ISSN 3007-0155
eISSN 3007-0163

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА**

№2(155)/2026

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2026
Astana, 2026

БАС РЕДАКТОРЫ

Темірғалиев Н., *ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан*

Бас редактордың орынбасары **Жұбанышева А.Ж.**
PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары **Наурызбаев Н.Ж.**
PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.	*PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция*
Алимхан Килан	*PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан*
Бекенов М.И.	*ф.-м.ғ.к., доцент,Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан*
Гогинава У.	*ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия*
Зунг Динь	*ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам ұлттық университеті, Ханой, Вьетнам*
Иосевич А.	*PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ*
Кобельков Г.М.	*ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей*
Курина Г.А.	*ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей*
Марков В.В.	*ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей*
Мейрманов А.М.	*ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей*
Нуртазина К.Б.	*ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан*
Омарбекова А.С.	*т.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан*
Смелянский Р.Л.	*ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей*
Тауғынбаева Г.Е.	*PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан*
Умирбаев У.У.	*ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ*
Холщевникова Н.Н.	*ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей*
Шмайссер Ханс-Юрген	*Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия*

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.
№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

© Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

EDITOR-IN-CHIEF

Nurlan Temirgaliyev, *Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

Deputy Editor-in-Chief **Aksaule Zhubanysheva**
PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief **Nurlan Nauryzbayev**
PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Editorial board:

Evgueni Abakumov	*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee Paris, France*
Alexander Iosevich	*PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA*
Alimhan Keylan	*PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*
Makhsut Bekenov	*Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof. L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*
Ushangi Goginava	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof. Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*
Dũng Dinh	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute, Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*
Georgii Kobel'kov	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
Galina Kurina	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh, Russia*
Vladimir Markov	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
Anvarbek Meirmanov	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia*
Karlygash Nurtazina	*Cand. of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*
Asel Omarbekova	*Cand. of Tech. Sci., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*
Ruslan Smelyansky	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
Galiya Taugynbayeva	*PhD, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*
Ualbay Umirbaev	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Wayne State University,Detroit, USA*
Natalya Kholshchevnikova	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State Technological University "Stankin", Moscow, Russia*
Hans-Juergen Schmeisser	*Dr. habil., Prof., Friedrich-Shiller University Jena, Germany*

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series
Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.
Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

© L.N. Gumilyov Eurasian National University

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Темиргалиев Н., *д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

Зам. главного редактора **Жубанышева А.Ж.**
PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Зам. главного редактора **Наурызбаев Н.Ж.**
PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В. *PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция*

Алимхан Килан *PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

Гогинава У. *д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия*

Зунг Динь *д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам*

Иосевич А. *PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США*

Кобельков Г.М. *д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Курина Г.А. *д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

Марков В.В. *д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*

Мейрманов А.М. *д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*

Нуртазина К.Б. *к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

Омарбекова А.С. *к.т.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

Смелянский Р.Л. *д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Таугынбаева Г.Е. *PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

Умирбаев У.У. *д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США*

Холщевникова Н.Н. *д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия*

Шмайссер Ханс-Юрген *Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия*

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА
Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.
Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.
Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,
тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

© Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, №2(155)/2026

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, №2(155)/2026

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, №2(155)/2026

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Гогатишвили А., Бокаев Н.А., Кузеубаева Н.К. Салмақталған Лоренц тізбектері кеңістіктері арасындағы дискретті бөлшекті максималды оператордың шенелгендігін сипаттау
Gogatishvili A., Bokayev N.A., Kuzeubayeva N.K. Characterization of the Boundedness of the Discrete Fractional Maximal Operator Between Weighted Lorentz Sequence Spaces
Гогатишвили А., Бокаев Н.А., Кузеубаева Н.К. Характеристика ограниченности дискретного дробно максимального оператора между весовыми пространствами последовательностей Лоренца 6

Бакурадзе М. Морава K-теориясындағы Макки функторымен берілген Бредон когомологиясы туралы
Bakuradze M. On Bredon Cohomology with Mackey Functor in Morava K-theory
Бакурадзе М. О бредоновской когомологии с функтором Макки в теории Моравы K-типа 18

Жапбасбаев Ұ. Қ. Турбулентті дүлей ағындар әміршісі: академик Ершин Қазақстан гидромеханикасын әлемдік танымалдыққа қалай жеткізді
Zhapbasbayev U. K. Master of Turbulent Forces: How Academician Yershin Brought Kazakhstan's Hydromechanics to International Prominence
Жапбасбаев У.К. Властелин турбулентных стихий: как академик Ершин вывел казахстанскую гидромеханику на орбиту мирового признания 25

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2026, Vol. 155, №2, P.6-17
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

Article
IRSTI: 27.39.19

CHARACTERIZATION OF THE BOUNDEDNESS OF THE DISCRETE FRACTIONAL MAXIMAL OPERATOR BETWEEN WEIGHTED LORENTZ SEQUENCE SPACES [1]

A.Gogatishvili [1], N.A.Bokayev [2], N.K.Kuzeubayeva [2] *
[1] Institute of Mathematical of the Czech Academy of Sciences, Žitná 25, 115 67 Praha 1, Czech Republic
[2] L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpaev Str. 2, 010008, Astana, Republic of Kazakhstan
(E-mail: [1] gogatish@math.cas.cz, [2] bokayev2011@yandex.ru, [2] *nurgul.kuzeubaeva@mail.ru)

Abstract. In this paper, we give the complete characterization of the boundedness of the discrete fractional maximal operator M_γ, defined on $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [0, n)$, between the classical Lorentz sequence spaces $\lambda_p(v)$ and $\lambda_q(w)$, where $0 < p, q < \infty$, $\{v(m)\}$ and $\{w(m)\}$ are non-negative sequences defined on $\mathbb{N}$. We first obtain a sharp upper estimate for the nonincreasing rearrangement of the discrete fractional maximal operator $M_\gamma x$, with a supremal operator involving a discrete Hardy operator and the nonincreasing rearrangement of the sequence $\{x(k)\}$, and we show that this estimate is sharp by showing a lower estimate for special sequences. Using this result, we can reduce the characterization of the boundedness of the discrete fractional maximal operator M_γ between the discrete weighted Lorentz sequence spaces to the boundedness of the discrete supremum operator between weighted Lebesgue sequence spaces, restricted to nonincreasing sequences. This problem was investigated in the recent paper by the authors, which enables us to obtain the final characterization.

Keywords: discrete Fractional maximal operator, weighted Lorentz sequence space, supremal operator, Hardy operator.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2026/2.1

2000 Mathematics Subject Classification: 46B30, 46B85

1. Introduction

We start with the definition of the decreasing rearrangement of the real sequences. We will follow the book [1] reformulating the definitions for the special case of the σ-finite measure space

[1]The research was supported by the grant Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project no. AP26196065).The research of A. Gogatishvili was partially supported by the grant project 23-04720S of the Czech Science Foundation (GAČR), The Institute of Mathematics, CAS is supported by RVO:67985840, by Shota Rustaveli National Science Foundation (SRNSF), grant no: FR22-17770.

$(\mathbb{Z}^n, \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n), m)$ where m is the usual counting measure, which is defined as follows: for a finite set A, $m(A)$ is the number of its elements, and for infinite A we have that $m(A) = \infty$.

Definition 1 (Distribution function and decreasing rearrangement). *Consider the measure space $(\mathbb{Z}^n, \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n), m)$. For any bounded sequence $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ of real numbers, we define its distribution function $m_x : [0,\infty) \to [0,\infty]$ in the following way:*

$$m_x(\omega) = m\{k \in \mathbb{Z}^n : |x(k)| > \omega\}, \quad \omega > 0.$$

Then for $t \geq 0$ we define the decreasing rearrangement:

$$x^*(t) = \inf\{\omega > 0 : m_x(\omega) \leq t\}$$

and the decreasing rearrangement $\{x^*(i)\}_{i=1}^{\infty}$ of the sequence $\{x(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ as

$$x^*(i) = x^*(t(i)) = \inf\{\omega > 0 : m_x(\omega) \leq t(i)\}$$

for any $i - 1 \leq t(i) < i, \quad i \in \mathbb{N}$.

It should be noticed that an alternative equivalent definition of the decreasing rearrangement is possible.

$$x^*(i) = \sup_{E\subset\mathbb{Z}^n, m(E)=i} \min_{k\in E} |x(k)| \quad i \in \mathbb{N}.$$

We use the convention here that $\inf\emptyset = \infty$. Thus, if $m_x(\omega) > i$ for all $\omega \geq 0$, then $x^*(i) = \infty$.
We denote $x^{**}(k)$ as the average $\{x^*(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$x^{**}(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x^*(i), \quad k \in \mathbb{N}.$$

We will use the following conventions. We write $A \lesssim B$ if there exists a constant $C \in (0,\infty)$ independent of appropriate quantities such that $A \leq CB$. We write $A \approx B$ if we have both $A \lesssim B$ and $B \lesssim A$. We put $1/(\pm\infty) = 0$, $0/0 = 0$, $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. Moreover, we omit arguments of integrands as well as differentials in integrals when appropriate in order to keep the exposition as short as possible. We will denote by $LHS(*)$ and $RHS(*)$, the left-hand side and right-hand side of an inequality $(*)$, respectively. Note that since the counting measure m can only take integer values (or infinity), it does not matter which exact t_k is chosen for the given k, as long as it is in the aforementioned interval.

In this paper, an upper bound is obtained for a nonincreasing rearrangement of a discrete fractional-maximal operator through a certain supremal operator. We assume throughout that $\mathbf{w}$ and $\mathbf{v}$ are sequences of nonnegative terms. Their partial sums are denoted by

$$W(m) = \sum_{k=1}^{m} w(k), \quad V(m) = \sum_{k=1}^{m} v(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

In the case where the series converges, or we consider the limit of the sequence of partial sums, we write:

$$V(\infty) = \lim_{m\to\infty} V(m).$$

Definition 2. *Given a fixed sequence $w(k)_{k\in\mathbb{N}}$ of nonnegative real numbers not identically equal to zero and a fixed $p \in (0,\infty)$. The classical Lorentz sequence space $\lambda_p(w)$ is the set of all complex sequences $x = x(k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ such that $\|x\|_{\lambda_p(w)} < \infty$, where*

$$\|x\|_{\lambda_p(w)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x^*(k))^p \cdot w(k)\right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty, \\ \sup\limits_{k\geq 1} x^*(k) \cdot w(k), & p = \infty. \end{cases}$$

Notice that the $\|\cdot\|_{\lambda_p(w)}$ does not necessarily have to be a norm.

Definition 3.

$$\lambda_p(w) = \{x \in \mathbb{Z}^n : \|x\|_{\lambda_p(w)} < +\infty\}.$$

For $m = (m_1, m_2, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ and $N \in \mathbb{N}$ we define the set

$$S_{m,N} := \{k \in \mathbb{Z}^n : ||k - m||_\infty \leq N\},$$

where $||(x(1), x(2), \cdots, x(n))||_\infty := \max\{|x(i)| : 1 \leq i \leq n\}$ for each $(x(1), x(2), \cdots, x(n)) \in \mathbb{Z}^n$. Then $|S_{m,N}| = (2N+1)^n$ is the cardinality of the set $S_{m,N}$. Let $\gamma \in [0, n)$, $x = (x(1), x(2), \cdots, x(k)) \in \mathbb{Z}^n$. The discrete fractional maximal operator M_γ is defined by

$$(M_\gamma x)(m) = \sup_{N \in \mathbb{N}} |S_{m,N}|^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)|, \ m \in \mathbb{Z}^n.$$

The aim of this paper is to establish a condition for the boundedness of the discrete fractional maximal operator from $\Lambda_p(v)$ to $\Lambda_q(w)$.

2. Preliminaries

Theorem 1. [1, Chapter-2, Theorem 2.2] *If $x = \{x(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ and $b = \{b(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ are complex sequences, then*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} x(m)b(m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} x^*(k)b^*(k).$$

Lemma 1. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\gamma \in [0, n)$, then the following inequalities hold:*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (M_\gamma x)^*(k) \leq D_3 \sup_{k \in \mathbb{N}} k^{\frac{\gamma}{n}} x^*(k), \tag{1}$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} k^{1-\frac{\gamma}{n}} (M_\gamma x)^*(k) \leq D_4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |x(k)|, \tag{2}$$

where D_3 and D_4 are positive constants depending only on n and γ.

Proof. Using the definition of M_γ and Theorem 1 we get

$$\begin{aligned}
\sup_{k \in \mathbb{N}} (M_\gamma x)^*(k) &= \sup_{m \in \mathbb{Z}^n} (M_\gamma x)(m) \\
&= \sup_{m \in \mathbb{Z}^n} \sup_{N \in \mathbb{N}} |S_{m,N}|^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{k \in S_{m,N}} |x(k)| \\
&\leq \sup_{m \in \mathbb{Z}^n} \sup_{N \in \mathbb{N}} |S_{m,N}|^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{i=1}^{|S_{m,N}|} x^*(i) \\
&= \sup_{m \in \mathbb{Z}^n} \sup_{N \in \mathbb{N}} |S_{m,N}|^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{i=1}^{|S_{m,N}|} i^{-\gamma/n} i^{\gamma/n} x^*(i) \\
&\leq \sup_{m \in \mathbb{Z}^n} \sup_{N \in \mathbb{N}} |S_{m,N}|^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{i=1}^{|S_{m,N}|} i^{-\gamma/n} \sup_{i \in \mathbb{N}} i^{\gamma/n} x^*(i) \\
&\leq D_3 \sup_{i \in \mathbb{N}} i^{\gamma/n} x^*(i)
\end{aligned}$$

the estimate (1) proved.

Now we prove the estimate (2). Fix a number $\lambda > 0$ and set

$$E_\lambda = \{k \in \mathbb{Z}^n : (M_\gamma x)(k) > \lambda\}.$$

We want to estimate

$$m(E_\lambda)^{1-\frac{\gamma}{n}} = m(\{k \in \mathbb{Z}^n : (M_\gamma x)(k) > \lambda\}) \leq \frac{\widetilde{C}_4}{\lambda} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |x(k)|.$$

For each $k \in E_\lambda$, choose N_k such that

$$\frac{1}{|S_{k,N_k}|^{1-\gamma/n}} \sum_{m\in S_{k,N_k}} |x(m)| > \lambda.$$

Thus $E_\lambda \subset \cup_{k\in E_\lambda} S_{k,N_k}$. Take any finite set $E \subset E_\lambda$, and apply the Vitali covering lemma [2, Chapter-1, Lemma, p. 9]. So there exists a disjoint subcollection $\{S_j = S_{k_j,N_{k_j}}\}$ selected by the Vitali covering lemma, such that:

$$m(E_\lambda) \leq 3^n \sum_j m(S_j)$$

and

$$\begin{aligned} m(E_\lambda)^{1-\frac{\gamma}{n}} &\leq 3^{n-\gamma} \sum_j m(S_j)^{1-\frac{\gamma}{n}} \\ &\leq 3^{n-\gamma}\lambda^{-1} \sum_j \sum_{m\in S_j} |x(m)| \\ &\leq 3^{n-\gamma}\lambda^{-1} \sum_{m\in\cup_j S_j} |x(m)| \\ &\leq 3^{n-\gamma}\lambda^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |x(m)|, \end{aligned}$$

so

$$\sup_{\lambda>0} \lambda m(E_\lambda)^{1-\frac{\gamma}{n}} \leq 3^{n-\gamma} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |x(m)|$$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} m^{1-\frac{\gamma}{n}} (M_\gamma x)^*(m) = \sup_{\lambda>0} \lambda m(E_\lambda)^{1-\frac{\gamma}{n}} \leq 3^{n-\gamma} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |x(m)|$$

which is an estimate (2) with $D_4 = 3^{n-\gamma}$. □

3. Main results

In the following theorem, an upper bound estimate for the nonincreasing rearrangement of the discrete fractional maximal operator is obtained.

Having defined the $\lambda_p(w)$ norm, we can now move on to the sequence spaces induced by that norm. For the definition to make sense, we only take sequences with finite norm.

Theorem 2. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\gamma \in [0, n)$. Then there exists a positive constant D_1, depending only on n and γ, such that*

$$(M_\gamma x)^*(m) \leq D_1 \sup_{m\leq k<\infty} k^{\gamma/n} x^{**}(k), \quad m \in \mathbb{N} \tag{3}$$

for any sequence $x = \{x(m)\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$.

Proof of Theorem 2. Fix $k \in \mathbb{N}$ and let $x \in l^1_{loc}(\mathbb{Z}^n)$. We may assume that

$$\sup_{m\leq k<\infty} k^{\gamma/n-1} \sum_{j=1}^{k} x^*(j) < \infty \tag{4}$$

otherwise (3) holds trivially. Then by the Hardy-Littlewood inequality (1)

$$\sum_{k\in Q} |x(k)| \leq \sum_{i=1}^{k} x^*(i) < \infty$$

for every set $Q \subset \mathbb{Z}^n$ of measure at most k. In particular, if we put

$$E = \{m \in \mathbb{Z}^n : |x(m)| > x^*(k)\},$$

then $m(E) \le k$ [1, Chapter 2, (1.18)], and so $\sum\limits_{k\in E} |x(k)| < \infty$. We define the sequences:

$$y_k(m) = \max\{|x(m)| - x^*(k), 0\} \operatorname{sgn} x(m), \qquad m \in \mathbb{Z}^n, \tag{5}$$

$$z_k(m) = \min\{|x(m)|, x^*(k)\} \operatorname{sgn} x(m), \qquad m \in \mathbb{Z}^n. \tag{6}$$

Then $x = y_k + z_k$ and

$$y_k^*(i) = \chi_{(0;k)\cap\mathbb{N}}(x^*(i) - x^*(k)), \qquad i \in \mathbb{N} \tag{7}$$

$$z_k^*(i) = \min\{x^*(i), x^*(k)\}, \qquad i \in \mathbb{N} \tag{8}$$

whence from (7):

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |y_k(m)| = \sum_{i=1}^{\infty} y_k^*(i) = \sum_{i=1}^{k} \Big(x^*(i) - x^*(k)\Big) \le \sum_{i=1}^{k} x^*(i). \tag{9}$$

From the inequality (2) it follows that

$$(M_\gamma y_k)^*(i) \le D_4 i^{\gamma/n-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |y_k(m)| \le D_4 i^{\gamma/n-1} \sum_{i=1}^{k} x^*(i), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

By (1) and (8) we have:

$$\begin{aligned}
(M_\gamma z_k)^*(i) &\le D_3 \sup_{1\le i<\infty} i^{\gamma/n} z_k^*(i) \\
&= D_3 \max\Big\{ \sup_{0<i<k} i^{\gamma/n} x^*(k), \sup_{k\le i<\infty} i^{\gamma/n} x^*(i) \Big\} \\
&\approx D_3 \max\Big\{ k^{\gamma/n} x^*(k), \sup_{k\le i<\infty} i^{\gamma/n} x^*(i) \Big\} \\
&\le D_3 \sup_{k\le i<\infty} i^{\gamma/n} x^*(i).
\end{aligned}$$

Hence

$$\sup_{0<i<\infty} (M_\gamma z_k)^*(i) \le D_3 \sup_{k\le i<\infty} i^{\gamma/n} x^*(i), \tag{11}$$

$$\big(M_\gamma x\big)^*(k) \le \big(M_\gamma y_k\big)^*(k) + \sup_{0<i<\infty} \big(M_\gamma z_k\big)^*(i).$$

By using, (10) and (11) we get

$$\begin{aligned}
\big(M_\gamma x\big)^*(k) &\le D_4 k^{\gamma/n-1} \sum_{i=1}^{k} x^*(i) + D_3 \sup_{k\le i<\infty} i^{\gamma/n} x^*(i) \\
&\le (D_4 + D_3) \sup_{k\le i<\infty} i^{\gamma/n} x^{**}(i) \\
&= D_1 \sup_{k\le i<\infty} i^{\gamma/n} x^{**}(i),
\end{aligned}$$

with $D_1 = D_3 + D_4$. □

Theorem 3. *Let us* $n \in \mathbb{N}$ *and* $\gamma \in [0, n)$. *Inequality* (3) *in Theorem 2 is sharp in the sense that for any positive nonincreasing sequence* $x = \{x(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ *there exists a sequence* $y = \{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ *such that* $y^*(k) = x(k)$, $k \in \mathbb{N}$ *and the inequality holds:*

$$(M_\gamma y)^*(m) \geq D_2 \sup_{m\leq k<\infty} k^{\gamma/n} y^{**}(k)$$

$$= D_2 \sup_{m\leq k<\infty} k^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{i=1}^{k} x(i), \quad m, k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

where D_2 *- is a positive constant depending only on* n *and* γ.

Proof of Theorem 3. Let for any $m \in \mathbb{N}$ define

$$N_1 = \{1\},$$
$$N_m := \{i \in \mathbb{N} : i = (2m-3)^n + 1, \cdots, (2m-1)^n\}, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

and

$$Q_m := \{\bar{k} \in \mathbb{Z}^n : \max_{1\leq i\leq n} |k(i)| = m - 1\}.$$

It is clear that

$$\#\{N_1\} = \#\{Q_1\} = 1,$$

and

$$\#\{N_m\} = \#\{Q_m\} = (2m-1)^n - (2m-3)^n, \quad m = 2, 3, \cdots$$
$$\mathbb{N} = \cup_{m\in\mathbb{N}} N_m, \quad \mathbb{Z}^n = \cup_{m\in\mathbb{N}} Q_m.$$

Let

$$\Theta_m : Q_m \to N_m, \quad m \in \mathbb{N}$$

be one-to-one functions.

Define $\Theta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}$

$$\Theta(k) = \Theta_m(k), \quad \text{if} \quad k \in Q_m.$$
$$y(k) = x(\Theta(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Then, for every $k, m \in \mathbb{Z}^n$ such that $\|k\|_\infty \geq \|m\|_\infty$, we have

$$M_\gamma(y)(m) \geq c|S_{0,\|k\|_\infty}|^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{j\in S_{0,\|k\|_\infty}} |y(j)|$$

$$= c\Big(2\|k\|_\infty + 1\Big)^{\gamma-n} \sum_{i=1}^{\|k\|_\infty} \sum_{j\in Q_i} |y(j)|$$

$$= c\Big(2\|k\|_\infty + 1\Big)^{\gamma-n} \sum_{i=1}^{\|k\|_\infty} \sum_{j\in Q_i} |x(\Theta(j))|$$

$$= c\Big(2\|k\|_\infty + 1\Big)^{\gamma-n} \sum_{i=1}^{\|k\|_\infty} \sum_{m\in N_i} |x(m)|$$

$$= c\Big(2\|k\|_\infty + 1\Big)^{\gamma-n} \sum_{i=1}^{(2\|k\|_\infty+1)^n} |x(i)|.$$

Consequently,

$$M_\gamma(y)(m) \geq c \sup_{j\geq(2\|m\|_\infty+1)^n} j^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{i=1}^{j} |x(i)|.$$

Hence, (12) followed on taking rearrangements. □

Remark 1. For the classical fractional maximal operator, similar statements are proven in [3], and for the generalized fractional maximal operator, they are considered in [4].

From Theorem 2 and Theorem 3 follows the following.

Lemma 2. *Let* $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [0, n)$ *and* $0 < q, p \leq \infty$. *Assume that* $\{v(m)\}$ *and* $\{w(m)\}$ *are given nonnegative weight sequences. Then the operator* M_γ *is bounded from* $\lambda_p(v)$ *to* $\lambda_q(w)$ *(*$M_\gamma : \lambda_p(v) \hookrightarrow \lambda_q(w)$*) i.e.*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} ((M_\gamma y)^*(k))^q \, w(k)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \widetilde{C}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (y(k)^*)^p v(k)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{13}$$

holds for any sequence $y = \{y(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$, *if and only if the following inequality*

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sup_{m<k} k^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{i=1}^{k} x(i)\right)^q w(m)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \widetilde{C}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^p v(k)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{14}$$

holds for all nonnegative, nonincreasing sequences $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. *Moreover, if* $\widetilde{C}_1$ *and* $\widetilde{C}_2$ *are the best constants in* (13) *and* (14), *respectively, then* $\widetilde{C}_1 \approx \widetilde{C}_2$ *and the multiplicative constants in all the equivalences above depend only on* p, q.

Proof of Lemma 2. We will prove the equivalence of two statements:

The boundedness of the operator M_γ from $\lambda_p(v)$ to $\lambda_q(w)$, i.e., the fulfillment of inequality (13). The fulfillment of inequality (14) for all nonnegative, nonincreasing sequences $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(13) $\Rightarrow$ (14).

Assume that the operator M_γ is bounded, i.e. the inequality (13) holds for any sequence $\{y(m)\}_{m \in \mathbb{Z}_n}$. We will show that this implies inequality (14) for nonincreasing sequences $x(k)_{k \in \mathbb{N}}$. By Theorem 3 for given nonincreasing sequence $(x(k)_{k \in \mathbb{N}}$ there exists multivariable sequence $\{y(m)\}_{m \in \mathbb{Z}_n}$ such that $y^*(k) = x(k) \quad k \in \mathbb{N}$ and

$$(M_\gamma(y))^*(k) \geq D_2 \sup_{k \leq i < \infty} i^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{j=1}^{i} x(j).$$

Therefore, from inequality (13) follows

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{k<i<\infty} i^{\frac{\gamma}{n}-1} \sum_{j=1}^{i} x(j)\right)^q w(k)\right)^{1/q} \\
&\qquad \leq D_2^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (M_\gamma(y))^*(k))^q w(k)\right)^{\frac{1}{q}} \leq D_2^{-1} \widetilde{C}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} y^*(k)^p v(k)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad = D_2^{-1} \widetilde{C}_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} x(k)^p v(k)\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Therefore, we obtain (14) with

$$\widetilde{C}_2 \leq D_2^{-1} \widetilde{C}_1.$$

(14) $\Rightarrow$ (13).

Assume that inequality (14) holds for all nonnegative, nonincreasing sequences $\{x(n)\}$. We will show that this implies the boundedness of the operator M_γ, i.e., inequality (13) for any sequence y.

Using Theorem 2 and (14) for nonincreasing sequence $((y^*)(k))_{k\in\mathbb{N}}$, we obtain

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}((M_\gamma y)^*(k))^q w(k)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq D_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_{k<i<\infty} i^{\frac{\gamma}{n}-1}\sum_{j=1}^{i} y^*(j)\right)^q w(k)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq D_1\widetilde{C}_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(y^*(k))^p\, v(k)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Therefore, we obtain (13) with

$$\widetilde{C}_1 \leq D_1\widetilde{C}_2.$$

□

In the theorem below, we give a characterization for computing inequality (13) under various choices of the parameters p and q.

Theorem 4. *Let $n\in\mathbb{N}$. $\gamma\in[0,n)$, and $0<p,q<\infty$. Assume that $\{w(m)\}$ and $\{v(m)\}$ are given nonnegative real numbers not identically equal to zero. Then the inequality*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}((M_\gamma x)^*(k))^q\, w(k)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \widetilde{C}_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(x(k)^*)^p v(k)\right)^{\frac{1}{p}}$$

holds for any sequences $\{x(m)\}$ if and only if:
(i) *If $1<p\leq q$, then $\max\{C_0,C_1,C_2,C_3\}<\infty$, where*

$$C_0=\left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{\frac{\gamma q}{n}} w(i)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} v(i)\right)^{-\frac{1}{p}},$$
$$C_1=\sup_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{\gamma}{n}-1}W(k)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{V(m)^{\frac{1}{1-p}}v(m+1)}{m^{\frac{p}{1-p}}V(m+1)}\right)^{\frac{p-1}{p}},$$
$$C_2=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=k}^{\infty} i^{q(\frac{\gamma}{n}-1)}w(i)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{V(m)^{\frac{1}{1-p}}v(m+1)}{m^{\frac{p}{1-p}}V(m+1)}\right)^{\frac{p-1}{p}},$$
$$C_3=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=1}^{k} w(i)i^{\frac{q\gamma}{n}}\right)^{\frac{1}{q}} V(k)^{-\frac{1}{p}}.$$

(ii) *If $p>1$ and $q<p$, then $\max\{C_0,C_4,C_5,C_6,C_7\}<\infty$, where*

$$C_4=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty} i^{q(\frac{\gamma}{n}-1)}w(i)\right)^{\frac{q}{p-q}} k^{q(\frac{\gamma}{n}-1)}w(k)\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{V(m)^{\frac{1}{1-p}}v(m+1)}{m^{\frac{p}{1-p}}V(m+1)}\right)\right)^{\frac{p-1}{p}},$$
$$C_5=\left(\sum_{k=1}^{\infty} W(k)^{\frac{q}{p-q}}w(k)\sup_{k\leq i<\infty} i^{(\frac{\gamma}{n}-1)\frac{pq}{p-q}}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{V(m)^{\frac{1}{1-p}}v(m+1)}{m^{\frac{p}{1-p}}V(m+1)}\right)^{\frac{(p-1)q}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$
$$C_6=\left(\sum_{k=1}^{\infty} W(k)^{\frac{q}{p-q}}w(k)\sup_{k\leq i<\infty} i^{\frac{\gamma}{n}\frac{pq}{p-q}}V(i)^{-\frac{q}{p-q}}\right.$$

$$\times \left(\sum_{m\geq i} V(m+1)^{-1} V(m)^{\frac{1}{1-p}} v(m+1) \right)^{\frac{(p-1)q}{p-q}} \Bigg)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$C_7 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} w(i) i^{\frac{q\gamma}{n}} \right)^{\frac{q}{p-q}} w(k) \sup_{k\leq i<\infty} i^{\frac{\gamma q}{n}} V(i)^{-\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

(iii) *If* $0 < p \leq 1$ *and* $p \leq q$, *then* $\max\{C_8, C_9\} < \infty$, *where*

$$C_8 = \sup_{k\in\mathbb{N}} k^{\frac{\gamma}{n}-1} W(k)^{\frac{1}{q}} \sup_{1\leq i\leq k} iV(i)^{-\frac{1}{p}}.$$

$$C_9 = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} i^{q(\frac{\gamma}{n}-1)} w(i) \right)^{\frac{1}{q}} \sup_{1\leq i\leq k} iV(i)^{-\frac{1}{p}}.$$

(iv) *If* $0 < q < p \leq 1$, *then then* $\max\{C_{10}, C_{11}\} < \infty$, *where*

$$C_{10} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} w(i) i^{q(\frac{\gamma}{n}-1)} \right)^{\frac{q}{p-q}} k^{q(\frac{\gamma}{n}-1)} w(k) \sup_{1\leq i\leq k} i^{\frac{pq}{p-q}} V(i)^{\frac{q}{q-p}} \right)$$

$$C_{11} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} W(k)^{\frac{q}{p-q}} w(k) \sup_{k\leq i<\infty} i^{\frac{\gamma}{n}\frac{pq}{p-q}} V(i)^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Moreover, if we denote by $\widetilde{C}$ *the best constant in* (14), *then*

$$\widetilde{C} \approx \begin{cases} \max\{C_0, C_1, C_2, C_3\} & \text{in the case (i)}, \\ \max\{C_0, C_4, C_5, C_6, C_7\} & \text{in the case (ii)}, \\ \max\{C_8, C_9\} & \text{in the case (iii)}, \\ \max\{C_{10}, C_{11}\} & \text{in the case (iv)}. \end{cases}$$

Moreover, the multiplicative constants in all the equivalences above depend only on p, q.

Proof of Theorem 4. The proof easily follows from Lemma 2 by using [5, Theorem 2.3], with $u(i) = i^{\frac{\gamma}{n}-1}$, $a(m) = w(m)$ and $b(m) = v(m)$. It is easily seen that $z(k) = k^{\frac{\gamma}{n}-1}$ and $\sup_{i\leq j\leq n} u(j)j = n^{\frac{\gamma}{n}}$. Therefore, in the cases (iii) and (iv), we have one condition less than in [5, Theorem 2.3] because in case (iii) we have $C \approx C_8 + C_9 + C_{10}$ and $C_{10} \leq C_8$. In case (iv) we have $C \approx C_{11} + C_{12} + C_{13}$, $C_{13} \leq C_{12}$, therefor $C \approx C_{11} + C_{12}$, C_{11} and C_{12} are now C_{10} and C_{11}.

□

We note that weighted inequalities for Hardy operators and for other operators have also been considered in the literature [6]-[13].

4. Conclusion

In this paper, we have obtained sharp upper and lower bounds for the nonincreasing rearrangement of the discrete fractional maximal operator in weighted Lorentz-type sequence spaces $\lambda_p(v) \hookrightarrow \lambda_q(w)$. These estimates were derived using supremal operator techniques and reduction arguments applied to cones of monotone sequences.

In the paper [7]-[8], a continuous case is considered. In the discrete case, the result was problematic, and the result is essentially different. We have proved the new Copson theorem for the discrete case; in the results, it can be seen that it uses shifts - this is a new effect. Also, obtaining the estimate below for the decreasing rearrangement of the fractional maximal function is more difficult than in the continuous case. In the continuous case, it is enough to consider a radial function, there is no analog of a radial sequence in $\mathbb{Z}^n$.

Our results generalize and refine known weighted inequalities for discrete Hardy-type and kernel operators. The established equivalences involving iterated supremal expressions highlight a deep connection between discrete harmonic analysis and classical real-variable techniques.

From a practical perspective, such rearrangement-based estimates can be useful in problems related to smoothing analysis, approximation, and stability assessment in discrete computational settings.

Future research may focus on extending these results to generalized discrete potential-type operators and exploring their role in grid-based models.

5. Acknowledgements

The authors thank the reviewers for their careful reading of the manuscript and valuable comments.

Conflict of interest: the authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' Contributions: the authors' contribution is equal.

References

1 C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*. Pure and Applied Mathematics 129, Academic Press, Boston, MA, 1988, 469 p.

2 E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970, 289 p. ISBN: 0-691-08079-8.

3 A. Cianchi, R. Kerman, B. Opic and L. Pick, A sharp rearrangement inequality for the fractional maximal operator. *Studia Mathematica*, 138 (2000), no. 3, 277–284.

4 N.A. Bokayev, A. Gogatishvili and A.N. Abek, On estimates of non-increasing rearrangement of generalized fractional maximal function. *Eurasian Mathematical Journal*, 14 (2023), no. 2, 13–23.

5 T. Ünver, A. Gogatishvili, N.A. Bokayev and N. Kuzeubayeva, Weighted Hardy inequalities involving supremum for decreasing sequences. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2026. https://doi.org/10.4171/ZAA/1830

6 A. Gogatishvili, M. Křepela, R. Oľhava and L. Pick, Weighted inequalities for discrete iterated Hardy operators. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17 (2020), no. 4, 132 p.

7 A. Gogatishvili, L. Pick and T. Ünver, Weighted inequalities for discrete iterated kernel operators. *Mathematische Nachrichten*, 295 (2022), no. 11, 2171–2196.

8 A. Gogatishvili and V.D. Stepanov, Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 405 (2013), no. 1, 156–172.

9 A. Gogatishvili and V.D. Stepanov, Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions. *Uspekhi Mat. Nauk*, 2013, Vol. 68, no. 4 (412), 3–68; *Russian Math. Surveys*, 68 (2013), no. 4, 597–664.

10 K.G. Grosse-Erdmann, *The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1679, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

11 Р. Ойнаров и С.Х. Шалгинбаева, Весовые неравенства Харди на конусе монотонных последовательностей. *Известия Министерства науки Академии наук Республики Казахстан. Серия физико-математическая*, 1998, no. 1, 33–42.

12 E. Sawyer, Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces. *Studia Math.*, 96 (1990), no. 2, 145–158.

13 G. Sinnamon, Hardy's inequality and monotonicity, in *Function Spaces and Nonlinear Analysis*. Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2005, 292–310 p.

Салмақталған Лоренц тізбектері кеңістіктері арасындағы дискретті бөлшекті максималды оператордың шенелгендігін сипаттау

А. Гогатишвили [1], Н.А. Бокаев [2], Н.К. Кузеубаева [2]*

[1] Чехия ғылым академиясының математика институты, 115 67 Прага 1, Житна көшесі, 25,Чехия

[2] Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаев көшесі, 2, 010008, Астана, Қазақстан

Аннотация. Бұл мақалада біз $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [0, n)$, жиынында анықталған M_γ дискретті бөлшектік максималды операторының классикалық Лоренц тізбектер кеңістіктері $\lambda_p(v)$ мен $\lambda_q(w)$ арасында шенелген болуының толық сипаттамасын береміз, мұндағы $0 < p, q < \infty$, ал $\{v(m)\}$ және $\{w(m)\}$ — $\mathbb{N}$ жиынында анықталған теріс емес тізбектер. Алдымен біз $M_\gamma x$ дискретті бөлшектік максималды операторының өспейтін алмастыруы үшін дәл жоғарғы бағалауды аламыз, бұл бағалау дискретті Харди операторы мен $\{x(k)\}$ тізбегінің өспейтін алмастыруын қамтитын супремумдық оператор арқылы

өрнектеледі. Сондай-ақ, арнайы тізбектер үшін төменгі бағалауды келтіру арқылы алынған бағалаудың дәлдігін көрсетеміз. Осы нәтижені пайдалана отырып, салмақты Лоренц тізбектер кеңістіктері арасындағы M_γ дискретті бөлшектік максималды операторының шенелгендігін сипаттау мәселесін салмақты Лебег тізбектер кеңістіктері арасындағы дискретті супремум операторының шенелгендігін зерттеуге келтіруге болады. Аталған мәселе авторлардың жұмыстарында зерттелген, соның нәтижесінде дискретті бөлшектік максималды M_γ операторының дискретті салмақты Лоренц кеңістіктерінде шенелгендігіне түпкілікті сипаттама алуға мүмкіндік берді.

Түйін сөздер: бөлшекті максималды оператор, салмақталған Лоренц тізбектер кеңістігі, супремум операторы, Харди операторы.

Характеристика ограниченности дискретного дробно-максимального оператора между весовыми пространствами последовательностей Лоренца

А. Гогатишвили [1], Н.А. Бокаев [2], Н.К. Кузеубаева [2]*

[1] Институт математики Чешской академии наук, ул.Житна, 25, 115 67 Прага 1, Чешская Республика

[2] Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилёва, ул.Сатпаева, 2, 010008, Астана, Казахстан

Аннотация. В данной работе приводится полная характеризация ограниченности дискретного дробного максимального оператора M_γ, определенного на $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in [0, n)$, как оператора, действующего между классическими пространствами последовательностей Лоренца $\lambda_p(v)$ и $\lambda_q(w)$, где $0 < p, q < \infty$, а $\{v(m)\}$ и $\{w(m)\}$ неотрицательные последовательности, заданные на $\mathbb{N}$. Сначала мы получаем точную оценку сверху для невозрастающей перестановки последовательности $M_\gamma x$ (результата действия дискретного дробного максимального оператора) через супремальный оператор, включающий дискретный оператор Харди и невозрастающую перестановку последовательности $\{x(k)\}$, точность этой оценки подтверждается соответствующей оценкой снизу для специальных последовательностей. Используя этот результат, задачу о характеризации ограниченности дискретного дробного максимального оператора M_γ между дискретными весовыми пространствами последовательностей Лоренца можно свести к задаче об ограниченности дискретного супремального оператора между весовыми пространствами последовательностей Лебега, рассматриваемого на классе невозрастающих последовательностей. Эта задача была исследована в работах авторов, что позволило получить окончательную характеристику ограниченности дискретного дробного максимального оператора M_γ в дискретных весовых пространствах Лоренца.

Ключевые слова: дискретный дробно максимальный оператор, весовое пространство последовательностей Лоренца, супремальный оператор, оператор Харди.

References

1 C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*. Pure and Applied Mathematics 129, Academic Press, Boston, MA, 1988, 469 p.

2 E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970, 289 p. ISBN: 0-691-08079-8.

3 A. Cianchi, R. Kerman, B. Opic and L. Pick, A sharp rearrangement inequality for the fractional maximal operator. *Studia Mathematica*, 138 (2000), no. 3, 277–284.

4 N.A. Bokayev, A. Gogatishvili and A.N. Abek, On estimates of non-increasing rearrangement of generalized fractional maximal function. *Eurasian Mathematical Journal*, 14 (2023), no. 2, 13–23.

5 T. Ünver, A. Gogatishvili, N.A. Bokayev and N. Kuzeubayeva, Weighted Hardy inequalities involving supremum for decreasing sequences. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 2026. https://doi.org/10.4171/ZAA/1830

6 A. Gogatishvili, M. Křepela, R. Oĺhava and L. Pick, Weighted inequalities for discrete iterated Hardy operators. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17 (2020), no. 4, 132 p.

7 A. Gogatishvili, L. Pick and T. Ünver, Weighted inequalities for discrete iterated kernel operators. *Mathematische Nachrichten*, 295 (2022), no. 11, 2171–2196.

8 A. Gogatishvili and V.D. Stepanov, Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 405 (2013), no. 1, 156–172.
9 A. Gogatishvili and V.D. Stepanov, Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions. *Uspekhi Mat. Nauk*, 68 (2013), no. 4 (412), 3–68; *Russian Math. Surveys*, 68 (2013), no. 4, 597–664.
10 K.G. Grosse-Erdmann, *The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1679, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
11 R.Oinarov and S.Kh. Shalginbaeva, Vesovye neravenstva Hardi na konuse monotonnyh posledovatel'nostei. [Weighted Hardy inequalities on the cone of monotone sequences]. Izvestiya Ministerstva nauki Akademii nauk Respubliki Kazahstan. Seriya fiziko-matematicheskaya [Izv. Minister. Nauki Akad. Nauk Resp. Kaz. Ser. Fiz.-Mat.], 1998, no. 1, 33–42. [in Russian]
12 E. Sawyer, Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces. *Studia Math.*, 96 (1990), no. 2, 145–158.
13 G. Sinnamon, Hardy's inequality and monotonicity, in *Function Spaces and Nonlinear Analysis*. Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2005, 292–310 p.

Information about the authors:

Amiran Gogatishvili – PhD, Leading researcher at the Institute of Mathematics, Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Žitná, 25, 115 67 Praha 1, Czech Republic.

Nurzhan Adilkhanovich Bokayev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpaev Str., 2, 010008, Astana, Republic of Kazakhstan.

Nurgul Kasymkhanovna Kuzeubayeva – corresponding author, PhD student, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpaev Str., 2, 010008, Astana, Republic of Kazakhstan.

Авторлар туралы мәлімет:

Амиран Гогатишвили – PhD, Математика институтының жетекші ғылыми қызметкері, Чехия ғылым академиясының математика институты, 115 67 Прага 1, Житна көшесі, 25, Чехия.

Нуржан Адильханович Бокаев – ф.-м.ғ.д., профессор, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаев көшесі, 2, 010008, Астана, Қазақстан.

Нургуль Касымхановна Кузеубаева–байланыс үшін автор, PhD докторант, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаев көшесі, 2, 010008, Астана, Қазақстан.

Received: 27.06.2026. *After revision: 05.09.2026.*
Approved: 18.09.2026. Available online: 27.09.2026.



Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2026, Vol. 155, №2, P.18-24
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

Article
IRSTI: 27.19.17

ON BREDON COHOMOLOGY WITH MACKEY FUNCTOR IN MORAVA K-THEORY

M. Bakuradze
Department of Algebra and Geometry, Faculty of Exact and Natural Sciences, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, 1 Ilia Tchavtchavadze Avenue, Tbilisi, Georgia
(E-mail: malkhaz.bakuradze.tsu@ge)

Abstract. Utilizing the algebraic framework of Mackey functors, we analyze the cochain complex and explicitly compute the cellular differentials governed by restrictions and transfer maps within Morava K-theory $K(n)^*$. We focus on the geometric construction of the octahedral surface 2-complex, isolating purely equivariant phenomena driven by stabilizer jumps. By analyzing the complex directly over the Morava ring $K(n)_*[x,y]$, we determine the zero-th and first codifferentials. We show that while the underlying space is geometrically trivial in degree one, the equivariant chromatic classes persist due to the cluster's sector geometry. Finally, we provide a complete description of the first Bredon cohomology group $H^1_{Q_8}(X;\underline{K(n)}^*)$ expressed as a quotient of the coefficient ring. These results contribute to the structural classification of equivariant cohomology rings for finite p-groups with concentrated even degrees.

Keywords: Morava K-theory, equivariant CW complex, Bredon Homology

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2026/2.2

2000 Mathematics Subject Classification: 55N91, 55

1. Introduction

Our consideration of the Mackey functor $\underline{M}$ for Bredon cohomology relies on the explicit Morava K-theory ring calculations for 'good' finite p-groups provided in [1].

Let G be a finite group and X a finite G-CW complex. We define the contravariant Bredon $\underline{K(n)}^*$ module on the orbit category $\mathcal{O}_G$ by setting:

$$\underline{K(n)}^*(G/H) = K(n)^*(BH)$$

for each subgroup $H \subseteq G$.

The n-th Bredon cochain group is defined as the direct sum over the n-dimensional orbit representatives:

$$C^n_G(X;\underline{K(n)}^*) = \bigoplus_{\sigma \in \text{cells}_n(X/G)} K(n)^*(BG_\sigma)$$

where G_σ is the stabilizer of a chosen cell σ.

2. The Differential and AHSS

The coboundary operator $\delta^n : C_G^n \to C_G^{n+1}$ is defined via the restriction maps. For a cochain α, we have:

$$(\delta^n \alpha)(\psi) = \sum_{\sigma \in \text{cells}_n(X/G)} \sum_{g \in G} [\psi : g\sigma] \cdot \text{Res}_{G_\psi}^{gG_\sigma g^{-1}}(g \cdot \alpha_\sigma)$$

where:

- $[\psi : g\sigma]$ are the degrees of the corresponding attaching maps.
- Res is the restriction map in Morava K-theory.

The n-th Bredon cohomology group of X with coefficients in $\underline{K(n)}^*$ is then:

$$H_G^n(X; \underline{K(n)}^*) = \frac{\ker(\delta^n)}{\text{im}(\delta^{n-1})}$$

3. Atiyah-Hirzebruch Spectral Sequence (AHSS)

While the evenness of the Bredon cohomology is a sufficient rather than a necessary criterion for the "goodness" of X, it remains the most computationally viable path.

Key Observation: If the E_2-condition is met (i.e., the cohomology vanishes in odd degrees), the equivariant Atiyah-Hirzebruch spectral sequence:

$$E_2^{p,q} = H_G^p(X; \underline{K(n)}^q) \Rightarrow K_G^{p+q}(X)$$

collapses immediately at the E_2 page.

4. The Example: Octahedral Surface 2-Complex

Geometric Construction. To study the chromatic cohomology under the Q_8 action, we define the underlying space X as the 2-dimensional surface of a regular octahedron.

Let $V_{\text{oct}} = \{\pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ be the set of vertices of a regular octahedron in $\mathbb{R}^3$. We identify the ambient 3-dimensional space with the purely imaginary quaternions $\text{Im}(\mathbb{H})$. The group $Q_8 = \{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ acts on X via conjugation: for any $g \in Q_8$ and $v \in \text{Im}(\mathbb{H})$, the action is given by $g \cdot v = gvg^{-1}$.

We define the complex X as the boundary complex of this octahedron, which is homeomorphic to the sphere S^2. Unlike a solid ball or a radially filled cone, X is a **pure 2-dimensional spherical complex** that does not include the central origin w_0. Its combinatorial data consists of:

- **0-cells (6 vertices):** The peripheral vertices V_{oct}.
- **1-cells (12 edges):** The edges connecting the vertices in V_{oct}, forming the 1-skeleton.
- **2-cells (8 faces):** The triangular faces forming the surface of the octahedron.

This structure allows us to explicitly describe the Q_8 action on the cells without introducing an invariant central fixed point that would force an equivariant contraction.

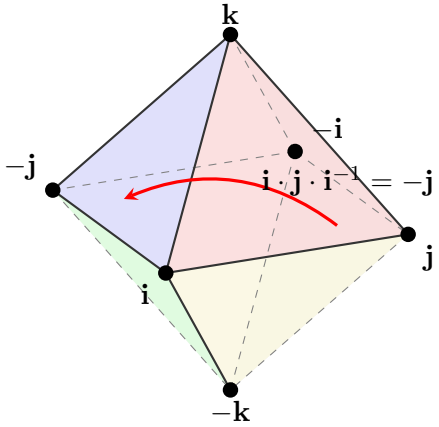
Homotopy Type and Cohomology. The complex X is geometrically realized as the sphere S^2. Consequently, its ordinary cohomology in degree 1 vanishes:

$$H^1(X) = 0 \tag{1}$$

The vanishing of ordinary cohomology in this degree serves to isolate the equivariant effects. The persistence of chromatic classes in $H_{Q_8}^1(X; \underline{K(n)}^*)$ is thus entirely attributable to the Q_8-action and its associated **stabilizer jumps**, rather than the 1-dimensional topological features of the base space. By removing the central cone point, the space avoids equivariant contractibility, allowing non-trivial Bredon cohomology to emerge.

5. Octahedral Geometry and Q_8 Action

The underlying complex X is a 2-sphere with an octahedral decomposition. It consists of 6 vertices, 12 edges, and 8 triangular faces. The action of Q_8 permutes these geometric simplices through quaternion conjugation (for example, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}^{-1} = -\mathbf{j}$).



6. Orbit Decomposition under Q_8

The Q_8-action on the octahedral surface $X \cong S^2$ induces a decomposition into orbits of n-cells. The equivariant structure of X is given by:

- **0-cells:** 3 orbits of peripheral vertices. Each orbit consists of a pair of antipodal vertices: $[\mathbf{i}] = \{\mathbf{i}, -\mathbf{i}\}$, $[\mathbf{j}] = \{\mathbf{j}, -\mathbf{j}\}$, and $[\mathbf{k}] = \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$. The stabilizer of each vertex is isomorphic to C_4 (e.g., $\mathrm{Stab}(\mathbf{i}) = \langle \mathbf{i} \rangle$). Thus, the 0-cochain module $C^0_{Q_8}(X; \underline{K(n)^*})$ has rank 3, with basis elements e^0_1, e^0_2, e^0_3.
- **1-cells:** 3 orbits of edges forming the 1-skeleton of the octahedron. Each orbit contains 4 edges, and the stabilizer is the central subgroup $C_2 = \{1, -1\}$ (since -1 acts trivially on the geometric space $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$). Thus, $C^1_{Q_8}(X; \underline{K(n)^*})$ has rank 3, with basis elements e^1_1, e^1_2, e^1_3.
- **2-cells:** 2 orbits of triangular faces, each containing 4 faces, with stabilizer $C_2 = \{1, -1\}$. Thus, $C^2_{Q_8}(X; \underline{K(n)^*})$ has rank 2, with basis elements e^2_1, e^2_2.

This model provides a highly symmetric orbit category breakdown without a fixed point, naturally avoiding equivariant contractibility and enabling non-trivial Bredon cohomology computations.

7. The modified Differential and Cohomology

The differential $d^r : C^r_G \to C^{r+1}_G$ is a morphism of $K^*(BG)$-modules. Its matrix entries are determined by the interaction between the stabilizers of incident orbits through the global group G.

For a generator in the component corresponding to an orbit $[\sigma]$, the differential is computed via the cellular structure and Mackey functor maps as:

$$d^r([\sigma]) = \sum_{[\tau] \in \mathrm{Orbits}_{r+1}} \epsilon([\tau], [\sigma]) \cdot \Phi_{[\tau],[\sigma]}([\tau])$$

where the algebraic weight $\Phi_{[\tau],[\sigma]}$ is defined using the Mackey functor structure. Specifically, let $H = \mathrm{Stab}(\sigma)$ and $K = \mathrm{Stab}(\tau)$ be the stabilizer subgroups of the incident cells. The corresponding matrix entry is given by the composition of transfer and restriction maps:

$$\Phi_{[\tau],[\sigma]} = \mathrm{Res}^G_K \circ \mathrm{Tr}^G_H : K^*(BH) \to K^*(BK)$$

For $p = 2$, the Morava K-theory coefficient ring is defined over $\mathbb{F}_2$, meaning we operate in characteristic 2 (where signs are absorbed, $1 = -1$, and $2 = 0$).

Let $k = 2^n - 1$. The chromatic weights corresponding to the transfers from C_4 to C_2 are derived from the formal group law, yielding elements x^k, y^k, and $z^k = x^k + y^k$.

Zero-th Codifferential $d^0 : C_G^0 \to C_G^1$**.** This matrix connects the 3 vertex orbits to the 3 edge orbits. The geometric boundary maps, combined with the transfers from the C_4 stabilizers of the vertices to the C_2 stabilizers of the edges, give the following 3×3 boundary matrix:

$$d^0 = \begin{pmatrix} x^k & y^k & 0 \\ 0 & y^k & z^k \\ x^k & 0 & z^k \end{pmatrix} \tag{2}$$

First Codifferential $d^1 : C_G^1 \to C_G^2$**.** This matrix connects the 3 edge orbits to the 2 face orbits. Since the stabilizers for both edges and faces are identical (C_2), the transfer maps are trivial, leaving only the incidence relations (the topological boundary operator). In characteristic 2, the 2×3 matrix is given by:

$$d^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

We directly verify the fundamental cochain complex condition $d^1 \circ d^0 = 0$. Multiplying the matrices over the Morava ring modulo 2:

$$d^1 \cdot d^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k & y^k & 0 \\ 0 & y^k & z^k \\ x^k & 0 & z^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^k & 2y^k & 2z^k \\ 2x^k & 2y^k & 2z^k \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

This algebraic confirmation perfectly aligns with the boundary structure of X.

First Bredon Cohomology H^1**.** To compute the first Bredon cohomology group $H^1_G(X; \underline{K(n)}^*) = \ker(d^1)/\operatorname{im}(d^0)$, we evaluate the kernel and image directly via matrix transformations over the coefficient ring.

The kernel $\ker(d^1)$ consists of vectors $(a, b, c)^T$ satisfying $a + b + c = 0$. The image $\operatorname{im}(d^0)$ is generated by the column vectors of d^0. Since $z^k = x^k + y^k$, the column relations naturally lie in the kernel. By factoring the image from the kernel, the resulting quotient module simplifies exactly to the quotient by the ideal generated by the transfer classes:

$$H^1_G(X; \underline{K(n)}^*) \cong \frac{K(n)_*[x, y]}{(x^{2^n-1}, y^{2^n-1})} \tag{5}$$

This establishes the explicit isomorphism of modules. The non-vanishing group represents the persistent chromatic signature of the Q_8-action locked into the surface geometry of the symmetric cluster.

Second Bredon Cohomology H^2**.** To compute the second Bredon cohomology group $H^2_G(X; \underline{K(n)}^*)$, we analyze the higher cochain modules. The 2-cochain module $C^2_G(X; \underline{K(n)}^*)$ has rank 2, corresponding to the 2 orbits of triangular faces with stabilizer C_2. Since the underlying space $X \cong S^2$ is 2-dimensional, the 3-cochain module vanishes ($C^3_G = 0$), implying that the kernel $\ker(d^2)$ is the entire module C^2_G.

The image $\operatorname{im}(d^1)$ is determined by the rank-1 image of the 2×3 matrix d^1, which is generated by the diagonal relation $(1, 1)^T$. Taking the quotient yields:

$$H^2_G(X; \underline{K(n)}^*) \cong \frac{K(n)_* \oplus K(n)_*}{\langle (1, 1) \rangle} \cong K(n)_* \tag{6}$$

Thus, the second Bredon cohomology group is isomorphic to a free module of rank 1 over the Morava K-theory coefficient ring, perfectly consistent with the equivariant spherical structure of the octahedral surface.

8. Good Groups and Elements

Good Elements and Good Groups.

Definition 1. An element $x \in K(s)^*(BG)$ is **good** if it is a transferred Euler class of a complex subrepresentation of G:

$$x = \mathrm{Tr}^*(e(\rho))$$

where ρ is a complex representation of a subgroup $H \subseteq G$ and $\mathrm{Tr} : BG \to BH$ is the transfer map.

Definition 2. A group G is called **good** if $K(s)^*(BG)$ is spanned by good elements as a $K(s)^*$-module.

The "weakly good" groups, characterized by $K(s)^{odd} = 0$, play a significant role in the classification of group cohomologies [3, 4, 5].

9. Vanishing of Odd Cohomology

Families of p-groups with $K(n)^{odd}(BG) = 0$. In particular, if G belongs to any of the following families of p-groups, then $K(n)^{\mathrm{odd}}(BG) = 0$:

(a) Wreath products $H \wr C_p$ with H good [2, 6];
(b) Metacyclic p-groups [7];
(c) Minimal non-abelian p-groups (all maximal subgroups are abelian) [8];
(d) Groups of p-rank 2 [9];
(e) Elementary abelian by cyclic groups (extensions $V \to G \to C$) [5, 3];
(f) Central products $H \circ C_{p^m}$ with H good [4];
(g) $H \triangleleft G$ of index p, where H is good and $\tilde{K}(s)(BH)$ is a permutation module for G/H [3].

Multiplicative Structure and Transfer. For these families, the ring structure of $K(s)^*(BG)$ is either studied in the cited works or can be derived from existing computations modulo certain indeterminacy.

Yagita and Tezuka determined the multiplicative structure modulo the transfer formula. Our main aim here is to check (specifically for groups with a maximal abelian subgroup of index 2) whether the transfer formula is sufficient to determine the ring structure via:

- Methods of characteristic classes;
- Transfer formulas (double coset formula, etc.);
- Induced representations.

The papers [10, 11, 12, 13] treat the same problem.

10. Conclusion

Our computational strategy reinforces the broad utility of analyzing "good" finite p-groups—specifically those exhibiting vanishing odd Morava K-theory. For such groups, the immediate collapse of the equivariant Atiyah-Hirzebruch Spectral Sequence (AHSS) at the E_2 page provides a robust foundation for extracting the cohomology structure directly from the orbit category.

Future investigations may extend this Mackey functor-based approach to higher-dimensional equivariant CW-complexes and broader families of finite p-groups.

References

1 M. Bakuradze, Morava K-theory rings for finite groups, J. Homotopy Relat. Struct. 20 (2025), 567–630.
2 M. Hopkins, N. Kuhn and D. Ravenel, Generalized group characters and complex oriented cohomology theories, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 3, 553–594.
3 I. Kriz, Morava K-theory of classifying spaces: some calculations, Topology 36 (1997), 1247–1273.
4 B. Schuster, Morava K-theory of groups of order 32, Algebraic and Geometric Topology 11 (2011), 503–521.
5 N. Yagita, Note on BP-theory for extensions of cyclic groups by elementary abelian p-groups, Kodai Math. J. 20 (1997), no. 2, 79–84.
6 J. R. Hunton, Morava K-theories of wreath products, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 107 (1990), 309–318.
7 M. Tezuka and N. Yagita, Cohomology of finite groups and Brown-Peterson cohomology II, in Homotopy Theory and Related Topics (Kinosaki, 1988), pp. 57–69, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1418, Springer, Berlin, 1990.
8 N. Yagita, Complex K-theory of $BSL_3(Z)$, K-Theory 6 (1992), 87–95.
9 N. Yagita, Cohomology for groups of $\mathrm{rank}_p(G) = 2$ and Brown-Peterson cohomology, J. Math. Soc. Japan 45 (1993), no. 4, 627–644.

10 M. Bakuradze, Morava K-theory rings for a quasi-dihedral group in Chern classes, Proc. Steklov Inst. Math. 252 (2006), 23–29.
11 M. Bakuradze, Induced representations, transferred Chern classes and Morava rings $K(s)^*(BG)$: some calculations, Proc. Steklov Inst. Math. 275 (2011), 160–168.
12 M. Bakuradze, Morava $K(s)^*$-rings of the extensions of C_p by the products of good groups under diagonal action, Georgian Math. J. 22 (2015), no. 4, 451–455.
13 M. Bakuradze and V. V. Vershinin, Morava K-theory rings for the dihedral, semi-dihedral and generalized quaternion groups in Chern classes, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 3707–3714.

Морава K-теориясындағы Макки функторымен берілген Бредон когомологиясы туралы

М. Бакурадзе
Иване Джавахишвили атындағы Тбилиси мемлекеттік университеті, Илья Чавчавадзе даңғылы, 1, Тбилиси, Грузия

Аннотация. Макки функторларының алгебралық аппараты негізінде коцептік кешенге талдау жүргізіліп, $K(n)^\star$ түрдегі K-Морава теориясындағы шектеу және трансфер бейнелеулері арқылы анықталатын ұяшықтық дифференциалдар айқын түрде есептеледі. Ерекше назар эквивариантты емес жағдайда жиырылатын кеңістік болып табылатын октаэдрдің радиалды 2-қаңқасының геометриялық құрылымына аударылады, бұл тұрақтандырғыштардың секірмелі өзгерістерінен туындайтын таза эквивариантты құбылыстарды бөліп көрсетуге мүмкіндік береді. $K(n)[x,y]$ Морава сақинасы үстінде Смиттің қалыпты формасына (Smith Normal Form, SNF) келтіру арқылы нөлінші және бірінші кодифференциалдар анықталады. Негізгі кеңістіктің геометриялық тұрғыдан тривиалды болуына қарамастан, зерттелетін кешеннің секторлық геометриясының әсерінен эквивариантты хроматикалық кластардың сақталатыны көрсетіледі. Сонымен қатар, $H^1_{Q_s}(X;K(n)^\star)$ бірінші Бредон когомология тобының коэффициенттер сақинасының факторсақинасы түріндегі толық сипаттамасы алынады. Алынған нәтижелер когомологиялары жұп дәрежелерде шоғырланған ақырлы p-топтар үшін эквивариантты когомология сақиналарының құрылымдық жіктелуіне үлес қосады.

Түйін сөздер: Морава K-теориясы, эквивариантты CW-кешен, Бредон гомологиясы.

О бредоновской когомологии с функтором Макки в теории Моравы K-типа

М. Бакурадзе
Тбилисский государственный университет имени Иване Джавахишвили, проспект Ильи Чавчавадзе, 1, Тбилиси, Грузия

Аннотация. Используя алгебраический аппарат функторов Макки, проводится анализ коцепного комплекса и явное вычисление клеточных дифференциалов, задаваемых отображениями ограничения и трансфера в теории Моравы K-типа $K(n)^*$. Особое внимание уделяется геометрической конструкции радиального 2-остова октаэдра, который неэквивариантно является стягиваемым пространством, что позволяет выделить чисто эквивариантные явления, обусловленные скачками стабилизаторов. Путём приведения к нормальной форме Смита (Smith Normal Form, SNF) над кольцом $K(n)_*[x,y]$ определяются нулевой и первый кодифференциалы. Показано, что, несмотря на геометрическую тривиальность лежащего в основе пространства, эквивариантные хроматические классы сохраняются благодаря секторной геометрии рассматриваемого комплекса. Кроме того, получено полное описание первой группы бредоновской когомологии $H^1_{Q_8}(X;K(n)_*)$ в виде фактор-кольца коэффициентного кольца. Полученные результаты вносят вклад в структурную классификацию колец эквивариантных когомологий конечных p-групп с когомологиями, сосредоточенными в чётных степенях.

Ключевые слова: Морава K-теория, эквивариантный CW-комплекс, гомология Бредона.

References

1 M. Bakuradze, Morava K-theory rings for finite groups, J. Homotopy Relat. Struct. 20 (2025), 567–630.
2 M. Hopkins, N. Kuhn and D. Ravenel, Generalized group characters and complex oriented cohomology theories, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), no. 3, 553–594.
3 I. Kriz, Morava K-theory of classifying spaces: some calculations, Topology 36 (1997), 1247–1273.
4 B. Schuster, Morava K-theory of groups of order 32, Algebraic and Geometric Topology 11 (2011), 503–521.
5 N. Yagita, Note on BP-theory for extensions of cyclic groups by elementary abelian p-groups, Kodai Math. J. 20 (1997), no. 2, 79–84.
6 J. R. Hunton, Morava K-theories of wreath products, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 107 (1990), 309–318.
7 M. Tezuka and N. Yagita, Cohomology of finite groups and Brown-Peterson cohomology II, in Homotopy Theory and Related Topics (Kinosaki, 1988), pp. 57–69, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1418, Springer, Berlin, 1990.
8 N. Yagita, Complex K-theory of $BSL_3(Z)$, K-Theory 6 (1992), 87–95.
9 N. Yagita, Cohomology for groups of $\mathrm{rank}_p(G) = 2$ and Brown-Peterson cohomology, J. Math. Soc. Japan 45 (1993), no. 4, 627–644.
10 M. Bakuradze, Morava K-theory rings for a quasi-dihedral group in Chern classes, Proc. Steklov Inst. Math. 252 (2006), 23–29.
11 M. Bakuradze, Induced representations, transferred Chern classes and Morava rings $K(s)^*(BG)$: some calculations, Proc. Steklov Inst. Math. 275 (2011), 160–168.
12 M. Bakuradze, Morava $K(s)^*$-rings of the extensions of C_p by the products of good groups under diagonal action, Georgian Math. J. 22 (2015), no. 4, 451–455.
13 M. Bakuradze and V. V. Vershinin, Morava K-theory rings for the dihedral, semi-dihedral and generalized quaternion groups in Chern classes, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 3707–3714.

Information about the author:
Malkhaz Bakuradze – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Department of Algebra and Geometry, Faculty of Exact and Natural Sciences, Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, 1 Ilia Tchavtchavadze Avenue, Tbilisi, Georgia.

Авторлар туралы мәлімет:
Малхаз Бакурадзе – Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Алгебра және геометрия кафедрасы, Нақты және жаратылыстану ғылымдары факультеті, Иване Джавахишвили атындағы Тбилиси мемлекеттік университеті, Илья Чавчавадзе даңғылы, 1, Тбилиси, Грузия.

Received: 20.06.2026. *After revision: 22.09.2026.*
Approved: 24.09.2026. Available online: 29.09.2026.



Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2026, Vol. 155, №2, P.25-41
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

РУБРИКА «ПАМЯТЬ»
МРНТИ: 30.17.02

ВЛАСТЕЛИН ТУРБУЛЕНТНЫХ СТИХИЙ: КАК АКАДЕМИК ЕРШИН ВЫВЕЛ КАЗАХСТАНСКУЮ ГИДРОМЕХАНИКУ НА ОРБИТУ МИРОВОГО ПРИЗНАНИЯ

К 100-летию со дня рождения академика Ш.А. Ершина

У.К. Жапбасбаев
НАО «Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева», ул. Сатпаева, 22а, 050013, Алматы, Казахстан
(E-mail: uzak.zh@mail.ru)

Аннотация. Бывают учёные, чьи имена остаются только на пожелтевших страницах диссертаций. А бывают созидатели, способные подчинить капризные законы физики нуждам огромной страны и заставить весь мир в формате противостоящих двух самых мощных военных держав – от Москвы до Вашингтона – прислушаться к голосу казахстанской науки. Именно таким человеком был академик НАН РК, доктор технических наук, профессор Шахбаз Алимгиревич Ершин (05.09.1926–02.08.2019).



В этом году благодарное научное сообщество отмечает вековой юбилей со дня рождения человека, который создал уникальную отечественную школу гидроаэромеханики, заглянул внутрь бушующего пламени и научил уравнения Навье–Стокса работать на благо производства.

На основе монографии «Парадоксы аэрогидродинамики» и работ представителей научной школы Ершина обсуждаются течения вязких и вязкопластичных сред в каналах, влияние диссипативного нагрева на вязкость и сопротивление движению, а также гидродинамические предпосылки локального повреждения нефтепромысловых трубопроводов. Рассматриваются особенности переноса через проницаемые стенки, распределения газа в каталитических аппаратах, развития свободных струй и эволюции вихревых образований. Отдельное внимание уделено влиянию температуры на структуру газовых струй и соотношению процессов смешения, воспламенения и выгорания топлива при сверхзвуковом горении. Показано, что кажущиеся противоречия между привычными представлениями и поведением реального потока могут быть объяснены учётом взаимосвязанных физических процессов и границ применимости расчётных моделей. Подчёркиваются значение сопоставления теории с экспериментом, необходимость различать качественное объяснение и количественное подтверждение, а также роль научной школы в развитии культуры исследования. Представленный обзор раскрывает практическую значимость наследия Ершина для энергетики, нефтяной промышленности и совершенствования технологических аппаратов.

Ключевые слова: аэрогидродинамика, научное наследие Шахбаза Ершина, вязкопластичные среды, вязкая диссипация, свободные струи, вихревые образования, сверхзвуковое горение.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2026/2.3

2000 Mathematics Subject Classification: 76A02, 76-03

От ленинградской закваски – к собственному прорыву. Научный взлёт Шахбаза Ершина начался в середине прошлого века в уникальной атмосфере. Его наставником стал легендарный ленинградский теплофизик Лев Абрамович Вулис, работавший в те годы в Казахстане. Именно тогда молодой исследователь навсегда усвоил главное правило: большая наука не должна быть абстрактной. Теория и практика обязаны идти рука об руку.

Уже в 1957–1973 годах, работая в Научно-исследовательском институте энергетики АН КазССР, Ершин совершает прорыв, ставший классикой. Он выступает одним из ключевых создателей **аэродинамической теории газового факела**.

Что это такое? Проще говоря, учёный взялся описать, как ведут себя бурные, хаотичные (турбулентные) потоки газа в момент, когда в них бушует огонь. Понять физику гомогенного горения и то, как фронт пламени укрощает хаотичные пульсации газа, – значило получить ключ к управлению колоссальной энергией.

В 1968 году в Ленинграде выходит совместная монография «Основы теории газового факела» [1]. Этот труд произвел эффект разорвавшейся бомбы среди специалистов. В самый разгар холодной войны оборонные ведомства и космическое агентство США (NASA) заказывают официальный перевод на английский язык. Американские инженеры изучали труды казахстанских физиков, чтобы проектировать реактивные двигатели и ракетные системы. Чуть позже по контрактам U.S. Navy в США переводят и работы Ершина по коаксиальным (вложенным друг в друга) струям. Это был триумф и безоговорочное признание мирового уровня.

«За интересными задачами – поезжайте к Ершину!». В 1973 году ректор Казахского государственного университета Умирбек Джолдасбеков совершает дальновидный шаг – приглашает Шахбаза Алимгиревича на кафедру механики. Именно здесь, в стенах ведущего вуза страны, Ершин разворачивает свою знаменитую кузницу кадров, внедрив железный принцип: *«Исследую – обучаю – исследую»*. К сложной науке он привлекает студентов с первых курсов, заражая их азартом первооткрывателей.

Один из основоположников советской прикладной математики академик Н.Н. Яненко часто говорил своим ученикам в Новосибирске и Москве: «За проблемами езжайте к Ершину – у него в Алма-Ате много интересных задач».

И задач действительно хватало. Ершин и его ученики замахнулись на самые сложные тайны природы – вихри. Они исследовали загадочные структуры Гёртлера–Тейлора, кружащиеся кольцевые вихри (о которых выдающийся советский механик Г.Г. Чёрный писал, что работа алмаатинцев наконец-то раскрыла всю стадию их развития) и поведение сверхзвуковых потоков.

Более того, Шахбаз Алимгиревич одним из первых в республике понял: будущее – за компьютерами. Когда ЭВМ еще занимали целые залы, его ученики уже вовсю занимались **вычислительной гидромеханикой**, рассчитывая сложнейшие течения внутри пористых труб и химических аппаратов.

Наука на службе степных гигантов. Ершин никогда не запирался в «башне из слоновой кости». Каждое фундаментальное открытие его школы тут же находило дорогу на заводы, электростанции и месторождения. Учёные его школы буквально спасали промышленность от миллиардных убытков и аварий:

Защита нефтепроводов. По заказу Казахского государственного научно-исследовательского и проектного института нефтедобывающей промышленности Команда Ершина разгадала гидродинамическую тайну «ручейкового эффекта», из-за которого внезапно рвались коммуникационные трубы на гигантских месторождениях Жетыбай и Узень (1991г.).

Нефтяные фильтры. Для месторождения Кенкияк был создан уникальный металлокерамический забойный фильтр, который остановил забивание скважин песком (1982г.).

Энергетика. Законы развития турбулентных струй, открытые Ершиным, легли в основу мощных горелок для Ермаковской ГРЭС (ныне Аксуской электростанции) (1970г.).

Экология и космос. Научная школа Ершина разработала способ каталитической очистки токсичных газов, вырабатываемых автомобильными двигателями, и рассчитала сверхзвуковое горение водорода для перспективных гиперзвуковых аппаратов.

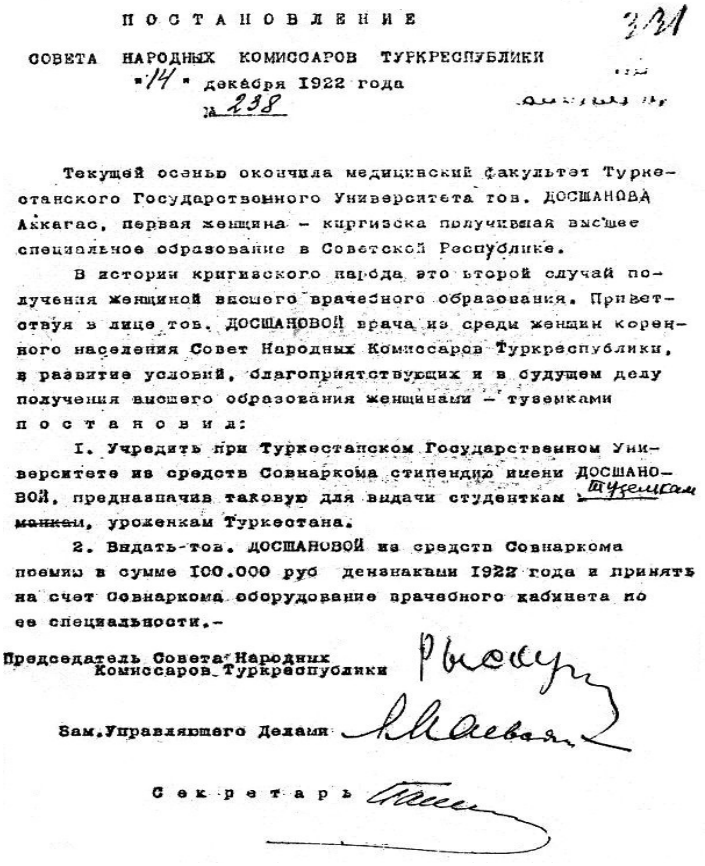
Зелёная энергия. Научная школа Ершина в ветроэнергетике спроектировала эффективную установку «БИДАРЬЕ-1».

Наследие, устремлённое в будущее. Государство высоко оценило заслуги исследователя – звание «Заслуженный деятель науки Казахской ССР», Премия имени К.И. Сатпаева, многочисленные ордена и знаки отличия. Но главным его памятником стала созданная им живая научно-инженерная система.

Под руководством академика Ершина Шахбаза Алимгиревича были защищены 5 докторских и 29 кандидатских диссертаций. Сегодня его ученики и последователи в КазНУ им. аль-Фараби и других научных центрах продолжают развивать заложенные традиции. Они создают программное обеспечение цифрового моделирования энергосбережения при транспортировке нефти по магистральным трубопроводам, строят цифровые двойники водопроводных и тепловых сетей, разрабатывают математические модели для подземного скважинного выщелачивания урановых руд, а также внедряют технологии искусственного интеллекта для оптимизации промышленных и энергетических процессов – и тем самым возвышают Казахстан на позиции мирового лидера отрасли.

Академик Шахбаз Ершин доказал: Казахстанская школа гидроаэромеханики – это не просто строчки в учебниках физики. Это прочный фундамент нашего технологического суверенитета, заложенный выдающимся учёным с мировым именем.

Также отметим причастность Ш.А.Ершина к истории Казахстана не только благодаря его личным научным прорывам, но и по происхождению: Шахбаз-ага - единственный сын Аққағаз Досжановой (1893-1932), первой женщины Востока с советским высшим медицинским образованием (в 2016 году в Актобе на территории Медицинского университета установлен А.Досжановой памятник):



ПОСТАНОВЛЕНИЕ

СОВЕТА НАРОДНЫХ КОМИССАРОВ ТУРКРЕСПУБЛИКИ

«14» декабря 1922 года

№ 238

Текущей осенью окончила медицинский факультет Туркестанского Государственного Университета тов. ДОСЖАНОВА Аккагас, первая женщина – киргизка получившая высшее специальное образование в Советской Республике.

В истории киргизского народа это второй случай получения женщиной высшего врачебного образования. Приветствуя в лице тов. ДОСЖАНОВОЙ врача из среды женщин коренного населения Совет Народных Комиссаров Туркреспублики, в развитие условий, благоприятствующих и в будущем делу получения высшего образования женщинами – туземками

п о с т а н о в и л:

1. Учредить при Туркестанском Государственном Университете из средств Совнаркома стипендию имени ДОСЖАНОВОЙ, предназначив таковую для выдачи студенткам ~~туземкам~~ женщи, уроженкам Туркестана.

2. Выдать тов. ДОСЖАНОВОЙ из средств Совнаркома премию в сумме 100.000 руб денежками 1922 года и принять на счет Совнаркома оборудование врачебного кабинета по ее специальности.-

Председатель Совета Народных Комиссаров Туркреспублики

Зам.Управляющего Делами

Секретарь

Теперь обратимся к научному наследию академика Ш.А. Ершина и сделаем подборку значимых работ его учеников. Почему густая жидкость может течь легче именно потому, что трение при движении её нагревает? Отчего горячая газовая струя при определённых условиях оказывается более упорядоченной, чем холодная? Как вихрь сохраняет свою форму, перемещаясь сквозь окружающую среду? Вопросы такого рода занимали академика Шахбаза Ершина и его учеников. Они возникали на пересечении фундаментальной науки и конкретных задач энергетики, нефтяной промышленности и техники.

Аэрогидродинамика изучает движение жидкостей и газов. Мы сталкиваемся с её проявлениями каждый день: открываем кран, наблюдаем облака, чувствуем ветер, видим, как дым расходится над трубой. Однако привычность этих явлений обманчива. Внутри потока могут одновременно происходить перемешивание, нагрев, изменение свойств вещества, образование вихрей и взаимодействие разных компонентов смеси. Даже простая на вид струя способна поставить перед исследователем сложную задачу.

В год столетия со дня рождения Шахбаза Ершина обращение к его научному наследию позволяет проследить путь от неожиданного наблюдения к физическому объяснению. В монографии «Парадоксы аэрогидродинамики» [2] рассматриваются канальные течения, свободные струи и сосредоточенные вихри. Эти направления объединяет вопрос: какие механизмы заставляют действительный поток вести себя иначе, чем подсказывает первое впечатление?

Научный парадокс возникает, когда расчёт или привычное представление расходятся с наблюдением. Чтобы разрешить расхождение, приходится уточнять условия задачи и искать физический механизм, который ранее не был учтён. Так необычный результат становится основанием для нового объяснения, а затем – для более надёжного инженерного расчёта.

Ниже предлагается пройти такой путь без сложных формул. Мы рассмотрим, что происходит внутри трубы, почему температура влияет на движение, как устроены струи и вихри и чем эти исследования полезны производству. Физические явления объясняются так, чтобы их суть была понятна широкому читателю.

За отдельными задачами постепенно проступает характер исследовательской школы. Её сила заключается в умении связать наблюдение с теорией, проверить объяснение и подготовить людей, способных продолжить работу. Именно с этой точки зрения парадоксы аэрогидродинамики представляют интерес и сегодня.

Почему привычная модель иногда подводит. Чтобы рассчитывать сложное явление, его необходимо упростить. Инженер не может одновременно учитывать каждую неровность трубы, каждую частицу примеси и все мельчайшие изменения скорости. Он выделяет главное и создаёт модель. Например, принимает постоянную вязкость, равномерную температуру или одинаковые свойства жидкости во всём сечении. Если эти предположения соответствуют условиям, модель даёт полезный результат.

Трудности начинаются, когда условия меняются. Труба охлаждается, жидкость густеет, в смеси появляются твёрдые частицы или возле стенки образуется особый слой. Прежний расчёт может сохранять математическую правильность, но уже описывать другой, более простой поток. Поэтому расхождение с опытом требует проверки исходных предположений.

Классический пример – парадокс Даламбера. В определённой постановке для идеальной жидкости математическое описание даёт нулевое сопротивление обтекаемого тела. Между тем любое движение руки в воде показывает, что сопротивление существует. Причина расхождения связана с идеализацией: из модели исключена вязкость, а условия обтекания не воспроизводят все особенности реального течения.

Возле поверхности тела вязкость особенно существенна. При обычном условии прилипания скорость жидкости непосредственно у неподвижной стенки равна нулю, тогда как дальше от неё поток движется. Возникает область резкого изменения скорости. При некоторых условиях поток отрывается от поверхности, и за телом образуется след. Давление впереди и позади перестаёт уравновешиваться так, как в идеализированной картине.

Этот пример помогает понять, почему небольшой по размерам участок может влиять на поведение всей системы. Тонкий слой возле стенки способен определять сопротивление крупного аппарата. Точно так же локальный нагрев или неравномерность состава могут изменить условия перекачки в длинном трубопроводе.

Задача исследователя состоит в выборе достаточной сложности модели. Слишком простое описание пропускает важный механизм. Чрезмерно подробное требует данных, которых нет, и больших вычислительных затрат. Между этими крайностями находится обоснованное решение: учитывать процессы, действительно определяющие рассматриваемое явление.

Труба изнутри и роль вязкости. Когда мы смотрим на поток из крана, легко представить, что вода внутри трубы движется одинаково во всех точках. В действительности скорость распределена по сечению неравномерно. Возле неподвижной стенки жидкость затормаживается, а вдали от неё движется быстрее. Чтобы поддерживать течение, насос должен создавать перепад давления, преодолевающий сопротивление.

Вязкость характеризует способность среды сопротивляться относительному перемещению соседних слоёв. Простую аналогию даёт колода карт: если сдвигать верхнюю часть относительно нижней, отдельные слои перемещаются с разной скоростью. В жидкости такое перемещение сопровождается передачей усилий между слоями. Чем выше вязкость при прочих равных условиях, тем больше усилий требуется для поддержания заданного движения.

При спокойном, установившемся движении ньютоновской жидкости в прямой круглой трубе распределение скорости имеет известную плавную форму: скорость максимальна в центре и уменьшается к стенке. Но эта картина справедлива лишь при соответствующих условиях. В турбулентном потоке интенсивное перемешивание изменяет распределение скорости и механизм переноса импульса.

Нефть, буровой раствор или пульпа могут вести себя сложнее воды. Их свойства зависят от температуры, состава и скорости деформации. Иногда при увеличении интенсивности сдвига кажущаяся вязкость уменьшается. В других средах требуется сначала превысить определённое напряжение, чтобы началось заметное течение. Поэтому слово «жидкость» ещё не определяет подходящую расчётную зависимость.

Есть и геометрическая сторона задачи. Потери давления зависят от диаметра и длины трубы, шероховатости стенки, поворотов и местных сужений. Однако увеличение диаметра само по себе не решает все проблемы: для смеси с оседающими частицами снижение скорости может вызвать накопление твёрдой фазы. Решение приходится искать с учётом свойств конкретной среды.

Такие примеры объясняют, почему исследования канальных течений занимают значительное место в инженерной гидромеханике. Внутри внешне простого трубопровода взаимодействуют свойства вещества, геометрия и режим движения. Изучение каждого из этих факторов помогает понять, где упрощение допустимо, а где оно приводит к ошибке.

Кольцевой канал и движение вязкопластичных сред. Представим одну трубу внутри другой. Между их поверхностями остаётся кольцевой зазор. Такая геометрия встречается в теплообменных аппаратах и в скважинах, где жидкость движется по пространству между колоннами. На первый взгляд кольцевой канал напоминает обычную трубу, но поток теперь взаимодействует сразу с двумя стенками.

При неподвижных стенках жидкость затормаживается и у внутреннего, и у наружного цилиндра. Самая высокая продольная скорость находится между ними. При этом положение максимума нельзя автоматически считать серединой зазора: кривизна поверхностей и соотношение радиусов влияют на распределение скорости. Чем уже зазор по сравнению с радиусами, тем ближе некоторые свойства течения к движению между почти плоскими поверхностями.

Дополнительные особенности появляются, если среда вязкопластичная. Удобная бытовая аналогия – густая паста, которая удерживает форму при слабом воздействии, но начинает деформироваться, когда усилие становится достаточно большим. В инженерной модели это

описывают пределом текучести. Ниже него материал может рассматриваться как практически недеформируемый, а выше – как текущий.

В канале напряжения распределяются неравномерно. Поэтому разные части одной и той же среды могут находиться в разных состояниях. Там, где воздействие достаточно сильное, слои деформируются. В области с меньшими напряжениями может возникнуть ядро, перемещающееся почти без внутреннего сдвига. Оно не обязательно неподвижно: окружающие текучие слои способны переносить его вместе с потоком.

Это различие существенно для понимания задачи. «Пробка», движущаяся как единое образование, и неподвижное отложение на стенке – разные явления. Их нельзя отождествлять только потому, что в обеих областях отсутствует заметная деформация. Чтобы определить состояние среды, нужно учитывать скорость, напряжения и условия контакта со стенкой.

Если внутренний цилиндр смещён относительно наружного, ширина зазора становится неодинаковой. Поток получает возможность перераспределяться, и симметричное описание уже недостаточно. Если цилиндр вращается, появляется ещё один источник движения. В практической задаче геометрия и граничные условия оказываются столь же важны, как свойства жидкости.

Среди работ Ершина заметное место занимают исследования вязких и вязкопластичных сред в кольцевых каналах. Их значение понятно даже без формул: прежде чем рассчитывать давление и расход, необходимо установить, какие участки среды деформируются и каким образом форма канала направляет движение.

Как внутреннее трение нагревает жидкость. Насос передаёт жидкости механическую энергию. Часть её расходуется на преодоление сопротивления и в итоге превращается в тепло. Этот процесс называют вязкой диссипацией. Слово может показаться сложным, но его смысл знаком каждому: движение сопровождается необратимым превращением энергии в тепловую форму.

Если потереть ладони, они согреются. В жидкости нет соприкосновения твёрдых поверхностей в таком же смысле, но относительное движение соседних слоёв тоже требует работы. Чем интенсивнее сдвиг и чем существеннее вязкие напряжения, тем заметнее может быть тепловыделение. В обычном водопроводе этот нагрев часто мал, а в очень вязкой среде способен повлиять на расчёт.

Теперь представим, что вязкость вещества уменьшается с температурой. Так ведут себя многие жидкости в определённых диапазонах. Внутреннее трение нагревает среду, нагрев снижает вязкость, а уменьшение вязкости меняет распределение скорости и требуемый перепад давления. Движение и температура оказываются связанными обратной связью.

Возле стенки градиент скорости нередко велик. Поэтому тепловыделение может быть распределено по сечению неравномерно. Но температура определяется не только тем, где выделяется тепло. Важны его перенос потоком, теплопроводность и теплообмен через стенку. Охлаждаемая труба и теплоизолированный канал при одинаковом расходе могут дать разные результаты.

У нефти и масел зависимость вязкости от температуры особенно сильна: при понижении температуры вязкость растёт по закону, близкому к экспоненциальному. Если трубопровод отдаёт тепло окружающей среде, жидкость у стенки остывает и её вязкость может возрасти многократно по сравнению с вязкостью в центре потока.

В пристеночной области часто велик градиент скорости. Для ньютоновской жидкости местное выделение тепла при сдвиге определяется произведением вязкости на квадрат этого градиента. Если поддерживается перепад давления, снижение вязкости может увеличить расход и мощность, передаваемую потоку. При недостаточном отводе тепла возникает положительная обратная связь: нагрев облегчает движение, а возросшее движение усиливает тепловыделение. В некоторых моделях это приводит к потере устойчивости прежнего режима – явлению, называемому гидродинамическим тепловым взрывом. Термин обозначает резкую перестройку течения, а не обязательно механическое разрушение трубы. При заданном расходе обратная связь и условия перехода могут быть другими.

Охлаждение через стенку, перенос тепла вдоль канала и перераспределение скорости ограничивают саморазогрев. В отдельных режимах возле холодной стенки сохраняется высоковязкая область с малыми скоростями, тогда как основная часть жидкости движется значительно быстрее. Такая область может изменять тепловое сопротивление между потоком и стенкой. Однако её возникновение и размеры зависят от свойств жидкости и условий теплообмена. Для вязкопластичной среды дополнительно требуется установить, превышают ли местные напряжения предел текучести: холодный медленно движущийся слой и неподвижная область с напряжениями ниже предела текучести имеют разные физические основания.

Отсюда возникает кажущийся парадокс: потери механической энергии способны изменить свойства жидкости так, что её движение облегчается по сравнению с расчётом при исходной температуре. При этом энергия не возникает из ничего. Насос продолжает совершать работу, а часть переданной энергии остаётся в веществе в виде тепла или уходит в окружающую среду.

Для инженера важно различать заданный расход и заданный перепад давления. Если поддерживается расход, изменение вязкости влияет на необходимое давление. Если поддерживается давление, может измениться расход. Без указания того, что именно фиксировано, сравнение двух режимов легко становится неоднозначным.

Исследование такого эффекта требует совместного решения гидродинамической и тепловой задач. Измерения вязкости при разных температурах здесь столь же необходимы, как сведения о трубе и насосе. Этот пример показывает, насколько далеко может зайти ошибка, если свойство вещества принять постоянным лишь ради удобства вычислений.

Почему повреждение трубы бывает локальным. Трубопровод выглядит как единая конструкция, но его стенка не обязательно испытывает одинаковое воздействие по всей окружности. Показательна задача из практики нефтепромысловых коммуникаций: повреждение преимущественно вдоль нижней части трубы. Такая локализация требует объяснения, которое нельзя получить из одного среднего значения скорости.

Реальная смесь может включать нефть, воду, газ и твёрдые примеси. Эти компоненты отличаются плотностью и другими свойствами. В зависимости от скорости и режима они распределяются по сечению неодинаково. Сила тяжести способствует расслоению, а турбулентное перемешивание может ему противодействовать. Итоговая картина определяется соотношением этих процессов.

Если воздействие на стенку сосредоточено в узкой зоне, средние характеристики скрывают самое существенное. Представим дождь, который равномерно выпадает на крышу, но затем собирается в водостоке. На выходе из него вода воздействует на маленький участок гораздо сильнее. Это лишь аналогия локализации; действительный механизм в трубе нужно устанавливать отдельно.

Исследования ручейкового эффекта в школе Ершина были связаны с поиском гидродинамического объяснения такого неравномерного воздействия. Для объяснения эффекта важно понять, как поток организован у повреждаемой поверхности и почему именно там условия отличаются от остальных участков.

Одно из гидродинамических объяснений ручейкового эффекта связано с расслоением смеси и волнами на границах её компонентов. В горизонтальной трубе вода и механические примеси могут сосредоточиваться в нижней части, нефть – располагаться выше, а газ – занимать верхнюю область. Межфазные поверхности испытывают возмущения, в том числе связанные с нестационарной работой оборудования. Волны меняют толщину слоёв, распределения скорости и давления. Эти изменения следует рассматривать совместно: для нестационарной многофазной смеси простого применения закона Бернулли недостаточно.

В описании промысловой проблемы на месторождениях Жетыбай и Узень отмечалось преимущественное повреждение труб вдоль нижней образующей. Сосредоточение воды и твёрдых примесей у дна создаёт условия для совместного действия эрозии и коррозии. Частицы могут повреждать защитную поверхность, а контакт металла с водной фазой – способствовать дальнейшему углублению дефектов. Узкая дорожка повреждений получила

название «ручейкового эффекта». При этом скорость разрушения зависит от состава смеси, свойств частиц, материала трубы и режима эксплуатации.

Гидродинамические исследования школы Ершина позволяли рассматривать эту проблему через пространственную организацию потока. Их практический смысл заключался в поиске связи между движением компонентов смеси и локализацией повреждений. Окончательный вывод о механизме разрушения требует сопоставления расчёта с данными обследования труб и составом транспортируемой среды.

Вместе с тем в общем случае разрушение металла может иметь несколько причин. Механическая эрозия, коррозионные процессы и их совместное действие не равнозначны. По внешней форме повреждения нельзя уверенно установить весь механизм. Нужны сведения о составе среды, режимах работы, материале трубы, отложениях и результатах обследования.

Для проверки гипотезы полезно сопоставить расположение повреждения с направлением движения, уклоном трубопровода и изменениями расхода. Лабораторный опыт или численная модель могут показать возможное распределение компонентов и скоростей. Однако расчёт становится убедительным лишь тогда, когда его признаки согласуются с наблюдаемой картиной.

Практическое значение такого подхода состоит в выборе обоснованной меры. Иногда требуется изменить режим, иногда – материал или защиту поверхности, иногда – условия подготовки транспортируемой смеси. Понимание механизма позволяет обсуждать эти решения предметно. Без него ремонт может устранить следствие, оставив причину прежней.

Проницаемая стенка меняет весь поток. В привычной трубе стенка удерживает жидкость внутри. Но существуют каналы, через стенки которых среда поступает в основной поток или отводится из него. Они встречаются в фильтрационных устройствах и технологических аппаратах. Такая стенка становится частью процесса переноса вещества, и расход уже нельзя считать неизменным по длине.

Если через поры жидкость входит в канал, продольный поток постепенно пополняется. Если выходит – расход уменьшается. Меняются скорость, давление и условия движения возле поверхности. Поэтому формулу для непроницаемой трубы нельзя без проверки переносить на такой аппарат: исходные условия существенно отличаются.

Пористую стенку можно представить как множество маленьких путей, соединяющих внутренний поток с окружающей средой. Однако реальные поры имеют сложную форму и разные размеры. Их сопротивление зависит от структуры материала и свойств жидкости. Даже равномерная на вид поверхность может пропускать среду неравномерно, если вдоль неё изменяется давление.

Важен и контакт двух движений: основного, направленного вдоль канала, и поперечного, возникающего через стенку. Пристеночная область перестраивается. Вместе с ней могут измениться перенос тепла, распределение примесей и условия взаимодействия со стенкой. В некоторых задачах именно эти изменения определяют эффективность аппарата.

Исследования школы Ершина включали каналы с проницаемыми перегородками и задачи фильтрации. Среди приложений упоминается нефтепромысловый фильтр. Его назначение помогает понять инженерный смысл: необходимо пропустить жидкость и одновременно ограничить поступление нежелательных частиц, обеспечив приемлемое сопротивление.

В каталитическом аппарате добавляется ещё один процесс – химическое превращение на активной поверхности. Теперь движение определяет, насколько быстро вещество достигает зоны реакции, а реакция и теплообмен могут влиять на свойства среды. Рассмотрение одного лишь расхода уже не даёт полного ответа о работе устройства.

Показателен пример проточного каталитического реактора [3]. Газ движется в свободной части аппарата, проходит через слой зернистого катализатора и снова выходит в свободное пространство. В этих областях применяют разные описания: уравнения движения свободного потока и модель фильтрации в пористой среде. При достаточно малых скоростях фильтрации основой может служить закон Дарси; при существенном влиянии инерции нужны дополнительные члены сопротивления. На границах областей необходимо согласовать

массовый поток и условия передачи механических воздействий. Скорость, усреднённая по всему сечению пористой среды, при этом отличается от скорости непосредственно в порах.

В рассматриваемом примере за слоем катализатора на профиле скорости появляются «уши» – повышенные значения вблизи стенок при меньшей скорости в центре. Такое распределение может быть связано с неоднородной структурой засыпки. У стенки укладка зёрен отличается от укладки в глубине слоя, что способно увеличить местную пористость и проницаемость. Часть газа проходит по пути меньшего сопротивления и меньше взаимодействует с катализатором. Для конструктора это важный сигнал: правильного среднего расхода недостаточно, если поток распределён по сечению неравномерно.

Здесь особенно ясно видно, как граница расчётной области влияет на результат. Стенка не всегда является пассивной геометрической поверхностью. Её проницаемость, температура и свойства способны изменить весь поток. Для правильного описания нужно знать не только то, что происходит внутри канала, но и каким образом канал взаимодействует с окружающей средой.

Можно ли снизить сопротивление добавлением жидкости. Интуитивно кажется: если через трубу проходит больше жидкости, насос должен работать тяжелее. При неизменных свойствах среды и прочих сопоставимых условиях увеличение расхода действительно требует большего перепада давления. Но ситуация меняется, когда добавляемая жидкость имеет другие свойства и перестраивает пристеночную область.

Представим основной поток очень вязкой среды. Именно возле стенки возникают значительные изменения скорости и передаются усилия от жидкости к поверхности. Если через пористую стенку подавать менее вязкую жидкость, при подходящих условиях там может сформироваться слой с меньшим сопротивлением сдвигу. Он облегчает относительное движение основной среды и стенки.

Такой эффект удобно сравнить со смазкой, хотя внутри трубопровода картина сложнее обычного смазывания механизма. Толщина слоя меняется, жидкости могут перемешиваться, а подача через поры влияет на распределение скорости. Чтобы получить снижение сопротивления, необходимо определённое сочетание свойств и режима.

Поэтому итог нельзя предсказать из одного факта добавления жидкости. Если она быстро смешивается с основной средой, выраженный пристеночный слой может не сохраниться. Если подача чрезмерна, увеличение расхода способно перевесить благоприятное изменение распределения вязкости. Важны также длина участка и условия формирования слоя.

В школе Ершина этот вопрос изучали численно – на примере вдува маловязкой среды через пористую стенку. Для широкого читателя здесь интересно то, что изменение малого участка сечения способно заметно повлиять на общий результат. Причина заключается в особой роли пристеночного переноса импульса.

Для инженерной оценки нужно рассматривать всю систему. Снижение перепада давления на основном участке ещё не означает уменьшения суммарных энергетических затрат. Дополнительную жидкость требуется подать, подготовить, а иногда затем отделить. На эти операции тоже расходуются энергия и ресурсы. Практическая выгода определяется полным балансом.

Что сетка делает с потоком. Обычная сетка кажется слишком простым предметом для серьёзного исследования. Через её отверстия проходит воздух или вода, часть энергии теряется, и на этом описание можно было бы закончить. Но если посмотреть на движение внимательнее, обнаружится множество маленьких струй и следов, возникающих вокруг элементов сетки.

Перед сеткой поток затормаживается и перераспределяется. В отверстиях он ускоряется, а за перемычками возникают области пониженной скорости. Дальше отдельные струи взаимодействуют, следы расширяются и постепенно перемешиваются. Поэтому условия непосредственно за сеткой отличаются от условий на некотором расстоянии от неё.

Сетка способна одновременно создавать мелкие возмущения и изменять крупную неравномерность потока. Именно поэтому её действие нельзя описать словами «успокаивает»

или «возмущает» без указания места наблюдения и режима. Результат зависит от размера ячеек, толщины элементов, открытой площади и скорости среды.

Интересным свойством течения через сетку оказалось «преломление» линий тока. Если поток набегает на сетку под углом, то за ней он движется уже в другом направлении – ближе к перпендикуляру к её плоскости. В экспериментах этот эффект был отчётливо зафиксирован и описан эмпирической формулой.

Наклонная сетка оказывает различное воздействие на составляющие движения и способна уменьшать составляющую скорости вдоль своей плоскости. Для установившегося несжимаемого потока сохранение массы обеспечивает непрерывность суммарного расхода через сетку. При одинаковой площади сравниваемых сечений это означает равенство усреднённой нормальной скорости, но не сохранение её локального значения в каждой точке: в отверстиях поток ускоряется, а за перемычками образуются следы. Изменение отношения усреднённых составляющих скорости поворачивает поток ближе к нормали. Сравнение с преломлением света наглядно, однако здесь механизм связан с сопротивлением препятствий и перераспределением импульса.

Пакет из нескольких сеток добавляет новые условия. Важны расстояния между ними и взаимное расположение ячеек. Если следующая сетка стоит слишком близко, она воспринимает ещё не выровнявшийся поток. Если расстояние достаточно велико, часть неоднородностей успевает ослабнуть. Одновременно каждое дополнительное препятствие увеличивает потери давления.

Эти особенности существенны для аппаратов, где необходимо распределить поток по рабочему сечению. Неравномерная подача может ухудшить теплообмен, перемешивание или условия измерения. Поэтому выбор сетки связан с компромиссом: получить нужную структуру движения при допустимых энергетических потерях.

Свободная струя и воздух вокруг неё. Поток внутри трубы ограничен стенками. После выхода из отверстия он становится свободной струёй и начинает взаимодействовать с окружающей средой. Граница между движущейся и первоначально неподвижной жидкостью или газом не остаётся резкой: через неё передаются импульс, тепло и вещество, развивается перемешивание.

Наглядный пример – струя воздуха из вентилятора. На некотором расстоянии она становится шире, а её скорость в центральной области уменьшается. Причина не сводится к простому «расходованию силы». Струя вовлекает окружающий воздух в движение, и исходный импульс распределяется между большим количеством вещества.

Это вовлечение называют эжекцией или захватом окружающей среды. Если представить поток как узкую ленту быстро движущегося воздуха, её соседние слои постепенно начинают двигаться вместе с ней. При турбулентном режиме обмен усиливается вихревыми движениями. Струя расширяется, а её структура меняется по направлению движения.

В реальном устройстве картина зависит от формы отверстия, начальной скорости, плотности струи и окружающей среды. Горячий лёгкий газ испытывает действие плавучести. Тяжёлая струя может отклоняться иначе. Если поблизости есть стенка или встречный поток, свободное развитие нарушается и возникают дополнительные взаимодействия.

Несколько струй способны сливаться, усиливать перемешивание или создавать сложные области рециркуляции. В коаксиальной системе одна струя окружает другую. Так можно управлять подачей компонентов и обменом между ними. Однако результат зависит от соотношения скоростей и плотностей, а не только от расположения сопел.

Исследования свободных струй составляли одно из основных направлений школы Ершина. Они были связаны с теорией газового факела и разработкой горелочных устройств. Это понятная связь: прежде чем топливо сгорит, оно должно встретиться с окислителем в подходящих условиях.

Почему нагрев меняет турбулентность. Турбулентное движение часто описывают как хаотическое. Скорость в одной точке колеблется, возникают вихри разных размеров, соседние участки интенсивно перемешиваются. Тем не менее такое течение подчиняется физическим

законам. Его свойства определяются взаимодействием инерции, вязкости, геометрии и внешних воздействий.

Для оценки режима широко используют число Рейнольдса. Без формулы его смысл можно выразить так: оно сопоставляет стремление потока сохранять движение с действием вязкости, сглаживающей различия скорости. При одинаковой геометрии высокая скорость обычно усиливает роль инерции, а большая кинематическая вязкость – роль вязкого воздействия.

Поэтому один и тот же показатель скорости ещё не означает одинакового поведения двух сред. Холодный и горячий газ различаются плотностью и вязкостью. У многих газов динамическая вязкость при нагревании возрастает, а плотность при сопоставимом давлении уменьшается. В результате относительная роль вязкости может заметно усилиться.

При подходящих условиях это способствует ослаблению пульсаций и сохранению более упорядоченного движения горячей струи. Так появляется неожиданность: высокая температура не обязательно сопровождается более сильной турбулентностью. Однако нужно помнить, что при нагревании могут изменяться и скорость, и размеры потока, и другие параметры.

В пламени картина ещё сложнее [1]. Тепловое расширение, неодинаковая плотность, градиенты температуры и взаимодействие фронта реакции с потоком могут создавать собственные неустойчивости. Поэтому утверждение о подавлении пульсаций относится к определённым условиям и участкам течения. Его нельзя превращать в правило для любого горения.

Работы Ершина и его коллег по высокотемпературным струям и газовому факелу обращают внимание именно на связь свойств вещества и структуры движения. Для читателя здесь важен общий вывод: поток определяется целой совокупностью условий. Температура способна менять сам механизм движения, поэтому её учёт не ограничивается расчётом количества передаваемого тепла.

От теории факела к работе горелки. Газовый факел знаком по пламени горелки. Но за его видимой формой скрывается совместное действие аэродинамики, теплопереноса и химических реакций. Топливо должно смешаться с воздухом, воспламениться и сгореть в подходящем пространстве. При этом движение определяет, где встречаются реагенты и сколько времени они находятся в зоне реакции.

Если смешение недостаточно, часть топлива может не успеть полностью окислиться. Если организация потока не соответствует режиму, пламя способно стать неустойчивым. Чрезмерно интенсивное движение тоже не всегда полезно: условия удержания фронта горения зависят от соотношения скоростей потока и процессов воспламенения.

Поэтому разработка горелки требует ответа на несколько связанных вопросов. Как подать воздух и топливо? Где обеспечить перемешивание? Каким образом удержать пламя в рабочей зоне? Как распределить тепловыделение, чтобы оно соответствовало назначению установки? Геометрия сопел и каналов становится инструментом управления этими процессами.

Научные истоки Ершина связаны с теплофизиком Львом Вулисом. Вместе с Л.А. Вулисом и Л.П. Яриным он написал монографию «Основы теории газового факела» (1968) [1]. Этот цикл работ показывает, почему исследование струй было важно одновременно для фундаментальной науки и энергетики.

Результаты исследования турбулентных струй применялись при разработке горелочных устройств для Ермаковской ГРЭС (ныне Аксуская ГРЭС). Применение этих результатов показывает, как понимание движения даёт основу для организации смешения и горения. Характеристики конкретной горелки определяются её конструкцией и проверяются при испытаниях в рабочих условиях.

Высокотемпературные и сверхзвуковые потоки требуют ещё более сложного описания. Там существенны сжимаемость газа, изменение температуры и короткое время взаимодействия компонентов. Модель, пригодная для спокойной лабораторной струи, должна быть существенно уточнена. Проверка её применимости становится самостоятельной частью исследования.

Теория факела поэтому представляет собой пример задачи, в которой процессы нельзя изолировать друг от друга. Движение влияет на реакцию, реакция выделяет тепло, тепло меняет плотность и вязкость, а эти изменения перестраивают поток. Научная работа ищет согласованное объяснение всей этой цепочки и условия, в которых она обеспечивает устойчивую работу устройства.

Вихревые структуры на криволинейной поверхности. Вода, движущаяся по изгибу, меняет направление. Для этого необходимы силы, удерживающие поток на криволинейной траектории. Внутри жидкости возникают соответствующие распределения давления и скорости. Если их сочетание неблагоприятно для устойчивости, первоначально плавное движение может перестроиться и образовать регулярные вихревые структуры.

Удобная аналогия – движение автомобиля по повороту. Чем выше скорость и чем круче поворот, тем заметнее требование к силам, изменяющим направление движения. Но в жидкости соседние слои могут двигаться с разной скоростью и обмениваться веществом. Поэтому вопрос устойчивости сложнее поведения одного твёрдого тела.

При течении вдоль вогнутой поверхности в пограничном слое могут возникать продольные вихри Гёртлера. Они переносят жидкость между участками, расположенными ближе к стенке и дальше от неё. В результате поверхность испытывает неодинаковое воздействие по ширине, а теплообмен может стать существенно неравномерным.

Другой известный пример – жидкость между вращающимися цилиндрами. При определённых сочетаниях вращения и свойств среды возникают вихри Тейлора. Здесь характерные образования имеют другую ориентацию, чем продольные вихри возле вогнутой стенки. Объединяет эти задачи роль криволинейного движения и центробежных механизмов неустойчивости.

Исследования таких структур вели Ершин и его ученики. Их значение выходит за рамки красивой картины течения. Вихри изменяют перемешивание, перенос импульса и тепла. Следовательно, они могут влиять на работу аппарата даже тогда, когда средние расход и температура остаются прежними.

Вихревое кольцо переносит движение. Дымовое кольцо – один из самых наглядных объектов гидромеханики. Оно имеет узнаваемую форму и некоторое время перемещается как единое образование. Дым делает движение видимым, но основную структуру создаёт вращающийся воздух. Подобные кольца могут существовать и в воде, где для наблюдения используют окрашенную жидкость или частицы.

Внутри кольца среда движется вокруг его поперечного сечения. Если мысленно разрезать кольцо плоскостью через ось, можно увидеть две области вращения, относящиеся к одной пространственной структуре. Это вращение создаёт поле скоростей, благодаря которому кольцо перемещается в окружающей среде.

Вихрь способен переносить вовлечённое вещество, но его граница не является твёрдой оболочкой. Он взаимодействует с окружением, изменяет форму и постепенно теряет первоначальные свойства. Поэтому сравнение с движущимся предметом полезно лишь отчасти: внутри такого «предмета» непрерывно происходит собственное движение.

Скорость поступательного движения кольца зависит от его размеров и интенсивности вращения. Существенна и толщина вихревого ядра. В простых теоретических описаниях тонкого кольца эти величины связаны между собой, но переносить такое описание на любое реальное кольцо нельзя. Толстое ядро, близкая стенка или сильная деформация требуют других уточнений.

Вязкость постепенно сглаживает распределение вращения и меняет ядро. При некоторых режимах на кольце возникают колебания и неустойчивости, которые приводят к более сложной структуре. Поэтому наблюдаемое сохранение формы является временным и зависит от условий. Вихревое кольцо не отменяет потерь энергии в реальной среде.

Исследования кольцевых вихрей занимали важное место в работах Ш. Ершина и А. Калтаева [4]. Для популярного читателя этот пример особенно полезен: он показывает, что сложный

поток способен образовать устойчивую на определённом этапе структуру. Порядок возникает внутри движения, которое легко принять за хаос.

Изучая кольцо, исследователь получает возможность отдельно рассмотреть образование, перемещение и распад вихря. Эти этапы помогают понять перенос вещества и импульса в более сложных течениях. Наглядный опыт оказывается входом в общую проблему: как вихревые структуры организуют движение и каким образом взаимодействуют с окружающей средой.

Численный эксперимент и продолжение научной школы. Многие процессы внутри трубы, фильтра или горячего факела трудно наблюдать непосредственно. Прибор измеряет давление в отдельных точках, датчик показывает температуру, расходомер даёт общий расход. Но эти данные ещё не раскрывают всю внутреннюю картину. Численное моделирование помогает связать измерения с распределениями скорости, давления и температуры.

Расчётную область делят на небольшие элементы и для них решают уравнения сохранения массы, импульса и энергии. Компьютер последовательно находит согласованное состояние потока. Такой подход позволяет сравнивать варианты геометрии и режимы, исследовать влияние отдельных факторов и проверять физические гипотезы.

Однако подробная цветная картина не является доказательством сама по себе. Результат зависит от модели вещества, условий на границах и разрешения расчёта. Если неизвестна вязкость или неправильно задана температура стенки, увеличение числа элементов не устранит исходную ошибку. Нужна проверка по независимым данным и оценка устойчивости результата к принятым предположениям.

Ершин уделял большое внимание численному моделированию, в том числе при подготовке учеников. Здесь важна исследовательская последовательность: поставить содержательный вопрос, выбрать описание, выполнить расчёт и сопоставить его с опытом. Компьютер расширяет возможности этого подхода, но не заменяет понимание физики.

Сверхзвуковое горение: продолжение идей научной школы. Продолжение этого исследовательского подхода можно увидеть в работе У.К. Жапбасбаева и Е.П. Макашева [5]. В задаче о горении водородной струи сходятся несколько тем: смешение потоков, влияние температуры, изменение геометрии канала и химические реакции. Связь с наследием школы заключается в самом способе постановки вопроса: определить, какой из взаимодействующих процессов управляет наблюдаемым результатом.

В гиперзвуковом прямоточном воздушно-реактивном двигателе поток в камере сгорания остаётся сверхзвуковым. Топливо должно перемешаться с воздухом, воспламениться и выделить тепло за очень короткое время пребывания в камере. Быстрое движение само по себе не гарантирует успешного горения: если реагенты не успевают встретиться, значительная часть топлива может выйти из камеры несгоревшей.

В рассмотренной расчётной схеме по оси канала истекает тонкая струя водорода, окружённая коаксиальным сверхзвуковым потоком горячего воздуха. Сопоставляются канал постоянного сечения и канал, который после начального цилиндрического участка плавно расширяется. Такая постановка позволяет выделить влияние геометрии на смешение и воспламенение. Даже небольшой угол расширения способен изменить время пребывания газа и температурные условия реакции.

Для описания используются уравнения движения, переноса энергии и компонентов реагирующей смеси, а также модель турбулентного переноса. Химическая схема учитывает водород, кислород, воду и промежуточные активные частицы. Эти частицы необходимы для развития цепных реакций. Важна также неоднородность состава: средние концентрации топлива и окислителя ещё не означают, что они хорошо перемешаны на масштабе, где протекает реакция. Приближения расчётной модели должны оцениваться отдельно; наличие сверхзвуковой скорости само по себе не устраняет вязкие процессы, пограничные слои и влияние тепловыделения.

Главный физический вопрос касается расширения канала. Кажется, что дополнительное пространство должно помогать горению. Но в простом случае сверхзвуковой газ при расширении ускоряется и охлаждается. Для реагирующего потока к этому добавляются

тепловыделение, трение и изменение смешения. В рассмотренных режимах расширение задерживает воспламенение и затрудняет завершение горения. Значение имеет не только объём камеры, но и то, как изменяются состояние газа и время контакта реагентов.

Расчётные распределения позволяют отличить место начала реакции от участка полного выгорания топлива. Между ними может лежать протяжённая зона. Повышение температуры входящего окислителя обычно сокращает химическую задержку воспламенения, однако не обязательно обеспечивает быстрое завершение горения. Если смешение остаётся медленным, оно продолжает ограничивать процесс.

Особую роль играют активные частицы – атомы и радикалы, участвующие в цепных реакциях. Их присутствие во входящем потоке может существенно приблизить начало воспламенения к соплу. Однако количество таких частиц определяется не одной температурой: важны давление, состав, способ нагрева и предыстория потока. Поэтому нельзя автоматически приравнивать нагретый чистый воздух к потоку, подготовленному с помощью сгорания топлива.

Это различие особенно существенно в лабораторных установках, где горячий окислительный поток может содержать водяной пар и другие продукты предварительного сгорания. Такой поток по химическому составу отличается от атмосферного воздуха. Его воздействие на воспламенение следует учитывать при сопоставлении расчётов, экспериментов и условий работы двигателя. Более раннее начало реакции при этом ещё не означает, что всё топливо быстрее сгорит.

Так проявляется ещё одна неожиданная связь: химические реакции могут начинаться быстро, а полное сгорание всё равно определяется скоростью смешения. Для конструктора это означает необходимость согласовать подачу топлива, длину камеры и её расширение с тем, где реагенты действительно успевают перемешаться. Вывод относится к рассмотренным условиям; перенос его на другую геометрию или другой режим требует проверки.

Численный эксперимент помогает разделить эти процессы: проследить движение струи, развитие зоны смешения, начало реакции и последующее выгорание. Сопоставление с измерениями устанавливает, насколько достоверно модель описывает каждый этап. Особенно важно различать качественное совпадение картины и количественное воспроизведение измеренных характеристик: первое ещё не гарантирует второго.

Что сохраняет научная школа. Научное наследие складывается из результатов и из способов их получения. В работах, рассмотренных в этой статье, можно выделить общую исследовательскую линию: сначала обнаружить необычное поведение потока, затем установить определяющий механизм и только после этого обсуждать инженерное применение. Такой подход связывает задачи, внешне далёкие друг от друга, – от перекачки вязкой жидкости до горения сверхзвуковой струи.

В юбилейной статье особенно важно различать результаты самого Шахбаза Ершина, совместные работы с коллегами и последующие исследования учеников. Это позволяет точнее увидеть вклад выдающегося исследователя. Продолжение школы проявляется в развитии поставленных вопросов, совершенствовании моделей и обращении к новым объектам, где сохраняется потребность в ясном физическом объяснении.

Для молодого исследователя парадокс полезен как начало работы. Он заставляет проверить очевидное: действительно ли свойства среды постоянны, достаточно ли среднего значения скорости, можно ли пренебречь стенкой, успевают ли реагенты перемешаться? На такие вопросы нельзя ответить одной красивой расчётной картиной. Ответ строится на сочетании теории, измерений и критического обсуждения.

Научная школа передаёт следующему поколению именно такую культуру работы. Ученик осваивает не только уравнения и программы. Он учится замечать противоречие, отличать измеренное от предполагаемого, устанавливать границы результата и обсуждать его практический смысл. Разные темы объединяются общим способом исследования.

Наследие Шахбаза Ершина продолжает представлять интерес благодаря соединению фундаментальных вопросов и задач практики. Неожиданное поведение жидкости или газа

требует внимательного исследования. Умение превратить такое наблюдение в проверяемое объяснение остаётся одной из важных основ научной работы.

Постановки задач и научные результаты приведенных в статье исследований изложены в публикациях [1-5].

Стиль изложения предназначен для широкого читателя.

Список литературы

1 Л.А. Вулис, Ш.А. Ершин, Л.П. Ярин, Основы теории газового факела, Ленинград, Энергия. 1968.
2 Sh.A. Yershin, Paradoxes in Aerodynamics, Springer, 2017.
3 O.A. Vlasov, Sh.A. Yershin, U.A. Zhapbasbayev, Investigation of the aerothermochemical process in a fixed-bed catalytic reactor, Fluid dynamics, 26 (1991), №2, 252-258.
4 А. Калтаев, Ш.А. Ершин, Математическое моделирование эволюции вихревого кольца в вязкой жидкости, Вестник КазГУ. Серия математики, механики, информатики, (1984), № 2, 45–52.
5 У.К. Жапбасбаев, Е.П. Макашев, Некоторые данные сверхзвукового горения неперемешанных газов в расширяющихся каналах, Горение и плазмохимия, 13 (2015) № 1, 3–10.

Турбулентті дүлей ағындар әміршісі: академик Ершин Қазақстан гидромеханикасын әлемдік танымалдыққа қалай жеткізді

Академик Ш.А. Ершиннің туғанына 100 жыл толуына орай

Ұ.Қ. Жапбасбаев
«Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті» КеАҚ,
Сәтбаев көшесі, 22а, 050013, Алматы қ., Қазақстан

Аннотация. Есімдері диссертациялардың сарғайған беттерінде ғана қалатын ғалымдар болады. Ал физиканың күрделі заңдарын ұлан-ғайыр елдің қажетіне жаратып, бір-біріне қарсы тұрған аса қуатты екі әскери державаға – Мәскеуден Вашингтонға дейін – Қазақстан ғылымының үніне құлақ астыра білген жасампаз тұлғалар да бар. ҚР ҰҒА академигі, техника ғылымдарының докторы, профессор Шахбаз Алимгирейұлы Ершин (05.09.1926–02.08.2019) дәл осындай тұлға еді.

Биыл ризашылығын білдірген ғылыми қауымдастық отандық гидроаэромеханиканың бірегей ғылыми мектебін қалыптастырған, алаулаған жалынның ішкі сырын ашқан және Навье–Стокс теңдеулерін өндіріс игілігіне қызмет еткізген тұлғаның туғанына жүз жыл толуын атап өтуде.

«Аэрогидродинамика парадокстары» монографиясы мен Ершин ғылыми мектебі өкілдерінің еңбектері негізінде арналардағы тұтқыр және тұтқыр-пластикалық орталардың ағысы, диссипативтік қызудың тұтқырлық пен қозғалыс кедергісіне әсері, сондай-ақ мұнай кәсіпшілігі құбырларының жергілікті зақымдануының гидродинамикалық алғышарттары талқыланады. Өткізгіш қабырғалар арқылы тасымалданудың, каталитикалық аппараттардағы газдың таралуының, еркін ағыншалардың дамуы мен құйындық құрылымдар эволюциясының ерекшеліктері қарастырылады. Температураның газ ағыншаларының құрылымына әсеріне және дыбыстан жоғары жылдамдықтағы жану кезінде отынның араласу, тұтану және толық жанып біту үдерістерінің арақатынасына ерекше назар аударылады. Қалыптасқан түсініктер мен нақты ағынның әрекеті арасындағы көрінерлік қайшылықтарды өзара байланысты физикалық үдерістерді және есептік модельдердің қолданылу шектерін ескеру арқылы түсіндіруге болатыны көрсетіледі. Теорияны эксперименттпен салыстырудың маңызы, сапалық түсіндіру мен сандық растауды ажырату қажеттілігі, сондай-ақ зерттеу мәдениетін дамытудағы ғылыми мектептің рөлі атап өтіледі. Ұсынылған шолу Ершин мұрасының энергетика, мұнай өнеркәсібі және технологиялық аппараттарды жетілдіру үшін практикалық маңызын ашады.

Түйін сөздер: аэрогидродинамика, Шахбаз Ершиннің ғылыми мұрасы, тұтқыр-пластикалық орталар, тұтқырлық диссипациясы, еркін ағыншалар, құйындық құрылымдар, дыбыстан жоғары жылдамдықтағы жану.

Master of Turbulent Forces: How Academician Yershin Brought Kazakhstan's Hydromechanics to International Prominence

Commemorating the 100th Anniversary of the Birth of Academician Sh. A. Yershin

U. K. Zhapbasbayev

Non-Profit Joint-Stock Company "K.I. Satpayev Kazakh National Research Technical University", Satpayev Street, 22a, 050013, Almaty, Kazakhstan

Abstract. Some scientists' names remain only on the yellowed pages of dissertations. Others are builders capable of harnessing the intricate laws of physics to meet the needs of a vast country and making the world–from Moscow to Washington, the centres of the two most powerful opposing military superpowers–listen to the voice of Kazakhstan's science. Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Doctor of Technical Sciences, Professor Shakhbaz Alimgireyevich Yershin (5 September 1926–2 August 2019) was one such person.

This year, a grateful scientific community commemorates the centenary of a man who established a distinctive national school of hydroaeromechanics, peered into the heart of raging flames, and put the Navier–Stokes equations to work for industry.

Drawing on the monograph *Paradoxes of Aerohydrodynamics* and publications by members of Yershin's scientific school, this review discusses flows of viscous and viscoplastic media in channels, the effects of dissipative heating on viscosity and flow resistance, and the hydrodynamic conditions contributing to localised damage in oilfield pipelines. It examines transport through permeable walls, gas distribution in catalytic apparatuses, the development of free jets, and the evolution of vortical structures. Particular attention is paid to the effects of temperature on the structure of gas jets and the interplay between mixing, ignition, and fuel burnout during supersonic combustion. The review shows that apparent contradictions between conventional understanding and actual flow behaviour can be explained by accounting for interconnected physical processes and the limits of applicability of computational models. It emphasises the importance of comparing theory with experiment, distinguishing qualitative explanations from quantitative validation, and the role of a scientific school in cultivating a research culture. The review highlights the practical significance of Yershin's legacy for the energy sector, the oil industry, and the improvement of technological apparatuses.

Keywords: aerohydrodynamics, scientific legacy of Shakhbaz Yershin, viscoplastic media, viscous dissipation, free jets, vortical structures, supersonic combustion.

References

1 L.A. Vulis, Sh.A. Yershin and L.P. Yarin, Osnovy teorii gazovogo fakela [Fundamentals of Gas Flame Theory], Energiya, Leningrad, 1968. [in Russian]

2 Sh.A. Yershin, Paradoxes in Aerodynamics, Springer, 2017.

3 O.A. Vlasov, Sh.A. Yershin and U.A. Zhapbasbayev, Investigation of the aerothermochemical process in a fixed-bed catalytic reactor, *Fluid Dynamics* 26 (1991), no. 2, 252–258.

4 A. Kaltayev and Sh.A. Yershin, Matematicheskoe modelirovanie evolyutsii vikhrevogo koltsa v vyazkoi zhidkosti [Mathematical Modeling of the Evolution of a Vortex Ring in a Viscous Fluid], *Vestnik KazGU. Seriya matematiki, mekhaniki, informatiki [Bulletin of Kazakh State University. Mathematics, Mechanics, and Informatics Series]* (1984), no. 2, 45–52. [in Russian]

5 U.K. Zhapbasbayev and E.P. Makashev, Nekotorye dannye sverkhzvukovogo goreniya neperemeshannykh gazov v rasshiryayushchikhsya kanalakh [Some Data on Supersonic Combustion of Unmixed Gases in Expanding Channels], *Gorenie i plazmokhimiya [Combustion and Plasma Chemistry]* 13 (2015), no. 1, 3–10. [in Russian]

Сведения об авторе:

Жапбасбаев Узак Кайрбекович – доктор технических наук, профессор, лауреат Государственной премии Республики Казахстан в области науки и техники имени аль-Фараби 2019 года, НАО «Казахский национальный исследовательский технический университет им. К.И. Сатпаева», ул. Сатпаева, 22а, 050013, Алматы, Казахстан.

Zhapbasbayev Uzak Kairbekovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Laureate of the 2019 Al-Farabi State Prize of the Republic of Kazakhstan in Science and Technology, Non-Profit Joint-Stock Company "K.I. Satpayev Kazakh National Research Technical University", Satpayev Street, 22a, 050013, Almaty, Kazakhstan.

Поступила: 27.06.2026. *После повторной редакции: 07.09.2026.*
Одобрена: 19.10.2026. Доступна онлайн: 31.10.2026.



Copyright: © 2026 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: Ғ.Е. Тауғынбаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы.
- 2026. 2(155). - Астана: ЕҰУ. 42-б. Басуға қол қойылды: 02.11.2026.
Ашық қолданыстағы электронды нұсқа: http://bulmathmc.enu.kz/
Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген:
http://bulmathmc.enu.kz/

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды