tau_2+1} & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 2^{2\tau_s+1} \end{pmatrix},$$

где  $p_1, \dots, p_n$  - простые числа такие, что

$$(n - k + 1)^{-2} 2^{n-k+2s} \leq p_k < (n - k + 1)^{-2} 2^{n-k+2s+1} \quad (k = 1, \dots, n),$$

$a$  целые  $a_1 = 1, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}$  - есть оптимальные коэффициенты по модулю  $p_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и индекса  $\beta(s) > 0$ .

Сравним оценки (18) и (19) К. Шерниязова с соответствующими оценками погрешности восстановления решений уравнения теплопроводности с начальным распределением температуры из классов Коробова  $E_r^s$ , представленных в монографии [27] Хуа Ло-Кена и Вань Юаня ( $\varepsilon > 0$  -любое)

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in E_s^r; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\infty(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \underset{s,r,\varepsilon}{\ll} N^{-((r-1)\frac{r}{2r-1}-\varepsilon)} (\ln N)^{(s-1)\left(\frac{r(r-1)}{2r-1}-\varepsilon\right)}, \quad (22)$$

и

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in E_s^r; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \underset{s,r,\varepsilon}{\ll} N^{-\left(\left(r-\frac{1}{2}\right)\frac{r}{2(2r)-1}-\varepsilon\right)} (\ln N)^{(s-1)\left(\frac{r(2r-1)}{4r-1}-\varepsilon\right)}. \quad (23)$$

Так как при всех  $1 < r < \infty$  выполнено неравенство  $\frac{1}{2} < \frac{r}{2r-1} < 1$  и  $\lim_{r \rightarrow 1+0} \frac{r}{2r-1} = 1 - 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{2r-1} = \frac{1}{2} + 0$  то в степенной шкале оценка (22) всегда хуже оценки (18), при возрастании  $r$  неограниченно приближаясь к оценке “хуже в квадрат раз”.

То же самое имеет место для оценок (23) и (19), с той лишь разницей, что при всех  $1 < r < \infty : \frac{1}{2} < \frac{2r}{2(2r)-1} < \frac{2}{3}$ .

**Замечание 4.1.** Из сравнений результатов К. Шерниязова с предшествовавшими результатами В.С. Рябенского, А.С. Смоляка, Хуа Ло-Кена и Вань Юаня можно сделать качественный вывод о том, что в вопросах восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных равномерная распределенность сетки само по

себе не является решающим фактором оптимального восстановления (по крайней мере в степенной шкале).

**4.2. Результаты Ш.У.Ажгалиева.** Шапеном Ажгалиевым изучена следующая конкретизация задачи дискретизации:  $\Omega = [0, 1]^s$ ,  $\Omega_1 = [0, 1]^s \times [0, \infty]$ ,  $Y = L^q(0, 1)^s \times L^\infty[0, \infty]$   $1 \leq q \leq \infty$ ,  $F$  суть классы Никольского-Бесова  $B_{2,\theta}^r(0, 1)^s$  и классы Соболева с доминирующей смешанной производной  $SW_2^r(0, 1)^s$ , а множество  $D_N = L_N \times \{\varphi_N\}$ .

Получены порядково точные информативные мощности всех линейных функционалов в задаче восстановления решений уравнения теплопроводности.

**Теорема 4.2 (Ш.У.Ажгалиев [28]).** Пусть даны целое положительное число  $s$ ,  $2 \leq q \leq \infty$ ,  $2 \leq \theta \leq \infty$  и  $r > s/2$ . Тогда имеет место соотношение ( $N = 1, 2, \dots$ )

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x) \in B_{2,\theta}^r(0, 1)^s; L_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,r,q}{\asymp} N^{-\left(\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\right)}.$$

**Теорема 4.3 (Ш.У.Ажгалиев [28]).** Пусть даны целое положительное число  $s$  и действительное число  $r > s/2$ . Тогда имеют место соотношения ( $N = 1, 2, \dots$ )

a)

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x) \in SW_2^r(0, 1)^s; L_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,r,q}{\asymp} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}}, \tag{24}$$

б)  $\delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x) \in SW_2^r(0, 1)^s; L_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\infty(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,r,q}{\asymp} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}$ .

**Замечание 4.2.** Верхние оценки во всех теоремах достигаются на функционалах – тригонометрических коэффициентах Фурье (для каждого класса свой спектр коэффициентов).

**Замечание 4.3.** Отметим, что результат (24) обобщает полученную К.Шерниязовым оценку снизу в (20) при дискретизации решений уравнения теплопроводности с начальными температурами из классов  $SW_2^r(0, 1)^s$  в том смысле, что функционалы по значениям в конечном числе точек заменены на всевозможные линейные.

**4.3. Результаты Е.Е.Нурмолдина.** Ериком Нурмолдином изучен случай дискретизации решений уравнения теплопроводности с функциями распределения температур из бесконечно гладких классов  $U_2(\beta, \theta, \alpha)$  при следующей конкретизации:  $\Omega = [0, 1]^2$ ,  $\Omega_1 = [0, 1]^2 \times [0, \infty)$ ,  $X = C[0, 1]^2$ ,  $Y = L^p[0, 1]^2 \times L^\infty[0, \infty)$  ( $2 \leq p \leq \infty$ ),  $(Tf)(x, t) = u(x, t; f)$ , где  $u(x, t; f)$  есть решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (t \geq 0, (x_1, x_2) \in R^2)$$

с начальным условием  $u((x_1, x_2), 0; f) = f(x_1, x_2)$ .

В качестве  $D_N$  возьмем множество  $\Phi_N \times \{\varphi_N\}$  всех пар  $(l^{(N)}, \varphi_N) \in \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$  таких, что  $l^{(N)} = (l_1(f), \dots, l_N(f))$  составлен из тригонометрических коэффициентов Фурье–Лебега  $l_j(f) = \hat{f}(m_1^{(j)}, m_2^{(j)})$  функции  $f$  для некоторых  $(m_1^{(j)}, m_2^{(j)}) \in Z^s$  ( $j = 1, \dots, N$ ). При этом постановка задачи следующая

$$\begin{aligned} & \delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x) \in F; \Phi_N \times \{\varphi_N\} \right)_Y = \\ & = \inf_{(A_N, \varphi_N)} \sup_{f \in F} \left\| u((x_1, x_2), t; f) - \varphi_N \left( \hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \dots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}); (x_1, x_2), t \right) \right\|_Y, \end{aligned}$$

где  $\inf$  берется по всем парам  $(A_N, \varphi_N)$ , состоящем из упорядоченного множества  $A_N = \{(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \dots, (m_1^{(N)}, m_2^{(N)})\} \subset Z^2$  и функции  $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; (x_1, x_2), t)$ .

Класс  $F$  есть класс  $U_2(\beta, \theta, \alpha)$  при  $\beta = (0, 0)$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ ,  $\alpha = (1, 1)$ :

$$U_2((0, 0), (\theta_1, \theta_2), (1, 1)) = \left\{ f(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 : \left| \hat{f}(m_1, m_2) \right| \leq \theta_1^{|m_1|} \cdot \theta_2^{|m_2|} \right\}.$$

**Теорема 4.4 (Е.Е.Нурмолдин [29]).** Пусть  $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ ,  $2 < p < \infty$ . Тогда выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x) \in U_2((0, 0), (\theta_1, \theta_2), (1, 1)); \Phi_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\infty[0, \infty) \times C(0, 1)^2} &\underset{\theta_1, \theta_2}{\asymp} N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log \theta_1} \theta_2}, \\ \delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x) \in U_2((0, 0), (\theta_1, \theta_2), (1, 1)); \Phi_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^2[0, \infty) \times C(0, 1)^2} &\underset{\theta_1, \theta_2}{\asymp} N^{\frac{1}{4}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log \theta_1} \theta_2}, \\ N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log \theta_1} \theta_2} &\ll_{\theta_1, \theta_2} \delta_N \left( 0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x, 0) = f(x) \in U_2((0, 0), (\theta_1, \theta_2), (1, 1)); \Phi_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^p[0, \infty) \times C(0, 1)^2} \ll_{\theta_1, \theta_2} \\ &\ll_{\theta_1, \theta_2} N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log \theta_1} \theta_2}. \end{aligned}$$

**4.4. Результаты Г.Е.Таугынбаевой.** Галия Таугынбаева провела полный К(В)П-анализ уравнения теплопроводности при восстановлении решения по информации, полученный от тригонометрических коэффициентов Фурье начального температурного распределения в рассматриваемом теле.

**Теорема 4.5 (Г.Е.Таугынбаева [30]).** Пусть даны числа  $s (s = 1, 2, \dots)$  и  $r > 1$ . Тогда при  $R(N) = \frac{N}{(\ln N)^{s-1}}$  выполнены соотношения

**К(В)П-1:**

$$\begin{aligned} &\delta_N(0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \equiv \\ \equiv &\delta_N(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u(x, 0) = f(x) \in E_s^r; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \equiv \\ \equiv &\inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}, \varphi_N f \in E_s^r} \sup \left\| u(x, t; f) - \varphi_N \left( \hat{f}(m^{(1)}, \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t) \right) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \\ \asymp &\sup_{f \in E_s^r} \left\| u(x, t; f) - \sum_{m \in \Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

**К(В)П-2:** Для вычислительного агрегата  $\bar{\varphi}_N \equiv \sum_{m \in \Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)}$

величина  $\bar{\varepsilon}_N = \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r} (N = 2, 3, \dots)$  является предельной погрешностью: во-первых,

$$\begin{aligned} \delta_N \left( 0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} &\asymp \delta_N \left( \bar{\varepsilon}_N; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \equiv \\ \equiv &\inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}, \varphi_N} \sup_{\substack{f \in E_s^r \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau = 1, \dots, N)}} \left\| u(x, t; f) - \varphi_N \left( \hat{f}(m^{(1)}) + \gamma_N^{(1)} \bar{\varepsilon}_N, \dots, \hat{f}(m^{(N)}) + \gamma_N^{(N)} \bar{\varepsilon}_N \right) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \\ \asymp &\sup_{\substack{f \in E_s^r \\ |\hat{f}(m) - z_m(f)| \leq \bar{\varepsilon}_N \\ m \in \Gamma_{R(N)}}} \left\| u(x, t; f) - \sum_{m \in \Gamma_{R(N)}} z_m(f) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

во-вторых, для всякой возрастающей  $\kappa + \infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left( \eta_N \bar{\varepsilon}_N = \eta_N \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}; \sum_{m \in \Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s}}{\delta_N(0; L_N(E_s^r(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s}} = +\infty.$$

**К(В)П-3:** Всякий вычислительный агрегат  $(\varphi_N(0, \dots, 0; x, t) \equiv 0$  на  $[0, 1]^s \times [0, \infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из  $N$  гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности  $\bar{\varphi}_N$ : для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left( \eta_N \bar{\varepsilon}_N = \eta_N \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}; \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t) \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s}}{\delta_N(0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s}} = +\infty.$$

**Теорема 4.6 (Г.Е.Таугынбаева [30]).** Пусть даны числа  $s(s = 1, 2, \dots)$  и  $r > 1$ . Тогда  $R(N) = \frac{N}{(\ln N)^{s-1}}$  выполнены соотношения

**К(В)П-1:**

$$\begin{aligned} & \delta_N(0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \equiv \\ & \equiv \delta_N(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u(x, 0) = f(x) \in SW_2^r(0, 1)^s; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \equiv \\ & \equiv \inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}; \varphi_N f \in SW_2^r(0, 1)^s} \sup \left\| u(x, t; f) - \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \\ & \asymp \sup_{f \in SW_2^r(0, 1)^s} \left\| u(x, t; f) - \sum_{m \in \Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}, \end{aligned}$$

**К(В)П-2:** Для функций  $\bar{\varphi}_N = \sum_{m \in \Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)}$  величина  $\bar{\varepsilon}_N =$

$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r+\frac{1}{2}}}$  ( $N = 2, 3, \dots$ ) является предельной погрешностью: во-первых,

$$\begin{aligned} & \delta_N \left( 0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \\ & \asymp \delta_N \left( \bar{\varepsilon}_N; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \equiv \\ & \equiv \inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}; \varphi_N f \in SW_2^r(0, 1)^s} \sup_{\substack{|\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau = 1, \dots, N)}} \left\| u(x, t; f) - \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}) + \gamma_N^{(1)} \bar{\varepsilon}_N, \dots, \hat{f}(m^{(N)}) + \gamma_N^{(N)} \bar{\varepsilon}_N; x, t) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \\ & \asymp \sup_{\substack{f \in SW_2^r(0, 1)^s \\ |\hat{f}(m) - z_m(f)| \leq \bar{\varepsilon}_N \\ m \in \Gamma_{R(N)}}} \left\| u(x, t; f) - \sum_{m \in \Gamma_{R(N)}} z_m(f) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}, \end{aligned}$$

во-вторых, для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left( \eta_N \bar{\varepsilon}_N = \eta_N \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r+\frac{1}{2}}}; \sum_{m \in \Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s}}{\delta_N(0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s}} = +\infty.$$

**К(В)П-3:** Всякий вычислительный агрегат  $(\varphi_N(0, \dots, 0; x, t) \equiv 0$  на  $[0, 1]^s \times [0, \infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из  $N$  гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку)

предельной погрешности  $\bar{\varphi}_N$ : для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left( \eta_N \bar{\varepsilon}_N = \eta_N \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r+\frac{1}{2}}}; \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t) \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}}{\delta_N \left( 0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}} = +\infty.$$

**§5. Дискретизация решений волнового уравнения**

Рассматривается задача Коши для волнового уравнения ( $s=1,2,\dots$ )

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad (u = u(x, t), 0 \leq t < \infty, x \in R^s), \tag{25}$$

$$u(x, 0) = f_1(x) \in F^{(1)}, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in F^{(2)} \quad (x \in R^s). \tag{26}$$

В изучаемом здесь случае задача (25)-(26) имеет явное решение в виде суммы абсолютно сходящегося кратного функционального ряда, который полностью определяется наборами  $\left\{ \hat{f}_1(m) \right\}_{m \in Z^s}$  и  $\left\{ \hat{f}_2(m) \right\}_{m \in Z^s}$  коэффициентов Фурье. Поэтому возникает проблема приближения решения – объекта бесконечного – по конечной числовой информации заданного объема  $N$ , полученной от функций  $f_1$  и  $f_2$ , математическая формулировка которой содержится в следующей общей задаче восстановления.

Через  $u(x, t; f, 0)$  обозначим решение задачи (25)-(26) в случае

$$f(x) \equiv f_1(x) \in F^{(1)}(0, 1)^s, f_2(x) \equiv 0, \tag{27}$$

через  $u(x, t; 0, f)$  - в случае

$$f_1(x) \equiv 0, f_2(x) \equiv f_2(x) \in F^{(2)}(0, 1)^s \tag{28}$$

и через  $u(x, t; f_1, f_2)$  обозначим решение задачи (25)-(26) в случае

$$f_1(x) \in F^{(1)}(0, 1)^s, f_2(x) \in F^{(2)}(0, 1)^s. \tag{29}$$

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 5.1 (информативная мощность всех возможных линейных функционалов; Ш.К.Абикенова, А.Б.Утесов, Н.Темиргалиев [31]).** Пусть  $\{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}\}$  и  $\omega_\nu$  - система и отдельная функция типа модуля гладкости  $r_1, \dots, r_s$ -го и  $\nu$ -го порядков соответственно, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{m \in Z^s} \frac{(\bar{m}_1^2 + \dots + \bar{m}_s^2)^2}{\omega_{r_1}^{-2}(1/\bar{m}_1) + \dots + \omega_{r_s}^{-2}(1/\bar{m}_s)} < \infty, \sum_{m \in Z^s} \frac{(\bar{m}_1^2 + \dots + \bar{m}_s^2)^2}{\omega_\nu^{-2}(1/\bar{m}_1) + \dots + \omega_\nu^{-2}(1/\bar{m}_s)} < \infty$$

и такие, что

$$\omega_{k_j}(\eta \cdot \xi) \leq C(\omega_{k_j}) \cdot \omega_{k_j}(\eta) \cdot \omega_{k_j}(\xi) \quad (k_j = r_j, j = 1, \dots, s \text{ либо } k_j = \nu, j = 1, \dots, s)$$

при некотором положительном  $C(\omega_{k_j})$  и для всех  $0 < \xi < \eta \leq 1$ .

Пусть также  $\tau_1(\delta)$  и  $\tau_2(\delta)$  - средние функции систем модулей гладкости  $\{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}\}$  и  $\{\omega_\nu, \dots, \omega_\nu\}$  соответственно.

Тогда в случае задачи (25)-(26) в условиях (29) при  $F^{(1)} = W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s, F^{(2)} = W_2^{\omega_\nu, \dots, \omega_\nu}(0, 1)^s$  имеют место соотношения ( $N=2,3,\dots$ )

$$\min_{N_1 + N_2 = N, N_1 \geq 2, N_2 \geq 2} \inf_{(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N) \in L_N(W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}, W_2^{\omega_\nu, \dots, \omega_\nu}) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0,1)^s \\ f_2 \in W_2^{\omega_\nu, \dots, \omega_\nu}(0,1)^s}}$$

$$\left\| u(x, t; f_1, f_2) - \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s, \omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}, \omega_\nu}{\asymp} \min_{\substack{N_1 + N_2 = N \\ N_1 \geq 2, N_2 \geq 2}} \left( \tau_1 \left( \frac{1}{N_1} \right) + \tau_2 \left( \frac{1}{N_2} \right) N_2^{-\frac{1}{s}} \right),$$

причем оценка сверху

a) в случае задачи (25)- (26) в условиях (27) достигается на следующем агрегате ( $N = 2, 3, \dots$ )

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}_N^{(1)}(l_1(f), \dots, l_N(f); x, t) = \\ & = \sum_{\substack{k = (k_1, \dots, k_s) \in Z^s : \\ |k_j| \leq n_j (j = 1, \dots, s)}} \hat{f}(k_1, \dots, k_s) \cos \left( 2\pi \sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2} t \right) e^{2\pi i(k_1 x_1 + \dots + k_s x_s)}, \\ & \quad n_j = \left[ \left( \omega_{r_j}^* \left( \tau_1 \left( \frac{1}{N} \right) \right) \right)^{-1} \right] + 1, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

b) в случае задачи (25)-(26) в условиях (28) на агрегате вида

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}_N^{(2)}(l_1(f), \dots, l_N(f); x, t) = \\ & = \sum_{\substack{k = (k_1, \dots, k_s) \in Z^s : \\ |k_j| \leq n_j (j = 1, \dots, s)}} \hat{f}(k_1, \dots, k_s) \frac{\sin \left( 2\pi \sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2} t \right)}{\sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2}} e^{2\pi i(k_1 x_1 + \dots + k_s x_s)}, \\ & \quad n_j = \left[ \left( \omega_\nu^* \left( \tau_2 \left( \frac{1}{N} \right) \right) \right)^{-1} \right] + 1, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

**Следствие 5.1.** Пусть даны числа  $s (s = 1, 2, \dots), r_j \geq 1, j = 1, \dots, s$  и  $\nu$  такие, что  $\frac{5}{r_j} + \sum_{k=1, k \neq j}^s \frac{1}{r_j} < 2, j = 1, \dots, s, \frac{3}{r_j} + \frac{3}{r_l} + \sum_{k=1, k \neq j, k \neq l}^s \frac{1}{r_j} < 2, j, l = 1, \dots, s, j \neq l, \nu > 1 + \frac{s}{2}$ . Тогда в условиях теоремы 5.1 при  $\omega_{r_1}(\delta) = \delta^{r_1}, \dots, \omega_{r_s}(\delta) = \delta^{r_s}, \omega_\nu(\delta) = \delta^\nu$  имеет место соотношение  $N = 4, 5, \dots$

$$\min_{\substack{N_1 + N_2 = N \\ N_1 \geq 1, N_2 \geq 1}} \inf_{(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N) \in L_N(W_2^{\delta^{r_1}, \dots, \delta^{r_s}}, W_2^{\delta^\nu, \dots, \delta^\nu}) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{\delta^{r_1}, \dots, \delta^{r_s}}(0,1)^s \\ f_2 \in W_2^{\delta^\nu, \dots, \delta^\nu}(0,1)^s}}$$

$$\left\| u(x, t; f_1, f_2) - \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s, r_1, \dots, r_s; \nu}{\asymp} N^{-\min\{(r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1}), (\nu+1)s^{-1}\}}.$$

**Следствие 5.2.** Пусть даны модуль гладкости  $\omega_{r_j}(\delta) = \delta^{r_j} \ln^{k_j} \frac{2}{\delta}, r_j \geq 1, k_j > 0, j = 1, \dots, s$  и  $\omega_\nu(\delta) = \delta^\nu \ln^\lambda \frac{2}{\delta}, \nu \geq 1, \lambda > 0$ . Тогда в условиях теоремы 5.1 имеют место соотношения  $N = 2, 3, \dots$

$$\min_{\substack{N_1 + N_2 = N \\ N_1 \geq 1, N_2 \geq 1}} \inf_{(l^{(N_1, N_2)}, \varphi_N) \in L_N(W_2^{\delta^{r_1} \ln^{k_1} \frac{2}{\delta}}, \dots, \delta^{r_s} \ln^{k_s} \frac{2}{\delta}}, W_2^{\delta^\nu \ln^\lambda \frac{2}{\delta}}, \dots, \delta^\nu \ln^\lambda \frac{2}{\delta}}) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty t)}}$$

$$\begin{aligned} & \left\| u(x, t; f_1, f_2) - \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t) \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp \\ & f_1 \in W_2^{\delta r_1 \ln k_1 \frac{2}{\delta}, \dots, \delta r_s \ln k_s \frac{2}{\delta}}(0, 1)^s \\ & f_2 \in W_2^{\delta \nu \ln \lambda \frac{2}{\delta}, \dots, \delta \nu \ln \lambda \frac{2}{\delta}}(0, 1)^s \\ & \asymp \begin{cases} \frac{(\ln N)^{\max\{(k_1 r_1^{-1} + \dots + k_s r_s^{-1})(r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1}, \lambda\}}}{N^{(\nu+1)s^{-1}}}, & \text{если } (r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1} = (\nu + 1)s^{-1}, \\ \frac{(\ln N)^\lambda}{N^{(\nu+1)s^{-1}}}, & \text{если } (r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1} > (\nu + 1)s^{-1}, \\ \left( \frac{(\ln N)^{(k_1 r_1^{-1} + \dots + k_s r_s^{-1})}}{N} \right) (r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1}, & \text{если } (r_1^{-1} + \dots + r_s^{-1})^{-1} < (\nu + 1)s^{-1}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Теорема 5.2 (Е.И.Шангиреев[32]).** Пусть даны числа  $s (s = 1, 2, \dots)$ ,  $r$  целое такое, что  $2r > s$ ,  $2 \leq \nu < \infty$ ,  $p (p = 2, 3, \dots)$  и  $N = p^s$ . Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in W_2^r(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\nu(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp_{s,r,\nu} N^{-\frac{r}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}},$$

**Теорема 5.3 (Е.И.Шангиреев[32]).** Пусть даны числа  $s (s = 1, 2, \dots)$ ,  $1 < q \leq 2$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $r$  такое, что  $qr > s$  и пусть  $2 \leq \nu \leq \infty$ . Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\nu(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp_{s,r,q} N^{-\frac{r}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}},$$

( $p = 2^m (m = 1, 2, \dots)$ ,  $N = p^s$ ). Оценки сверху достигаются на операторе восстановления

$$\bar{\varphi}_N(f(\xi_1), \dots, f(\xi_N); x, t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n_j = 0 \\ j = 1, \dots, s}}^{p-1} f(\xi_n) \sum_{-\frac{p}{2} \leq k_j < \frac{p}{2}} \cos \left( 2\pi \sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2} t \right) e^{2\pi i(k, x - \xi_n)}$$

по равномерной сетке

$$\xi_n = \left( \frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), n_j = 0, 1, \dots, p-1; j = 1, \dots, s.$$

**Теорема 5.4 (Е.И.Шангиреев[32]).** Пусть даны числа  $s (s = 1, 2, \dots)$ ,  $1 < q \leq 2$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $r$  такое, что  $qr > s$ . Тогда при всяком  $p = 2^m (m = 1, 2, \dots)$ ,  $N = p^s$  имеют место

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0, 1)^s; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \ll_{s,r,q}$$

$$\ll_{s,r,q} N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s} - \frac{1}{2}}, & \text{если } 1 < q < \frac{2s}{2+s}, \\ \sqrt[s]{\ln N}, & \text{если } q = \frac{2s}{2+s}, \\ 1, & \text{если } \frac{2s}{2+s} < q < 2, \end{cases}$$

и

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0, 1)^s; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\infty(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \ll_{s,r,q}$$

$$\ll_{s,r,q} N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}}, & \text{если } 1 < q < s, \\ \sqrt[s]{\ln N}, & \text{если } q = s, \\ 1, & \text{если } s < q < 2. \end{cases}$$

При  $s = 2$  и  $2 \leq \nu < \infty$

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0, 1)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\nu(0,1)^2 \times L^\infty[0,+\infty)} \gg_{s,r,q}$$

$$\gg_{s,r,q} N^{-\frac{r}{2}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}}, & \text{если } 1 < q < \frac{2\nu}{2+\nu}, \\ 1, & \text{если } \frac{2\nu}{2+\nu} < q \leq 2, \end{cases}$$



$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0, 1)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\infty(0,1)^2 \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{r}{\asymp} \\ \underset{r}{\asymp} N^{-\frac{r}{2}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}-}, & \text{если } 1 < q < 2, \\ \sqrt{\ln N}, & \text{если } q = 2. \end{cases}$$

В частности,

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0, 1)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^2(0,1)^2 \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{r}{\asymp} N^{-\frac{r}{s}}.$$

Оценки сверху достигаются на операторе восстановления

$$\bar{\varphi}_N(f(\xi_1), \dots, f(\xi_N), x, t) = \\ = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n_j=0 \\ j=1, \dots, s}}^{p-1} f(\xi_n) \left( t + \sum_{\substack{-\frac{p}{2} \leq k_j < \frac{p}{2} \\ j=1, \dots, s}} * \frac{\sin(2\pi\sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2}t)}{\sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2}} e^{2\pi i(k, x - \xi_n)} \right)$$

по равномерной сетке

$$\xi_n = \left( \frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), \quad n_j = 0, 1, \dots, p-1; \quad j = 1, \dots, s.$$

Е.И.Шангиреевом [32] в качестве множества  $F$  рассмотрены классы Коробова  $E_s^r$  ( $r > 1$ ).

**Теорема 5.5 (Е.И.Шангиреев [32]).** Пусть даны целое положительное число  $s$  и число  $\beta > s - 1$ . Пусть для каждого  $l$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) число  $p_l$  - есть простое число, удовлетворяющее соотношению  $2^{l+3} \leq p_l \cdot l^2 < 2^{l+4}$ , а целые числа  $a_1^{(l)} = 1, a_2^{(l)}, \dots, a_s^{(l)}$  - оптимальные коэффициенты по модулю  $p_l$  индекса  $\beta$ . Пусть для всякого целого  $\theta \geq s+1$  и всякого  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$  из  $Z^s$  такого, что  $\tau_j > 0$  и  $\|\tau\| \stackrel{def}{=} \tau_1 + \dots + \tau_s < \theta$  матрица  $A_{\theta, \tau}$  и множества  $K(\theta, \tau)$ ,  $\gamma(\tau)$  определены соответственно равенствами

$$A_{\theta, \tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{\theta-\|\tau\|} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(\theta-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(\theta-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(\theta-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \dots & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix},$$

$$K(\theta, \tau) = \{k \in Z^s : -2^{\tau_1} p_{\theta-\|\tau\|} \leq k_1 < 2^{\tau_1} p_{\theta-\|\tau\|}, -2^{\tau_j} \leq k_j < 2^{\tau_j} (j = 2, 3, \dots, s)\},$$

$$\gamma(\tau) = \{m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : 2^{\tau_j-1} \leq \max\{|m_j|, 1\} < 2^{\tau_j} (j = 1, \dots, s)\}.$$

Тогда для любого целого положительного числа  $N$  при  $r > 1$  и  $2 \leq \nu \leq \infty$  имеют место

$$N^{-(r-1+\frac{1}{\nu})} \underset{r,s,\nu}{\ll} \delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in E_s^r, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\nu(0,1)^s} \underset{r,s,\nu}{\ll} N^{-(r-1+\frac{1}{\nu})} \ln^{r(s-1)} N$$

и

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in E_s^r; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\nu(0,1)^s} \underset{r,s,\nu}{\ll} N^{-(r-1+\frac{1}{s}+\frac{1}{\nu})} \ln^{(r+\frac{1}{2})(s-1)} N,$$

а при  $s=2$

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in E_2^r; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{L^\nu(0,1)^2} \gg N^{-(r-\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu})}.$$

Оператор восстановления есть

$$\bar{\varphi}_N(f; x, t) = \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j \geq 0, \|\tau\| < n}} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} f(k(A_{n,\tau}^{-1})') \sum_{m \in \gamma(\tau)} \rho_{m,i} e^{2\pi i(m, x - k(A_{n,\tau}^{-1})')},$$

$$n = \max\{\theta \in Z_+ : \text{card} \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j \geq 0, \|\tau\| < \theta} \{k(A_{\theta,\tau}^{-1})' : k \in K(\theta, \tau)\} \leq N,$$

где для решения задачи (25)-(26) в условиях (27)  $\rho_{m,1}(t) = \cos(2\pi\sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2}t)$ , а

$$\text{для решения задачи (25)-(26) в условиях (28) } \rho_{m,2}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi\sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2}t)}{\sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2}}, & m \neq 0 \\ t, & m = 0 \end{cases}.$$

**Дискретизация решений волнового уравнения с оценками погрешностей в нормах пространств дифференцируемых функций**

**Теорема 5.6 (Е.И.Шангиреев[32]).** Пусть даны числа  $s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ),  $1 < q \leq 2$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $2 \leq \mu \leq \infty$ , целые положительные  $r$  и  $l$  такие, что  $l > \frac{s}{\mu}$ ,  $r > \frac{s}{q} + l - \frac{s}{\mu}$ . Тогда имеет место

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0,1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{W_\mu^l(0,1)^s} \underset{s,q,\theta,l,\mu}{\asymp} N^{-\frac{r-l}{s} + \frac{1}{q} - \frac{1}{\mu}}$$

$(p = 2^m \ (m = 1, 2, \dots), N = p^s),$

где

$$\xi_n = \left( \frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), \quad n_j = 0, 1, \dots, p-1; \quad j = 1, \dots, s$$

и

$$\bar{\varphi}_N(f(\xi_1), \dots, f(\xi_N); x, t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n_j = 0 \\ j = 1, \dots, s}}^{p-1} f(\xi_n) \sum_{\substack{-\frac{p}{2} \leq k_j < \frac{p}{2} \\ j = 1, \dots, s}} \cos \left( 2\pi\sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2}t \right) e^{2\pi i(k, x - \xi_n)}.$$

**Теорема 5.7 (Е.И.Шангиреев[32]).** Пусть даны числа  $s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ),  $1 < q \leq 2$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ . Тогда при всяком  $p = 2^m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ),  $N = p^s$  имеют место следующие оценки

1. для  $\frac{s}{2} < l < \frac{s}{2} + 1$  и  $r > \frac{s}{p} + l - \frac{s}{2}$

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0,1)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{W_2^l(0,1)^s} \ll$$

$$\ll_{r,s,q,\theta,l} N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{l}{s} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} - \frac{1}{s}}, & \text{если } 1 < q < \frac{2s}{2(1-l)+s} \\ (\ln N)^{\frac{1-l}{s}}, & \text{если } q = \frac{2s}{2(1-l)+s} \\ 1, & \text{если } \frac{2s}{2(1-l)+s} < q \leq 2 \end{cases},$$

2. для  $l \geq \frac{s}{2} + 1$  и  $r > \frac{s}{q} + l - \frac{s}{2}$

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0,1)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{W_2^l(0,1)^s} \ll$$

$$\lll N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}-\frac{1}{s}}, \text{ если } 1 < q < \frac{2s}{2+s}, \\ \sqrt[s]{\ln N}, \text{ если } q = \frac{2s}{2+s}, \\ 1, \text{ если } \frac{2s}{2+s} < q \leq 2. \end{cases}$$

3. для  $0 < l < 1$  и  $r > \frac{s}{q} + l$

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0, 1)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{W_{\infty}^l(0,1)^s} \lll$$

$$\lll_{r,s,q,\theta,l} N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{l}{s}+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}, \text{ если } 1 < q < \frac{s}{1-l}, \\ (\ln N)^{\frac{1-l}{s}}, \text{ если } q = \frac{s}{1-l}, \\ 1, \text{ если } \frac{s}{1-l} < q \leq 2, \end{cases}$$

4. для  $l \geq 1$  и  $r > \frac{s}{q} + l$

$$\delta_N \left( 0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0, x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = f(x) \in B_{q,\theta}^r(0, 1)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{W_{\infty}^l(0,1)^s} \lll$$

$$\lll_{r,s,q,\theta,l} N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}, \text{ если } 1 < q < s \\ \sqrt[s]{\ln N}, \text{ если } q = s \\ 1, \text{ если } s < q \leq 2 \end{cases},$$

где оценки сверху достигаются на операторе

$$\varphi_N(f(\xi_1), \dots, f(\xi_N); x, t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n_j=0 \\ j=1, \dots, s}}^{p-1} f(\xi_n) \left( t + \sum_{\substack{-\frac{p}{2} \leq k_j < \frac{p}{2} \\ j=1, \dots, s}} * \frac{\sin(2\pi\sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2} t)}{\sqrt{k_1^2 + \dots + k_s^2}} e^{2\pi i(k, x - \xi_n)} \right)$$

$$\xi_n = \left( \frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), n_j = 0, 1, \dots, p-1; j = 1, \dots, s.$$

### §6. Дискретизация решений уравнения Клейна-Гордона

Рассматривается задача Коши для уравнения Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - u \quad (u = u(x, t), 0 \leq t < \infty, x \in R^s, s = 1, 2, \dots), \quad (30)$$

$$u(x, 0) = f_1(x) \in F^{(1)}, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in F^{(2)} \quad (x \in R^s) \quad (31)$$

решение которой описывает, в частности, свободную релятивистскую (псевдо) скалярную частицу массы 1.

В изучаемом здесь случае задача (30)-(31), опять же, как в случае волнового уравнения, имеет явное решение в виде суммы абсолютно сходящегося кратного функционального ряда

$$u(x, t; f_1, f_2) = \sum_{m \in Z^s} \left( \hat{f}_1(m) S'(t) + \hat{f}_2 S(t) \right) e^{2\pi i(m, x)},$$

который полностью определяется наборами  $\{\hat{f}_1(m)\}_{m \in Z^s}$  и

$\{\hat{f}_2(m)\}_{m \in Z^s}$  тригонометрических коэффициентов Фурье-Лебега. Поэтому возникает проблема приближения решения (объекта бесконечного) по конечной числовой информации заданного объема  $N$ , полученной от функций  $f_1$  и  $f_2$ , математическая формулировка которой содержится в общей К(В)П-задаче восстановления.

Для сокращения записи всюду ниже будем использовать обозначение

$$S_m(t) = \frac{\sin\left(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}\right)}{\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}}$$

и, как следствие,

$$S'_m(t) = \cos\left(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}\right).$$

Имеют место следующие теоремы.

**6.1. Информативная мощность всех возможных линейных функционалов в классах Никольского.** Справедлива

**Теорема 6.1 (И.Ибатуллин, Н.Темиргалиев [33]).** Пусть даны целые положительные числа  $s$ , положительные числа  $r_1$  и  $r_2$  такие, что

$$r_1 > 2 + \frac{s}{2}, r_2 > 1 + \frac{s}{2}$$

Тогда имеют место соотношения ( $N = 2, 3, \dots$ )

**$K(B)II-1$ :**

$$\min_{\substack{N_1 + N_2 = N, \\ N_1 \geq 1, N_2 \geq 1}} \inf_{\substack{l_{N_1}^{(1)}, \dots, l_{N_1}^{(N_1)}, \\ l_{N_2}^{(1)}, \dots, l_{N_2}^{(N_2)}}} \sup_{\substack{f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s \\ f_2 \in H_2^{r_2}(0,1)^s}} \|u(x, t; f_1, f_2) - \\ - \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1), l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t)\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s, r_1, r_2}{\asymp} \\ \underset{s, r_1, r_2}{\asymp} N^{-\frac{\min\{r_1, r_2 + 1\}}{s}}.$$

**$K(B)II-2$ :** Для вычислительного агрегата  $\bar{\varphi}_N^{(b)}(l_{N_1}^{(1)}(f_1), \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1), l_{N_2}^{(1)}(f_2), \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t) =$

$$\sum_{m \in Z^s: \|m\| \leq 2^{n_1}} \hat{f}(m) S'_m(t) e^{2\pi i(m, x)} + \sum_{m \in Z^s: \|m\| \leq 2^{n_2}} \hat{f}(m) S_m(t) e^{2\pi i(m, x)}, n = \left\lceil \log_2 \left( \sqrt{N} - 1 \right) \right\rceil - 1$$

и для  $N$ -мерного вектора  $\bar{\varepsilon}_{N_1, N_2} \equiv (\bar{\varepsilon}_{N_1}, \bar{\varepsilon}_{N_2}) = (\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(1)}, \dots, \bar{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)}, \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(1)}, \dots, \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)})$  с компонентами  $\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)} = N^{-\frac{r_1}{s} - \frac{1}{2}}$  ( $j_1 = 1, 2, \dots, N_1$ ),  $\bar{\varepsilon}_{N_2}^{(j_2)} = N^{-\frac{r_2}{s} - \frac{1}{2}}$  ( $j_2 = 1, 2, \dots, N_2$ ) имеет место соотношение

$$\delta_N(\bar{0}_N; L_N(H_2^{r_1}(0,1)^s, H_2^{r_2}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp \\ \asymp \delta_N\left(\bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}} = (\bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)}}, \bar{\varepsilon}_{N_2^{(0)}}); L_N(H_2^{r_1}(0,1)^s, H_2^{r_2}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}\right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \equiv$$

$$\equiv \min_{\substack{N_1 \in Z_+, N_2 \in Z_+ : \\ N_1 + N_2 = N}} \inf_{\substack{m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)} \\ n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)} \\ \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s; f_2 \in H_2^{r_2}(0,1)^s \\ \left| \gamma_N^{(j_1)} \right| \leq 1 (j_1 = 1, \dots, N_1) \\ \left| \gamma_N^{(j_2)} \right| \leq 1 (j_2 = 1, \dots, N_2)}} \|u(x, t; f_1, f_2) - \\ - \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{N_1}^{(1)}, \dots, l_{N_1}^{(N_1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(N_1)} \bar{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)}, l_{N_2}^{(1)}(f_2) + \gamma_{N_2}^{(1)} \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(1)}, \dots, l_{N_2}^{(N_2)}(f_2) + \gamma_{N_2}^{(N_2)} \bar{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)}; x, t)\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp \\ \asymp \sup_{\substack{f_1 \in H_2^{r_1}(0,1)^s; f_2 \in H_2^{r_2}(0,1)^s \\ \left| \gamma_{N_1}^{(j_1)} \right| \leq 1 (j_1 = 1, \dots, N_1) \\ \left| \gamma_{N_2}^{(j_2)} \right| \leq 1 (j_2 = 1, \dots, N_2)}} \left\| u(x, t; f_1, f_2) - \bar{\varphi}_N(l_{N_1^{(0)}}^{(1)}(f_1) + \gamma_{N_1^{(0)}}^{(1)} \varepsilon_{N_1^{(0)}}^{(1)}, \right.$$

$$\begin{aligned} & \dots, l_{N_1^{(0)}}^{(N_1^{(0)})}(f_1) + \gamma_{N_1^{(0)}}^{(N_1^{(0)})} \varepsilon_{N_1^{(0)}}^{(N_1^{(0)})}, l_{N_2^{(0)}}^{(1)}(f_2) + \gamma_{N_2^{(0)}}^{(1)} \varepsilon_{N_2^{(0)}}^{(1)}, \dots, l_{N_2^{(0)}}^{(N_2^{(0)})}(f_2) + \gamma_{N_2^{(0)}}^{(N_2^{(0)})} \varepsilon_{N_2^{(0)}}^{(N_2^{(0)})}; x, t) \Big\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \\ & \asymp N^{-\frac{\min\{r_1; r_2+1\}}{s}}. \end{aligned}$$

**Замечание 6.1.** Здесь можно повторить, что как и в случае волнового уравнения, конкретизируя линейные функционалы  $l_1, \dots, l_N$  и функции  $\varphi_N$ , в качестве вычислительных агрегатов  $\varphi_N(l_1, \dots, l_N; x, t)$  в приведенных теоремах можно получать все возможные  $N$ -е частичные суммы рядов Фурье по всем возможным ортонормированным системам, в их числе и по вейвлет-системам, все возможные  $N$ -е частичные суммы разложений по всем возможным базисам и также разностные схемы, т.е. фактически весь спектр агрегатов, изучаемых в теории приближений и вычислительной математике. Из теоремы 6.1 следует, что в их условиях невозможно получить оценку лучше, чем  $\asymp N^{\frac{\min\{r_1; r_2+1\}}{s}}$ .

**6.2. Информативная мощность всех возможных линейных функционалов в классах Соболева (Н.Темиргалиев, К.Шерниязов, М.Берикханова [34]).**

**Теорема 6.2.** Пусть даны числа  $s(s=1,2,\dots)$ ,  $r_1 > 2 + \frac{s}{2}$  и пусть  $D_N = \Phi_N(W_2^{r_1}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}$ . Тогда

**К(В)П-1:**

$$\begin{aligned} \delta_N(0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x,0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0,1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; \Phi_N(W_2^{r_1}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} & \asymp \\ & \asymp N^{-\frac{r_1}{s}}, \end{aligned}$$

**К(В)П-2:** Для вычислительного агрегата  $\bar{\varphi}_N(x, t; f) = \sum_{m \in I_n} \hat{f}(m) \cos\left(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}\right) e^{2\pi i(m,x)} (B_N = I_n = \{m^{(1)}; \dots; m^{(N)}\} \subset Z^s)$

последовательность  $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}} (N = 1, 2, \dots)$  является предельной погрешностью: во-первых,

$$\begin{aligned} & \delta_N(0; \Phi_N(W_2^{r_1}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp \\ & \asymp \delta_N(\bar{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x,0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0,1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; \Phi_N(W_2^{r_1}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}) \asymp N^{-\frac{r_1}{s}}, \end{aligned}$$

во-вторых, причем для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(\bar{\varepsilon}_N \eta_N = N^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}} \eta_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x,0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0,1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; \bar{\varphi}_N(x, t; f))_{L^q, \infty}}{\delta_N(0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x,0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0,1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; \Phi_N(W_2^{r_1}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q, \infty})_{L^q, \infty}} = +\infty$$

**К(В)П-3:** Всякий вычислительный агрегат  $(\varphi_N(0, \dots, 0; x, t) \equiv 0 \text{ на } [0, 1]^s \times [0, +\infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t)$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из  $N$  гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности  $\bar{\varphi}_N(x, t; f)$ : для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N = \eta_N N^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}}; \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t))_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0, \infty)}}{\delta_N(0; L_N(W_2^{r_1}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0, \infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0, \infty)}} = +\infty.$$

**Теорема 6.3.** Пусть даны числа  $s (s=1,2,\dots)$ ,  $r_2 > 2 + \frac{s}{2}$  и пусть  $D_N = \Phi_N(W_2^{r_2}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)}$ . Тогда

**К(В)П-1:**

$$\begin{aligned} \delta_N(0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0,1)^s; \Phi_N(W_2^{r_2}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} & \asymp \\ & \asymp N^{-\frac{r_2+1}{s}}, \end{aligned}$$

**К(В)П-2:** Для вычислительного агрегата  $\bar{\varphi}_N(x, t; f) = \sum_{m \in I_n} \hat{f}(m) \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1})}{\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}} e^{2\pi i(m,x)}$  ( $I_n = \{m^{(1)}; \dots; m^{(N)}\} \subset Z^s, N \asymp 2^{ns}$ )

последовательность  $\bar{\varepsilon}_N \equiv \bar{\varepsilon}_N(s) = \begin{cases} N^{-\frac{r_2+1}{s}}, & \text{при } s = 1, \\ N^{-\frac{r_2+1}{s}} (\ln N)^{-\frac{1}{2}}, & \text{при } s = 2, \\ N^{-\frac{r_2+1}{s} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{s})} = N^{-\frac{r_2}{s} - \frac{1}{2}}, & \text{при } s > 2 \end{cases}$  ( $N=2,3,\dots$ )

является предельной погрешностью: во-первых,

$$\delta_N(0; \Phi_N(W_2^{r_2}(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp$$

$$\asymp \delta_N(\bar{\varepsilon}_N(s); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \asymp$$

$$\Phi_N(W_2^{r_2}(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp N^{-\frac{r_2+1}{s}}$$

во-вторых, причем для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(\bar{\varepsilon}_N \eta_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \bar{\varphi}_N(f; x, t))_{L^q, \infty}}{\delta_N(0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \Phi_N(W_2^{r_1}(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q, \infty})_{L^q, \infty}} = +\infty.$$

**К(В)П-3:** Всякий вычислительный агрегат ( $\varphi_N(0, \dots, 0; x, t) \equiv 0$  на  $[0, 1]^s \times [0, +\infty)$ )

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t)$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из  $N$  гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности  $\bar{\varphi}_N(x, t; f)$ : для всякой возрастающей к  $+\infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t))_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0, \infty)}}{\delta_N(0; \Phi_N(W_2^{r_2}(0, 1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0, \infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0, \infty)}} = +\infty.$$

Из теорем 6.2 и 6.3 следует

**Теорема 6.4.** Пусть заданы целое положительное число  $s$ , числа  $r_1$  и  $r_2$  такие, что  $r_1 > 2 + s/2, r_2 > 1 + s/2$ . Тогда имеют место соотношения

$$\delta_N(\bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}} = (\bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)}}, \bar{\varepsilon}_{N_2^{(0)}}); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; D_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}})_{L^2, \infty} \equiv$$

$$\equiv \min_{\substack{N_1 \in Z_+, N_2 \in Z_+ : \\ N_1 + N_2 = N}} \inf_{\substack{m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)} \\ n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)} \\ \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s; f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s \\ \left| \gamma_{N_1}^{(j_1)} \right| \leq 1 (j_1 = 1, \dots, N_1) \\ \left| \gamma_{N_2}^{(j_2)} \right| \leq 1 (j_2 = 1, \dots, N_2)}}$$

$$\left\| u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(\hat{f}_1(m^{(1)}) + \gamma_{N_1}^{(1)} \varepsilon_{N_1}^{(1)}, \dots, \hat{f}_1(m^{(N_1)}) + \gamma_{N_1}^{(N_1)} \varepsilon_{N_1}^{(N_1)},$$

$$\hat{f}_2(n^{(1)}) + \gamma_{N_2}^{(1)} \varepsilon_{N_2}^{(1)}, \dots, \hat{f}_2(n^{(N_2)}) + \gamma_{N_2}^{(N_2)} \varepsilon_{N_2}^{(N_2)}; \cdot) \right\|_{L^2, \infty([0, 1]^s \times [0, +\infty))} \asymp$$

$$\asymp \delta_N(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \bar{0}_N)_{L^2, \infty}$$

$$\asymp N^{-\frac{\min\{r_1, r_2+1\}}{s}},$$

где для  $N_1$  и  $N_2$  ( $N_1 + N_2 = N$ )

$$\bar{\varepsilon}_{N_1, N_2} \equiv (\bar{\varepsilon}_{N_1}, \bar{\varepsilon}_{N_2}) = (\varepsilon_{N_1}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{N_1}^{(N_1)}, \varepsilon_{N_2}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{N_2}^{(N_2)})$$

есть  $N$ -мерный вектор с компонентами

$$\varepsilon_{N_1}^{(j_1)} = N_1^{-\frac{r_1}{s} - \frac{1}{2}} \quad (j_1 = 1, 2, \dots, N_1),$$

$$\varepsilon_{N_2}^{(j_2)} = \begin{cases} N_2^{-\frac{r_2+1}{s}}, & \text{при } s = 1 \\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s}} (\ln N_2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{при } s = 2 \\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{s})} = N_2^{-\frac{r_2}{s} - \frac{1}{2}}, & \text{при } s > 2 \end{cases} \quad (j_2 = 1, 2, \dots, N_2),$$

пара  $N_1^{(0)}$  и  $N_2^{(0)}$  ( $N_1^{(0)} + N_2^{(0)} = N$ ) одна из пар, реализующих минимум погрешности восстановления,  $\bar{0}_N$ -нулевой  $N$ -мерный вектор, причем для всякой возрастающей  $\kappa \rightarrow \infty$  положительной последовательности  $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$  имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; D_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}})_{L^q, \infty}}{\delta_N(\bar{0}_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; D_N)_{L^q, \infty}} = \infty.$$

Теоремы 6.2-6.4 посвящены полному решению задачи дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона, в силу ее линейности разбитой на два случая, - это теоремы 6.2 и 6.3, с последующим их объединением в теореме 6.4.

И здесь тоже, если в [35] дискретизация решений дифференциального уравнения (в данном случае волнового) производится в фиксированный момент времени  $\tau$ , то в теоремах 6.2-6.3 оптимизация производится по всему промежутку времени, с одновременным установлением предельной погрешности вычисления коэффициентов Фурье, опять же сохраняющих порядок восстановления по точной информации.

В целом, в постановках задачи К(В)П даны полные решения исследуемых задач в случае, когда числовая информация снимается с одного из важнейших источников - тригонометрических коэффициентов Фурье.

### § 7. Численное интегрирование интегральных уравнений обобщенным методом Смоляка

Предметом изучения этого параграфа будет интегральный оператор

$$Tf \equiv h(x; f) = \int_{[0,1]^s} K(x, y) f(y) dy, x \in [0, 1]^s, \quad (32)$$

в предположении, что ядро оператора  $K(x, y)$  измеримо по Лебегу в  $2s$ -мерном кубе  $[0, 1]^{2s}$ , и, следовательно, для почти всех  $x \in [0, 1]^s$  функция  $K(x, y)$  измерима по  $y$ , а для почти всех  $y \in [0, 1]^s$  измерима по  $x$  (см. [36, Глава V, §6, стр.310]).

При данном  $\nu^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)}) \in Z^s$ ,  $\nu_j^{(0)} \geq 0$  ( $j = 1, \dots, s$ ) положим

$$Z_{\nu^{(0)}}^s \equiv \{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z^s : \nu_j \geq \nu_j^{(0)} (j = 1, \dots, s)\}, 0 \leq \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} < q, \Omega(\nu^{(0)}; q) \equiv \{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s : \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q\},$$

$A_{\nu_j} = \left\{ \left( 2t_j + \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)}) \right) 2^{\nu_j - 1} : t_j \in Z \right\}$ ,  $A_{\nu_1, \dots, \nu_s} = A_{\nu_1} \times \dots \times A_{\nu_s}$ . Пусть, как обычно,  $\chi_A$ - характеристическая функция множества  $A$ .

Однозначное представление  $m_j = (2\tau_j(m) + 1)2^{\mu_j(m)}$  для целого  $m_j \neq 0$  продолжим на случай  $m_j = 0$ , полагая  $\tau_j(0) = -\frac{1}{2}$  и  $\mu_j(0) = \nu_j^{(0)}$ .

Обозначим (см.[37]-[41])

$$\Lambda_{\Omega(\nu^{(0)}; q)}(f) = \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s : \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q - l}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}} \dots \sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right),$$

и

$$\Delta_{\Omega(\nu^{(0)}; q)}(f) \equiv \hat{f}(0) - \Lambda_{\Omega(\nu^{(0)}; q)}(f) = \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_{\Omega(\nu^{(0)}; q)}(f) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu_0}^s \setminus \Omega(\nu^{(0)}; q)} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \chi_{A_{\nu_1, \dots, \nu_s}}(m) = \\
 &= \sum_{\substack{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) : \text{целое } \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_s) : \tau_j \in Z \\ \text{или } \tau_j = \frac{1}{2} \text{ и } \mu_j = \nu_j^{(0)}, j = 1, \dots, s}} \hat{f}((2\tau_1 + 1)2^{\mu_1}, \dots, (2\tau_s + 1)2^{\mu_s}) \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) : \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, \nu_1 + \dots + \nu_s > q \\ \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ или } \nu_j = \mu_j + 1 \\ j = 1, \dots, s}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)})}.
 \end{aligned}$$

При  $n=0$  положим по определению  $\nu(0) = 0$ . Если же для данного целого  $n \neq 0$  и целого положительного  $c$  выполнено  $2^{c-2} < |n| \leq 2^{c-1}$ , то полагаем  $\nu(n) = c$ .

При  $\nu^{(0)} = \nu(n) \equiv (\nu_1(n), \dots, \nu_s(n))$ ,  $\nu_j(n) \in Z$ ,  $\nu_j(n) \geq 0$  ( $j = 1, \dots, s$ ) введем обозначения  $\Lambda_{n,q}(f) = \Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}(f(\cdot) e^{-2\pi i(n,\cdot)})$  и  $\Delta_{n,q}(f) \equiv \Delta_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot) e^{-2\pi i(n,\cdot)})$ .

Далее, при  $q \geq 1$  положим

$$V_q = \{n \in Z^s : \nu_1(n) + \dots + \nu_s(n) \leq q\}$$

и пусть для  $n \in Z^s$

$$\hat{K}(x, -n) := \int_{[0,1]^s} K(x, y) e^{-2\pi i(n,y)} dy.$$

В условиях приведенных обозначений и определений справедлива

**Теорема 7.1 (А.Шоманова [42]).** Пусть даны числа  $p, t, \sigma, r$  такие, что

$$p \geq 1, t \geq 1, t \geq p, t \geq \sigma, \quad \left(1 - \frac{\sigma}{t}\right) \frac{p}{p-1} \leq r.$$

Пусть функция  $K(x, y)$  определена и непрерывна на  $[0, 1]^{2s}$ . Тогда для всякой периодической по каждой из  $s$  переменных функции  $f(x_1, \dots, x_s)$  с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
 &\left\| \int_{[0,1]^s} K(x, y) f(y) dy - \sum_{n \in V_q} \hat{K}(x, -n) \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \right. \\
 &\left. \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu(n)}^s : \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q - l}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}} \dots \sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) e^{-2\pi i\left(n_1 \frac{k_1}{2^{\nu_1}} + \dots + n_s \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)} \right\|_{L^t(0,1)^s} \leq \\
 &\leq \left( \text{vrai sup}_{x \in [0,1]^s} \left[ \int_{[0,1]^s} |K(x, y)|^r dy \right]^{\frac{1}{r}} \right)^{1 - \frac{\sigma}{t}} \cdot \left( \text{vrai sup}_{y \in [0,1]^s} \left[ \int_{[0,1]^s} |K(x, y)|^\sigma dx \right]^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{t}} \times \\
 &\times \left\| \sum_{n \in V_q} \Delta_{\Omega(\nu(n);q)}(f(\cdot) e^{-2\pi i(n,\cdot)}) \cdot e^{2\pi i(n,x)} + \sum_{n \in Z^s \setminus V_q} \hat{f}(n) e^{2\pi i(n,x)} \right\|_{L^p(0,1)^s}.
 \end{aligned}$$

$$t \geq p, t \geq \sigma, \quad \left(1 - \frac{\sigma}{t}\right) \frac{p}{p-1} \leq r \quad (p, t \geq 1, r, \sigma > 0),$$

$$\Delta_{\Omega(\nu^{(0)};q)}(f) = \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu_0}^s \setminus \Omega(\nu^{(0)};q)} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \chi_{A_{\nu_1, \dots, \nu_s}}(m) =$$



$$= \sum_{\substack{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) : \text{целое } \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_s) : \tau_j \in Z \\ \text{или } \tau_j = \frac{1}{2} \text{ и } \mu_j = \nu_j^{(0)}, j = 1, \dots, s}} \hat{f}((2\tau_1 + 1)2^{\mu_1}, \dots, (2\tau_s + 1)2^{\mu_s}) \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) : \nu_j \geq \nu_j, \nu_1 + \dots + \nu_s > q \\ \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ или } \nu_j = \mu_j + 1 \\ j = 1, \dots, s}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)})}.$$

Обратимся к следствиям общей теоремы 7.1.

Имеет место

**Теорема 7.2** (С.Кудайбергенов [40]). Пусть дана положительная последовательность  $\{D_s(m)\}_{m \in Z^s}$  такая, что

$$\sum_{m \in Z^s} D_s^{-1}(m) < +\infty,$$

и пусть

$$\|f\|_{\ell^\infty(D_s)} = \sup_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)| \cdot D_s(m).$$

Тогда для любого  $n \in Z^s$  и любого  $q > \nu_1(n) + \dots + \nu_s(n)$  имеет место равенство

$$\sup_{f: \|f\|_{\ell^\infty(D_s)} \leq 1} \left| \hat{f}(n) - \Lambda_{n,q}(f) \right| = \sum_{\substack{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) : \text{целое } \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_s) : \tau_j \in Z \\ \text{или } \tau_j = \frac{1}{2} \text{ и } \mu_j = \nu_j^{(0)}, j = 1, \dots, s}} \left| D_s^{-1}(n + (2\tau + 1)2^\mu) \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) : \nu_j \geq \nu_j, \nu_1 + \dots + \nu_s > q \\ \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ или } \nu_j = \mu_j + 1 \\ j = 1, \dots, s}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \right|.$$

Если же последовательность  $\{D_s(m)\}_{m \in Z^s}$  удовлетворяет условию  $D_s(2|m_1|, \dots, 2|m_s|) \ll D_s(|m_1|, \dots, |m_s|)$  для всех  $m \in Z^s$ , то

$$\sup_{f: \|f\|_{\ell^\infty(D_s)} \leq 1} \left| \hat{f}(n) - \Lambda_{n,q}(f) \right| \asymp \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s > q \\ \nu_j \geq \nu_j(n) \\ j = 1, \dots, s}} \sum_{t \in Z^s} D^{-1}(t \cdot 2^\nu).$$

В условиях теоремы 7.1 из теоремы 7.2 следует

**Теорема 7.3** (А.Шоманова [42]) Имеет место неравенство

$$\sup_{f: \|f\|_{\ell^\infty(D_s)} \leq 1} \left\| \int_{[0,1]^s} K(x,y) f(y) dy - \sum_{n \in V_q} \hat{K}(x, -n) \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu(n)}^s \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q - l}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}} \dots \sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) e^{-2\pi i \left(n_1 \frac{k_1}{2^{\nu_1}} + \dots + n_s \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)} \right\|_{L^t(0,1)^s} \leq$$

$$\leq \left( \text{vrai sup}_{x \in [0,1]^s} \left[ \int_{[0,1]^s} |K(x,y)|^r dy \right]^{\frac{1}{r}} \right)^{1 - \frac{\sigma}{t}} \cdot \left( \text{vrai sup}_{y \in [0,1]^s} \left[ \int_{[0,1]^s} |K(x,y)|^\sigma dx \right]^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{t}} \times$$

$$\times \left( \sum_{n \in V_q} \sum_{\substack{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) : \text{целое } \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_s) : \tau_j \in Z \\ \text{или } \tau_j = \frac{1}{2} \text{ и } \mu_j = \nu_j^{(0)}, j = 1, \dots, s}} |D_s^{-1}(n + (2\tau + 1)2^\mu) \times \right. \\ \left. \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) : \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, \nu_1 + \dots + \nu_s > q \\ \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ или } \nu_j = \mu_j + 1 \\ j = 1, \dots, s}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sgn}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} + \|f\|_{\ell^\infty(D_s)} \sum_{n \in Z^s \setminus V_q} \frac{1}{D_s(n)} \right).$$

**§8. Дискретизация в среднем квадратическом относительно вероятностных мер на классах функций.**

Основным способом оценки качества восстановления является "наихудший случай", когда вычисляется максимальная по классу погрешность. Вместе с тем, сравнение операторов восстановления функций из какого-либо класса по максимальной (по классу) погрешности (уклонению) может оказаться грубым: два оператора могут иметь одинаковые максимальные уклонения, в то же время как для первого оператора оно достигается на функциях, которых в определенном смысле "мало" в классе, а для второго – на "большинстве" функций класса (количественная характеристика размеров подмножеств функций производится на основе лебеговского мероведения). И хотя первый метод дискретизации, очевидно, предпочтительнее, при оценке качества приближения по значению максимального уклонения эти два метода неразличимы.

Таким образом, постановка этой задачи заключается в оценках снизу и сверху величины

$$\int_F \sup_{0 \leq \alpha \leq R} \|u(\alpha, \cdot, f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f), \alpha, \cdot)\|_Y^2 d\mu_F(f),$$

$\mu_F(f)$  есть вероятностная мера, определенная на  $F$ .

Пусть  $\{\Gamma_k\}_k$  есть последовательность попарно не пересекающихся конечных множеств  $\Gamma_k \subset Z$ , объединение которых есть все  $Z$ . Через  $d_k$  обозначим количество точек в  $\Gamma_k$ .

Пусть  $\nu_{-1} = 0$  и  $\nu_k = d_0 + \dots + d_k, a_{j(m)}$  есть фиксированное упорядочение  $\Gamma_k$ . Тогда каждый набор  $Y = \{y_m\}_{m \in Z}$  комплексных чисел, с учетом равенства  $y_m = a_{j(m)} + ib_{j(m)}$ , будем считать представленным в виде последовательности  $Y = (a_1, b_1, \dots, a_{\nu_k}, b_{\nu_k}, \dots)$ .

Далее, пусть для каждого  $k$  на  $2d_k$ -мерном евклидовом пространстве  $R^{2d_k}$  задана неотрицательная непрерывная функция  $\psi_k$  такая, что  $\psi_k(0) = 0$ .

Определим классы  $H(\Gamma_k, \psi_k)$  как множество всех наборов  $Y = \{y_m\}_{m \in Z}$  таких, что для каждого  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) выполнено неравенство

$$\psi_k(a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, \dots, a_{\nu_k}, b_{\nu_k}) \leq 1,$$

т.е.

$$H(\Gamma_k, \psi_k) = \{(a_1, b_1, \dots, a_{\nu_k}, b_{\nu_k}, \dots) : \psi_k(a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, \dots, a_{\nu_k}, b_{\nu_k}) \leq 1\}.$$

Положим

$$H \stackrel{def}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} H(\Gamma_k, \psi_k).$$

Пусть

$$D_k = \left\{ (a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, \dots, a_{\nu_k}, b_{\nu_k}) \in R^{2d_k} : \psi_k (a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, \dots, a_{\nu_k}, b_{\nu_k}) \leq 1 \right\}.$$

Тогда

$$H = D_0 \times D_1 \times \dots \times D_k \times \dots$$

Цилиндрические множества  $T_k(E_k)$  определим следующим образом:

$$T_k(E_k) = \left\{ (a_1, b_1, \dots, a_{\nu_k}, b_{\nu_k}, \dots) \in H : (a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, \dots, a_{\nu_k}, b_{\nu_k}) \in E_k \right\},$$

где  $E_k \subset D_k (E_k \in \mathcal{F}(D_k))$ .

Пусть  $\mathcal{F}(H)$  – наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая все цилиндрические множества.

**Теорема А** (см. [43]). *Каждая из возможных вероятностных мер  $\mu$  на измеримом пространстве  $(H, \mathcal{F}(H))$  однозначно определяется заданием последовательности мер  $\mu_k$  на  $(D_k, \mathcal{F}(D_k))$  таких, что для всех  $k (k = 0, 1, 2, \dots)$  и  $E_k \in \mathcal{F}(D_k)$  имеет место равенство*

$$\mu(T_k(E_k)) = \mu_k(E_k)$$

Следуя этой теореме, введем вероятностную меру на классах Коробова  $E^r(0, 2\pi)$  и Никольского  $H_2^r(0, 2\pi)$ .

По определению класса  $E^r(0, 2\pi) (r > 1)$

$$f(x) \in E^r(0, 2\pi) \Leftrightarrow \left| \hat{f}(m) \right| \leq \frac{1}{m^r} \equiv \rho_m (m \in Z),$$

где  $f(x) - 2\pi$  - периодическая функция.

Пусть для каждого  $m \in Z$  функция

$$\lambda_m(\tau) : [0, \rho_m] \rightarrow [0, 1]$$

непрерывна, неубывает на  $[0, \rho_m]$  и удовлетворяет условиям  $\lambda_m(0) = 0$  и  $\lambda_m(\rho_m) = 1$ .

Для любого  $\alpha$  через  $K(\alpha)$  обозначим замкнутый круг комплексной плоскости с центром в точке нуль и радиусом  $\alpha$  :

$$K(\alpha) = \{z = \tau e^{i\varphi} : 0 \leq \tau \leq \alpha, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} = \{z \in C : |z| \leq \alpha\}.$$

Тогда

$$f(x) \in E^r(0, 2\pi) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m \in Z} \hat{f}(m) e^{im\theta}, \hat{f}(m) \in K(\rho_m).$$

Следовательно, отображение

$$E^r \ni f \rightarrow \left( \hat{f}(0), \hat{f}(1), \hat{f}(-1), \dots \right) \in K(\rho_0) \times K(\rho_1) \times K(\rho_{-1}) \times \dots$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие

$$E^r(0, 2\pi) \leftrightarrow K(\rho_0) \times K(\rho_1) \times K(\rho_{-1}) \times \dots$$

Отсюда, в силу теоремы о задании меры на прямом произведении счетного числа пространств с мерой (см. [44, стр 152-156]), чтобы ввести меру на  $E^r(0, 2\pi)$ , достаточно ввести вероятностные меры  $\mu_m$  в каждом  $K(\rho_m) (m \in Z)$ . В качестве  $\mu_m$  возьмем плоскую меру Лебега в круге  $K(\rho_m)$  такую, что если

$$0 \leq \rho_m^{(1)} < \rho_m^{(2)} \leq \rho_m \text{ и } 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi,$$

то

$$\mu_m \left( \tau e^{i\varphi} : \rho_m^{(1)} \leq \tau \leq \rho_m^{(2)}, \varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2 \right) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} \left( \lambda_m \left( \rho_m^{(2)} \right) - \lambda_m \left( \rho_m^{(1)} \right) \right). \quad (33)$$

В частности,

$$\mu_m(K(\rho_m)) = \frac{2\pi}{2\pi} (\lambda_m(\rho_m) - \lambda_m(0)) = 1.$$

Меру  $\mu_m$  в  $K(\rho_m)$  с условием (33) обозначим  $\mu_m^\lambda$ .

Тогда искомая мера в самом классе  $E^r(0, 2\pi)$  определяется следующим образом. Пусть даны целое положительное  $n$  и целые  $m^{(1)}, \dots, m^{(n)}$ . Для плоских  $\mu_m^\lambda$ -измеримых множеств

$$E^{(1)} \subset K(\rho_{m^{(1)}}), \dots, E^{(n)} \subset K(\rho_{m^{(n)}})$$

рассмотрим цилиндрические множества

$$T(E^{(1)}, \dots, E^{(n)}) = \left\{ f \in E^r : \hat{f}(m^{(1)}) \in E^{(1)}, \dots, \hat{f}(m^{(n)}) \in E^{(n)} \right\} \in E^r.$$

Тогда, согласно теореме А, равенствами

$$\mu^\lambda(T(E^{(1)}, \dots, E^{(n)})) = \prod_{j=1}^n \mu_{m^{(j)}}^\lambda(E^{(j)}). \quad (34)$$

однозначно определяется вероятностная мера  $\mu^\lambda$  на наименьшей  $\sigma$ -алгебре подмножеств  $E^r$ , содержащей все цилиндрические множества  $T(E^{(1)}, \dots, E^{(n)})$ .

Далее, приведем определение вероятностной меры, заданной на  $H_2^r(0, 2\pi)$ .

Пусть

$$\rho(\tau) = \{m \in Z : 2^{\tau-1} \leq \bar{m} < 2^\tau\} \equiv \{2^{\tau-1}, -2^{\tau-1}, 2^{\tau-1} + 1, -2^{\tau-1} - 1, \dots, 2^\tau - 1, -2^\tau + 1\}$$

при  $\tau = 2, 3, \dots$  и

$$\rho(1) = \{0, 1, -1\}$$

подмножества  $Z$  ("двоичные пачки") и пусть  $n_\tau = |\rho(\tau)|$ . Тогда по эквивалентному определению класса  $H_2^r(0, 2\pi)$  (см. напр. [45])

$$f \in H_2^r(0, 2\pi) \Leftrightarrow \sum_{m \in \rho(\tau)} \left| \hat{f}(m) \right|^2 \leq 2^{-2\tau r}.$$

Введем следующие обозначения для  $f \in H_2^r(0, 2\pi)$ :

$$z^{(\tau)}(f) \equiv (\hat{f}(2^{\tau-1}), \hat{f}(-2^{\tau-1}), \hat{f}(2^{\tau-1} + 1), \hat{f}(-2^{\tau-1} - 1), \dots, \hat{f}(2^\tau - 1), \hat{f}(-2^\tau + 1))$$

при  $\tau = 2, 3, \dots$  и

$$z^{(1)}(f) \equiv (\hat{f}(0), \hat{f}(1), \hat{f}(-1)).$$

Если шар в  $C^{n_\tau}$  (или в  $R^{2n_\tau}$ ) радиуса  $2^{-\tau r}$  с центром в начале координат обозначить через  $D_\tau$ , т.е.

$$D_\tau = \left\{ z^{(\tau)} = (z_1^{(\tau)}, z_2^{(\tau)}, \dots, z_{n_\tau}^{(\tau)}) \in C^{n_\tau} : |z_1^{(\tau)}|^2 + |z_2^{(\tau)}|^2 + \dots + |z_{n_\tau}^{(\tau)}|^2 \leq 2^{-2\tau r} \right\},$$

то приведенное выше определение класса  $H_2^r(0, 2\pi)$  переписется в виде

$$f \in H_2^r(0, 2\pi) \Leftrightarrow z^{(\tau)}(f) \in D_\tau \quad (\forall \tau = 1, 2, \dots).$$

Отсюда, учитывая введенные обозначения, и теорему Рисса-Фишера, можно установить следующее взаимно однозначное соответствие:

$$H_2^r(0, 2\pi) \ni f(x) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \underbrace{(\hat{f}(0), \hat{f}(1), \hat{f}(-1))}_{z^{(1)}(f)}, \underbrace{(\hat{f}(2), \hat{f}(-2), \hat{f}(3), \hat{f}(-3))}_{z^{(2)}(f)}, \dots, \underbrace{(\hat{f}(2^{\tau-1}), \hat{f}(-2^{\tau-1}), \dots, \hat{f}(2^{\tau}-1), \hat{f}(-2^{\tau}+1), \dots)}_{z^{(\tau)}(f)}, \dots \equiv$$

$$\equiv (z^{(1)}(f), z^{(2)}(f), \dots, z^{(\tau)}(f), \dots) \in D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{\tau} \times \dots$$

Пусть для каждого  $\tau = 1, 2, \dots$  мера  $\mu_{\tau}$  абсолютно непрерывная вероятностная мера на  $D_{\tau}$ :

$$\mu_{\tau}(E_{\tau}) = \int_{E_{\tau}} p_{\tau}(z_1^{(\tau)}, \dots, z_{n_{\tau}}^{(\tau)}) dx_1^{(\tau)} dy_1^{(\tau)}, \dots, dx_{n_{\tau}}^{(\tau)} dy_{n_{\tau}}^{(\tau)},$$

где  $E_{\tau} \subset D_{\tau}$  - измеримое множество,

$$z_k^{(\tau)} = x_k^{(\tau)} + iy_k^{(\tau)} \quad (k = 1, \dots, n_{\tau}),$$

а плотность

$$p_{\tau}(z^{(\tau)}) = p_{\tau}(x_1^{(\tau)}, y_1^{(\tau)}, \dots, x_{n_{\tau}}^{(\tau)}, y_{n_{\tau}}^{(\tau)}) = p_{\tau}((x_1^{(\tau)})^2 + (y_1^{(\tau)})^2 + \dots + (x_{n_{\tau}}^{(\tau)})^2 + (y_{n_{\tau}}^{(\tau)})^2)$$

- радиально зависит от  $(x_1^{(\tau)}, y_1^{(\tau)}, \dots, x_{n_{\tau}}^{(\tau)}, y_{n_{\tau}}^{(\tau)}) \in D_{\tau}$ . Пусть даны целые положительные  $k$  и числа  $\tau_1, \dots, \tau_k$  ( $\tau_i \neq \tau_j$  при  $i \neq j$ ). Для измеримых множеств  $E_{\tau_k} \subset D_{\tau_k}$  рассмотрим цилиндрические множества

$$T(E_{\tau_1}, \dots, E_{\tau_k}) = \left\{ f \in H_2^r(0, 2\pi) : z^{(\tau_1)}(f) \in E_{\tau_1}, \dots, z^{(\tau_k)}(f) \in E_{\tau_k} \right\} \quad (35)$$

Положим

$$\mu(T(E_{\tau_1}, \dots, E_{\tau_k})) \stackrel{def}{=} \prod_{i=1}^k \int_{E_{\tau_i}} p_{\tau_i}(z^{(\tau_i)}) dx^{(\tau_i)} dy^{(\tau_i)}. \quad (36)$$

Множество цилиндрических множеств вида (35) образует полукольцо.

Тогда по теореме А о продолжении меры можно считать, что в наименьшей  $\sigma$  - алгебре  $\mathcal{F}(H_2^r)$ , содержащей все цилиндрические множества вида (35), задана мера  $\mu$ .

В следующих теоремах получены двусторонние оценки для среднеквадратической погрешности дискретизации решения задачи (11)-(12) относительно введенных мер. В обеих теоремах

$$(T_N f)(\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^N f\left(2\pi \frac{i}{N}\right) K_N\left(\alpha, \theta - 2\pi \frac{i}{N}\right),$$

$$K_N(\alpha, t) = \frac{1}{N} \left( 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{[N/2]-1} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^n \cdot \cos nt \right).$$

**Теорема 8.1.** Пусть  $u(\alpha, \theta; f)$  - решение задачи (11)-(12),  $r > 1$  и  $\mu$  есть вероятностная мера (34), определенная на  $E^r$ . Тогда

$$\int_{E^r(0, 2\pi)} \sup_{\alpha} \|u(\alpha, \cdot; f) - (T_N f)(\alpha, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 d\mu^{\lambda}(f) \asymp \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \left(-\frac{[N]}{2}, \frac{[N]}{2}\right]} \int_0^{\rho_m} \tau^2 \lambda'_m(\tau) d\tau.$$

Доказательство теоремы 8.1 основывается следующих леммах.

**Лемма 8.1.** В классе  $E^r(0, 2\pi)$  выполняются равенства:

$$\int_{E^r(0, 2\pi)} \hat{f}(m) d\mu^{\lambda}(f) = 0,$$

$$\int_{E^r(0, 2\pi)} \hat{f}(m) \overline{\hat{f}(m')} \mu^{\lambda}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq m' \\ \int_0^{\rho_m} \tau^2 \lambda'_m(\tau) d\tau, & \text{если } m = m'. \end{cases}$$

**Лемма 8.2** ([16]). Пусть  $N$  – целое положительное число. Тогда для любых  $u_1, u_2 \in Z \setminus \{0\}$  и  $m_1, m_2 \in \{-[N/2] + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, [N/2] - 1\}$  таких, что  $(u_1, m_1) \neq (u_2, m_2)$ , выполняется

$$u_1 N + m_1 \neq u_2 N + m_2$$

и имеет место включение

$$\bigcup_{m \in Z \cap (-[\frac{N}{2}], [\frac{N}{2}])} \bigcup_{u \in Z \setminus \{0\}} \{uN + m\} \subset Z \setminus \left(-\left[\frac{N}{2}\right], \left[\frac{N}{2}\right]\right).$$

**Следствие 8.1.** Пусть  $\lambda_m(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau(1-\rho_m^2)}{\rho_m^2}, & \text{при } \tau \in [0, \rho_m^2] \\ \frac{\rho_m(\tau-\rho_m^2)}{1-\rho_m^2} + 1 - \rho_m^2, & \text{при } \tau \in [\rho_m^2, \rho_m] \end{cases}$ .

Тогда

$$\int_{E^r(0, 2\pi)} \sup_{\alpha} \|u(\alpha, \cdot; f) - (T_N f)(\alpha, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 d\mu^\lambda(f) \asymp C(r) \frac{1}{N^{2(2r-\frac{1}{2})}}.$$

Из утверждения

**Лемма 8.3.** В классе  $H_2^r(0, 2\pi)$  ( $r > \frac{1}{2}$ ) выполняются равенства:

$$\int_{H_2^r(0, 2\pi)} \hat{f}(m) \overline{\hat{f}(n)} d\mu(f) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \int_{D_\tau} (x_{j_\tau(m)}^2 + y_{j_\tau(m)}^2) p_\tau(x, y) dx dy, & m = n \in \rho_\tau, \end{cases}$$

где  $j_\tau(m)$  - порядковый номер элемента  $m \in \rho(\tau)$  при упорядочивании

$$\rho(\tau) \equiv \{2^{\tau-1}, -2^{\tau-1}, \dots, 2^\tau - 1, -2^\tau + 1\}.$$

следует

**Теорема 8.2.** Пусть  $u(\alpha, \theta; f)$  - решение задачи (11)-(12),  $r > \frac{1}{2}$  и  $\mu$  - есть вероятностная мера (34). Тогда имеет место следующая двусторонняя оценка ( $N = 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ )

$$\int_{H_2^r(0, 2\pi)} \sup_{\alpha} \|u(\alpha, \cdot; f) - (T_N f)(\alpha, \cdot)\|_{L^2(0, 2\pi)}^2 d\mu(f) \asymp \sum_{\tau=n}^{\infty} \int_{D_\tau} (x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_{n_\tau}^2 + y_{n_\tau}^2) p_\tau(x, y) dx dy.$$

### §9. Заключительные замечания

Данная статья носит иллюстративный характер по К(В)П-исследованию уравнений в частных производных.

В модельной ситуации – это классические уравнения математической физики с начальными и граничными условиями из, опять же, классических и с доминирующей смешанной гладкостью классов Соболева, Никольского-Бесова и Коробова, заданных на единичных кубах соответствующей размерности, полностью или частично решены К(В)П-задачи, во всех случаях К(В)П-1 обязательно, а К(В)П-2 и -3 частично.

Как нам представляется, общая постановка К(В)П-задачи и приведенные результаты показывают содержательность предлагаемого направления исследований с непредсказуемым, и тем интересным, дальнейшим развитием, с попутными запросами к смежным областям Математики и Компьютерных наук.

Так, например, мощным аппаратом исследований в математике и, как здесь показано, в приложениях является гармонический анализ, чем вызваны исследования на единичных кубах. Сведение уравнений в частных производных с областей на случаи единичных кубов требует дальнейших исследований в теории продолжений функций с областей на объемлющие их параллелепипеды с сохранением класса, – самостоятельного раздела теории вложений [18], [46]-[49].

Также можно отметить, что теория уравнений в частных производных с представлением решений по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора дает большой потенциал развития данного направления исследований.

Авторы надеются, что молодые научные силы Казахстана, в особенности в объявленный 2019 Год молодежи, заинтересуются и продолжат представленный перспективный круг задач.

### Список литературы

- 1 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления // Изв.ВУЗов. Математика. -2019.- Т63. -№1. -С.89-75.
- 2 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124, №3. -С. 8-88.
- 3 Темиргалиев Н., Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -1997. -С. 90-144.
- 4 Темиргалиев Н., Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. -2010. -С.1-194.
- 5 Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана. -2012. -С.1-256.
- 6 Темиргалиев Н. Теории вложений и приближений в контексте  $K(V)P$  и внутренних проблем теории функций // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т.125. -№4. -С.8-68.
- 7 Коляда В.И. О вложении некоторых классов функций многих переменных // Сиб. мат. журнал. - 1973. -№ 4.- С. 766-790.
- 8 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. -М.: Физматгиз, 1963.
- 9 Ульянов П.Л. О классах бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. -1990. -Т.181. -№5. - С.589-609.
- 10 Оразкулова Б. Полное  $K(V)P$  (Компьютерный (вычислительный) поперечник) исследование уравнении в частных производных: магистрская диссертация по специальности 6М060100 – "Математика". ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. -Астана. -2016.
- 11 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв.ВУЗов. Математика. -2013. - №8. -С.86–93.
- 12 Лакс П. Математика и вычисления // В Сб. "Математика: границы и перспективы" - М., ФАЗИС, 2005. -С. 175-192.
- 13 Федоренко Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // ЖВМ и МФ. -1964. -Т.4. -№3. - С.559-564.
- 14 Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМ и МФ - 1966. - Т.6. -№5. -С. 861-883.
- 15 Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Math. Comp.- 1977. - V.31. - P.333.
- 16 Берикханова М.Е. Об информативных мощностях всевозможных линейных функционалов при дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. - Алматы. -2007.
- 17 Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. -Москва: Гос.изд.тех.-теорет.лит., 1953. -360 стр.
- 18 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. -М.: Наука, 1977.
- 19 Бабенко К.И. Основы численного анализа. -М.:Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
- 20 Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье (Продолжение 1) // Вестник Евразийского национального университета. - 2002. - № 3-4.- С.222-272.
- 21 Баилов Е.А. Приближенное интегрирование и восстановления функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. КазГУ. -Алматы. -1998.
- 22 Баилов Е.А., Темиргалиев Н. О дискретизации решений уравнения Пуассона // ЖВМ и МФ. - 2006. - Т.46. -№ 9. - С. 1594-1604.
- 23 Михлин Н.С. Курс математической физики. -М.: Наука, 1968.
- 24 Кудайбергенов С.С., Сабитова С.Г. О дискретизации решений уравнения Пуассона на классе Коробова // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2013.-Т53. -№7. -С.1082–1093.

- 25 Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. - 1963.-Т148. -№5. -С.1042–1045..
- 26 Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решений уравнений теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и V: дисс. ... канд. физ.-мат. наук, КазГУ. -Алматы. -1998.
- 27 Hua Loo Keng, Wang Yuan Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1981.
- 28 Ажгалиев Ш.У. О дискретизации решений уравнений теплопроводности // Матем. Заметки.- 2007.- Т. 82. Вып.2.- С. 177-182.
- 29 Нурмолдин Е. Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из  $U_2$  – классов Ульянова // Сиб. журн. вычисл. математики, РАН. Сиб.отд-ние. -2005.- Т.8. -№ 4.- С. 337-351.
- 30 Таугынбаева Г.Е. О предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении: PhD диссертация. -Алматы, 2014.
- 31 Абикенова Ш.К., Темиргалиев Н., Утесов А. О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем. Заметки. -2012. -Т.91. -№ 3. -С. 459-463.
- 32 Шангиреев Е.И. О восстановлении решений волнового уравнения: дисс. ... канд. физ.-мат. наукою - Караганда, 2002.
- 33 Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н. Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в метрике  $L^{2,\infty}$  // Дифференциальные уравнения.- 2008.- Т.44. -№4. -С.491-506.
- 34 Темиргалиев Н., Шерниязов К., Берикханова М., Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона по коэффициентам Фурье// Современные проблемы математики, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН.-2013.-Вып. 17: Математика и информатика, 2. К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы.-С.179–207.
- 35 Выск Н.Д., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным// Матем. заметки. - 2007. -Т.81. -№6. - С.803–815.
- 36 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.:Наука, 1976.
- 37 Wasilkowski G., Wozniakowski H. Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems // J. Complexity. - 1995. - №11. -Р.1-56.
- 38 Темиргалиев Н. Классы  $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$  и квадратурные формулы//Докл.РАН. -2003. -Т.393. -№5. -С.605-608.
- 39 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования // Изв.РАН, сер.матем. -2009. -Т.73. -№ 2. -С.183-224.
- 40 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления// Изв.ВУЗов, матем. -2010. -№3. -С.52-71.
- 41 Наурызбаев Н. Ж., Темиргалиев Н., О порядке дискрепанса сетки Смоляка// Матем. заметки. -2009. - Т85. -№6. -С.947–950.
- 42 Шоманова А.А. О приближении интегрального оператора в  $L^t$  - метрике //Вест. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2010.№2.С363-366.
- 43 Темиргалиев Н. Т. О построении вероятностных мер на функциональных классах //Тр. МИАН. -1997. -№218. -С.397–402.
- 44 Халмош П. Теория меры. -М.:ИЛ. -1953.
- 45 Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространство дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения. Матем. анализ. (Итоги науки и техники). -М.:ИНИТИ. -1988. - Т.26. - С. 5-157.
- 46 Долженко Е.П., Ульянов П. Л. О некоторых вопросах теории функций // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. -1980. -№1. -С. 3–13.
- 47 Дзядык В. К. , Шевчук И. А. ,Продолжение функций, являющихся на произвольном множестве прямой следами функций с заданным вторым модулем непрерывности// Изв. АН СССР. Сер. матем. -1983. -Т47. -№2. -С.248–267.
- 48 Дзядык В. К. О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике  $L^p$  , Матем. сб. -1956. -Т. 40(82). -№ 2. -С. 239–242.
- 49 Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными// УМН. 1979. -Т. 34. № 1(205). -С. 17-65.



Н. Темірғалиев, Г.Е. Таугынбаева, Ш.К. Абикенова

Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты,  
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнінде дербес туындылы теңдеулерді дискреттеу

**Аннотация.** 1996 жылдан бастап мақсаты дәл емес мәліметпен берілген математикалық моделге тиімді компьютерлік өңдеу жасау болып табылатын Компьютерлік (есептеуіш) диаметр идеясы біртіндеп дамыды.

К(Е)Д-схемасы, біздің ойымызша, Жуықтау теориясы, Есептеу математикасы және Сандық анализде жүргізілетін зерттеулердің нақтыланған жоспарын (ұйымдастыруын) анықтайды.

Бұл мақала К(Е)Д-тәсілдің дербес туындылы теңдеулер теориясындағы қолданысына арналған. Лаплас, Пуассон, жылуөткізгіштік, толқындық сияқты тарихи негіздегі теңдеулермен қатар салыстырмалы түрде бертілген Клейна-Гордон теңдеуі зерттеліп, алынған теоремалар иллюстративті нәтижелер ретінде К(Е)Д-қойылымының сапасы мен тиімділігін көрсетеді.

Ұсынылып отырған материалдар дербес туындылы теңдеулер шешімін оптималді дискретизациялауда зерттеуді берілген бағытты кеңейте және тереңдете отырып жалғастыру үшін қолданылады.

**Түйін сөздер:** Компьютерлік (есептеуіш) диаметр (қысқаша К(Е)Д), дәл және дәл емес мәліметтер бойынша дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін дискретизациялар, шектік қателік.

N. Temirgaliyev, G.E. Taugynbaeva, Sh.K. Abikenova

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L. N. Gumilyov Eurasian National University,  
Astana, Kazakhstan

Discretization of solutions of partial differential equations in the context of the Computational (numerical) diameter

**Abstract:** Since 1996, the idea of a Computational (numerical) diameter has been consistently developed, the goal of which is to optimally computer process models of mathematical models in real conditions of distorted data.

The C(N)D-scheme, in our opinion, determines the refined organization of research in Approximation theory, Computational mathematics, and Numerical analysis.

The paper is devoted to the coverage of the C(N)D -approach in the theory of partial differential equations. The examples of the historically original Laplace, Poisson, heat conduction, wave and, relatively recently Klein-Gordon equations give theorems as illustrative results of the quality and efficiency of C(N)D-productions.

The presented materials can serve to continue the study of the optimal discretization of solutions of partial differential equations with further expansion and deepening of the proposed direction.

**Keywords:** Computer (computational) diameter (abbreviated C(N)D), discretization of solutions of partial differential equations by accurate and inaccurate information, limit error.

## References

- 1 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ), N 1, 89-97(2019).
- 2 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 124(3), 8-88 (2018).
- 3 Temirgaliev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham analiza. Teorija vložhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovaniya rjadov Fur'e [Number-theoretic methods and probability-theoretic approach to the problems of analysis. Theory of investments and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University[Vestnik Evrazijskogo universiteta], (3), 90-144(1997).[in Russian].
- 4 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraičeskaja teorija chisel i garmoničeskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vložhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series. ], Vest. ENU im. L. N. Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L. N. Gumilyov Eurasian National University], 1-194 (2010).
- 5 Temirgaliyev N. Nepreryvnaja i diskretnaja matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravlenij issledovanij [Continuous and discrete mathematics in organic unity in the context of research directions], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV [Electronic edition. IThMandSC], Astana, 1-256(2012).
- 6 Temirgaliyev N. Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 125(4), 8-68 (2018).
- 7 Koljada V.I. O vložhenii nekotoryh klassov funkcij mnogih peremennyh[On the embedding of some classes of functions of several variables], Sib. mat. zhurnal[Siberian Mathematical Journal], (4), 766-790(1973). [in Russian]
- 8 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize[Number theoretic methods in approximate analysis] (Fizmatgiz, Moscow, 1963). [in Russian]

- 9 Ul'yanov P.L. On classes of infinitely differentiable functions, *Mat. Sb.*, 181(5), 589–609(1990).
- 10 Orazkulova B. Polnoe  $K(V)P$  (Komp'yuternyj (vychislitel'nyj) poperechnik) issledovanie uravnenii v chastnyh proizvodnyh [Complete  $C(N)D$  (Computational (Numerical) Diameter) equation research in partial derivatives]: magistrskaja dissertacija po special'nosti 6M060100 – "Matematika" [master's thesis on 6M060100 - "Mathematics" specialty]. L.N.Gumilyov Eurasian National University. Astana. 2016.
- 11 Temirgaliev N. , Abikenova Sh. K. , Zhubanysheva A. Zh. , Taugynbaeva G. E. Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, **57**(8), 75-80(2013).
- 12 Laks P. Matematika i vychislenija[Mathematics and Computing] In Matematika: granicy i perspektivy [Mathematics: boundaries and perspectives] (FAZIS, Moscow, 2005, 175-192).
- 13 Fedorenko R.P. The speed of convergence of one iterative process, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 4(3), 559–564(1964).
- 14 Bakhvalov N.S. On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 6(5), 861–883(1966).
- 15 Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems, *Math. Comp.*, **31**, 333(1977).
- 16 Berikhanova M.E. Ob informativnyh moshhnostjah vsevozmozhnyh linejnyh funkcionalov pri diskretizacii reshenij zadachi Dirihle dlja uravnenija Laplasa [On the informative powers of all possible linear functionals with discretization of solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation]: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. [diss. ... Cand. Phys.-Mat. sciences] Almaty. 2007.
- 17 Petrovskij I.G. Lekcii ob uravnenijah s chastnymi proizvodnymi [Lectures on partial differential equations] (Gos.izd.teh.-teoret.lit., Moskow, 1953, 360 p.).
- 18 Nikol'skij S.M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vložhenija[Approximation of functions of several variables and embedding theorems] (Nauka, Moscow, 1977).
- 19 Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza[Basics of numerical analysis] (Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika[Regular and chaotic dynamics], Moscow, 2002).
- 20 Temirgaliev N. Teoretiko-chislovyje metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham Analiza. Teorija vložhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e (Prodolzhenie 1)[Theoretical-numerical methods and probabilistic theoretic approach to the problems of Analysis. The theory of investments and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series (Continued 1)], *Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta* [Bulletin of the Eurasian National University], (3-4), 222-272(2002).
- 21 Bailov E.A. Priblizhennoe integrirovanie i vosstanovlenija funkcij iz anizotropnyh klassov i vosstanovlenie reshenij uravnenija Puassona [Approximate integration and recovery of functions from anisotropic classes and recovery of solutions of the Poisson equation]: diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk. KazGU [diss. . . . cand. phys.-mat. sciences]. Almaty. 1998.
- 22 Bailov E. A. , Temirgaliev N. Discretization of the solutions to Poisson's equation, *Computational mathematics and mathematical physics*, 46(9), 1515-1525(2006).
- 23 Mihlin N.S. Kurs matematicheskoj fiziki[Course of mathematical physics] (Nauka, Moscow, 1968).
- 24 Kudaibergenov S.S., Sabitova S.G. Discretization of solutions to Poisson's equation in the Korobov class, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **53**(7), 1082–1093(2013).
- 25 Smolyak S.A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 148(5), 1042–1045(1963).
- 26 Shernijazov K. Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravnenija teploprovodnosti s funkcijami raspredelenija nachal'nyh temperatur iz klassov E, SW i V: Kandidatskaja dissertacija [Approximate recovery of functions and solutions of the heat equation with distribution functions of initial temperatures from classes E, SW and B: Candidate dissertation.], Almaty, 1998.[in Russian].
- 27 Hua Loo Keng, Wang Yuan Application of Number Theory to Numerical Analysis (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981).
- 28 Azhgaliev Sh. On the discretization of solutions of the heat equation, *Mathematical Notes*, **82**(2), 153-158(2007).
- 29 Nurmoldin E. E. Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the Ul'yanov  $U_2$ -classes, *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, **8**(4), 337-351(2005).
- 30 Taugynbaeva G.E. O predel'noj pogreshnosti netočnoj informacii pri optimal'nom vosstanovlenii: PhD-dissertacija po special'nosti 6D060100-Matematika[On the marginal error of inaccurate information with optimal recovery: PhD-dissertation on the specialty 6D060100-Mathematics. Kazakh National University named after al-Farabi]. Kazahskij nacional'nyj universitet imeni al'-Farabi, Almaty. 2013.[in Russian].
- 31 Abikenova Sh. K., Temirgaliev N., Utesov A. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes, *Mathematical Notes*, 91(3), 121-125 (2012).
- 32 Shangireev E.I. O vosstanovlenii reshenij volnovogo uravnenija[On the recovery of solutions of the wave equation]: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk.[diss. ... cand. phys.-mat. science] Karaganda, 2002.
- 33 Ibatulin I. , Temirgaliev N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretization of the solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of  $L_2$ , *Differential equation*, 44(4), 510-526 (2008).

- 34 Temirgaliev N., Sherniyazov K.E., Berikhanova M.E. Exact Orders of Computational (Numerical) Diameters in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein–Gordon Equation from Fourier Coefficients//Sovrem. Probl. Mat., 17, 179–207 (2013).
- 35 Vysk N.D., Osipenko K.Yu. Optimal Reconstruction of the Solution of the Wave Equation from Inaccurate Initial Data, Mat. Zametki, 81(6), 803–815(2007).
- 36 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis] (Nauka, Moscow, 1976).
- 37 Wasilkowski G., Wozniakowski H. Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems, J. Complexity, (11), 1-56(1995).
- 38 Temirgaliev N. Classes  $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$  and quadrature formulas, Dockland mathematics, 68(3), 414-415 (2003).
- 39 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration, Izvestiya: Mathematics, 73(2), 393-434(2009).
- 40 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. Applications of Smolyak quadrature formulas to the numerical integration of Fourier coefficients and in function recovery problems, Russian Mathematics (Iz VUZ), 54(3), 45-62(2010).
- 41 Nauryzbayev N., Temirgaliyev N. An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration, Found Comput Math, 12, 139-172(2012).
- 42 Shomanova A.A. O priblizhenii integral'nogo operatora v  $L^t$  - metrike [On the approximation of an integral operator in the  $L^t$  - metric], Vest. ENU im. L.N. Gumileva [Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University], 2010.N2.S363-366.
- 43 Temirgaliev N. On the Construction of Probability Measures on Functional Classes, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 218, 396-401(199).
- 44 Halmosh P. Teorija mery [Theory of Measure] (IL, Moscow, 1953).
- 45 Kudrjavcev L.D., Nikol'skij S.M. Prostranstvo differenciruemyh funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozhenija. Matem. analiz. (Itogi nauki i tehniki) [The space of differentiable functions of many variables and embedding theorems. Mat analysis. (Results of science and technology)]. Moscow:INITI, 26, 5-157(1988).
- 46 Dolzhenko E.P., Ul'janov P. L. O nekotoryh voprosah teorii funkcij [On Some Questions of the Theory of Functions], Vestn. MGU. Ser. matem., meh.[ Vestn. Moscow State University. Ser. Math.], (1), 3–13(1980).
- 47 Dzyadyk V.K., Shevchuk I.A. Extension of functions that are traces on an arbitrary subset of the line of functions with given second modulus of continuity, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 47(2), 248–267(1983).
- 48 Dzjadyk V.K. O prodolzhenii funkcij, udovletvorjajushhijh usloviju Lipshica v metrike  $L_p$  [On the extension of functions that satisfy the Lipschitz condition in the  $L_p$  metric], Matem. sb. [Mat. Sat], 40(82)(2), 239–242(1956).
- 49 Vodop'yanov S. K., Gol'dstein V. M., Reshetnyak Yu. G. On geometric properties of functions with generalized first derivatives, Russian Math. Surveys, 34(1(205)), 19-74(1979).

**Сведения об авторах:**

*Темиргалиев Н.* – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

*Таугынбаева Г.Е.* – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

*Абикенова Ш.К.* – кандидат физико-математических наук, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

*Теміргалиев Н.* – Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

*Таугынбаева Г. Е.* – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

*Абикенова Ш. К.* – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 7.02.2019

МРНТИ: 27.17.19

А.А. Алимбаев

Костанайский государственный педагогический университет имени У. Султангазина,  
Костанай, 110000, Казахстан  
(E-mail: [alialimbayev@gmail.com](mailto:alialimbayev@gmail.com))

### Структура амальгамированного свободного произведения в группах автоморфизмов

**Аннотация:** Определен один класс многообразий алгебр, где группа ручных автоморфизмов свободных двупорожденных алгебр допускает структуру амальгамированного свободного произведения над произвольной областью целостности. Доказана сократимость ручных автоморфизмов свободных двупорожденных алгебр этих многообразий над евклидовыми кольцами. Доказано, что обобщение автоморфизма Нагаты является диким автоморфизмом свободных алгебр этих многообразий от двух переменных над евклидовыми кольцами.

**Ключевые слова:** автоморфизм, ручной автоморфизм, свободное произведение групп, евклидова область.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-52-61>

**1. Введение** В работах [1, 2] доказано, что все автоморфизмы алгебры многочленов  $K[x, y]$  от двух переменных над произвольным полем являются ручными. Группа автоморфизмов алгебры  $K[x, y]$  допускает структуру амальгамированного свободного произведения, то есть

$$\text{Aut}(K[x, y]) \cong A *_C B,$$

где  $A$  – подгруппа аффинных автоморфизмов,  $B$  – подгруппа треугольных автоморфизмов и  $C = A \cap B$ . Этот результат дает исчерпывающие описания группы автоморфизмов двупорожденных алгебр многочленов и по существу был доказан в работе В. ван дер Калка 1953 года [2]. Впервые точная формулировка была дана И.Р. Шафаревичем [3]. В работе Д. Райта [4] доказан аналог этого результата для ручных автоморфизмов двупорожденных алгебр многочленов над произвольной областью целостности.

Хорошо известно, что автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр ранга два над произвольными полями [5, 6] и свободных алгебр Пуассона ранга два над полями нулевой характеристики [7] также являются ручными. Более того, группы автоморфизмов алгебры многочленов  $K[x, y]$ , свободной ассоциативной алгебры  $K\langle x, y \rangle$  и группа автоморфизмов свободной алгебры Пуассона  $P\langle x, y \rangle$  изоморфны [5–7], то есть все они допускают структуру амальгамированного свободного произведения.

Известный автоморфизм Нагаты (см. [8])

$$\sigma = (x + 2y(zx - y^2) + z(zx - y^2)^2, y + z(zx - y^2), z)$$

алгебры многочленов  $K[x, y, z]$  над полем  $K$  характеристики 0 не является ручным, то есть является диким [9–11]. Свободные ассоциативные алгебры от трех переменных над полем нулевой характеристики также имеют дикие автоморфизмы [12]. Автоморфизм Нагаты дает пример дикого автоморфизма свободных алгебр Пуассона от трех переменных.

В 1964 году П. Кон [13] доказал, что автоморфизмы конечно порожденных свободных алгебр Ли над полями являются ручными. В 1968 году Дж. Левин [14] обобщил этот результат для свободных алгебр любого однородного шрайерова многообразия алгебр. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр [15], коммутативных и антикоммутативных алгебр [16], алгебр Ли [17, 18] и супералгебр Ли

[19, 20]. Следовательно, автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр конечного ранга над полями также являются ручными.

Группы автоморфизмов конечно порожденных свободных алгебр над кольцами главных идеалов были исследованы в работах [21, 22]. Один из результатов (Теорема 3, [22]) гласит, что автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр над кольцами главных идеалов являются ручными. Однако в работе [23] приведен пример дикого автоморфизма

$$\eta = (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2))$$

свободной неассоциативной алгебры и свободной коммутативной алгебры ранга два над евклидовыми кольцами. Этот автоморфизм является обобщением автоморфизма Нагаты и индуцирует автоморфизм Нагаты [8] алгебры  $K[x, y, z]$ . Нагата доказал [8], что  $\sigma$  является диким автоморфизмом алгебры  $K[z][x, y]$  над  $K[z]$ . По этой причине автоморфизм  $\eta$  индуцирует дикий автоморфизм свободных алгебр любого многообразия алгебр, содержащего алгебру многочленов. В этой работе мы дадим еще один класс многообразий алгебр, для которых  $\eta$  дает также дикий автоморфизм.

Данная работа посвящена описанию широкого класса многообразий алгебр, где группа ручных автоморфизмов свободных дупорожденных алгебр допускает структуру амальгамированного свободного произведения.

Пусть  $\Phi$  – произвольная область целостности. Пусть  $\mathfrak{M}$  – произвольное однородное многообразие алгебр и пусть  $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  – свободная алгебра этого многообразия от переменных  $x_1, x_2$  над  $\Phi$ . Через  $\deg$  обозначим стандартную функцию степени на  $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ , то есть  $\deg(x_i) = 1$  для  $i = 1, 2$ .

Многообразие  $\mathfrak{M}$  назовем  $*$ -многообразием, если выполняются следующие два условия:

(1) алгебра  $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  является свободным  $\Phi$ -модулем с базой состоящей из неассоциативных слов;

(2) для любого ненулевого  $h \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  с ненулевой линейной частью и для любых однородных  $f, g \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x \rangle$  с условием  $f(h) \neq 0, g(h) \neq 0$  и  $\deg(f) > \deg(g)$  имеем

$$\deg(f(h)) > \deg(g(h)) \text{ и } \deg(f(h)) \geq \deg(f) + \deg(h) - 1.$$

Примерами  $*$ -многообразий алгебр являются:

1. Многообразие ассоциативно коммутативных алгебр,
2. Многообразие ассоциативных алгебр,
3. Многообразие альтернативных алгебр является  $*$  – многообразием так как любая дупорожденная альтернативная алгебра является ассоциативной (по теореме Артина [24]),
4. Многообразие йордановых алгебр (по теореме А.И. Ширшова [25]),
5. Многообразие всех алгебр (А.И. Жуков [26], А.Г. Курош [15]),
6. Многообразие всех коммутативных алгебр (А.И. Ширшов [16]).
7. Многообразие алгебр Лейбница (Ж.-Л. Лодей и Т.Пирашвили [27]).

В §2 этой работы доказано, что группы ручных автоморфизмов свободных алгебр  $*$  – многообразий от двух переменных являются амальгамированными свободными произведениями аффинных и треугольных групп автоморфизмов над произвольной областью целостности. В §3 доказана сократимость ручных автоморфизмов свободных алгебр  $*$  – многообразий от двух переменных над евклидовыми кольцами. Доказано, что обобщение автоморфизма Нагаты  $\eta$ , построенное в работе [23], является диким автоморфизмом свободных алгебр  $*$  – многообразий от двух переменных над евклидовыми кольцами.

Автор благодарит своего научного руководителя, профессора У. Умирбаева за постановку задачи и за полезные советы при написании данной работы.

**2. Амальгамированное свободное произведение.** Пусть  $\Phi$  – произвольная область целостности. Множество всех обратимых элементов  $\Phi$  обозначим через  $\Phi^*$ . Пусть  $\mathfrak{M}$  – произвольное  $*$ -многообразие алгебр над  $\Phi$  и  $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных  $x_1, x_2$ . Обозначим через  $\phi = (f_1, f_2)$  автоморфизм алгебры  $A$  такой, что  $\phi(x_i) = f_i, 1 \leq i \leq 2$ .

Автоморфизмы вида

$$(\alpha x_1 + f(x_2), x_2), (x_1, \beta x_2 + g(x_1)),$$

где  $\alpha, \beta \in \Phi^*$  называются *элементарными*. Пусть  $Aut(A)$  – группа всех автоморфизмов алгебры  $A$ . Подгруппа  $T(A)$  группы  $Aut(A)$ , порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов*. Автоморфизм  $\varphi \in Aut(A)$  называется *ручным*, если  $\varphi \in T(A)$ , иначе  $\varphi$  называется *диким*.

Если

$$\varphi = (f_1, f_2), \psi = (g_1, g_2),$$

то произведение в  $Aut(A)$  определяется по формуле

$$\varphi \circ \psi = (g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2)).$$

Автоморфизм  $\lambda$  алгебры  $A$  называется *аффинным*, если

$$\lambda = (a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1, a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2),$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \in \Phi^*, a_i, b_i, c_i \in \Phi.$$

Группу аффинных автоморфизмов алгебры  $A$  обозначим через  $Af_2(\Phi)$ .

Автоморфизм  $\mu$  алгебры  $A$  называется *треугольным*, если

$$\mu = (ax_1 + h(x_2), bx_2 + b_1),$$

где  $a, b \in \Phi^*$ ,  $b_1 \in \Phi$ ,  $h(x_2) \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x_2 \rangle$ . Через  $Tr_2(A)$  обозначим группу треугольных автоморфизмов алгебры  $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ .

Пусть  $G$  – произвольная группа,  $G_0, G_1, G_2$  – подгруппы группы  $G$ , причем  $G_0 = G_1 \cap G_2$ . Группа  $G$  называется *свободным произведением подгрупп  $G_1$  и  $G_2$  с объединенной подгруппой  $G_0$*  и обозначается  $G = G_1 *_{G_0} G_2$ , если

- (а)  $G$  порождается подгруппами  $G_1$  и  $G_2$ ;
- (б) Определяющие соотношения группы  $G$  состоят только из определяющих соотношений подгрупп  $G_1$  и  $G_2$ .

Если  $S_1$  – система левых представителей  $G_1$  по  $G_0$ ,  $S_2$  – система левых представителей  $G_2$  по  $G_0$ , то группа  $G$  является свободным произведением подгрупп  $G_1$  и  $G_2$  с объединенной подгруппой  $G_0$  (см. например [28]) в том и только в том случае, когда каждый  $g \in G$  однозначно представляется в виде

$$g = g_1 \dots g_k c,$$

где  $g_i \in S_1 \cup S_2$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $g_i, g_{i+1}$  одновременно не принадлежат  $S_1$  или  $S_2$ ,  $c \in G_0$ .

Пусть  $A_0$  – произвольная фиксированная система представителей (включающая единицу) левых смежных классов группы  $Af_2(\Phi)$  по подгруппе  $H = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$ .

Пусть  $I$  идеал алгебры  $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_2 \rangle$  порожденный элементом  $x_2^2$ . Множество автоморфизмов

$$B_0 = \{\tau = (x_1 + g(x_2), x_2) | g(x_2) \in I\}$$

является системой представителей левых смежных классов  $Tr_2(A)$  по подгруппе  $H = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$ .

**Лемма 1.** *Любой ручной автоморфизм  $\phi$  алгебры  $A$  разлагается в произведение вида*

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k \circ \lambda \tag{1}$$

где  $\sigma_i \in A_0, \sigma_2, \dots, \sigma_k \neq id, \tau_i \in B_0, \tau_1, \dots, \tau_k \neq id, \lambda \in Af_2(\Phi)$

**Доказательство.** Любой ручной автоморфизм  $\phi$  представляется в виде

$$\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n,$$

где  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  – элементарные автоморфизмы. Любой элементарный автоморфизм имеет вид

$$\lambda_1 \circ \tau \circ \lambda_2$$

где  $\tau \in B_0, \lambda_1, \lambda_2 \in Af_2(\Phi)$ . Следовательно, имеем

$$\phi = \lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \tau_2 \circ \lambda_3 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1},$$

где  $\tau_i \in B_0, \lambda_i \in Af_2(\Phi)$ .

Докажем индукцией по  $n$ , что  $\phi$  представляется в виде произведения (1) с  $k \leq n$ .

Известно, что автоморфизм  $\lambda_1 \in Af_2(\Phi)$  записывается в виде  $\lambda_1 = \sigma_1 \circ \gamma_1$ , где  $\sigma_1 \in A_0, \gamma_1 \in Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$ . Тогда

$$\lambda_1 \circ \tau_1 = \sigma_1 \circ \gamma_1 \circ \tau_1 = \sigma_1 \circ \tau_1' \circ \gamma_1,$$

где  $\tau_1' = \gamma_1 \circ \tau_1 \circ \gamma_1^{-1} \in B_0$ . Имеем

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1' \circ (\gamma_1 \circ \lambda_2) \circ \tau_2 \circ \lambda_3 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1}.$$

По индуктивному предположению, произведение

$$(\gamma_1 \circ \lambda_2) \circ \tau_2 \circ \lambda_3 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1}$$

записывается в виде

$$\sigma_2 \circ \tau_2' \circ \sigma_3 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k' \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma, k \leq n.$$

Следовательно,

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1' \circ \sigma_2 \circ \tau_2' \circ \sigma_3 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k' \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma.$$

Если  $\sigma_2 \neq id$ , то полученное представление имеет вид (1), где  $\lambda = \sigma_{k+1} \circ \gamma \in Af_2(\Phi)$ . Рассмотрим случай  $\sigma_2 = id$ . Так как  $\tau_1' \circ \tau_2' = \tau_2'' \in B_0$ , то

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1' \circ \tau_2' \circ \sigma_3 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k' \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma = \sigma_1 \circ \tau_2'' \circ \sigma_3 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k' \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma.$$

Поскольку  $k-1 < n$ , то, по индуктивному предположению,  $\phi$  записывается в виде (1). Лемма 1 доказана.

Если  $\phi = (f_1, f_2)$ , то положим

$$\deg(\phi) = \max\{\deg(f_1), \deg(f_2)\}.$$

Для каждого  $1 \leq i \leq n$  положим

$$\phi_i = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_i \circ \tau_i = (\phi_i(x_1), \phi_i(x_2)). \quad (2)$$

**Лемма 2.** Для каждого автоморфизма  $\phi_i$  из (2) имеет место неравенство

$$1 < \deg \phi_1 < \deg \phi_2 < \dots < \deg \phi_k, \deg(\phi_i(x_2)) < \deg(\phi_i(x_1)) = \deg(\phi_i).$$

**Доказательство.** Доказательство проведем индукцией по  $k$ . Пусть  $k = 1$  и

$$\tau_1 = (x_1 + g_1(x_2), x_2).$$

Тогда

$$\phi_1 = \sigma_1 \circ \tau_1 = (\sigma_1(x_1) + g_1(\sigma_1(x_2)), \sigma_1(x_2)) = (\phi_1(x_1), \phi_1(x_2)).$$

Так как  $\sigma_1(x_1), \sigma_1(x_2) \in A_0$  и по определению  $*$ -многообразия, имеем

$$\deg(g_1(\sigma_1(x_2))) > \deg(\sigma_1(x_2)) = 1.$$

Следовательно,

$$1 = \deg(\phi_1(x_2)) < \deg(\phi_1(x_1)) \text{ и } \deg(\phi_1) = \deg(\phi_1(x_1)).$$

Допустим, что утверждение верно для всех автоморфизмов  $\phi_i, 1 \leq i \leq k-1$ . Положим

$$\phi_{k-1} = (\phi_{k-1}(x_1), \phi_{k-1}(x_2)) = (p, q).$$

По предположению индукции  $\deg(q) < \deg(p)$  и

$$\deg(\phi_{k-1}) = \deg(\phi_{k-1}(x_1)) = \deg(p).$$

Пусть

$$\sigma_k = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1, a_2x_1 + b_2x_2 + c_2),$$

где  $a_2$  не равен нулю. Если  $a_2 = 0$ , то  $\sigma_k \notin A_0$ . Следовательно, имеем

$$\phi_{k-1} \circ \sigma_k = (a_1p + b_1q + c_1, a_2p + b_2q + c_2)$$

Получим, что  $\deg(\phi_{k-1} \circ \sigma_k) = \deg(\phi_{k-1}) = \deg(p)$ .

Пусть

$$\tau_k = (x_1 + g_k(x_2), x_2), 0 \neq g_k(x_2) \in I.$$

То имеем

$$\phi_{k-1} \circ \sigma_k \circ \tau_k = (a_1p + b_1q + c_1 + g_k(a_2p + b_2q + c_2), a_2p + b_2q + c_2) = (\phi_k(x_1), \phi_k(x_2)).$$

В силу того, что  $a_2 \neq 0$  и  $\deg(g_k) \geq 2$ , то, по определению  $*$ -многообразия, имеем  $\deg(g_k(a_2p + b_2q + c_2)) \geq \deg(g_k) + \deg(a_2p + b_2q + c_2) - 1 = \deg(g_k) + \deg(p) - 1 > \deg(p)$ . Следовательно,  $\deg(\phi_k(x_1)) > \deg(\phi_k(x_2))$  и  $\deg(\phi_k(x_1)) = \deg(\phi_k) > \deg(\phi_{k-1})$ . Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** Разложение (1) автоморфизма  $\phi$  из леммы 3 является однозначным.

**Доказательство.** Достаточно показать, что

$$\sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma \neq id$$

где  $k \geq 1, \sigma_i \in A_0, \sigma_2, \dots, \sigma_k \neq id, \tau_i \in B_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1} \neq id, \gamma \in Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$ . Допустим, что

$$\sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma = id.$$

Отсюда получаем

$$\tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k = \sigma_1^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \sigma_{k+1}^{-1}. \quad (3)$$

Положим

$$\phi = \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k.$$

Тогда, по лемме 2,  $\deg(\phi) > 1$ . Так как  $\lambda = \sigma_1^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \sigma_{k+1}^{-1} \in Af_2(\Phi)$ , то  $\deg(\lambda) = 1$  и  $\deg(\phi) > \deg(\lambda)$ . Это противоречит (3). Лемма 3 доказана.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{M}$ -произвольное  $*$ -многообразие алгебр и  $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  - свободная алгебра этого многообразия от двух переменных  $x_1, x_2$  над  $\Phi$ . Тогда группа ручных автоморфизмов алгебры  $A$  является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов  $Af_2(\Phi)$  и треугольных автоморфизмов  $Tr_2(A)$  с объединенной подгруппой  $H = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$ , т.е.

$$T(A) = Af_2(\Phi) *_H Tr_2(A).$$

**Доказательство.** Так как  $A_0, B_0$  системы левых смежных классов  $Af_2(\Phi)$  и  $Tr_2(A)$  по подгруппе  $Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$ , то по лемме 1 любой ручной автоморфизм представим в виде (1). По лемме 3 такое представление является однозначным. Согласно [28], имеем

$$Aut(\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle) = Af_2(\Phi) *_H Tr_2(A).$$

где  $H = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$ . Теорема 1 доказана.

### О сократимости ручных автоморфизмов

Обозначим через  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$  - множество неотрицательных целых чисел. Целостное кольцо  $\Phi$ , не являющееся полем, называется *евклидовым* [29], если существует функция  $|\cdot| : \Phi \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_+$  (называемая нормой), удовлетворяющая следующим условиям:

Е1) для любых  $a, b \in \Phi \setminus \{0\}$ ,  $|ab| \geq |a|$ , причем равенство имеет место только тогда, когда элемент  $b$  обратим;

Е2) для любых  $a, b \in \Phi$ , где  $b \neq 0$ , существуют такие  $q, r \in \Phi$ , что  $a = bq + r$  и либо  $r = 0$ , либо  $|r| < |b|$ .

Положим  $e = |1| \in \mathbb{Z}_+$ , где  $1 \in \Phi$  - единица кольца  $\Phi$ . Имеем  $|a| = e$  тогда и только тогда, когда  $a \in \Phi^*$ .

Основными примерами евклидовых колец являются кольцо  $\mathbb{Z}$  целых чисел с абсолютным значением целых чисел и кольцо  $K[x]$  многочленов над полем  $K$  со степенью многочленов. Следовательно,  $e = 1$  в кольце  $\mathbb{Z}$  и  $e = 0$  в кольце  $K[x]$ .

Пусть  $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  - свободная алгебра  $*$ -многообразия  $\mathfrak{M}$  от двух переменных  $x_1, x_2$  над евклидовым кольцом  $\Phi$ . Обозначим через  $X^*$  множество всех неассоциативных



слов алфавита  $X$ . Каждое неассоциативное слово  $u$ , где  $\deg(u) \geq 2$ , имеет единственное представление в виде  $u = u_1u_2$ , где  $u_1$  и  $u_2$  неассоциативные слова меньшей длины и

$$\deg(u) = \deg(u_1) + \deg(u_2).$$

Положим, что  $x_1 > x_2$ . Пусть  $u$  и  $v$  два произвольных элемента из  $X^*$ . Мы говорим, что  $u < v$  если  $\deg(u) < \deg(v)$ . Если  $\deg(u) = \deg(v) \geq 2$ ,  $u = u_1u_2$ ,  $v = v_1v_2$ , тогда  $u < v$  если  $u_1 < v_1$  или  $u_1 = v_1$  и  $u_2 < v_2$ .

Так как алгебра  $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  является свободным  $\Phi$ -модулем с фиксированным базисом  $W$  состоящим из неассоциативных слов, то каждый ненулевой элемент  $f \in A$  записывается однозначно в виде

$$f = \alpha_1w_1 + \alpha_2w_2 + \dots + \alpha_nw_n, \quad 0 \neq \alpha_i \in \Phi, w_1 > w_2 > \dots > w_n \in W$$

Слово  $w_1$  называется старшим словом (мономом)  $f$ , а  $\alpha_1$  называется старшим коэффициентом  $f$ . Обозначим их через  $lm(f)$  и  $lc(f)$  соответственно. Через  $f' = \alpha_1w_1$  обозначим старший член элемента  $f$ . Через  $\bar{f}$  обычно будем обозначать старшую однородную часть  $f$  по отношению к функции степени  $\deg$ .

Пусть  $f$  — произвольный элемент из  $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ . Положим

$$D(f) = (lm(f), |lc(f)|)$$

и назовем  $D(f)$  показателем элемента  $f$ .

Пусть  $\varphi = (f_1, f_2)$  — автоморфизм алгебры  $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ . Тогда показателем автоморфизма  $\varphi$  назовем

$$D(\varphi) = (u, v, |lc(f_1)| + |lc(f_2)|) \in W^2 \times Z_+,$$

где  $\{u, v\} = \{lm(f_1), lm(f_2)\}$  и  $u \geq v$ .

Заметим, что  $D$  — инвариантно относительно перестановки компонент автоморфизма, т.е.

$$D(f_1, f_2) = D(f_2, f_1).$$

Имеем

$$D(id) = (x_1, x_2, 2e),$$

где  $id = (x_1, x_2)$  — тождественный автоморфизм. Более того,  $D(f_1, f_2) = (x_1, x_2, 2e)$  тогда и только тогда, когда элементы  $f_1, f_2$  имеют следующий вид:

$$f_1 = \alpha_1x_1 + \beta_1x_2 + \gamma_1, \quad f_2 = \beta_2x_2 + \gamma_2, \quad (4)$$

или

$$f_1 = \beta_3x_2 + \gamma_3, \quad f_2 = \alpha_2x_1 + \beta_4x_2 + \gamma_4, \quad (5)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3 \in \Phi^*$  и  $\beta_1, \beta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Phi$ .

Обозначим через  $\preceq$  лексикографический порядок на множестве  $W^2 \times Z_+$ . Заметим, что множество  $W^2 \times Z_+$  линейно упорядочено относительно  $\preceq$ .

*Элементарным преобразованием* системы элементов  $(f_1, f_2)$  называется замена одного элемента  $f_i$  на элемент вида  $\alpha f_i + g$ , где  $\alpha \in \Phi^*$ ,  $g \in \langle f_j | j \neq i \rangle$ .

Запись

$$(f_1, f_2) \rightarrow (g_1, g_2)$$

означает, что система элементов  $(g_1, g_2)$  получена из системы элементов  $(f_1, f_2)$  одним элементарным преобразованием.

Если  $(f_1, f_2)$  — ручной автоморфизм алгебры  $A$ , то существует последовательность элементарных преобразований вида

$$(x_1, x_2) = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)}) \rightarrow (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}) = (f_1, f_2).$$

Аutomорфизм  $\theta = (f_1, f_2)$  называется *элементарно  $D$ -сократимым* (или  $\theta$  допускает элементарное  $D$ -сокращение), если существует автоморфизм  $\psi$  такой, что  $\theta \rightarrow \psi$  и  $D(\psi) \prec D(\theta)$ . Будем говорить, что *автоморфизм  $\psi$  является элементарным  $D$ -сокращением автоморфизма  $\theta$* .

**Лемма 4.** Пусть  $\pi = (h_1, h_2)$  – автоморфизм алгебры  $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ . Если старшие слова элементов  $h_1, h_2$  – линейно зависимы, то автоморфизм  $\pi$  является элементарно  $D$ -сократимым.

**Доказательство.** Так как  $lm(h_1) = lm(h_2)$ , то без ограничения общности предположим, что  $|lc(h_1)| \geq |lc(h_2)|$ . По Е1) существуют  $q, r \in \Phi$  такие, что  $lc(h_1) = lc(h_2)q + r$  и либо  $r = 0$ , либо  $|r| < |lc(h_2)|$ . Рассмотрим элементарное преобразование

$$\pi = (h_1, h_2) \rightarrow (h_1 - qh_2, h_2) = \delta.$$

Имеем  $D(h_1) \succ D(h_1 - qh_2)$ . Следовательно,  $D(\pi) \succ D(\delta)$  и автоморфизм  $\pi$  является элементарно  $D$ -сократимым. Лемма 4 доказана.

Характеризацию ручных автоморфизмов алгебры  $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  дает следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $\phi = (f_1, f_2)$  – ручной автоморфизм алгебры  $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ . Если

$$D(\phi) \succ (x_1, x_2, 2e),$$

то автоморфизм  $\phi$  является элементарно  $D$ -сократимым.

**Доказательство.** По лемме 1 автоморфизм  $\phi$  записывается в виде (1). Рассмотрим случай когда  $\lambda = id$ . Тогда

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k = (f, g).$$

Положим

$$\psi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k = (p, q).$$

Если  $\tau_k = (x_1 + g_k(x_2), x_2)$ , то

$$\phi = (p + g_k(q), q) = (f, g).$$

Так как  $\deg(\tau_i) = n_i$ , то по лемме 2 имеем

$$\deg(\psi) < \deg(\phi), \text{ следовательно } D(\psi) \prec D(\phi).$$

Поскольку

$$\phi \rightarrow \psi,$$

то автоморфизм  $\phi$  является элементарно  $D$ -сократимым.

Допустим, что

$$\lambda = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1, a_2x_1 + b_2x_2 + c_2) \neq id.$$

Положим

$$\omega = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k = (p + g_k(q), q) = (r, s).$$

Тогда  $\deg(r) > \deg(s)$  по лемме 2. Следовательно,

$$\phi = \omega \circ \lambda = (a_1r + b_1s + c_1, a_2r + b_2s + c_2) = (f_1, f_2).$$

Более того,

$$r' = (g_k(s))'.$$

Если  $a_1, a_2 \neq 0$ , то  $lm(f_1) = lm(f_2)$  и по лемме 1 автоморфизм  $\phi$  элементарно  $D$ -сократим.

Если  $a_1 = 0$ , то  $f'_1 = b_1s'$ ,  $f'_2 = a_2r' = a_2(g_k(s))'$  и  $b_1, a_2 \in \Phi^*$ . Тогда имеем, что автоморфизм

$$\psi = (f_1, f_2 - a_2g_k(b_1^{-1}f_1))$$

является элементарным  $D$ -сокращением  $\phi$ .

Если  $a_2 = 0$ , то этот случай симметричен предыдущему. Теорема 2 доказана.

Непосредственный анализ доказательства теоремы 2 дает

**Следствие 1.** Пусть  $\pi = (h_1, h_2)$  – ручной автоморфизм алгебры  $A$  и  $lm(h_1) < lm(h_2)$ . Тогда найдется  $t \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x \rangle$  такое, что

$$\overline{h_2} = \overline{t(h_1)}.$$

**Следствие 2.** Ручные и дикие автоморфизмы алгебры  $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  над конструктивным евклидовым кольцом  $\Phi$  алгоритмически распознаваемы.

**Доказательство.** Проведем индукцию по показателю  $D(\phi)$  автоморфизма  $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle)$ . Если  $D(\phi) = (x_1, x_2, 2e)$ , то  $\phi$  имеет вид (4) или (5). Следовательно, автоморфизм  $\phi$  является линейным. Так как любая обратимая матрица над евклидовым кольцом является произведением элементарных и диагональных матриц [29], то линейные автоморфизмы являются ручными.

Если автоморфизм  $\phi$  не является элементарно  $D$ -сократимым, то  $\phi$  является диким по теореме 2. Пусть  $\phi = (f_1, f_2)$  ручной. Если  $lm(f_1) = lm(f_2)$  то по лемме 1 автоморфизм  $\phi$  элементарно  $D$ -сократим. Поэтому без ограничения общности можно считать, что  $lm(f_1) < lm(f_2)$ . По следствию 1 найдется  $t \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x \rangle$  такое, что  $\overline{f_2} = \overline{t(f_1)}$ . Тогда по условию \*-многообразие имеем

$$\deg(f_2) = \deg(t(f_1)) \geq \deg(f_1) + \deg(t) - 1.$$

Это неравенство позволяет оценить степень многочлена  $t$  с условием  $\overline{f_2} = \overline{t(f_1)}$ . Если  $\overline{f_2} \in \overline{\langle f_1 \rangle}$ , то можно построить  $T \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x \rangle$  такое, что  $\overline{f_2} = \overline{T(f_1)}$ . Тогда автоморфизм  $\psi = (f_1, f_2 - T(f_1))$  является элементарным  $D$ -сокращением автоморфизма  $\phi$ . Имеем  $D(\psi) < D(\phi)$ . Очевидно,  $\phi$  является ручным тогда и только тогда, когда  $\psi$  является ручным автоморфизмом. Индукция по  $D$  завершает доказательство.

В работе [23] было построено обобщение автоморфизма Нагаты

$$\eta = (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2)),$$

где  $0 \neq z \in \Phi \setminus \Phi^*$ .

**Следствие 3.** Автоморфизм Нагаты

$$\eta = (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2))$$

как автоморфизм алгебры  $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$  над  $\Phi$  является диким.

**Доказательство.** Достаточно показать, что  $\eta$  не является элементарно  $D$ -сократимым. Допустим, что  $\eta = (f_1, f_2)$  является элементарно  $D$ -сократимым.

Пусть  $(x^2)^2 \neq 0$ . Имеем

$$\overline{f_1} = z(x_2^2)^2, \quad \overline{f_2} = -zx_2^2.$$

Если  $\eta$  является ручным, то по следствию 1 найдется  $t \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x \rangle$  такое, что  $\overline{f_1} = \overline{t(f_2)}$ . Отсюда по следствию 2 следует, что  $\overline{f_1} \in \overline{\langle f_2 \rangle}$ .

В подалгебре  $\langle f_2 \rangle$  только произведение  $\overline{f_2 f_2} = z^2(x_2^2)^2$  имеет степень 4 по  $x_1, x_2$ . Так как  $\overline{f_1} = z(x_2^2)^2$  линейно не выражается через  $z^2(x_2^2)^2$ , то  $\overline{f_1}$  не принадлежит подалгебре  $\overline{\langle f_2 \rangle}$ . Следовательно, автоморфизм  $\eta$  не является элементарно  $D$ -сократимым и не является ручным по теореме 2.

Рассмотрим случай когда  $(x^2)^2 = 0$ . Тогда

$$\overline{f_1} = -(x_2 x_2^2 + x_2^2 x_2 + z^2 x_1 x_2^2 + z^2 x_2^2 x_1), \quad \overline{f_2} = -zx_2^2.$$

Если  $\eta$  является ручным, то по следствию 1 найдется  $t \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x \rangle$  такое, что  $\overline{f_1} = \overline{t(f_2)}$ . В подалгебре  $\langle f_2 \rangle$  только произведение

$$\overline{f_2 f_2} = -z(x_2 x_2^2 + x_2^2 x_2 + z^2 x_1 x_2^2 + z^2 x_2^2 x_1)$$

имеет степень 3 по  $x_1, x_2$ . Так как  $\overline{f_1} = -(x_2 x_2^2 + x_2^2 x_2 + z^2 x_1 x_2^2 + z^2 x_2^2 x_1)$  линейно не выражается через  $-z(x_2 x_2^2 + x_2^2 x_2 + z^2 x_1 x_2^2 + z^2 x_2^2 x_1)$ , то  $\overline{f_1}$  не принадлежит подалгебре  $\overline{\langle f_2 \rangle}$ . Следовательно, автоморфизм  $\eta$  не является элементарно  $D$ -сократимым и не является ручным по теореме 2.

## Список литературы

- 1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. reine angew. Math. – 1942. – Vol.184. –P.161–174.
- 2 Van der Kulk W. On Polynomial Rings in Two Variables // Nieuw Archief voor Wisk. – 1953. – Vol. 1. -№ 3. – P.33 – 41.
- 3 Shafarevich I.R. On some infinite-dimensional groups // Rend. Mat. e Appl. –1966. –Vol.25. –P.208–212.
- 4 Wright D. The amalgamated free product structure of  $GL_2(k[x_1, \dots, x_n])$  // J. Pure Appl. Algebra –1978. –Vol.12. –P. 235–251.
- 5 Мака́р-Лима́нов Л. Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих // Функциональный анализ и его приложения. –1970. –Т.4. –С.107–108.
- 6 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a Free Associative Algebra of Rank 2, I, II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol.160. –P.393–401; – 1972. –Vol.171. –P.309–315.
- 7 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U.U. Automorphisms and derivations of Poisson algebras in two variables // Journal of Algebra –2009. –Vol.322. № 9. –P.3318–3330.
- 8 Nagata M. On the automorphism group of  $k[x, y]$  (Lect. in Math.) // Kinokuniya. –Tokio: Kyoto Univ., 1972.
- 9 Умирбаев У.У., Шестаков И.П. Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов // Доклады РАН –2002. –Т.386. № 6. –С.745–748.
- 10 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The Nagata automorphism is wild // Proc. Natl. Acad. Sci. USA–2003. – Vol.100. № 22. –P.12561–12563.
- 11 Shestakov I.P. and Umirbaev U.U. Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables // J. Amer. Math. Soc. – 2004. –Vol.17. –P.197–227.
- 12 Umirbaev U.U. The Anick automorphism of free associative algebras // J. Reine Angew. Math.–2007. – Vol.605.–P.165–178.
- 13 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. –1964. –Vol.56. –P.618–632.
- 14 Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras // Trans. Amer. Math. Soc. –1968. –Vol.132. –P.553–562.
- 15 Курош А.Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб.–1947. –Т.20(62). –С.239–262.
- 16 Ширшов А.И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Матем. сб. –1954. –Т.34(76). –С.81–88.
- 17 Ширшов А.И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Матем. сб. –1953. –Т.33(75). –С.441–452.
- 18 Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. –1956. –Vol.64. –P.195–216.
- 19 Михалев А.А. Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли // Матем. заметки. –1985. –Т.37. –С.653–661.
- 20 Штерн А.С. Свободные супералгебры Ли // Сиб. мат. журн. –1986. –Т.27. № 1. –С.170–174.
- 21 Кряжовских Г.В., Кукин Г.П. О подкольцах свободных колец // Сиб. мат. журн. –1989. –Т.30. № 6. –С.87–97.
- 22 Кряжовских Г.В., Кукин Г.П. Алгоритмические свойства свободных колец // Сиб. мат. журн. –1991. Т.32. № 6. –С.87–99.
- 23 Алимбаев А.А., Умирбаев У.У. Автоморфизм Нагаты свободных неассоциативных алгебр ранга два над евклидовыми кольцами // Сиб. электрон. матем. изв. –2017. –Т.14. –С.1279–1288. doi: 10.17377/semi.2017.14.108. –URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p1279-1288.pdf>.
- 24 Жевлаков К.А., Слинко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. –М.: Наука, –1978.–431 стр.
- 25 Ширшов А.И. О специальных  $J$ -кольцах // Матем. сб. –1956. –Т.38, No.80. –С.149–166.
- 26 Жуков А.И. Неассоциативные свободные разложения алгебр с конечным числом образующих // Матем. сб. –1950. –Т.26(68). № 3. –С.471–478.
- 27 Loday J.-l., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology // Math. Ann. –1993. –Vol.296. –P.139–158.
- 28 Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. –М.: Наука, –1974.–455 стр.
- 29 Винберг Э.Б. Курс алгебры.–М.: Факториал Пресс, –2001. – 544 стр.

А.А. Алимбаев

Ө. Сұлтангазин атындағы Қостанай мемлекеттік педагогикалық университетіні, Тәуелсіздік көшесі 118, Қостанай, Қазақстан

### Автоморфизмдер топтарында амальгамалы еркін көбейтіндінің құрылымы

**Аннотация:** Алгебралар көпбейнесінің бір классы анықталды, мұнда кез келген тұтастық облыс үстінде екі элементтен туындалған еркін алгебраның қолды афтоморфизмдерінің тобы амальгамалы еркін көбейтіндісің құрылымы ретінде бола алады. Осы алгебралар көпбейнесінің евклидтік сақина үстінде екі элементтен туындалған еркін алгебраларының қолды автоморфизмдері қысқартылатыны дәлелденді. Нагата автоморфизмінің жалпылануы осы алгебралар көпбейнесінің евклидтік сақина үстінде екі элементтен туындалған еркін алгебраларының жабайы автоморфизм болатыны дәлелденді.

**Түйін сөздер:** автоморфизм, қолды автоморфизм, топтардың еркін көбейтіндісі, евклидтік облыс.

А.А. Алимбаев

*Kostanay State Pedagogical University named after U.Sultangazin, Tauelsizdik street 118, Kostanay, Kazakhstan*

**Structure of amalgamated free work in groups automorphisms**

**Abstract:** One class of varieties of algebras is defined, where the group of tame automorphisms of free two-generated algebras admits the structure of an amalgamated free product over an arbitrary integrity domain. Proved the reducibility of tame automorphisms of free two-generated algebras of these varieties over Euclidean domains. It is proved that the generalization of Nagata automorphism is a wild automorphism of free algebras of these varieties from two variables over Euclidean domains.

**Keywords:** automorphism, tame automorphism, free product of groups, euclidean domain.

**References**

- 1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math., **184**, 161–174(1942).
- 2 Van der Kulk W. n polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wiskunde, **1**, 33–41(1953).
- 3 Shafarevich I.R. On some infinite-dimensional groups, Rend. Mat. e Appl., **25**, 208–212(1966).
- 4 Wright D. The amalgamated free product structure of  $GL_2(k[x_1, \dots, x_n])$ , J. Pure Appl. Algebra, **12**, 235–251(1978).
- 5 Makar-Limanov L. The automorphisms of the free algebra of two generators, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **4**(3), 107–108(1970).
- 6 Czerniakiewicz A.G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II, Trans. Amer. Math. Soc., **160**, 393–401(1971).
- 7 Makar-Limanov L., Turusbekova U. and Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, J. Algebra, **322**(9), 3318–3330(2009).
- 8 Nagata M., On the automorphism group of  $k[x, y]$ , Lect. in Math., Kyoto Univ. (Kinokuniya, Tokyo, 1972).
- 9 Umirbaev U.U., Shestakov I.P. Subalgebras and automorphisms of polynomial rings, Dokl. Akad. Nauk, **386**(6), 745–748(2002).
- 10 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The Nagata automorphism is wild, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **100**(22), 12561–12563(2003).
- 11 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables, J. Amer. Math. Soc., **17**, 197–227(2004).
- 12 Umirbaev U.U. The Anick automorphism of free associative algebras, J. Reine Angew. Math., **605**, 165–178(2007).
- 13 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras, Proc. London Math. Soc., **14**, 618–632(1964).
- 14 Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **132**, 553–562(1968).
- 15 Kurosh A.G. Nonassociative free algebras and free products of algebras, Mat. Sb., **20**, 239–262(1947).
- 16 Shirshov A.I. Subalgebras of free commutative and free anticommutative algebras, Mat. Sb. (N.S.), **34**(76), 81–88(1954).
- 17 Shirshov A.I. Subalgebras of free Lie algebras, Mat. Sb. (N.S.), **33**(75), 441–452(1953).
- 18 Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe, Math. Z., **64**, 195–216(1956).
- 19 Mikhalev A.A. Subalgebras of free colored Lie superalgebras, Mat. Zametki, **37**(5), 653–661(1985).
- 20 Shtern A.S. Free Lie superalgebras, Sibirsk. Mat. Zh., **27**(1), 170–174(1986).
- 21 Kryazhovskikh G.V., Kukin G.P. On subrings of free rings, Siberian Math. J., **30**(6), 87–97(1989).
- 22 Kryazhovskikh G.V., Kukin G.P. Algorithmic properties of free rings, Siberian Math. J., **32**(6), 87–99(1991).
- 23 Alimbaev A.A., Umirbaev U.U. The Nagata automorphism of free nonassociative algebras of rank two over Euclidean domains, Sib. Elektron. Mat. Izv., **14**, 1279–1288(2017). doi: 10.17377/semi.2017.14.108. Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p1279-1288.pdf>.
- 24 Zhevlakov K., Slin'ko A., Shestakov I., Shirshov A. Rings close to associative (Nauka, Moscow, 1978).
- 25 Shirshov A.I. On special J-rings, Mat. Sb. (N.S.), **38**(80)(2), 149–166(1956).
- 26 Zhukov A.I. Nonassociative free decompositions of algebras with a finite number of generators, Mat. Sb. (N.S.), **26**(68)(3), 471–478(1950).
- 27 Loday J.-l., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology, Math. Ann., **296**, 139–158(1993).
- 28 Magnus W., Karass A., Solitar D. Kombinatornaya teoriya grupp (Nauka, Moscow, 1974, 455 p.).
- 29 Vinberg E.B. A Course in Algebra (Amer. Math. Soc., 2003).

**Сведения об авторе:**

*Алимбаев А.А.* – докторант Евразийского национального университета имени Л. Гумилева, старший преподаватель кафедры физико-математических дисциплин Костанайского государственного педагогического университета имени У. Султангазина, улица Тауелсіздік 118, Костанай, Казахстан.

*Alimbaev A. A.* - PhD of the L.N.Gumilyov Eurasian National University, senior lecturer of the Department of physico-mathematical disciplines Kostanay State Pedagogical University named after U.Sultangazin, Tauelsizdik street 118, Kostanay, Kazakhstan.

*Поступила в редакцию 28.01.2019*

МРНТИ: 27.19.17

M. Bakuradze

*Faculty of exact and natural sciences, Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*  
*A. Razmadze Math. Institute, Tbilisi, Georgia*  
(E-mail: [malkhaz.bakuradze@tsu.ge](mailto:malkhaz.bakuradze@tsu.ge))

### Some explicit expressions concerning the Nadiradze formal group law<sup>1</sup>

**Abstract:** This note provides some explicit expressions concerning the coefficient ring of the Nadiradze formal group law. The motivation is that the Nadiradze, the Buchstaber and the Krichever formal group laws are identical and the Krichever formal group law corresponds to the Krichever-Höhn general elliptic genus [1].

**Key words:** Formal group law, cohomology theory.

**AMS Mathematics Subject Classification** 13F25, 55N22, 55-04

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-62-67>

**Introduction.** A formal group law [2], [3], [4] over a commutative ring with unit  $R$  is a power series  $F(x, y)$  in  $R[[x, y]]$  satisfying

- (i)  $F(x, 0) = F(0, x) = x$ ,
- (ii)  $F(x, y) = F(y, x)$ ,
- (iii)  $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$ .

Let  $F$  and  $G$  be the formal group laws. A homomorphism from  $F$  to  $G$  is a power series  $\nu(x) \in R[[x]]$  with constant term 0 such that

$$\nu(F(x, y)) = G(\nu(x), \nu(y)).$$

It is an isomorphism if  $\nu'(0)$  (the coefficient at  $x$ ) is a unit in  $R$ , and a strict isomorphism if the coefficient at  $x$  is 1.

If  $F$  is a formal group law over a commutative  $\mathbb{Q}$ -algebra  $R$ , then it is strictly isomorphic to the additive formal group law  $x + y$ . In other words, there is a strict isomorphism  $l(x)$  from  $F$  to the additive formal group law, called the logarithm of  $F$ , so that  $F(x, y) = l^{-1}(l(x) + l(y))$ . The inverse to logarithm is called the exponential of  $F$ .

The logarithm  $l(x)$  and the invariant differential form  $\omega(x)$  of a formal group law  $F$  over the ring  $R$  are the series in  $R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$  given by

$$l(x) = \int_0^x \frac{dt}{\omega(t)}, \quad \omega(x) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}(x, 0). \quad (1)$$

There is a ring  $L$ , called the universal Lazard ring, and a universal formal group law  $F(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$  defined over  $L$ . This means that for any formal group law  $G$  over any commutative ring with unit  $R$  there is a unique ring homomorphism  $r : L \rightarrow R$  such that  $G(x, y) = \sum r(a_{ij})x^i y^j$ .

The formal group law of geometric cobordism was introduced in [3]. Following Quillen we will identify it with the universal Lazard formal group law as it is proved in [5] that the coefficient ring of complex cobordism  $MU_* = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ ,  $|x_i| = 2i$  is naturally isomorphic as a graded ring to the universal Lazard ring.

For a power series of the form

$$l(x) = x + l_1 x^2 + l_2 x^3 + \dots$$

---

<sup>1</sup>The author was supported by Shota Rustaveli NSF grant 217-614

its composition inverse

$$e(x) = x + e_1x^2 + e_2x^3 + \dots$$

is given by

$$e_n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots \geq 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots = n}} (-1)^{k_1 + k_2 + \dots} \frac{(n + k_1 + k_2 + \dots)!}{(n+1)!k_1!k_2!\dots} l_1^{k_1} l_2^{k_2} \dots$$

The coefficients of the corresponding formal group law

$$F(x, y) = e(l(x) + l(y)) = x + y + \sum \alpha_{ij} x^i y^j$$

are thus given [6] by

$$\alpha_{ij} = \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \dots = i + j - 1, \\ i_0 + 2i_1 + 3i_2 + \dots = i, \\ j_0 + 2j_1 + 3j_2 + \dots = j, \\ i_1 + j_1 + k_1 = \nu_1, i_2 + j_2 + k_2 = \nu_2, \dots}} (-1)^{k_1 + k_2 + \dots} \frac{(i_0 + j_0 + k_1 + i_1 + j_1 + k_2 + \dots - 1)!}{i_0!j_0!k_1!i_1!j_1!k_2!\dots} l_1^{\nu_1} l_2^{\nu_2} \dots$$

**Definition 1.** Let  $F(x, y)$  be the universal formal group law and  $\omega(x)$  its invariant differential form (1). Let

$$A(x, y) = \sum A_{ij} x^i y^j = F(x, y)(x\omega(y) - y\omega(x)) \quad (2)$$

and define the universal Nadiradze formal group law  $\mathcal{F}_N$  by the obvious classifying map of the Lazard ring to its quotient ring by the ideal  $I$  generated by all  $A_{ij}$  with  $i, j \geq 3$ .

In the rest of note we compute the coefficient ring of the Nadiradze formal group law in low dimensions and prove it has only 2-torsion.

#### 1. CALCULATION OF THE COEFFICIENT RING OF THE NADIRADZE FORMAL GROUP LAW

The following proposition says that the Nadiradze formal group law is actually identical to another two formal group laws previously defined by Buchstaber in [2] and by Krichever in [7]. See the detailed discussion in [8], [9], [10]).

**Proposition 1** (See [9]). The formal group law  $\mathcal{F}_N$  is identical to the Buchstaber and the Krichever formal group laws. In particular, the corresponding coefficient ring is  $\Lambda \cong L/I$ , the quotient of the Lazard ring by the ideal  $I$  generated by all  $A_{ij}$  with  $i, j \geq 3$ .

The calculation of the coefficient ring of the formal group law  $\mathcal{F}_N$  in low dimensions is given by the following

**Proposition 2** (See [6, 11]). i) Let  $\mathbb{Q}$  be field of rational numbers. Then  $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$  is the polynomial ring  $\mathbb{Q}[a_1, \dots, a_4]$ ,  $|a_i| = 2i$ .

ii) There is a set of polynomial generators  $z_1, z_2, \dots$  of the Lazard ring  $L$  for which the low degree defining relations for the ideal  $I$  are

$$\begin{aligned} 5z_5 &= z_2z_3 + 2z_1z_4, \quad 2z_6 = 0, \quad z_1z_6 = 0, \\ 7z_7 &= z_2z_1z_4 - 8z_2z_1^2z_3 + 2z_2z_1^5 + 6z_1^3z_2^2 + z_1z_2^3 + 2z_2^2z_3 + 4z_1^3z_4 + 3z_3z_4 + z_1z_3^2, \\ 2z_8 &= z_2^4 + z_1^2z_2^3 + z_4z_1^4 + z_1^2z_3^2 + z_2z_3^2 + z_4^2, \\ z_3z_6 &= 0, \\ 3z_9 &= 2z_2^2z_1^2z_3 + 2z_2^2z_1z_4 + 2z_1^4z_2z_3 + 2z_1^3z_2z_4 - 1856z_3z_4z_1^2 + 2z_1^3z_3^2 + 12z_2^2z_1^5 + \\ &+ 2z_2^3z_1^3 + 2z_2^4z_1 + 4z_1^7z_2 + 2z_1^5z_4 + 2z_3^3 - z_1z_4^2 + 2z_2^3z_3, \\ z_{10} &= 0, \quad z_5z_6 = 0, \\ 11z_{11} &= -19662z_2^2z_3z_4 + 5z_2^2z_3z_1^4 - 648z_2^3z_3z_1^2 + 7z_1^3z_2^2z_4 + 3z_2z_1^6z_3 + 10z_2z_1^3z_3^2 - \\ &- 90238z_2z_1^5z_4 - 15772z_1^4z_3z_4 - 596z_2^4z_3 + 9z_1^7z_2^2 - 10z_1^5z_2^3 + 648822z_1^3z_2^4 + 10z_2z_1^9 + \\ &+ 5z_1^5z_3^2 + 10z_1^7z_4 + 5z_2z_1^2z_3z_4 + 8z_2^3z_1z_4 + 9z_2^5z_1 + 8z_1^2z_3^3 + 6z_3z_4^2 + 7z_1^3z_4^2 + 2z_4z_1z_3^2 + \\ &+ 9z_2z_1z_4^2 + 8z_2z_3^3, \\ z_{12} &= 0, \\ 13z_{13} &= 7z_1^6z_3z_4 + 12z_3^3z_4 + 2z_1z_3^4 + 8z_2^5z_3 + 5z_2^2z_3^3 + 2z_1^5z_2^4 + z_1^7z_2^3 + 8z_1^9z_2^2 + 3z_1^{11}z_2 + \\ &+ 8z_1^7z_3^2 + 3z_1^4z_3^3 + z_1^9z_4 + 11z_1z_4^3 + 2z_2^4z_1z_4 + 8z_3z_4^2z_2 + 6z_3z_4^2z_1^2 + 4z_1^3z_4^2z_2 + 12z_2^2z_1z_4^2 + \end{aligned}$$

$$12 z_2^2 z_3^2 z_1^3 + 5 z_2^3 z_3^2 z_1 + 11 z_2^4 z_3 z_1^2 + 3 z_2^3 z_3 z_1^4 + 9 z_2^2 z_3 z_1^6 + 2 z_2^3 z_3 z_4 + 9 z_2 z_3^2 z_1^5 + 2 z_2 z_3^3 z_1^2 + 9 z_2 z_3 z_1^8 + 10 z_1^5 z_2^2 z_4 + 8 z_1^7 z_2 z_4 + 3 z_1^3 z_2^3 z_4 + 9 z_1^3 z_3^2 z_4 + 6 z_2 z_3^2 z_4 z_1 + 2 z_2 z_3 z_4 z_1^4 + 5 z_1^5 z_4^2.$$

Let  $CP_i$  be the bordism class of the complex projective space of dimension  $2i$ . The explicit form of the resulting generators  $z_i$  which give the relations is given by

$$\begin{aligned} CP_1 &= -z_1, \\ CP_2 &= -z_2 + z_1^2, \\ CP_3 &= -2z_3 - z_1^3, \\ CP_4 &= -z_4 + 6z_1z_3 + 4z_2^2 + 13z_1^2z_2 + z_1^4, \\ CP_5 &= -6z_5 + 6z_1z_4 + 6z_2z_3 - 12z_1^2z_3 - 44z_1^3z_2 - 9z_1z_2^2 - z_1^5, \\ CP_6 &= -z_6 + 12z_1z_5 + 3z_2z_4 + 5z_3^2 + 97z_2z_1^4 + 20z_1^3z_3 - 14z_1^2z_2^2 - 13z_1^2z_4 - 12z_1z_2z_3 - 10z_2^3 + z_1^6, \\ CP_7 &= -412z_2z_1z_4 - 132z_2z_1^2z_3 - z_1^7 + 1008z_2z_5 - 176z_2z_1^5 + 48z_1^3z_2^2 + 20z_1z_2^3 - 228z_2^2z_3 + 392z_1^2z_5 - 30z_1^4z_3 - 144z_1^3z_4 + 4z_3z_4 - 26z_1z_3^2 + 4z_1z_6 + 4z_7, \\ CP_8 &= 31z_2^4 + 15876z_4z_1^2z_2 - 168z_4z_1z_3 + 3507z_1^3z_2z_3 + 8085z_2^2z_1z_3 - 39690z_2z_1z_5 + 164z_1^2z_2^3 + 285z_1^4z_2^2 + 326z_2z_1^6 + 6699z_4z_1^4 - 15z_4z_2^2 + 42z_1^5z_3 + 99z_1^2z_3^2 - 123z_2z_3^2 - 72z_1^2z_6 - 16581z_1^3z_5 + 513z_3z_5 + z_1^8 + 45z_2z_6 - 162z_1z_7 + 3z_8, \\ CP_9 &= -10838140z_2^2z_1^2z_3 + 637180z_2^2z_1z_4 + 53835870z_1^2z_2z_5 - 4317710z_1^4z_2z_3 - 21562380z_1^3z_2z_4 + 1140z_3z_4z_2 + 196850z_3z_4z_1^2 + 146250z_1z_3z_2^2 + 1000z_1z_6z_2 - 29840z_1^3z_3^2 - 56z_3z_1^6 - 1590540z_2^2z_5 - 190639z_2^2z_1^5 - 24940z_2^3z_1^3 + 3000z_2^4z_1 + 320000z_2^3z_3 - 64138z_1^7z_2 + 22856490z_1^4z_5 - z_1^9 - 9267784z_1^5z_4 - 20z_3^3 - 1570z_1^3z_6 - 6340z_7z_2 + 222990z_7z_1^2 - 40z_3z_6 + 7760z_4z_5 - 905z_1z_4^2 - 715310z_3z_1z_5 - 4410z_1z_8 + 10z_9, \\ CP_{10} &= 1221z_1^4z_2^3 + 4716z_2^2z_1^6 + 588z_2z_1^8 - 99z_2^5 + z_1^{10} - 353z_1^2z_2^4 - 23z_3^2z_4 + 100z_1z_3^3 - 4z_7z_3 - 16z_7z_1^3 - 6z_5z_1^3z_2 - 6z_5z_1z_2^2 - 3z_5z_1^2z_3 - 18z_5z_1z_4 - 12z_5z_2z_3 + 3126z_1^5z_2z_3 - 769z_1^4z_2z_4 - 625z_1^3z_2^2z_3 - 14z_1^2z_2^2z_4 - 337z_1z_2^3z_3 - 3352z_1^3z_3z_4 + 108z_1^2z_3^2z_2 - z_{10} + 55z_4z_2^3 + z_2z_8 + z_1^2z_8 - 6z_5z_1^5 + 72z_1^7z_3 - 37z_1^6z_4 + 374z_1^4z_3^2 + 38z_1^2z_4^2 + 122z_2^2z_3^2 + 3z_5^2 - 5z_1z_9 + 128z_1z_4z_2z_3 + z_4z_6 - 8z_2z_4^2, \\ CP_{11} &= -z_1^{11} - 4419480z_2^2z_3z_4 + 108279754836z_2^2z_3z_1^4 + 34972085604z_2^3z_3z_1^2 - 5543076630z_2^2z_3^2z_1 + 69564145560z_1^3z_2^2z_4 + 37140770688z_2z_1^6z_3 - 1172417568z_2z_1^3z_3^2 + 217793062992z_2z_1^5z_4 - 1720808904z_1^4z_3z_4 - 1119738246z_2^4z_3 + 1851051480z_1^7z_2^2 + 866621352z_1^5z_2^3 + 54200319z_1^3z_2^4 + 548281300z_2z_1^9 - 90z_1^8z_3 + 255168444z_1^5z_3^2 + 79744898736z_1^7z_4 - 785927604z_2z_1^2z_3z_4 - 2228536476z_2^3z_1z_4 - 173685748572z_1^2z_2^2z_5 - 542784416604z_1^4z_2z_5 + 5562853260z_2^3z_5 - 11251824z_2^5z_1 - 196668613788z_1^6z_5 - 61688z_1^2z_3^3 + 555888z_3z_4^2 + 8968674z_1^3z_4^2 + 14057880z_1^5z_6 - 1274916z_7z_4 - 1918662768z_7z_1^4 + 25202544z_7z_2^2 + 2713952112z_2z_5z_1z_3 + 1059492z_4z_1z_3^2 + 4486884z_2z_1z_4^2 - 29978736z_2z_5z_4 - 68155488z_1^2z_5z_4 + 6249073800z_1^3z_5z_3 - 10116z_1z_6z_4 - 1892916z_1^3z_6z_2 - 4566516z_1z_6z_2^2 + 709092z_1^2z_6z_3 - 721599024z_7z_1^2z_2 + 820128z_7z_1z_3 - 3071640z_3^2z_5 - 19032z_8z_3 + 37943844z_8z_1^3 - 115920z_2z_6z_3 + 15350232z_1z_8z_2 - 34968z_9z_2 - 69540z_9z_1^2 + 16512z_5z_6 + 167778z_1z_5^2 + 3312z_1z_{10} + 12z_{11} + 647216z_2z_3^3, \\ CP_{12} &= 27972z_1^8z_2^2 - 218z_2^4z_4 + 2z_2z_4z_1z_5 - 2101z_2z_4z_1^3z_3 - 4513z_2^2z_4z_1z_3 - 2z_1^2z_2z_3z_5 + 117959z_2^4z_1^4 - 87z_1^8z_4 + 2z_1^7z_5 + 1126z_1^6z_3^2 - 515z_2^3z_3^2 + 1210z_1^3z_3^3 + 1274z_1^6z_2^3 + z_6^2 + 117z_3z_4^2z_1 + 2z_1z_3^2z_5 + z_7z_1^3z_2 + z_7z_1z_2^2 - z_7z_1^2z_3 + z_7z_1z_4 - z_7z_2z_3 + 1002z_2z_1^{10} + z_3z_9 - 3z_4^3 - 2z_2^2z_5z_3 + 36z_3^4 + 12584z_2z_1^7z_3 - 21177z_2z_1^6z_4 + 12181z_1^5z_2^2z_3 + z_8z_1^2z_2 - 2z_1z_{11} + 618z_1^4z_2^2z_4 - 211z_1^2z_4z_3^2 - 4582z_1^5z_4z_3 + z_1^3z_4z_5 + 143z_2z_4z_3^2 - 33z_2z_4^2z_1^2 + z_2z_4z_6 + 9259z_1^4z_2z_3^2 + 2z_1^5z_2z_5 - 426z_1z_2z_3^3 - z_2^3z_1z_5 + 919z_1^2z_2^2z_3^2 - z_{12} + 9039z_1^3z_2^3z_3 - 375z_1^2z_2^3z_4 + 1603z_2^4z_1z_3 - z_1^3z_9 + 45z_2^2z_4^2 + 204z_1^4z_4^2 + z_8z_4 + z_8z_1^4 + 2z_1^2z_5^2 - 3z_7z_1^5 + 1589z_2^5z_1^2 - 2z_2z_5^2 + 110z_1^9z_3 + 316z_2^6 + z_1^{12}, \\ CP_{13} &= 28z_2^3z_3z_1^4l_5 + 28z_1^7z_2z_4l_5 + 28z_2z_3z_1^8l_5 + 28z_1^5z_2^4l_5 + 28z_1^5z_2^2z_4l_5 + 21957688480z_3z_4z_1z_5 - 25984z_1^6z_3z_4l_5 - z_1^{13} + 253972080384372z_1^6z_3z_4 - 102142354608z_1^4z_3z_6 - 917324631638772z_1^5z_3z_5 + 774479019846z_1^2z_3^2z_5 - 221549979014z_1^3z_3z_7 + 4789739192z_1^2z_3z_8 - 750298323838z_1z_8z_2^2 + 8470183862z_9z_2z_1^2 - 843524388z_5z_6z_2 - 2397633868z_5z_6z_1^2 - 2039908220z_1z_5^2z_2 - 161547456z_1z_{10}z_2 + 888538z_3^3z_4 + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& 3034941 z_1 z_3^4 + 47390 z_1 z_{12} - 14 z_1^5 z_4^2 l_5 + 1709185730 z_9 z_2^2 + 278420488638810 z_1^6 z_7 - \\
& 5506097288622 z_1^5 z_8 + 54731104539230 z_2^5 z_3 - 31496687992 z_2^2 z_3^3 - 1017753241974 z_1^3 z_2^5 - \\
& 50217966488172 z_1^5 z_2^4 - 216143458444680 z_1^7 z_2^3 - 295379777060487 z_1^9 z_2^2 - \\
& 79562165249580 z_1^{11} z_2 - 37028033981636 z_1^7 z_3^2 + 22531287660 z_1^4 z_3^3 - 132 z_1^{10} z_3 - \\
& 11571920739862596 z_1^9 z_4 - 2039967466312 z_1^7 z_6 + 28538924100179684 z_1^8 z_5 - 42 l_5 z_9 z_1^4 + \\
& 157243912 z_4 z_1 z_8 + 17311000 z_1 z_3^2 z_6 + 25224052 z_1 z_5 z_7 - 28651 z_1 z_6^2 - 116998 z_6 z_7 - \\
& 1517054 z_3^2 z_7 + 14 z_{13} + 1790978 z_3 z_4 z_6 - 276570616 z_4^2 z_5 + 32000164 z_1 z_4^3 - \\
& 357434 z_4 z_9 - 4227846 z_3 z_1 z_9 - 565040 z_8 z_5 + 28 z_2^2 z_3 z_1^6 l_5 + 28 z_1^9 z_4 l_5 + 28 z_1^7 z_2^3 l_5 + \\
& 5755956221316 z_2 z_5 z_4 z_1^2 + 464380238 z_1 z_6 z_4 z_2 + 84280 z_3 z_{10} - 87035536 z_3 z_5^2 + \\
& 108927368393060 z_2^4 z_1 z_4 + 7683046199778306 z_1^2 z_2^3 z_5 - 27219491838 z_3 z_4^2 z_2 - \\
& 87277233106 z_3 z_4^2 z_1^2 - 320263784498 z_1^3 z_4^2 z_2 + 62558300952 z_7 z_4 z_2 + \\
& 177070239640 z_7 z_4 z_1^2 + 31616577323982 z_7 z_2^2 z_1^2 - 242011512449 z_2^2 z_1 z_4^2 + \\
& 1521985552150 z_2^2 z_5 z_4 + 9074189672282 z_1^4 z_5 z_4 + 1537679514 z_1^3 z_6 z_4 + 223196749118 z_1 z_6 z_2^3 + \\
& 142655061164462 z_2^2 z_3^2 z_1^3 + 26943649834766 z_2^3 z_3^2 z_1 - 1547054901455140 z_2^4 z_3 z_1^2 - \\
& 10362206847356952 z_2^3 z_3 z_1^4 - \\
& 17525892343180382 z_2^2 z_3 z_1^6 + 204638362096 z_2^3 z_3 z_4 + 159658152412290 z_2 z_3^2 z_1^5 - \\
& 158101632304 z_2 z_3^3 z_1^2 + 149485731248 z_2 z_3^2 z_5 - 5389533397671810 z_2 z_3 z_1^8 + \\
& 5652735872 z_2^2 z_3 z_6 + 928964372 z_2 z_3 z_8 - \\
& 20729631526523920 z_1^5 z_2^2 z_4 + 51708527713926958 z_1^4 z_2^2 z_5 - 35497694223101806 z_1^7 z_2 z_4 - \\
& 3077116971571034 z_1^3 z_2^3 z_4 - 411779045748 z_1^5 z_2 z_6 + 88366298581246112 z_1^6 z_2 z_5 + \\
& 754768376306 z_1^3 z_2^2 z_6 + 198386947750250 z_1^4 z_2 z_7 - 4080023512124 z_1^3 z_2 z_8 - \\
& 242831535926 z_1^3 z_3^2 z_4 + 39143509492808 z_2^2 z_3 z_4 z_1^2 - 57285895352 z_2 z_3^2 z_4 z_1 - \\
& 131909146819548 z_2^2 z_3 z_1 z_5 + 208131656717936 z_2 z_3 z_4 z_1^4 - 18277296030 z_2 z_3 z_1^2 z_6 - \\
& 723679606860126 z_2 z_3 z_1^3 z_5 - 37107601720 z_2 z_3 z_1 z_7 + 168 z_1^9 z_2^2 l_5 + 56 z_1^{11} z_2 l_5 + 28 z_1^7 z_3^2 l_5 + \\
& 28 z_1^4 z_3^3 l_5 - 480477816 z_1^3 z_{10} - 586754 z_{11} z_2 - 1646708 z_{11} z_1^2 + 10091779250 z_9 z_1^4 - \\
& 21762685868 z_1^3 z_5^2 - 271903841623400 z_2^4 z_5 + 549996127226 z_2^6 z_1 - 971047251195 z_1^5 z_4^2 - \\
& 1231901606362 z_7 z_2^3.
\end{aligned}$$

Here in the expression for  $\mathbf{CP}_{13}$  the factor  $l_5 = \frac{1}{6}\mathbf{CP}_5$  and should read by the expression for  $\mathbf{CP}_5$  above.

Note that in dimensions 20 and 24 there are no indecomposable elements, as  $z_{10} = 0$ ,  $z_{12} = 0$ . The question is in which dimensions any element is multiplicatively decomposable.

Also we see that in dimension 12 there is 2-torsion as  $2z_6 = 0$ . By [12] the only 2-torsion can occur here, i.e., our ring is torsion free after localized away from 2 (in particular if kill  $z_6$  in the relations of Proposition 2. What follows is not a complete proof but an alternative evidence to this fact. Our arguments are based on actual calculation of much longer segment of the relations of Proposition 2. We cannot write the long list of these relations here for obvious space reasons, but the general picture will be made precise below. We suggest a reader interested in the complete proof to compare our arguments with a detailed discussion of the Abel formal group law performed in [13] and [14].

**Proposition 3.** Let  $\Lambda$  the coefficient ring of the Nadiradze formal group law  $\mathcal{F}_N$  and  $\Lambda_{(p)}$  be its localization at prime  $p \neq 2$ , then

i) For  $p \geq 5$  the additive basis of  $\Lambda_{(p)}$  is the set of monomials

$$\{z_1^{i_1} z_2^{i_2} z_3^{i_3} z_4^{i_4} z_p^{l_1} z_{p^2}^{l_2} \cdots z_{p^k}^{l_k} \mid l_m \leq p - 1\},$$

not containing the factor  $z_1 z_2^i$ ,  $i \geq \frac{p-1}{2}$  and the ring  $\Lambda$  has no  $p$ -torsion.

ii)  $\Lambda_{(3)}$  has the additive basis

$$\{z_1^l z_2^m z_3^{j_1} z_4^{j_2} \cdots z_{3^k}^{j_k} \mid j_1, \dots, j_k = 0, 1, 2\}$$

and the ring  $\Lambda$  has no 3-torsion.

Consider the following three additive subgroups of  $\Lambda_{(p)}$ :

$$\Lambda_{(p)}^* = \bigcup_s \Lambda_{(p)}^*(s), \text{ where } \Lambda_{(p)}^*(s) \text{ is generated by the monomials}$$

$$\begin{aligned}
 & z_1^l z_3^m z_4^n z_p^{j_1} z_{p^2}^{j_2} \cdots z_{p^k}^{j_k}, \\
 & z_2^l z_3^m z_4^n z_p^{j_1} z_{p^2}^{j_2} \cdots z_{p^k}^{j_k}, \\
 & z_1^l z_2^m z_3^n z_4^{j_1} z_{p^2}^{j_2} \cdots z_{p^k}^{j_k}, \\
 & \dots \\
 & z_1^l z_2^{\frac{p-1}{2}} z_3^m z_4^n z_p^{j_1} z_{p^2}^{j_2} \cdots z_{p^k}^{j_k},
 \end{aligned}$$

where  $k \leq s, j_r \leq p - 1$ ;

$\Lambda'_{(p)} = \bigcup_s \Lambda'_{(p)}(s)$ , where  $\Lambda'_{(p)}(s)$  is generated by the monomials

$$z_1^{i_1} z_2^{i_2} z_3^{i_3} z_4^{i_4} z_p^{j_1} z_{p^2}^{j_2} \cdots z_{p^k}^{j_k}, \quad k \leq s, \quad j_m \leq p - 1;$$

$\Lambda''_{(p)} = \bigcup_s \Lambda''_{(p)}(s)$ , where  $\Lambda''_{(p)}(s)$  is generated by the monomials

$$z_1^{i_1} z_2^{i_2} z_3^{i_3} z_4^{i_4} z_p^{j_1} z_{p^2}^{j_2} \cdots z_{p^k}^{j_k}, \quad k \leq s.$$

The claim is that the obvious inclusions  $\Lambda_{(p)}^* \subseteq \Lambda'_{(p)} \subseteq \Lambda''_{(p)} \subseteq \Lambda_{(p)}$  are actually equalities. Similarly for the following two additive subgroups of  $\Lambda_{(3)}$ :

$\Lambda_{(3)}^* = \bigcup_s \Lambda_{(3)}^*(s)$ , where  $\Lambda_{(3)}^*(s)$  is generated by the monomials

$$z_1^l z_2^m z_3^{j_1} z_4^n z_9^{j_2} \cdots z_{3^k}^{j_k}, \quad j_1, \dots, j_k = 0, 1, 2, \quad k \leq s;$$

$\Lambda'_{(3)} = \bigcup_s \Lambda'_{(3)}(s)$ , where  $\Lambda'_{(3)}(s)$  is generated by the monomials

$$z_1^l z_2^m z_3^{j_1} z_4^n z_9^{j_2} \cdots z_{3^k}^{j_k}, \quad j_1, \dots, j_k \geq 0, \quad k \leq s.$$

Note that the above calculations agree with the following result of Nadiradze [12]

**Proposition 4** The coefficient ring of the Nadiradze formal group law after localized away from 2 can be realized as a coefficient ring of a cohomology theory with singularities.

This can be done by Baas-Sullivan theory [15] by using the complex cobordism and the regular sequence consisting of the relations of ideal  $I$  of Proposition 2, namely those of  $z_i = 0, i \neq p$  and the decompositions of  $pz_{p^k}$ , for primes  $p \neq 2$ .

### References

- 1 Höhn G. Komplexe elliptische Geschlechter und  $S^1$ -äquivariante Kobordismustheorie, Diplomarbeit, Bonn und Vallendar, August 1991. [arXiv:math/0405232](https://arxiv.org/abs/math/0405232).
- 2 Buchstaber V.M. Functional equations associated with addition theorems for elliptic functions and two-valued algebraic groups, Uspekhi Mat. Nauk. -1990. -Vol. 45. -№ 3(273). -P. 185-186.
- 3 Novikov S.P. The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theory, Math. USSR-Izv. -1967. -Vol. 31. -№ 4. -P. 855-951.
- 4 Hazewinkel M. Constructing formal groups I: the local one dimensional case, J. Pure Appl. Algebra. -1977. -Vol. 9. -№ 2-3. -P. 151-162.
- 5 Quillen D. On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc. -1969. -Vol. 75. -P. 1293-1298.
- 6 Bakuradze M., Jibladze M. Some explicit expressions concerning BP, Georgian Math. Journal. -2016. -Vol. 23. -№ 2. -P. 157-167.
- 7 Krichever I. Generalized elliptic genera and Baker-Akhiezer functions, Math. Notes. -1990. -Vol. 47. -№ 2. -P. 132-142.
- 8 Bakuradze M. On the Buchstaber formal group law and some related genera, Proc. Steklov Inst. of Math. -2014. -Vol. 286. -№ 1. -P. 7-21.
- 9 Bakuradze M. Formal group laws by Buchstaber, Krichever and Nadiradze coincide, Uspekhi Mat. Nauk. -2013. -Vol. 68. -№3(411). -P. 189-190.
- 10 Bakuradze M. Computing the Krichever genus, J. Homotopy Relat. Struct. -2014. -Vol. 9. -№ 1. -P. 85-93.
- 11 Bakuradze M. and Jibladze M. On the coefficient ring of rational formal group law, Proc. Razmadze Math. Inst. -2012. -Vol. 159. -P. 1-9.
- 12 Nadiradze R. Formal group and cohomology theories: dissertation for the Doct. of Sci. Degree, Tbilisi, 1995.

- 13 Buchstaber V.M., Kholodov A. N. Formal groups, functional equations, and generalized cohomology theories, Math. USSR Sbornik. -1991. -Vol. 69. -№1. -P. 77-97; translation from Mat. Sb. -1990. -Vol. 181. -№ 1. -P. 75-94.
- 14 Busato Ph. Realization of Abel universal formal group law, Math. Z. -2002. -Vol. 239. -P. 527-561.
- 15 Rudyak Yu. On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

**М. Бакурадзе**

*Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университетінің дәл және жаратылыстау ғылымдары факультеті, Тбилиси, Грузия*  
*А. Размадзе атындау Грузия ғылым академиясының Математика институты, Тбилиси, Грузия*

**Надирадзе формалды топтарының заңдарына орай кейбір дәл өрнектер**

**Аннотация:** Мақалада Надирадзе формалды топтары сақиналары коэффициенттерінің заңдылықтарына қатысты кейбір дәл өрнектер алынды. Бұл зерттеулерге негіз болған Надирадзе, Бухштабер және Кричевер формалды топтарының заңдарының бірдей болуы мен Кричевер формалды топ заңының Кричевер-Ноэн жалпы эллиптикалық жиынына сәйке келуі [1].

**Түін сөздер:** Формалды топтар заңдары, когомология теориясы.

**М. Бакурадзе**

*Факультет точных и естественных наук Тбилисского государственного университета имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия*  
*Математический институт им. А. Размадзе АН Грузии, Тбилиси, Грузия*

**Некоторые точные выражения относительно законов формальных групп Надирадзе**

**Аннотация:** Получены некоторые точные выражения относительно коэффициентов колец законов формальных групп Надирадзе. Мотивация заключается в том, что законы формальных групп Надирадзе, Бухштабера и Кричевера идентичны и закон формальной группы Кричевера соответствует общему эллиптическому роду Кричевера-Ноэна [1].

**Ключевые слова** Законы формальных групп, теория когомологии.

**References**

- 1 Höhn G. Komplexe elliptische Geschlechter und  $S^1$ -äquivariante Kobordismustheorie, Diplomarbeit, Bonn und Vallendar, August 1991. [arXiv:math/0405232](https://arxiv.org/abs/math/0405232).
- 2 Buchstaber V.M. Functional equations associated with addition theorems for elliptic functions and two-valued algebraic groups, Uspekhi Mat. Nauk., 45(3(273)), 185-186(1990).
- 3 Novikov S.P. The methods of algebraic topology from the viewpoint of cobordism theory, Math. USSR-Izv., 31(4), 855-951(1967).
- 4 Hazewinkel M. Constructing formal groups I: the local one dimensional case, J. Pure Appl. Algebra., 9(2-3), 151-162(1977).
- 5 Quillen D. On the formal group laws of unoriented and complex cobordism theory, Bull. Amer. Math. Soc., 75, 1293-1298(1969).
- 6 Bakuradze M., Jibladze M. Some explicit expressions concerning BP, Georgian Math. Journal, 23(2), 157-167(2016).
- 7 Krichever I. Generalized elliptic genera and Baker-Akhiezer functions, Math. Notes, 47(2), 132-142(1990).
- 8 Bakuradze M. On the Buchstaber formal group law and some related genera, Proc. Steklov Inst. of Math., 286(1), 7-21(2014).
- 9 Bakuradze M. Formal group laws by Buchstaber, Krichever and Nadiradze coincide, Uspekhi Mat. Nauk., 68(3(411)), 189-190(2013).
- 10 Bakuradze M. Computing the Krichever genus, J. Homotopy Relat. Struct, 9(1), 85-93(2014).
- 11 Bakuradze M. and Jibladze M. On the coefficient ring of rational formal group law, Proc. Razmadze Math. Inst., 159, 1-9(2012).
- 12 Nadiradze R. Formal group and cohomology theories: dissertation for the Doct. of Sci. Degree, Tbilisi, 1995.
- 13 Buchstaber V.M., Kholodov A. N. Formal groups, functional equations, and generalized cohomology theories, Math. USSR Sbornik. -1991. -Vol. 69. -№1. -P. 77-97; translation from Mat. Sb., 181(1), 75-94(1990).
- 14 Busato Ph. Realization of Abel universal formal group law, Math. Z., 239, 527-561(2002).
- 15 Rudyak Yu. On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

**Авторлар туралы мәліметтер:**

*Бакурадзе М.- физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университетінің дәл және жаратылыстау ғылымдары факультеті, Тбилиси, Грузия; А. Размадзе атындағы Грузия ғылым академиясының Математика институтының аға ғылыми қызметкері, Тбилиси, Грузия.*

*Bakuradze M.- Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof., Faculty of exact and natural sciences, Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia; Senior Researcher A. Razmadze Math. Institute, Tbilisi, Georgia.*

*Редакцияға 07.03.2019 қабылданды*

МРНТИ: 27.23.25

A.P. Farajzadeh, A. Shafie

*Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, 67149, Iran  
(E-mail: [farajzadehali@gmail.com](mailto:farajzadehali@gmail.com), [shafie.allahkaram@gmail.com](mailto:shafie.allahkaram@gmail.com))*

### Turan's inequality type for polygamma functions and some new inequalities

**Abstract:** Turan's inequality is known as

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq P_n^2(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots,$$

where  $P_n$  denotes the Legendre polynomial of degree  $n$ . In this note, we show that Turan's inequality is still true when the Legendre polynomial of degree  $n$  replace by

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{(-1)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-tx}t^n}{1 - e^{-t}} dt$$

polygamma function of order  $n$ . In fact, we prove more than Turan's type inequality that zero is the greatest lower bound of the sequence

$$\{\Psi_n^2(x) - \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x)\}.$$

Moreover, some new inequalities for polygamma function of order  $n$  are established.

**Key words:** Turan-type inequality, polygamma functions.

**AMS Mathematics Subject Classification** 33B15, 26B35.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-68-71>

### Introduction

In 1950, Turan [1] proved the inequality

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq P_n^2(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots,$$

where  $P_n$  denotes the Legendre polynomial of degree  $n$ . This inequality has attracted much attention, so that numerous inequalities of the same type were published for other special functions. In The gamma  $\Gamma$  and  $\Psi$  (or digamma) functions are defined by

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}, \quad \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

for all real number  $x > 0$ . It was first defined and studied by Leonard Euler (1707-1783), and it is of fundamental importance to many areas of science, like probability theory, mathematical physics, number theory and special functions. It also appears in the study of many important series and integrals. For its basic properties and some historical remarks. In the literature the derivatives  $\Psi', \Psi'', \Psi''', \dots$  are known as polygamma functions defined as the  $n$ -th derivative of the function. We denote by  $\Psi_n(x) = \Psi^{(n)}(x)$ . The polygamma functions defined as the  $n$ -th derivative of the function  $\Psi$  which have the following integral representations:

$$(-1)^{n+1}\Psi_n(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}t^n}{1 - e^{-t}} dt, \quad \Psi(x) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{1 - e^{-t}} dt. \quad (1)$$

for  $n = 1, 2, 3, \dots$  where  $\gamma \approx 0.5772156649015328606$  is the Euler-Mascheroni constant. See these and other properties of these functions for instance [2, p. 260]. In continue we prove that

$$0 \leq \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x) - \Psi_n^2(x) = \nabla_n(x)$$

(In what follows we maintain this notation.) Is it possible to replace the lower bound 0 by a positive constant? It is our aim to give an affirmative answer to this question.

### Preliminaries

From (1) it is easily to see that the following lemma holds

**Lemma 1.** (i)  $\Psi(x)$  is strictly increasing on  $(0, \infty)$ .  
(ii) For any  $n$ ,  $\Psi_n(x)$  is strictly decreasing and positive on  $(0, \infty)$ .  
If  $n$  is an even integer then  $\Psi_n$  is increasing and negative.

**Corollary 1.** For any  $x, y \in (0, \infty)$  and  $n \in N$ , the following inequality

$$\Psi_n^2(x+y) \leq \Psi_n(x)\Psi_n(y)$$

holds.

**Theorem 1.** The  $\Psi(x)$  is log-convex on  $n$  and  $x$  that is for any  $x, y \in (0, \infty), m, n \in N$  and  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \geq 1$ , the following inequality

$$\Psi_{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq |\Psi_m(x)|^{\frac{1}{p}} |\Psi_n(y)|^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

holds where  $\frac{m}{p} + \frac{n}{q}$  is an integer.

*Proof.* By Hölder inequality we have

$$\begin{aligned} \Psi_{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &\leq (-1)^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q} + 1} \Psi_{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}} e^{-(\frac{x}{p} + \frac{y}{q})t}}{1 - e^{-t}} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{t^{\frac{m}{p}} e^{-\frac{x}{p}t}}{(1 - e^{-t})^{\frac{1}{p}}}\right) \left(\frac{t^{\frac{n}{q}} e^{-\frac{y}{q}t}}{(1 - e^{-t})^{\frac{1}{q}}}\right) dt \\ &\leq \left|\int_0^\infty \frac{t^m e^{-xt}}{1 - e^{-t}}\right|^{1/p} \left|\int_0^\infty \frac{t^n e^{-yt}}{1 - e^{-t}}\right|^{1/q} \\ &= |\Psi_m(x)|^{\frac{1}{p}} |\Psi_n(y)|^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

and the proof is completed.

Setting in the previous Theorem 1  $x = y, p = q = 2, m \mapsto n - 1, n \mapsto n + 1$ , we get the following corollary.

**Corollary 2** (Turan's inequality). If  $x > 0, n \geq 2$ , then

$$\Psi_n^2(x) \leq \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x).$$

**Corollary 3.** The  $\Psi(x)$  is log-convex on  $n$  that is for any  $x \in (0, \infty), m, n \in N$  and  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \geq 1$ , the following inequality holds

$$\Psi_{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}}(x) \leq |\Psi_m(x)|^{\frac{1}{p}} |\Psi_n(x)|^{\frac{1}{q}}, \quad (3)$$

where  $\frac{m}{p} + \frac{n}{q}$  is an integer.

**Corollary 4.** The function  $\Psi_n(x)$  is log-convex on  $x$  that is for  $x, y > 0, n \in N$  and  $\frac{m}{p} + \frac{n}{q} = 1, p \geq 1$  the following inequalities

$$\Psi_n\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq |\Psi_n(px)|^{1/p} |\Psi_n(qy)|^{1/q}$$

or

$$\Psi_n(x+y) \leq |\Psi_n(px)|^{1/p} |\Psi_n(qy)|^{1/q}$$

holds.

**Corollary 5.** If  $x, y \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}, p \geq 1$  and  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , then

$$\Psi_n\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \leq |\Psi_n(xy)| \leq |\Psi_n(x)|^{1/p} |\Psi_n(y)|^{1/q}.$$

**Lemma 2** ([3]). The function  $\Psi(x) - \ln x + \frac{\alpha}{x}$  is completely monotonic on  $(0, \infty)$  iff  $\alpha \geq 1$  and  $\ln x - \frac{\alpha}{x} - \Psi(x)$  is completely monotonic on  $(0, +\infty)$  if and only if  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ .

**Corollary 6.** For all  $x \in (0, +\infty), n \in \mathbb{N}$  we have

$$\frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{2x^{n+1}} < (-1)^{n+1}\Psi_n(x) < \frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

**Proof.** Let  $\alpha = 1$ , since  $\Psi(x) - \ln x + \frac{\alpha}{x}$  is completely monotonic on  $(0, \infty)$  we have

$$0 \leq (-1)^n \left(\Psi(x) - \ln x + \frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \left[\Psi_n(x) - \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{x^n} + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right]$$

which implies that

$$0 < (-1)^n \Psi_n(x) + \frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{x^{n+1}}$$

so

$$(-1)^{n+1}\Psi_n(x) < \frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Now we let  $\alpha = \frac{1}{2}$  by the same proof we obtain

$$\frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{2x^{n+1}} > (-1)^{n+1}\Psi_n(x)$$

and the proof is completed.

**Theorem 2.** If  $x > 0, n \geq 2$ , then

$$\frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} \leq \nabla_n(x) = \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x) - \Psi_n^2(x) \leq \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} + \left(\frac{2x}{n-1} + \frac{x^2}{n(n-1)}\right).$$

So the set of the values of  $\nabla_n(x)$  belong  $(0, \infty)$  and

$$\nabla_n(x) \sim \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} \text{ as } x \rightarrow 0.$$

*Proof.* The property  $\lim_{x \rightarrow \infty} \nabla_n(x) = 0$  we derive from Corollary 1. It is easy to make sure

$$\nabla_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(t-\tau)^2 e^{-x(t+\tau)}}{(1-e^{-t})(1-e^{-\tau})} dt d\tau.$$

Using the inequalities

$$1 \leq \frac{1}{1-e^{-t}} \leq 1 + \frac{1}{t},$$

we get

$$\nabla_n(x) \geq \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (t-\tau)^2 (t \times \tau)^{n-1} e^{x(t+\tau)} dt d\tau = \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}}$$

and

$$\begin{aligned} \nabla_n(x) &\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (t-\tau)^2 (t \times \tau)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) e^{x(t+\tau)} dt d\tau \\ &= \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} + \frac{2(n-2)!n!}{x^{2n+1}} + \frac{(n-2)!(n-1)!}{x^2 n} = \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} \left(1 + \frac{2x}{n-1} + \frac{x^2}{n(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Note that with the help of finer estimates of the following equality

$$\nabla_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(t-\tau)^2 e^{-x(t+\tau)}}{(1-e^{-t})(1-e^{-\tau})} dt d\tau,$$

one can obtain exact boundaries for  $\nabla_n(x)$ .

## References

- 1 Turan P. On the zeros of the polynomials of Legendre//Casopis Pest. Mat. Fys. -1950. Vol. 75. -P. 113-122.
- 2 Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Tables, Dover, New York,1965.
- 3 Turan P. Three classes of logarithmically completely monotonic functions involving gamma and psi functions, Integral Transforms and Special Functions. -2007. 18. -P. 503-509.

**А.П. Фарайзаде, А. Шафи**

*Математика Факультеті, Рази университеті, Керманшах, 67149, Иран*

### Полигамдық функциялар үшін Туран типті және кейбір жаңа теңсіздіктер

**Аннотация.**  $n$ -нші ретті  $P_n(x)$  Лежандр полиномдары үшін

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq P_n^2(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Туран теңсіздігі орындалады. Мақалада  $n$ -нші ретті  $\Psi_n(x)$  Лежандр полиномдары үшін де Туран теңсіздігінің

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{(-1)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} t^n}{1 - e^{-t}} dt$$

орындалатындығы көрсетілді. Сонымен қатар,

$$\{\Psi_n^2(x) - \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x)\}$$

тізбегінің төменгі шекараларының үлкені нөл болатындығы дәлелденді.

Және де  $n$ -нші ретті полигамдық функциялары үшін кейбір жаңа теңсіздіктер дәлелденді.

**Ключевые слова:** Туран типті теңсіздіктер, полигамдық функциялар.

**А.П. Фарайзаде, А. Шафи**

*Факультет математики, Университет Рази, Керманшах, 67149, Иран*

### Неравенства типа Турана для полигамных функций и некоторые новые неравенства

**Аннотация.** Для полиномов Лежандра  $P_n$  порядка  $n$  выполнены неравенства Турана

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq P_n^2(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

В работе показано, что неравенство Турана справедливо для полигамных функций порядка  $n$

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{(-1)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} t^n}{1 - e^{-t}} dt.$$

Более того, доказано, что ноль есть наибольшая нижняя граница последовательности

$$\{\Psi_n^2(x) - \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x)\}.$$

Также установлены некоторые новые неравенства для полигамных функций порядка  $n$ .

**Ключевые слова:** неравенства типа Турана, полигамные функции.

## References

- 1 Turan P. On the zeros of the polynomials of Legendre, Casopis Pest. Mat. Fys., 75, 113-122(1950).
- 2 Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Tables, Dover, New York,1965.
- 3 Turan P. Three classes of logarithmically completely monotonic functions involving gamma and psi functions, Integral Transforms and Special Functions, 18, 503-509(2007).

**Авторлар туралы мәліметтер:**

*Фарайзаде А.П.* – Профессор, Математика Факультеті, Рази университеті, Керманшах, 67149, Иран.

*Шафи А.* – PhD студент, Математика Факультеті, Рази университеті, Керманшах, 67149, Иран.

*Farajzadeh A.P.* – Professor, Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, 67149, Iran.

*Shafie A.* – PhD student, Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, 67149, Iran.

*Редакцияға 07.03.2019 қабылданды*

МРНТИ: 28.17.19

Ж.Ж. Ермекбаева<sup>1</sup>, Р.Е.Шакирова<sup>2</sup>, Ж.М.Малекова<sup>3</sup>

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан  
(E-mail: <sup>1</sup> [erjanar@mail.ru](mailto:erjanar@mail.ru), <sup>2</sup> [sh.raushan.91@mail.ru](mailto:sh.raushan.91@mail.ru), <sup>3</sup> [zhaniya.96@mail.ru](mailto:zhaniya.96@mail.ru))

### Жыртқыш-олжа жүйесіндегі бірлесіп қорғану әсері

**Аннотация:** Ұсынылған жұмыста жыртқыш-олжа жүйесінің «бірлесіп қорғану» әсері жүзеге асатын Лотка-Вольтер моделінің түрленуі қарастырылады. Популяцияның саны белгілі бір мөлшерге жеткен кезде жыртқыштық қарқындылығы және жыртқыштар санының өсуі азаяды деп болжанады. Жұмыста параметрлердің әр түрлі мәндері кезіндегі модельдің динамикалық режимі көрсетіледі. Лотка-Вольтер қағидаларына негізделіп өзара әрекеттесу динамикасы сипатталады. Олжалар популяциясында бірлесіп қорғану әсері пайда болған кездегі жағдайы үшін Лотка-Вольтер моделінің түрлену қатарын талдауы осы әсердің әрекеті жыртқыштар санының азаюына және олжалардың көбеюіне рас әкелетінін көрсетеді. Сонымен қатар, параметрлердің белгілі бір қатынасы кезінде модельде динамикалық режимдердің пайда болуы мүмкіндігі қарастырылады. Бұл мақала белгілі бір мөлшерге жету кезінде популяциясында пайда болатын бірлесіп қорғану әсерінің әрекеті Лотка-Вольтер моделін құруға және талдауға арналған.

**Түйін сөздер:** Лотка-Вольтер моделі, мальтузиандық параметр, популяция, өзін-өзі реттегіштік, дифференциалдық теңдеу, жыртқыш-олжа жүйесі.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-72-76>

Жыртқыш-олжа жүйесінің әр түрлі математикалық модельдерін талдауға көптеген жұмыстар арналған [1-4]. Көптеген модельдер автономды қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде құрылған, олар Лотка-Вольтер классикалық моделінің түрленуі болып табылады [5-6]. Екі түрдің өзара әрекеттік үрдісін сипаттайтын бейсызықты функциялар көмегімен авторлар қандай да бір үрдістердің немесе олардың жеке қасиеттерінің әрекеттесу динамикасына әсерін ескеруге тырысады (мысалға қанықтыру әсері, жыртқыштар бақылауынан олжалардың құтылып кету әсері және т.б.), сонымен қатар Вольтердің «жұптық өзара әрекеттесу» қағидасынан өзгеше қағидалар негізінде түрлердің өзара әрекеттесу динамикасы сипатталады [7].

Осы жұмыс белгілі бір мөлшерге жету кезінде популяциясында пайда болатын бірлесіп қорғану әсерінің әрекеті Лотка-Вольтер моделін құруға және талдауға арналған. Мұндай жағдай табиғи ортада кеңінен таралған және екі трофикалық деңгейлердің әр түрлерінің әрекеттерінде жүзеге асады.

Лотка-Вольтер моделі шеңберінде жыртқыштармен олжаны қолдану жылдамдығы (сәйкес, жыртқыштар санының өсу жылдамдығы)  $\gamma xz$  теңдеуімен сипатталады, мұндағы  $x=x(t) - t$  уақыт кезіндегі олжа популяцияларының саны,  $z=z(t) -$  жыртқыштар саны,  $\gamma = \text{const} > 0$  – кейбір оң константа. Егер жыртқыштар саны тіркелген, ал олжалар саны біркелкі өссе, онда мұндай әрекетті сипаттау кезінде мүмкін емес жағдай туындайды – жыртқыш бірлік уақытында шексіз олжалар санын қолдана алады.

Бұл қажет емес әсерді жоғалту және қанықтыру әсерінің әрекетін ескеру модельді талдау қажеттігіне алып келді, онда жыртқыш және олжа әрекеті келесідей өрнекпен сипатталады

$$\frac{\gamma xz}{1 + \pi x},$$

мұндағы  $\pi = \text{const} > 0$ . Олжалардың жеткілікті үлкен мөлшері кезінде олардың тұтыну жылдамдығы жыртқыштардың тек санымен анықталады.



Соңғы өрнек олжалар санының өсуімен бірлесіп қорғану әсері жүзеге асатын жағдай үшін түрленуі мүмкін:

$$\frac{\gamma x z}{1 + \pi x^2}.$$

Шынында, бұл жағдайда олжалар санының жеткілікті аз мәні кезінде олардың санының өсуі жыртқыштардың олжаларды қолдану жылдамдығының өсуіне әкеледі. Критикалық мәнге жету кезінде  $1/\sqrt{\pi}$  қолдану жылдамдығы максимумға жетеді, одан кейін азая бастайды.

Соңғы өрнек жыртқыш-олжа жүйесіндегі қанығу әсерін талдау кезінде алынатынын байқаймыз (жалпы параметрлік модельдің жеке жағдайы ретінде). Осы түрлендіруді ескере отыра Лотка-Вольтерр моделі мынандай түрге келеді:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta x^2 - \frac{\gamma^0 x z}{1 + \pi x^2}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\alpha_1 x - \beta_1 z^2 - \frac{\gamma_1^0 x z}{1 + \pi x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

Мұндағы  $\alpha$  – мальтузиандық параметр (олжалар популяциясындағы туу қарқындылығы мен жойылу қарқындылығы арасындағы айырмашылық; ары қарай,  $\alpha > 0$  деп болжаймыз, өйткені керісінше жағдайда екі түрде мөлшердің кез келген теріс емес бастапқы мәндері кезінде құлдырайды болады),  $\alpha_1$  – жыртқыштар жойылуының қарқындылығы,  $\beta$ ,  $\beta_1$  – популяциядағы өзін-өзі реттеу коэффициенті,  $\gamma^0$ ,  $\gamma_1^0$  – өзара әрекеттік коэффициенті. (1) моделінде барлық параметрлер теріс емес деп болжанады.

*Өзін-өзі реттеудің болмау кезіндегі жүйе динамикасы*

Алғашында қарапайым жағдайды қарастырайық, яғни популяцияларда өзін-өзі реттеудің болмағанында және  $\beta$ ,  $\beta_1$  коэффициенттері нөлге тең. (1) жүйесі бұл жағдайда келесідей болады:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \frac{\gamma^0 x z}{1 + \pi x^2}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\alpha_1 x - \frac{\gamma_1^0 x z}{1 + \pi x^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

(2) жүйесі төмендегі айнымалыларды ауыстыру көмегімен

$$x = \frac{u}{\sqrt{\pi}}, \quad z = \frac{\alpha v}{\gamma^0}, \quad \tau = \alpha t$$

келесідей мөлшерсіз түрге әкелінеді

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \left( 1 - \frac{v}{1+u^2} \right), \\ \frac{dv}{dt} &= p v \left( -a + \frac{u}{1+u^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

мұндағы параметрлер  $p = \frac{\gamma_1^0}{\alpha \sqrt{\pi}}$ ,  $a = \frac{\alpha_1 \sqrt{\pi}}{\gamma_1^0}$ .

(3) моделінің қасиеттері.

1. Тік көлбеу изоклинасы  $u=0$  және  $v=1+u^2$  екі тармағынан тұрады. Көлденең көлбеу изоклинасы үш тармақтан тұрады:  $v=0$  және

$$u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}$$

егер параметр  $a < 0,5$ .

$a < 0,5$  кезінде фазалық кеңістікте екі тривиальді емес стационарлық нүктелер бар:  $S_1(u_1, 1 + u_1^2)$  және  $S_2(u_2, 1 + u_2^2)$ . Бұл жағдайда  $S_2$  нүктесі – ер-тоқым, ал  $S_1$  нүктесі – орнықты емес түйін (кез келген параметрлерде), немесе фокус. Алдыңғы жағдайдағыдай, мұнда сонымен қатар олжалардың шексіз көбеюі кезінде жыртқыштардың асимптотикалық құлдырау режимі байқалады:  $u(t) \rightarrow \infty$ ,  $v(t) \rightarrow 0$ .

2. Координаталар басы ер-тоқым түріндегі стационарлық нүкте болып табылады (олжалардың болмауы кезінде жыртқыштар құлдырайды, ал жыртқыштардың болмауы кезінде олжалар шексіз көбейеді). Егер параметр  $a > 0,5$  болса, онда (3) жүйесінің

фазалық кеңістігінде басқа соңғы стационарлық нүктелер жоқ және олжалардың шексіз көбеюі кезінде жыртқыштардың асимптотикалық құлдырау режимі жүзеге асады.

(3) моделіндегі Лотка-Вольтерр ( $\pi = 0$  кезінде) модельде тепе-теңдіктің (орталық) орнықты күйі орнықсызға айналатынын атап өту қажет. Берілген жағдайда, бірлесіп қорғану факторы жыртқыш-олжа жүйесі динамикасына тұрақсыздандыру әсерін тигізеді деген қорытынды жасауға болады.

*Олжалар популяциясындағы өзін-өзі реттегіштігі бар модель*

(2) моделі олжалар популяциясына өзін-өзі реттегіш механизмдерінің әрекетін ескеру кезінде келесі түрге ие болады:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \frac{\gamma^0 xz}{1+\pi x^2} - \beta x^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -\alpha_1 z + \frac{\gamma^0 xz}{1+\pi x^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Айнымалыларды ауыстыру көмегімен, (4) жүйесі мөлшерсіз түрге келеді:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u - \frac{uv}{1+u^2} - bu^2 = P(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= pv(-a + \frac{u}{1+u^2}) = Q(u, v), \end{aligned} \quad (5)$$

мұндағы параметр  $b = \frac{\beta}{\alpha\pi}$ .

(5) моделінің қасиеті.

Теріс емес бастапқы мәндер кезінде (5) жүйесінің шешімі шектеулі және теріс емес. Төмендегі теңсіздік орындалғандықтан

$$\frac{du}{dt} \left( \frac{1}{b}, v \right) \leq 0,$$

асимптотикадағы барлық траекториялар  $0 \leq u \leq \frac{1}{b}$  аралығына «тиісті» және ешқандай траектория бұл аралықтан шықпайды. Осылайша, екі популяцияның саны шектеулі болады.

Параметрлердің кез келген мәні кезіндегі координаталар басы ер-тоқым болып табылады.  $a > 0,5$  кезінде жазықтықтың соңғы бөлігінде басқа стационарлық нүктелер болмайды. Бұл жағдайда жыртқыштар мөлшердің кез келген бастапқы мәні кезінде құлдырайды, ал олжалар мөлшері бұл жағдайда нөлдік емес деңгейде тұрақталады.

$a < 0,5$  болғандағы кезді қарастырайық. Мұнда келесі жағдайлар туындайды:

1)  $\frac{1}{b} < \frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a}$ . Бұл шарттың орындалуы кезінде тривиальді емес нүктелер болмайды.  $P$  нүктесі – глобальді орнықты,  $a > 0,5$  теңсіздігінің орындалуы кезіндегідей режим жүзеге асады.

2)  $\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a} < \frac{1}{b} < \frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$ . Бұл жағдайда тепе-теңдіктің тривиальді емес күйі бар болады  $-S_1(u_1, (1+u_1^2)(1-bu_1))$  нүктесі.

3)  $\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a} < \frac{1}{b}$ . Бұл жағдайда тыныштықтың екі тривиальді емес нүктелер болады:  $S_1$  және  $S_2(u_2, (1+u_2^2)(1-bu_2))$ .

*Популяцияның екеуіндегі өзін-өзі реттегіштігі бар жүйе*

Популяциялардың екеуінде де өзін-өзі реттегіш механизм әрекет ететін жағдайды қарастырайық. Бұл жағдайда модель келесі түрге ие болады:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \frac{\gamma^0 xz}{1+\pi x^2} - \beta x^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -\alpha_1 z + \frac{\gamma_1^0 xz}{1+\pi x^2} - \beta_1 z^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Айнымалыларды ауыстырғаннан кейін (6) жүйесі келесі түрге ие болады:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u - \frac{uv}{1+u^2} - bu^2, \\ \frac{dv}{dt} &= pv \left( -a - cv + \frac{u}{1+u^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

(7) моделінің қасиеттері.

1. Теріс емес бастапқы мәндер кезінде (7) жүйесінің шешімі шектеулі және теріс емес. Егер бастапқы мәндер  $(u_0, v_0) \in D$  болса, мұндағы

$$D = \left[0, \frac{1}{b}\right] \times \left[0, \frac{1-2a}{2a}\right], \text{ онда } (u(t), v(t)) \in D \forall t > 0.$$

2. Ары қарай  $\alpha < 0,5$  деп болжаймыз. Кері теңсіздіктің орындалуы кезінде популяциялар санының бастапқы мәндердің кез келгенінде жыртқыштар құлдырайды.

3. Параметрлердің кез келген мәні кезінде тепе-теңдіктің екі тривиальді күйлері бар болады:  $(0,0)$  координата басы және  $P\left(\frac{1}{b}, 0\right)$ .  $(0, 0)$  нүктесі әрқашанда ер-тоқым болып табылады. Осылайша, екі популяцияларда өзін-өзі реттегіштің болуы кезінде модельде өзінің қасиеті бойынша жаңа режимдер пайда болады.

### Қорытынды

Олжалар популяциясында бірлесіп қорғану әсері пайда болған кездегі жағдайы үшін Лотка-Вольтер моделінің түрлену қатарын талдауы осы әсердің әрекеті жыртқыштар санының азаюына және олжалардың көбеюіне әкелетінін көрсетеді. Сонымен қатар, параметрлердің белгілі бір қатынасы кезінде модельде динамикалық режимдердің пайда болуы мүмкін.

Атап айтқанда, модельде тіркелген режимінің әр түрлі түрленуі пайда болады. Алайда фитофаг-энтомофаг жүйелерін талдау кезінде алынған түптік режимдерге қарағанда, алынған түрленулерде олжалар санының өсуі жыртқыштар санының төмендеуімен сүйемелденеді яғни бірлесіп қорғану әсерімен туындалған.

### Список литературы

- 1 Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 251 с.
- 2 Горяченко В.Д. Математические модели клеточных популяций. Горький, 1981. – 84-90 с.
- 3 Апонин Ю.М., Базыкин А.Д. Математическое моделирование в экологии. – М.: Наука, 1978. – 101 с.
- 4 Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 72 с.
- 5 Полудяков Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. Динамические модели экологических систем. – Л.:Гидрометеоиздат, 1980. – 145 с.
- 6 Семевский Ф.Н., Семенов С.М. Математическое моделирование экологических процессов. – Л.:Гидрометеоиздат, 1982. – 82 с.
- 7 Базыкин А.Д., Березовская Ф.С., Буриев Т.И. Факторы разнообразия в математической экологии и популяционной генетике. – Пушино, 1980. – 6 с.

Ж.Ж. Ермакбаева, Р.Е.Шакирова, Ж.М.Малекова

*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана Казахстан*

### Эффект коллективной защиты в системе хищник-жертва

**Аннотация:** В статье рассматривается преобразование модели Лотки-Вольтерра системы хищник-жертва, в которой осуществляется эффект "коллективной защиты". Предполагается, что при достижении определенной численности жертв уменьшается ясность хищничества и увеличение численности хищников. Исследуется динамические режимы модели при разных значениях параметров и, а именно, показываются, что в рамках модели осуществляется разные преобразования режима определенных вспышек и режим реверсивной вспышки. Излагается динамика взаимодействия видов на основе принципа Лотки-Вольтерра. Анализ ряда преобразований модели Лотки-Вольтерра для случая, когда в популяции жертв осуществляется эффект коллективной защиты, можно увидеть, что действие этого эффекта способствует уменьшению численности хищников и возрастанию жертв. Более того, при известных соотношениях параметров в модели могут возникнуть динамические режимы. В текущая работа посвящена построению и анализу модели системы хищник-жертва, также являющейся преобразованием модели Лотки-Вольтерра, в рамках которой учитывается действие эффекта коллективной защиты, появляющаяся в популяции жертв при достижении определенной численности.

**Ключевые слова:** модель Лотки-Вольтера, мальтузианский параметр, популяция, саморегуляция, дифференциальное уравнение, система хищник-жертва.

J.J. Yermekbayeva, R.E. Shakirova, Zh.M. Malekova

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

### The effect of collective protection in the predator-prey system

**Abstract:** The article discusses the transformation of the Lotka-Volter model of the predator-prey system, in which the effect of "collective protection" is implemented. It is assumed that when a certain number of victims is reached, the clarity of predation decreases and the number of predators increases. The dynamic modes of the model are investigated for different values of the parameters and, namely, it is shown that within the model there are different transformations of the

mode of certain flashes and the mode of the reverse flash. The dynamics of species interaction based on the Lotka-Volter principle is described. An analysis of a series of transformations of the Lotka-Volter model for the case when the collective protection effect is realized in the population of victims, it can be seen that the effect of this effect helps to reduce the number of predators and increase the number of victims. Moreover, with known parameter ratios, dynamic modes may arise in the model. The current work is devoted to the construction and analysis of the predator-prey model, which is also a transformation of the Lotka-Volter model, which takes into account the effect of collective defense that appears in the population of victims when a certain number is reached.

**Keywords:** Lotka-Volter model, Malthusian parameter, population, self-regulation, differential equation, predator-prey system.

## References

- 1 Bazykin A.D. Matematicheskaya biofizika vzaimodejstvuyushchih populyacij, [Mathematical biophysics of interacting populations] (Nauka, 1985).
- 2 Goryachenko V.D. Matematicheskie modeli kletochnyh populyacij, [Mathematical models of cellular populations] (Gor'kij, 1981).
- 3 Aponin YU.M., Bazykin A.D. Matematicheskoe modelirovanie v ehkologii, [Mathematical modeling in ecology] (Nauka, 1978).
- 4 Vol'terra V. Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovanie, [The mathematical theory of the struggle for existence] (Nauka, 1976).
- 5 Poluehktov R.A., Pyh YU.A., SHvytov I.A. Dinamicheskie modeli ehkologicheskikh sistem, [Dynamic models of ecological systems] (Gidrometeoizdat, 1980).
- 6 Semevskij F.N., Semenov S.M. Matematicheskoe modelirovanie ehkologicheskikh processov, [Mathematical modeling of ecological processes] (Gidrometeoizdat, 1982).
- 7 Bazykin A.D., Berezovskaya F.S., Buriev T.I. Faktory raznoobraziya v matematicheskoy ehkologii i populyacionnoj genetike, [Factors of diversity in mathematical ecology and population genetics] (Pushchino, 1980).

### *Авторлар туралы мәліметтер:*

*Ермекбаева Ж.Ж.*- Доктор PhD, и.о. доцента кафедры системного анализа и управления, Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, ул.Пушкина 11/2,601, Астана, Казахстан.

*Шакирова Р.Е.*- Докторант кафедры системного анализа и управления, Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, ул.Пушкина 11/2, Астана, Казахстан.

*Малекова Ж.М.*- Магистрант кафедры системного анализа и управления, Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева, ул.Пушкина 11/2,601, Астана, Казахстан.

*Yermekbayeva J.J.*- PhD, Associate Professor of Department of System Analyses and Control, L.N.Gumilyov Eurasian National University, 11/2 Pushkin Street, Astana, Kazakhstan.

*Shakirova R.E.* - Doctoral student of System Analysis and Control department of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, 11/2 Pushkin Street, Astana, Kazakhstan.

*Malekova Zh.M.*- Master student of System Analysis and Control department of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, 11/2 Pushkin Street, Astana, Kazakhstan, , 11/2 Pushkin Street, Astana, Kazakhstan.

*Редакцияға 18.06.2018 қабылданды*

**«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар**

*Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.*

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлы *bulmathmc.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады. Мақаламен бірге авторлар редакцияға ілеспе хат жолдаулары қажет.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теоремадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

**Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары**

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Киров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: [vest\\_math@enu.kz](mailto:vest_math@enu.kz). Сайт: [bulmathmc.enu.kz](http://bulmathmc.enu.kz).

Provision on articles submitted to the journal  
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.  
Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website *bulmathmc.enu.kz*. Authors also need to submit a cover letter.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages (from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

#### Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). *E-mail:* [vest\\_math@enu.kz](mailto:vest_math@enu.kz). *Сайт:* [bulmathmc.enu.kz](http://bulmathmc.enu.kz).

**Правила представления работ в журнал**  
**"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.**  
**Серия Математика. Информатика. Механика"**

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилиевой файл можно скачать со сайта журнала *bul-mathmc.enu.kz*. А также авторам необходимо представить в редакцию Сопроводительное письмо.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубризатора МРНТИ (Международный рубризатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

**Примеры оформления списка литературы**

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: [vest\\_math@enu.kz](mailto:vest_math@enu.kz). Сайт: [bulmathmc.enu.kz](http://bulmathmc.enu.kz).

Бас редактор:

Н. Темірғалиев

Жауапты редактор:

А. Ж. Жұбанышева

Жауапты хатшы:

А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің  
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.  
- 2019. 1(126)- Астана: ЕҰУ. 80-б.  
Шартты б.т. - 16. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,  
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті  
Тел.: +7 (7172) 70-95-00(ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды