

ISSN 3007-0155  
eISSN 3007-0163

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

# ХАБАРШЫСЫ

---

## BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian  
National University

## ВЕСТНИК

Евразийского национального  
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series

Серия МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА

№1(154)/2026

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2026  
Astana, 2026

## БАС РЕДАКТОРЫ

**Темірғалиев Н.**, ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

**Жұбанышева А.Ж.**

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

**Наурызбаев Н.Ж.**

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

### Редакция алқасы

**Абакумов Е.В.**

PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

**Алимхан Килян**

PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

**Бекенов М.И.**

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

**Гогинова У.**

ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джаватишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия

**Зунг Динь**

ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам ұлттық университеті, Ханой, Вьетнам

**Иосевич А.**

PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ

**Кобельков Г.М.**

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

**Курина Г.А.**

ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей

**Марков В.В.**

ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей

**Мейрманов А.М.**

ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

**Нуртазина К.Б.**

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

**Омарбекова А.С.**

т.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

**Смелянский Р.Л.**

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

**Тауғынбаева Г.Е.**

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

**Умирбаев У.У.**

ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ

**Холщевникова Н.Н.**

ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

**Шмайссер Ханс-Юрген**

Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.

Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: [vest\\_math@enu.kz](mailto:vest_math@enu.kz)

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.**

**МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы**

Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.

№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,

тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410).

## EDITOR-IN-CHIEF

**Nurlan Temirgaliyev**, *Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

*Deputy Editor-in-Chief*

**Aksaule Zhubanysheva**

*PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

*Deputy Editor-in-Chief*

**Nurlan Nauryzbayev**

*PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

### *Editorial board:*

**Evgueni Abakumov**

*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee  
Paris, France*

**Alexander Iosevich**

*PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA*

**Alimhan Keylan**

*PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

**Makhsut Bekenov**

*Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof.*

*L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

**Ushangi Goginava**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.*

*Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

**Dũng Dinh**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute,  
Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*

**Georgii Kobel'kov**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia*

**Galina Kurina**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh,  
Russia*

**Vladimir Markov**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical  
Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Anvarbek Meirmanov**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Com-  
munications and Informatics, Moscow, Russia*

**Karlygash Nurtazina**

*Cand. of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana,  
Kazakhstan*

**Asel Omarbekova**

*Cand. of Tech. Sci., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

**Ruslan Smelyansky**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia*

**Galiya Taugynbayeva**

*PhD, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

**Ualbay Umirbaev**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.,  
Wayne State University, Detroit, USA*

**Natalya Kholshchevnikova**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State  
Technological University "Stankin", Moscow, Russia*

**Hans-Juergen Schmeisser**

*Dr. habil., Prof., Friedrich-Schiller University  
Jena, Germany*

*Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.*

*Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: vest\_math@enu.kz*

*Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva*

**Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.**

**MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series**

Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate  
№ KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**Темиргалиев Н.**, д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

*Зам. главного редактора*

**Жубанышева А.Ж.**

*PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

*Зам. главного редактора*

**Наурызбаев Н.Ж.**

*PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

### *Редакционная коллегия*

**Абакумов Е.В.**

*PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция*

**Алимхан Килан**

*PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

**Гогинова У.**

*д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия*

**Зунг Динь**

*д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам*

**Иосевич А.**

*PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США*

**Кобельков Г.М.**

*д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**Курина Г.А.**

*д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

**Марков В.В.**

*д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*

**Мейрманов А.М.**

*д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*

**Нургазина К.Б.**

*к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

**Омарбекова А.С.**

*к.т.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

**Смелянский Р.Л.**

*д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**Таугынбаева Г.Е.**

*PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

**Умирбаев У.У.**

*д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США*

**Холщевникова Н.Н.**

*д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия*

**Шмайссер Ханс-Юрген**

*Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия*

*Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402

*Тел:* +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). *E-mail:* vest\_math@enu.kz

*Ответственный редактор:* А.Ж. Жубанышева

**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.**

**Серия МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА**

**Собственник:** Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

**Периодичность:** 4 раза в год.

**Зарегистрировано** Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.

**Свидетельство о постановке на переучет** № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.

**Адрес типографии:** 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,

**тел.:** +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.  
Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, №1(154)/2026

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.  
Mathematics, computer science, mechanics series, №1(154)/2026

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия  
Математика, компьютерные науки, механика, №1(154)/2026

МАЗМҰНЫ  
CONTENTS  
СОДЕРЖАНИЕ

*Прыкарпатский А.К., Балинский А.А.* Бергман кеңістіктеріндегі тұйық  
сызықтық ішкі кеңістіктер туралы кейбір ескертулер

*Prykarpatski A.K., Balinsky A.A.* Some Remarks on Linear Closed Subspaces in  
Bergman Spaces

*Прыкарпатский А.К., Балинский А.А.* Некоторые замечания о замкнутых  
линейных подпространствах в пространствах Бергмана 6

*Таберхан Р., Самбетбаева М.А.* Қазақ тіліндегі синтетикалық және  
аналитикалық себептік құрылымдардың типологиялық айырмашылығы

*Taberkhan R., Sambetbayeva M.A.* Typological Differences Between Synthetic and  
Analytical Causal Structures in the Kazakh Language

*Таберхан Р., Самбетбаева М.А.* Типологические различия синтетических и  
аналитических причинных структур в казахском языке 15

*Митюшев В.* Дисперсті композиттердің математикалық модельдеуі мен тиімді  
қасиеттері

*Mityushev V.* Mathematical Modeling and Effective Properties in Dispersed Composites

*Митюшев В.* Математическое моделирование и эффективные свойства дисперсных  
композитов 34

## Article

IRSTI: 27.25.15,27.31.15

# SOME REMARKS ON LINEAR CLOSED SUBSPACES IN BERGMAN SPACES

A.K. Prykarpatski<sup>1</sup>, A.A. Balinsky<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Computer Science and Mathematics, Cracow University of Technology, 24 Warszawska Street, Cracow, Poland

<sup>1</sup> Department of Computational Mathematics, National Lviv Polytechnic University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv, 79013, Ukraine

<sup>2</sup> Mathematical Department, Cardiff University, Senghennydd Road, Cardiff CF24 4AG, Great Kingdom  
<sup>1</sup> pryk.anat@cybergal.com, <sup>2</sup> BalinskyA@cardiff.ac.uk

**Abstract.** Problems related to finite-dimensionality, compact embeddings, and quantitative estimates of dimensions of embedded subspaces in Bergman spaces play an important role in approximation theory, Banach space geometry, the theory of holomorphic function spaces, and the analysis of infinite-dimensional dynamical systems. Classical results of Grothendieck and Subramanian established fundamental principles for embeddings of subspaces in  $L_p$ -spaces, while recent studies have extended these ideas to Bergman spaces of holomorphic functions on bounded complex domains. In this context, the investigation of quantitative dimension estimates for closed subspaces embedded into Bergman spaces with stronger integrability conditions becomes particularly relevant.

In this article the finite-dimensionality Grothendieck type problem for closed linear subspaces of a Bergman space  $A_p(\Omega, d\lambda)$  of holomorphic and  $p$ -integrable with respect to the Lebesgue measure  $d\lambda$  on a bounded complex domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ , embedded into a Bergman space  $A_q(\Omega, d\lambda)$  for  $q > p \geq 1$ , is analyzed. It is shown that if a closed linear subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda) \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$ ,  $q > p \geq 1$ , its dimension  $\dim S_p^{(q)} = N \in \mathbb{N}$  proves to satisfy the numerical inequality  $\frac{\omega_N^{2(q-1)/q}}{N} \frac{|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}}{k_N(\xi_0)^{2(q-1)/q}} \leq \tilde{K}_{p,q}^2$  for some bounded constant  $\tilde{K}_{p,q} > 0$ , where  $\omega_N = |SU(N)|$  is the volume of the compact unitary group  $SU(N)$ ,  $|\Omega|$  is the volume of the bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  and  $k_N(\xi_0) > 0$ — is the corresponding homogeneity parameter at  $\xi_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)_N \in \partial \mathbb{D}^N \subset \mathbb{C}^N$ .

**Keywords:** linear closed subspaces, Bergman space, functional Banach space, finite dimensionality, Lebesgue measures, embedding.

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2026/1.1>

**2000 Mathematics Subject Classification:** 46G20, 58B12, 35K05, 46A16, 46B03, 46B04

## 1. Introduction

It is a classical problem of the Banach space theory to search for estimations of the dimension of linear closed subspaces of the functional Banach space  $L_p(M; d\mu)$ ,  $p > 1$ , (in part, in  $L_p(0, 1; d\lambda)$ ), which has many applications in operator and approximation theories [1]- [10], in dynamical systems theory [11]-[17] and other applied fields. Here one can recall the known Subramanian inclusion theorem [18] of  $L_p(M, d\mu)$  into  $L_q(M, d\mu)$  for  $0 < p < q$  and the classical Grothendieck theorem [19] on the estimation of the dimension of a linear closed subspace  $S_p^{(\infty)} \subset L_p(M, d\mu)$ , embedded into the Banach space  $L_\infty(M, d\mu)$  with respect to a probability measure  $\mu$  on a space  $M$ , as well as its generalization on the case of a linear closed subspace  $S_p^{(c)} \subset C(M; \mathbb{R})$  of continuous functions, identically imbedded into  $L_2(M; d\mu)$ .

Recently, in November 2025, the authors of the work [20] announced the Grothendieck type embedding theorem for the Bergman space  $A_p(\Omega, d\lambda) = Hol(\Omega) \cap L_p(\Omega)$  of holomorphic functions on a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  and  $p$  - integrable on  $\Omega$  with respect to the Lebesgue measure. They stated the following result.

**Teopema 1.** *Let  $q > p \geq 1$  and for any bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  a closed subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$  of the Bergman space  $A_p(\Omega, d\lambda)$  be identically embedded into a Bergman space  $A_q(\Omega, d\lambda)$ . Then the dimension  $\dim S_p^{(q)} < \infty$ .*

The authors of this theorem based their proof on the following well known classical theorems [21]-[22] from functional analysis.

**Teopema 2.** *If a bounded operator  $J : X \rightarrow Y$  from a Banach space  $X$  to a Banach space  $Y$  is compact and its image  $\text{Im } J \subset Y$  is closed, then  $\dim(JX) < \infty$ .*

**Teopema 3.** *(F. Riesz) A linear subspace of a normed space  $X$  is locally compact if and only if it is finite dimensional.*

As the authors of the above theorem did not obtain the upper estimation of the dimension  $\dim S_p^{(q)} = N < \infty$  of the subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega; d\lambda)$  of the Bergman space  $A_p(\Omega, d\lambda)$ , embedded into the Bergman space  $A_p(\Omega; d\lambda)$ , we proposed a completely different approach to studying the Grothendieck embedding problem and presented an upper estimation of the closed subspace dimension under regard. In particular, we have stated the following dimension estimation theorem.

**Teopema 4.** *Let a linear closed subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , be identically embedded into a Banach space  $A_q(\Omega; d\lambda)$  for  $q > p \geq 1$ , where  $d\lambda$  is the Lebesgue measure on a bounded complex domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ . Then the dimension  $\dim S_p^{(q)} = N \in \mathbb{N}$  of a closed subspace  $S_p^{(q)} \subset$*

*$A_p(\Omega, d\lambda)$  proves to satisfy the inequality  $\frac{\omega_N^{\frac{2(q-1)}{q}} |\Omega|^{\frac{2-q}{q}}}{N k_N(\xi_0)^{\frac{2(q-1)}{q}}} \leq \tilde{K}_{p,q}^2$  for some bounded constant  $\tilde{K}_{p,q} > 0$ , where  $\omega_N = |SU(N)|$  is the volume of the compact unitary group  $SU(N)$ ,  $|\Omega|$  is the volume of the bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  and  $k_N(\xi_0) > 0$ — is the corresponding homogeneity parameter at  $\xi_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)_N \in \partial \mathbb{D}^N \subset \mathbb{C}^N$ .*

In the special case  $q = \infty$ , when a closed linear subspace  $S_p^{(\infty)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , is identically embedded into the Bergman space  $A_\infty(\Omega, d\lambda)$ , there is obtained the classical Grothendieck type theorem.

**Teopema 5.** *Let a linear closed topological subspace  $S_p^{(\infty)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , be identically embedded into the Bergman space  $A_\infty(\Omega, d\lambda)$ , where  $d\lambda$  is the Lebesgue measure on a bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ . Then the dimension of the closed subspace  $S_p^{(\infty)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$  proves to satisfy the inequality  $\dim S_p^{(\infty)} = N \leq \tilde{K}_{p,\infty}^2$  for some bounded constant  $\tilde{K}_{p,\infty} > 0$ .*

## 2. Embedding of closed subspaces into Bergman spaces

Below we consider a closed linear subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ , allowing the identical embedding into the Bergman space  $A_q(\Omega, d\lambda)$ , where  $q > p \geq 1$ . Then the following theorems holds.

**Теорема 6.** *The Bergman spaces  $A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , with respect to the Lebesgue measure  $d\lambda$  on a bounded complex domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  are Banach spaces.*

This theorem is based on the local precompactness of a complex bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  and the following classical Bergman estimation theorem.

**Теорема 7.** *For any compact subset  $V \subset \Omega$  and arbitrary function  $f \in A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , there exists such a bounded constant  $C_q(V) > 0$  that*

$$\sup_V |f| < C_q(V) \|f\|_p. \quad (1)$$

*Proof.* Sketch. As the norm  $\|f\|_p$  of any function  $f \in A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , is a subharmonic function, the estimation (1) easily follows from the compactness of the subset  $V \subset \Omega$  and the fact that the distance  $\text{dist}(V, \partial\Omega) = r_V > 0$ .  $\square$

Now we can formulate our main dimension  $\dim S_p^{(q)} = N$  estimation theorem.

**Теорема 8.** *Let a linear closed subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , be identically embedded into a Banach space  $A_q(\Omega; d\lambda)$  for  $q > p \geq 1$ , where  $d\lambda$  is the Lebesgue measure on a bounded complex domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ . Then the dimension  $\dim S_p^{(q)} = N \in \mathbb{N}$  of a closed subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$  proves to satisfy the inequality  $\frac{\omega_N}{N k_N(\xi_0)} \frac{|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}}{\frac{2(q-1)}{q}} \leq \tilde{K}_{p,q}^2$  for some bounded constant  $\tilde{K}_{p,q} > 0$ , where  $\omega_N = |SU(N)|$  is the volume of the compact unitary group  $SU(N)$ ,  $|\Omega|$  is the volume of the bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  and  $k_N(\xi_0) > 0$ — is the corresponding homogeneity parameter at  $\xi_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)_N \in \partial\mathbb{D}^N \subset \mathbb{C}^N$ .*

Let us consider a closed linear subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$  of the functional Bergman space  $A_p(M, d\mu)$ ,  $p \geq 1$ , with respect to the Lebesgue measure on  $\Omega$ , satisfying, in addition, the identical embedding constraint  $S_p^{(q)} \subset (A_p(\Omega, d\lambda); \|\cdot\|_p) \hookrightarrow (A_q(\Omega, d\lambda); \|\cdot\|_q)$  for  $q > p \geq 1$ . In order to state Theorem 8 we need some two lemmas.

**Лемма 1.** *For any  $q > p \geq 1$ , there exists a bounded positive constant  $K_{p,q} > 1$ , such that*

$$\|f\|_q \leq K_{p,q} \|f\|_p \quad (2)$$

for any  $f \in S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda) \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$ .

*Proof.* As the linear subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ , imbedded  $A_q(\Omega, d\lambda)$ ,  $q > p \geq 1$ , is closed in  $A_p(\Omega, d\lambda)$ , one can define the identity imbedding mapping

$$J_p^{(q)} : S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda) \rightarrow A_q(\Omega, d\lambda). \quad (3)$$

If a sequence  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_p^{(q)}$  converges in  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$  to an element  $f \in S_p^{(q)} \hookrightarrow A_p(\Omega, d\lambda)$  with respect to the norm on  $A_p(\Omega, d\lambda)$  and simultaneously its image  $\{J_p^{(q)} f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_p^{(q)} \subset A_q(\Omega, d\lambda)$  converges to an element  $g \in A_q(\Omega, d\lambda) \subset A_p(\Omega, d\lambda)$  with respect to the norm on  $A_q(\Omega, d\lambda)$ , one can identify these limiting functions  $f \sim g$  almost everywhere. Really, since  $(\Omega, d\lambda) \subset A_p(\Omega, d\lambda) \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$ ,  $q > p \geq 1$ , from the estimations

$$\begin{aligned} \|f - g\|_p &\leq \|f - f_n\|_p + \|g - f_n\|_p \leq \\ &\leq \|f - f_n\|_p + \|(g - f_n)\|_p \leq \\ &\leq \|f - f_n\|_p + \|(g - J_p^{(q)} f_n)\|_q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (4)$$



one obtains that  $f \sim g$  almost everywhere and the image  $J_p^{(q)}(S_p^{(q)}) \subset A_q(\Omega, d\lambda)$  is closed in  $A_q(\Omega, d\lambda)$ ,  $q > p \geq 1$ . The latter, owing to the Banach closed graph theorem (see [21]–[25], gives rise to the existence of such a positive constant  $K_{p,q} < \infty$  that

$$\|f\|_q \leq K_{p,q} \|f\|_p \quad (5)$$

for arbitrary  $f \in S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda) \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$ ,  $q > p \geq 1$ . Remark also, that the following estimations

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_q = \|J_p^{(q)} f\|_q \leq K_{p,q} \|f\|_p < \infty \quad (6)$$

hold for any  $f \in S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda) \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$ ,  $q > p \geq 2$ , easily following from the Young inequality.  $\square$

Taking into account Lemma 1, we can formulate the next lemma, which is in some sense the converse to the inequality (2).

**Lemma 2.** *There exists a bounded constant  $\tilde{K}_{p,q} = K_{p,q}^p C_q(V)^{\frac{p-1}{p}} > 0$ , such that the following inequality*

$$\|f\|_{q,V} \leq \tilde{K}_{p,q} \|f\|_{2,V} \quad (7)$$

holds for any compact  $V \subset \Omega$  and  $f \in S_p^{(q)} \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$ ,  $q > p \geq 1 (\neq 2)$ .

*Proof.* If  $1 < p \leq 2$ , from the Young inequality

$$\|f\|_p \leq \|f\|_2 \quad (8)$$

for any  $f \in S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda) \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$  one obtains inequality (7) for the bounded  $K_{p,q} > 0$ . If  $p > 2$ , then for any compact  $V \subset \Omega$  one can make use of the following inequality:

$$\|f\|_{p,V} \leq C_q(V)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{q,V}^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{2,V}^{\frac{1}{p}}, \quad (9)$$

which holds for arbitrary  $f \in S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ . Now having put, by definition,  $q > p \geq 1$ , the inequality (9) jointly with that of (2) gives rise to the searched estimation (7), where the constant  $\tilde{K}_{p,q} = K_{p,q}^p C_q(V)^{\frac{p-1}{p}} > 0$  is bounded, thus proving the lemma.  $\square$

*Proof. (Proof of Theorem 8).* Based on the lemmas above, one can proceed to proving Theorem 8. First we can observe that inequality (7) can be estimated, owing to the classical Young inequality, from the below as

$$|l_\varphi(f)|_V \leq \tilde{K}_{p,q} \|f\|_{2,V} \quad (10)$$

by means of a bounded linear functional  $l_\varphi|_V : (S_p^{(q)}; \|\cdot\|_{p,V}) \rightarrow \mathbb{C}$  on the Banach subspace  $(S_p^{(q)}|_V; \|\cdot\|_{q,V})$ , where  $l_\varphi(f)|_V = (\varphi|f)|_V := \int_V \bar{\varphi} f d\lambda$  for some  $\varphi \in (S_p^{(q)}|_V; \|\cdot\|_{q,V})' \simeq (S_p^{(q)}|_V; \|\cdot\|_{\tilde{q},V})$ ,  $1/\tilde{q} + 1/q = 1$ , under the constraint  $\|\varphi\|_{\tilde{q},V} = 1$ . Taking inequality (10) and the evident embedding condition  $(S_p^{(q)}; \|\cdot\|_{2,V}) \subset (S_p^{(q)}; \|\cdot\|_{\tilde{q},V})$ , one can calculate that

$$\sup_{\|f\|_{2,V} \neq 0} \frac{|l_\varphi(f)|_V}{\|f\|_{2,V}} = \|\varphi\|_{2,V} \leq \tilde{K}_{p,q}. \quad (11)$$

If now to choose an orthonormal basis  $\Phi|_V = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}|_V \subset (S_p^{(q)}|_V; \|\cdot\|_{2,V})$  for some  $N \in \mathbb{N}$ ,  $(\varphi_j|\varphi_k)|_V = \int_V \bar{\varphi}_j \varphi_k d\lambda = \delta_{jk}$ ,  $\|\varphi_j\|_{2,V} = 1$ ,  $j, k = 1, \bar{N}$ , one can observe that a function  $\varphi_a|_V := \langle a|\varphi \rangle_{N,V} = \sum_{j=1}^N \bar{a}_j \varphi_j|_V \in (S_p^{(q)}|_V; \|\cdot\|_{2,V})$  has the norm

$$\|\varphi_a\|_{2,V} = \left( \sum_{j=1}^N |a_j|^2 \right)^{1/2} = |a|_N, \quad (12)$$

where the vector  $\varphi|_V = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)^T|_V \in \left(S_p^{(q)}|_V\right)^N$  and took  $a \in \mathbb{E}^N$ , as an arbitrary vector. Having substituted the value of the norm (12) into (11), one obtains the inequality

$$|a|_N \leq \tilde{K}_{p,q}, \quad (13)$$

which should be combined with the imposed above condition  $\|\varphi_a\|_{\tilde{q},V} = 1$ . Taking into account that

$$\|\varphi_a\|_{\tilde{q},V}^{\tilde{q}} = \int_V |\langle a|\varphi\rangle_N|^{\tilde{q}} d\lambda = |a|_N^{\tilde{q}} \int_V |\langle \xi|\varphi\rangle_N|^{\tilde{q}} d\lambda = 1, \quad (14)$$

where  $a \in \mathbb{E}^N$  and  $\xi := a/|a|_N \in \partial\mathbb{D}^N$ ,  $|\xi|_N = 1$ , we can get rid of the variables  $\xi \in \partial\mathbb{D}^N$ , if to apply to the above norm equality (14) the averaging method [26]-[27] over the unit boundary  $\partial\mathbb{D}^N$ , which is equivalent to double averaging over the compact Lie group  $SU(N)$ , as all vectors  $\xi \in \partial\mathbb{D}^N$  allow the representation  $\xi = \xi_0 g \in \partial\mathbb{D}^N$  at the fixed vector  $\xi_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)_N \in \partial\mathbb{D}^N \subset \mathbb{C}^N$ ,  $|\xi_0| = 1$ , and  $g \in SU(N)$ . Namely, by integrating it with respect to the compact group measure  $d\omega_N(g)$ ,  $g \in SU(N)$ :

$$\begin{aligned} |a|_N^{\tilde{q}} \int_V d\lambda \left( \int_{SU(N)} d\omega_N(g) |\langle \xi_0 g|\varphi\rangle_N|^{\tilde{q}} \right) &= |a|_N^{\tilde{q}} k_N(\xi_0) \int_V d\lambda |\varphi|_N^{\tilde{q}} = \\ &= |a|_N^{\tilde{q}} \|\varphi|_N\|_{\tilde{q},V}^{\tilde{q}} k_N(\xi_0) \leq \omega_N, \end{aligned} \quad (15)$$

where  $k_N(\xi_0) > 0$  is the corresponding homogeneity parameter at  $\xi_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)_N \in \partial\mathbb{D}^N \subset \mathbb{C}^N$ , and  $\omega_N = |SU(N)| = \int_{SU(N)} d\omega_N(g)$  denotes the compact  $SU(N)$ -group volume, we can equivalently obtain from (15) that

$$|a|_N = \frac{\omega_N^{1/\tilde{q}}}{\|\varphi|_N\|_{\tilde{q},V} k_N(\xi_0)^{1/\tilde{q}}}. \quad (16)$$

Since the norm  $\|\varphi|_N\|_{\tilde{q},V} \leq \|\varphi|_N\|_{2,V} |\Omega|^{\frac{q-2}{2q}} = \left(\int_V \langle \bar{\varphi}|\varphi\rangle_N d\mu\right)^{1/2} |\Omega|^{\frac{q-2}{2q}} = N^{1/2} |\Omega|^{\frac{q-2}{2q}}$ , where we have denoted the bounded domain volume  $|\Omega| := \int_\Omega d\lambda$ , the equality (16) jointly with the condition (13) yields the final numerical estimation

$$\frac{\omega_N^{2(q-1)/q}}{N} \frac{|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}}{k_N(\xi_0)^{2(q-1)/q}} \leq \tilde{K}_{p,q}^2, \quad (17)$$

whose left hand side is bounded for those integers  $N \in \mathbb{N}$ , which ensure the embedded subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda) \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$  at given  $q \geq p$ , to be finite dimensional, that is  $\dim S_p^{(q)} = N < \infty$ , thus proving the theorem.

Regarding the critical case  $q = \infty$ , since the representation (10) is not more acceptable, the linear bounded functional used there should be replaced by the following natural expression:

$$|l_x(f)|_V \leq \tilde{K}_{p,\infty} \|f\|_{2,V} \quad (18)$$

for any  $f \in S_p^{(\infty)} \subset A_\infty(\Omega, d\lambda)$  and arbitrary compact  $V \subset \Omega$ , where at  $x \in V$  the value  $l_x(f)|_V := f(x)|_V \in \mathbb{C}$ . Having calculated the value  $\sup_{\|f\|_{2,V} \neq 0} \frac{|l_x(f)|_V}{\|f\|_{2,V}} = \|l_x\|_V \leq \tilde{K}_{p,\infty}$  and using the Riesz representation theorem for the functional  $l_x : (S_p^{(\infty)}|_V; \|\cdot\|_{2,V}) \rightarrow \mathbb{C}$  on the Hilbert subspace  $(S_p^{(\infty)}|_V; \|\cdot\|_{2,V}) \subset (A_p(V, d\lambda); \|\cdot\|_{2,V})$ , there exists for any  $x \in V \subset \Omega$  such a function  $g_x \in (S_p^{(\infty)}|_V; \|\cdot\|_{2,V})$  that

$$l_x(f)|_V = (g_x|f)|_V \quad (19)$$

and  $\|l_x\|_V = \|g_x\|_{2,V}$  for all  $f \in (S_p^{(\infty)}|_V; \|\cdot\|_{2,V})$ . If now  $\Phi_p^{(\infty)}|_V := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, \dots\}|_V \subset (S_p^{(\infty)}|_V; \|\cdot\|_{2,V})$  is a complete orthonormal set of functions, that is  $\|\varphi_j\|_{2,V} = 1$ ,  $(\varphi_j|\varphi_k)|_V = \int_V \bar{\varphi}_j \varphi_k d\mu = \delta_{jk}$ ,  $j, k \in \mathbb{N}$ , the related Parseval equality

$$\|g_x\|_{2,V}^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |(g_x|\varphi_j)|_V^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |\varphi_j(x)|_V^2 \quad (20)$$

combined with the inequality (19) yields the next one:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} |\varphi_j(x)|^2 \leq \tilde{K}_{p,\infty}^2, \quad (21)$$

which holds for any  $x \in V \subset \Omega$ . Having integrated the obtained inequality (21) over the whole space  $V \subseteq \Omega$ , we obtain that

$$\text{card } \Phi_p^{(\infty)} = N \leq \tilde{K}_{p,\infty}^2 \quad (22)$$

for some  $N = \dim S_p^{(\infty)}$ .  $\square$

The reasonings above, concerning the special case  $q = \infty$ , can be reformulated as the following theorem.

**Теорема 9.** *Let a linear closed subspace  $S_p^{(\infty)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , be identically embedded into a Banach space  $A_\infty(\Omega, d\lambda)$ , where  $d\lambda$  is the Lebesgue measure on a bounded complex domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ . Then the dimension of the closed subspace  $S_p^{(\infty)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$  proves to satisfy the inequality  $\dim S_p^{(\infty)} = N \leq \tilde{K}_{p,\infty}^2$  for some bounded constant  $\tilde{K}_{p,\infty} > 0$ .*

### 3. Conclusion

We considered closed linear subspaces  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$  of the functional Bergman space  $(A_p(\Omega, d\lambda); \|\cdot\|_p)$ ,  $p > 1$ , allowing the identical embedding into the Bergman space  $(A_q(\Omega, d\lambda); \|\cdot\|_q)$ ,  $q > p \geq 1$ , regarding the Lebesgue measure  $d\lambda$  on a bounded complex domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ . Based on the averaging technique on the unitary Lie group  $SU(N)$ , we derived the numerical estimation  $\frac{\omega_N^{2(q-1)/q}}{N} \frac{|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}}{k_N(\xi_0)^{2(q-1)/q}} \leq \tilde{K}_{p,q}^2$  for the dimension  $\dim S_p^{(q)} = N$  of a closed linear subspace  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $p \geq 1$ , embedded into a Bergman space  $A_q(\Omega, d\lambda)$ ,  $q > p \geq 1$ , where  $\tilde{K}_{p,q} > 0$  is some some bounded constant,  $\omega_N = |SU(N)|$  is the volume of the compact unitary group  $SU(N)$ ,  $|\Omega|$  is the volume of the bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  and  $k_N(\xi_0) > 0$ — is the corresponding homogeneity parameter at  $\xi_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)_N \in \partial \mathbb{D}^N \subset \mathbb{C}^N$ .

### 4. Acknowledgements

*The authors are much indebted to A. M. Plichko, Ya. V. Mykytyuk and G. Pisier for both instructive discussions of diverse aspects of the work and useful remarks, comments and suggestions.*

Declaration: Author declares no conflict of interest.

### References

- 1 A.K.Prykarpatsky, D.Blackmore, A solution set analysis of a nonlinear operator equation using a Leray Schauder type fixed point approach, Topology 48 (2009), 182-185, <https://doi.org/10.1016/j.top.2009.11.017>.
- 2 P.L.Butzer, H. Berens, Approximation, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967.
- 3 M.I.Kadec, A.Pełczyński, Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces  $L_p$ , Studia Math., 21 (1962), 161-176, <https://doi.org/10.4064/sm-21-2-161-176>.
- 4 S.G.Kreĭn, Yu.I. Petunin, and E.M.Semënov, Interpolation of linear operators, Translations of Mathematical Monographs, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982.
- 5 Yu.I.Lyubich, O.A.Shatalova, Isometric embeddings of finite-dimensional  $l_p$ -spaces over the quaternions, Algebra and Analysis, 16(2005), №1, 9–24, <https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00842-8>.
- 6 A.Michalak, J.Grała-Michalak, On constructions of isometric embeddings of nonseparable  $L_p$  spaces,  $0 < p \leq 2$ . Commentationes Mathematicae, 48(2008), №2, 129-145.
- 7 P.W. Nowak, On coarse embeddibility into  $l_p$  spaces and conjecture of Dranishnikov, arXiv:math/0410566v1 [math.MG] 27 Oct. 2004.
- 8 G. Pisier, The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry, Cambridge University Press, 2010.
- 9 A. Plichko, Rate of Decay of the Bernstein Numbers, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 9(2012), №1, 1-14.

- 10 Y.A. Prykarpatsky, P.Y. Pukach, M.I.Vovk, M.Greguš, Some Remarks on Smooth Mappings of Hilbert and Banach Spaces and Their Local Convexity Property. Axioms, 13(2024), 227. <https://doi.org/10.3390/axioms13040227>.
- 11 C. Foias, G.R.Sell, R.Temam Inertial manifolds for nonlinear evolution equations. J.Diff.Eqns., 73(1988), p. 309-353, [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(88\)90110-6](https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90110-6).
- 12 T.Kato Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proceed. Symp. On Pure Appl. Math., 45(1986), №2, 9-23.
- 13 O.A.Ladyzhenskaya, Finite-dimensionality of bounded invariant sets for Navier–Stokes systems and other dissipative systems, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 163 (1987), 105–129.
- 14 O.A. Ladyzhenskaya, Estimates of the fractal dimension and of the number of deterministic modes for invariant sets of dynamical systems, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1987, 163, p. 105–129; <https://www.researchgate.net/publication/2428834>; Finite dimensional subspaces of  $L_p$ .
- 15 H.Ninomiya Some remarks on inertial manifolds. J Math.Kyoto Univ., 32, 1992, №4, p. 667-688.
- 16 T.Tao An introduction to measure theory, Graduate Studies in Mathematics, v. 126, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2011.
- 17 R. Temam Infinite-dimensional dynamical systems in fluid mechanics, Proceed. Symp. On Pure Appl. Math., 45, (1986), №2, p. 431-445.
- 18 B.Subramanian, On the inclusion  $L_p(\mu) \subset L_q(\mu)$ . The American Mathematical Monthly, 85 (1978), №6, 479-481.
- 19 A.Grothendieck, Sur certains sous-espaces vectoriels de  $L_p$ . Canadian J. Math. 6 (1954), 158–160.
- 20 Y.Liu, J.Wu, Y.Xiong, The Grothendieck theorem in Bergman spaces. arXiv:2511.01521v1 [math.CV] 3 Nov 2025.
- 21 P.D.Lax, Functional analysis, Wiley-Interscience 2002.
- 22 W.Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, 1991.
- 23 S.Banach, Theorie des operations lineaires, PWN, Warszawa, 1932.
- 24 T.Banakh, W.E.Lyantse, Ya.V. Mykytyuk,  $\infty$ -Convex sets and their applications to the proof of certain classical theorems of functional analysis. Matematychni Studii. 11 (1999), №1, 83-84.
- 25 Reed M. and Simon B., Methods of modern mathematical physics, vol. 1. Functional analysis, Academic Press, New York, 1972.
- 26 John F., Plane waves and spherical means. Interscience Publisher, London, 1955.
- 27 N. Vilenkin, Special Functions And Theory Of Group Representations. AMS, Providence, 1968.

## Бергман кеңістіктеріндегі тұйық сызықтық ішкі кеңістіктер туралы кейбір ескертулер

**А.К. Прыкарпатский<sup>1</sup>, А.А. Балинский<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Компьютерлік ғылымдар және математика факультеті, Краков технологиялық университеті, Варшавская көшесі, 24, Краков, Польша; Есептеу математикасы кафедрасы, «Львов политехникасы» Ұлттық университеті, Степан Бандера көшесі, 12, Львов, 79013, Украина.

<sup>2</sup> Математика факультеті, Кардифф университеті, Сенгенидд Роуд (Senghennydd Road) көшесі, Кардифф CF24 4AG, Ұлыбритания.

**Аннотация.** Гротендик пен Субраманианның классикалық нәтижелері  $L_p$  кеңістіктеріне ішкі кеңістіктерді енгізудің іргелі қағидаларын қалыптастырды, ал кейінгі зерттеулер бұл идеяларды шектелген комплекс облыстарында анықталған голоморфты функциялардың Бергман кеңістіктеріне жалпылады. Осы тұрғыдан алғанда, интегралдану шарттары күштірек болатын Бергман кеңістіктеріне енгізілген тұйық ішкі кеңістіктердің өлшемділігіне қатысты сандық бағаларды зерттеу ерекше өзектілікке ие.

Бұл жұмыста шенелген  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$  облысында Лебег өлшеміне қатысты  $p$ -интегралданатын голоморфты функциялардың  $A_p(\Omega, d\lambda)$  Бергман кеңістігінің тұйық сызықтық ішкі кеңістіктері үшін Гротендик типіндегі ақырлы өлшемділік мәселесі қарастырылады. Атап айтқанда,  $q > p \geq 1$  жағдайында  $A_p(\Omega, d\lambda)$  кеңістігінің  $A_q(\Omega, d\lambda)$  Бергман кеңістігіне үзіліссіз енгізілетін тұйық сызықтық ішкі кеңістіктері зерттеледі. Кез келген  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $S_p^{(q)} \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$  тұйық сызықтық ішкі кеңістігінің ақырлы өлшемді болатыны дәлелденді. Сонымен қатар,  $\dim S_p^{(q)} = N$  болғанда, оның өлшемділігі үшін

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2026, Том 154, №1  
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2026, Том 154, №1

$\frac{\omega_N^{2(q-1)/q}}{N} \frac{|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}}{k_N(\xi_0)^{2(q-1)/q}} \leq \tilde{K}p, q^2$  сандық бағалауы алынады, мұндағы  $\omega_N = |SU(N)|$  —  $SU(N)$  ықшам арнайы унитарлық тобының көлемі,  $|\Omega|$  —  $\Omega$  облысының көлемі,  $k_N(\xi_0) = \xi_0 = (1, 0, \dots, 0)_N \in \partial \mathbb{D}^N$  нүктесіне сәйкес келетін біртектілік параметрі, ал  $\tilde{K}p, q > 0$  — енгізу тұрақтысы.

**Түйін сөздер:** түйық сызықтық ішкі кеңістіктер, Бергман кеңістігі, Банах функциялық кеңістігі, ақырлы өлшемділік, Лебег өлшемі, енгізу.

## Некоторые замечания о замкнутых линейных подпространствах в пространствах Бергмана

А.К. Прыкарпатский<sup>1</sup>, А.А. Балинский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Факультет компьютерных наук и математики, Краковский технологический университет, ул. Варшавская, 24, Краков, Польша; Кафедра вычислительной математики, Национальный университет «Львовская политехника», ул. Степана Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина.

<sup>2</sup> Математический факультет, Кардиффский университет, улица Сенгенидд Роуд (Senghennydd Road), Кардифф CF24 4AG, Великобритания.

**Аннотация.** Классические результаты Гротендика и Субраманиана заложили фундаментальные принципы вложения подпространств в пространства  $L_p$ , тогда как более поздние исследования распространили эти идеи на пространства Бергмана голоморфных функций, определённых на ограниченных комплексных областях. В этом контексте особую актуальность приобретает исследование количественных оценок размерности замкнутых подпространств, вложенных в пространства Бергмана с более сильными условиями интегрируемости.

В работе исследуется задача типа Гротендика о конечномерности для замкнутых линейных подпространств пространства Бергмана  $A_p(\Omega, d\lambda)$  голоморфных функций,  $p$ -интегрируемых относительно меры Лебега на ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ , непрерывно вложенных в пространство Бергмана  $A_q(\Omega, d\lambda)$  при  $q > p \geq 1$ . Доказано, что всякое замкнутое линейное подпространство  $S_p^{(q)} \subset A_p(\Omega, d\lambda)$ ,  $S_p^{(q)} \hookrightarrow A_q(\Omega, d\lambda)$ , является конечномерным. Более того, если  $\dim S_p^{(q)} = N$ , то размерность  $N$  удовлетворяет количественной оценке  $\frac{\omega_N^{2(q-1)/q}}{N} \frac{|\Omega|^{\frac{2-q}{q}}}{k_N(\xi_0)^{2(q-1)/q}} \leq \tilde{K}p, q^2$ , где  $\omega_N = |SU(N)|$  — объём компактной унитарной группы  $SU(N)$ ,  $|\Omega|$  — объём области  $\Omega$ ,  $k_N(\xi_0)$  — соответствующий параметр однородности в точке  $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)_N \in \partial \mathbb{D}^N$ , а  $\tilde{K}_{p,q} > 0$  — константа вложения.

**Ключевые слова:** замкнутые линейные подпространства, пространство Бергмана, банахово функциональное пространство, конечномерность, мера Лебега, вложение.

## References

- 1 A.K.Prykarpatsky, D.Blackmore, A solution set analysis of a nonlinear operator equation using a Leray Schauder type fixed point approach, *Topology* 48 (2009), 182-185, <https://doi.org/10.1016/j.top.2009.11.017>.
- 2 P.L.Butzer, H. Berens, *Approximation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967.
- 3 M.I.Kadec, A.Pełczyński, Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces  $L_p$ , *Studia Math.*, 21 (1962), 161-176, <https://doi.org/10.4064/sm-21-2-161-176>.
- 4 S.G.Kreĭn, Yu.I. Petunĭn, and E.M.Semĕnov, *Interpolation of linear operators*, *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982.
- 5 Yu.I.Lyubich, O.A.Shatalova, Isometric embeddings of finite-dimensional  $l_p$ -spaces over the quaternions, *Algebra and Analysis*, 16(2005), №1, 9–24, <https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00842-8>.
- 6 A.Michalak, J.Grala-Michalak, On constructions of isometric embeddings of nonseparable  $L_p$  spaces,  $0 < p \leq 2$ . *Commentationes Mathematicae*, 48(2008), №2, 129-145.
- 7 P.W. Nowak, On coarse embeddibility into  $l_p$  spaces and conjecture of Dranishnikov, *arXiv:math/0410566v1 [math.MG]* 27 Oct. 2004.

- 8 G. Pisier, The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry, Cambridge University Press, 2010.
- 9 A. Plichko, Rate of Decay of the Bernstein Numbers, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 9(2012), №1, 1-14.
- 10 Y.A. Prykarpatsky, P.Y. Pukach, M.I.Vovk, M.Greguš, Some Remarks on Smooth Mappings of Hilbert and Banach Spaces and Their Local Convexity Property. Axioms, 13(2024), 227. <https://doi.org/10.3390/axioms13040227>
- 11 C. Foias, G.R.Sell, R.Temam Inertial manifolds for nonlinear evolution equations. J.Diff.Eqns., 73(1988), p. 309-353, [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(88\)90110-6](https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90110-6).
- 12 T.Kato Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proceed. Symp. On Pure Appl. Math., 45(1986), №2, 9-23.
- 13 O.A.Ladyzhenskaya, Finite-dimensionality of bounded invariant sets for Navier–Stokes systems and other dissipative systems, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 163 (1987), 105–129.
- 14 O.A. Ladyzhenskaya , Estimates of the fractal dimension and of the number of deterministic modes for invariant sets of dynamical systems, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1987, 163, p. 105–129; <https://www.researchgate.net/publication/2428834>; Finite dimensional subspaces of  $L_p$ .
- 15 H.Ninomiya Some remarks on inertial manifolds. J Math.Kyoto Univ., 32, 1992, №4, p. 667-688.
- 16 T.Tao An introduction to measure theory, Graduate Studies in Mathematics, v. 126, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2011.
- 17 R. Temam Infinite-dimensional dynamical systems in fluid mechanics, Proceed. Symp. On Pure Appl. Math., 45, (1986), №2, p. 431-445.
- 18 B.Subramanian , On the inclusion  $L_p(\mu) \subset L_q(\mu)$  . The American Mathematical Monthly, 85 (1978), №6, 479-481.
- 19 A.Grothendieck, Sur certains sous-espaces vectoriels de  $L_p$ . Canadian J. Math. 6 (1954), 158–160.
- 20 Y.Liu, J.Wu , Y.Xiong , The Grothendieck theorem in Bergman spaces. arXiv:2511.01521v1 [math.CV] 3 Nov 2025.
- 21 P.D.Lax , Functional analysis, Wiley-Interscience 2002.
- 22 W.Rudin , Functional Analysis, McGraw-Hill, 1991.
- 23 S.Banach , Theorie des operations lineaires, PWN, Warszawa, 1932.
- 24 T.Banach , W.E.Lyantse ,Ya.V. Mykytyuk,  $\infty$ -Convex sets and their applications to the proof of certain classical theorems of functional analysis. Matematychni Studii. 11 (1999), №1, 83-84.
- 25 Reed M. and Simon B., Methods of modern mathematical physics, vol. 1. Functional analysis, Academic Press, New York, 1972.
- 26 John F., Plane waves and spherical means. Interscience Publisher, London, 1955.
- 27 N. Vilenkin , Special Functions And Theory Of Group Representations. AMS, Providence, 1968.

#### Information about the authors:

Anatolij Karolevich Prykarpatski – Dr hab., Professor, Department of Computer Science and Mathematics, Cracow University of Technology, 24 Warszawska Street, Cracow, Poland; Department of Computational Mathematics, National Lviv Polytechnic University, 12 Stepan Bandera Street, Lviv, 79013, Ukraine, <https://orcid.org/0000-0001-5124-5890>

Alexander Balinsky –Professor, Mathematical Department, Cardiff University, Senghennydd Road, Cardiff CF24 4AG, Great Kingdom <https://orcid.org/0000-0002-8151-4462>

Анатолий Каролеви́ч Прыкарпатський — хабіліт докторы (Dr. hab.), професор, Комп'ютерлік ғылымдар және математика факультеті, Краков технологиялық университеті, Варшавская көшесі, 24, Краков, Польша; Есептеу математикасы кафедрасы, «Львов политехникасы» Ұлттық университеті, Степан Бандера көшесі, 12, Львов, 79013, Украина, <https://orcid.org/0000-0001-5124-5890>

Александр Балинский — профессор, Математика факультеті, Кардифф университеті, Сенгенидд Роуд (Senghennydd Road) көшесі, Кардифф CF24 4AG, Ұлыбритания, <https://orcid.org/0000-0002-8151-4462>

**Received: 13.01.2026. Revised: 17.02.2026.**

**Approved: 31.03.2026. Available online: 30.05.2026.**



Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2026, Том 154, №1  
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2026, Том 154, №1

Мақала  
FTAMP: 16.31.21

## ҚАЗАҚ ТІЛІНДЕГІ СИНТЕТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ АНАЛИТИКАЛЫҚ СЕБЕПТІК ҚҰРЫЛЫМДАРДЫҢ ТИПОЛОГИЯЛЫҚ АЙЫРМАШЫЛЫҒЫ<sup>1</sup>

Р. Таберхан<sup>1</sup>, М.А. Самбетбаева<sup>2\*</sup>

<sup>1,2</sup> Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаев, 2, Астана, 010008,  
Қазақстан

<sup>1</sup> [roman.tn82@gmail.com](mailto:roman.tn82@gmail.com), <sup>2</sup> [\\*sambetbayeva\\_ma\\_1@enu.kz](mailto:*sambetbayeva_ma_1@enu.kz)

**Аннотация.** Мақалада KazCausal сұлбасы негізінде қазақ тіліндегі себеп-салдарлық құрылымдарды қолмен аннотациялау және құрылымдық-семантикалық тұрғыдан жүйелеу әдістемесі ұсынылады.

Зерттеудің мақсаты – қазақ тіліндегі себептілікті білдіретін морфологиялық, лексикалық және синтаксистік құралдарды формалды аннотациялық модель арқылы сипаттау және табиғи тілді өңдеу міндеттеріне бейімделген корпус құрудың ғылыми негізін көрсету.

Зерттеу нысаны ретінде ғылыми, публицистикалық және нормативтік мәтіндерден іріктелген 1250 каузалды сөйлемдер алынды. Барлық сөйлемдер себеп-салдарлық қатынасты білдіретін тілдік бірлік ретінде қарастырылып, үш негізгі құрылымдық типке бөлінді: SYNTHETIC\_CAUSE, ANALYTICO\_SYNTHETIC\_CAUSE және ANALYTIC\_CAUSE.

Нәтижелер синтетикалық құрылымдардың 431 сөйлемін (34,5%), аналитика-синтетикалық құрылымдардың 425 сөйлемін (34,0%), ал аналитикалық құрылымдардың 394 сөйлемін (31,5%) құрайтынын көрсетті. Ұсынылған сұлба себеп фрагментін, салдар фрагментін, каузалдық маркерді, құрылымдық типті, нақты морфологиялық форманы және семантикалық ішкі типті қатар белгілеуге мүмкіндік береді. Аннотация сапасы  $F1=0.81$  және Cohen's  $k=0.72$  көрсеткіштері арқылы бағаланды.

Зерттеу нәтижелері қазақ тіліндегі себеп-салдарлық қатынастарды автоматты анықтауға арналған типологиялық тұрғыдан бейімделген NLP ресурстарын құруға негіз болады.

**Түйін сөздер:** Мәтінді аннотациялау, корпус лингвистикасы, NLP, агглютинативті тілдер, KazCausal, себеп-салдарлық қатынастар, аннотациялаушылар келісімі

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2026/1.2>

**2000 Mathematics Subject Classification: 68T50,68T07**

### 1. Кіріспе

Себеп-салдарлық қатынастар табиғи тілдегі түсіндірмелі, аргументативтік және нормативтік құрылымдардың негізінде жатқан іргелі семантикалық байланыстардың бірі болып табылады. Олар оқиғалардың уәждемесі, салдары, логикалық тізбегі, сондай-ақ

<sup>1</sup>Зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетімен қаржыландырылған (грант №AP22686434)

эмоциялық және мінез-құлықтық реакциялар туралы ақпаратты жеткізуге мүмкіндік береді. Сондықтан себептілік мәтіннің мағыналық ұйымдасуын талдауда негізгі рөл атқарады.

Табиғи тілді өңдеудің (Natural Language Processing, NLP) қолданбалы міндеттерінде себеп-салдарлық құрылымдар білімді автоматты түрде шығару, логикалық қорытынды жасау, дәлелдеме құрылымдарын талдау, түсіндіру генерациясы, эмоция мен өшпенді риториканы анықтау, мәтінге негізделген диагностикалық жүйелер құру сияқты бағыттарда кеңінен қолданылады.

Адам қоршаған ортадағы құбылыстарды көбіне себеп пен салдар байланысы арқылы түсінеді: бір оқиға екіншісін туындатады, әсер етеді немесе шектейді. Қазақ тілі де кез келген табиғи тіл секілді себеп пен салдарды білдірудің ең бай және көпқабатты жүйесіне ие. Мұндай конструкциялар әрекеттің уәжін, эмоциялық немесе әлеуметтік реакцияны, санкциялық талапты, сондай-ақ мақсат пен шартты көрсету үшін қолданылады.

Алайда, ағылшын (Penn Discourse Treebank, BECauSE Corpus), қытай, неміс және араб тілдерінде себептілікке арналған ірі аннотацияланған корпустар жасалғанымен, қазақ тілі бұл бағытта ұзақ уақыт бойы назардан тыс қалып келді. Бұған агглютинативті морфологиялық құрылымдардың күрделілігі және осы тілге арнайы әзірленген стандартталған аннотациялық схеманың болмауы себеп.

Себептілік мағынасы қазақ тілінде жиі уақыттық, шартты, модальдылық, эмоциялық және риторикалық мағыналармен қиылысып келеді. Сондықтан оны формалдандыру тек семантиканы ғана емес, морфология-синтаксистік өзара әрекеттесуді қатар талдауды талап етеді.

Осы олқылықтың орнын толтыру мақсатында бұл жұмыста KazCausal аннотациялық схемасы – қазақ тіліндегі себеп-салдарлық құрылымдарды лингвистикалық және типологиялық тұрғыдан жүйелі сипаттауға бағытталған алғашқы кешенді тәсіл ұсынылады. Сызба агглютинативті морфологияға тән формаларды (есімше түлғалары: -ған, -атын, морфологиялық маркерлер: -ғандықтан, -май, септік формалары: -нан, -на, аналитикалық көрсеткіштер: үшін, кейін, соң, қарамастан және т.б.) қамтып, себептік қатынастардың мағыналық жіктелімімен байланыстыра аннотациялауға мүмкіндік береді.

Бұл зерттеу бұрын ұсынылған KazCausal: Manual Annotation of Causal Constructions in the Kazakh Language атты конференциялық жұмыстың жалғасы болып табылады [1]. Алдыңғы жұмыста KazCausal сұлбасының бастапқы аннотациялық принциптері ұсынылса, осы мақалада корпус құрылымы кеңейтіліп, себептік құрылымдардың типологиялық айырмашылықтары, статистикалық таралуы және аннотация сапасын бағалау өлшемдері тереңірек қарастырылады.

## 2. Зерттеу мәселесі бойынша әдебиеттерге шолу

Табиғи тілдегі себеп-салдарлық қатынастарды зерттеу – лингвистика мен табиғи тілді өңдеу NLP салаларындағы негізгі бағыттардың бірі. Себептілік когнитивтік, логикалық және прагматикалық процестердің өзегінде жатыр: ол оқиғаларды түсіндіру, шешімдерді уәждеу, эмоциялар мен санкцияларды интерпретациялау және әлеуметтік салдарларды сипаттау үшін қолданылады. Алайда, оның маңыздылығына қарамастан, мәтіндегі себептілікті аннотациялау күрделі мәселе болып қала береді. Бұл күрделілік лексикалық және синтаксистік алуандық тұрғысынан, тілаларлық айырмашылықтармен және уақыт, шарттылық, корреляция, модальдық сияқты басқа да семантикалық категориялармен өзара қиылысуымен байланысты.

В тексте статьи недостаточно чётко раскрыт вопрос архитектуры обработки данных радиолокационного сканирования. Неясно, осуществляется ли обработка сигналов и принятие решений в режиме реального времени непосредственно на борту мобильного робототехнического комплекса либо вычислительная обработка выполняется на удалённом сервере с последующей передачей результатов обратно на платформу. В случае бортовой обработки целесообразно уточнить технические характеристики вычислительного модуля (тип аппаратной платформы, вычислительная производительность, быстродействие, габариты и энергопотребление). Если же обработка данных реализована на серверной стороне,

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2026, Том 154, №1  
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2026, Том 154, №1



представляется важным указать параметры канала связи и оценить суммарную задержку принятия решения, включая передачу данных и обратную коммуникацию с мобильным роботом.

В статье не приведено достаточного описания применяемых методов и алгоритмов обработки радиолокационных данных, используемых для обнаружения взрывных устройств. Просьба уточнить, какие именно алгоритмические подходы применялись (например, методы цифровой обработки сигналов, признаки и критерии детектирования, использование машинного обучения или нейросетевых моделей), а также обосновать их выбор и эффективность в контексте поставленной задачи. В тексте статьи недостаточно чётко раскрыт вопрос архитектуры обработки данных радиолокационного сканирования. Неясно, осуществляется ли обработка сигналов и принятие решений в режиме реального времени непосредственно на борту мобильного робототехнического комплекса либо вычислительная обработка выполняется на удалённом сервере с последующей передачей результатов обратно на платформу. В случае бортовой обработки целесообразно уточнить технические характеристики вычислительного модуля (тип аппаратной платформы, вычислительная производительность, быстродействие, габариты и энергопотребление). Если же обработка данных реализована на серверной стороне, представляется важным указать параметры канала связи и оценить суммарную задержку принятия решения, включая передачу данных и обратную коммуникацию с мобильным роботом.

В статье не приведено достаточного описания применяемых методов и алгоритмов обработки радиолокационных данных, используемых для обнаружения взрывных устройств. Просьба уточнить, какие именно алгоритмические подходы применялись (например, методы цифровой обработки сигналов, признаки и критерии детектирования, использование машинного обучения или нейросетевых моделей), а также обосновать их выбор и эффективность в контексте поставленной задачи.

Халықаралық деңгейде себептілікті аннотациялауға арналған әртүрлі аспектілерді қамтитын көптеген зерттеулер жасалған. Мысалы, VerbNet [2] және PropBank [3] себепті етістіктерді және олардың семантикалық рөлдерін жүйелейді. Бұл ресурстар семантикалық талдау міндеттері үшін пайдалы болғанымен, олар тек етістіктермен ғана шектеледі. Сонымен қатар себептілікті басқа грамматикалық тәсілдермен, атап айтқанда, шылаулар, жалғаулықтар, морфологиялық формалар арқылы анықтау жолдарын қарастырмайды. Ал FrameNet корпусы семантикалық фреймдерге сүйене отырып, лексикалық бірліктерді концептуалдық сценарийлермен байланыстырады [4]. Дегенмен, бұл ресурса себептілік CAUSATION, THWARTING, PURPOSE, EXPLANATION секілді көптеген өзге де фреймдер арқылы берілген, бірақ біртұтас себептілік моделі ұсынылмаған.

ASFALDA жобасы француз тілі үшін себептіліктің барынша жүйелі иерархиясын ұсынды [5]. Бұл зерттеу бір тіл аясында да себептіліктің толық моделін құру типологиялық бейімдеу мен лексико-грамматикалық біріздендіруді талап ететінін көрсетті.

Penn Discourse Treebank (PDTB) дискурстық байланыстарды, соның ішінде себептілікті, көпреттік таңбалау (мысалы, бір мезетте себепті және қарсы қоюшы) мүмкіндігімен аннотациялайды [6]. Алайда, бұл ресурс тек сөйлемдер деңгейіндегі дискурстық байланыстарға баса назар аударады да, етістіктік немесе морфологиялық конструкцияларды қамтымайды.

Біздің зерттеуіміз үшін ең өзекті болып табылатын аннотациялық схема BECauSE 2.0 болып табылады [7]. Бұл схема себептілікті мағыналық өзек ретінде қарастырады және оны білдіретін барлық құрылымдарды морфологиялық, синтаксистік және прагматикалық маркерлерді қамтиды. Аталған BECauSE-тің маңызды жаңалығы – қиылысып келетін семантикалық қатынастарды аннотациялау идеясы, мұнда себептілік уақыт, шарттылық, корреляция, санкция, эмоциялық реакция және басқа да мәндермен қатар жүруі мүмкін. Сонымен қатар, онда себептіліктің ішкі типтері жіктелінген. Бұл ішкі типтердің атаулары: consequence, motivation, purpose. Олардың айқындық дәрежесі әртүрлі болуы мүмкін. Алайда, BE-CauSE корпусы ағылшын тіліне арналғандықтан, ол агглютинативті тілдердің типологиялық ерекшеліктерін ескермейді. Сондықтан қазақ тілі үшін себеп-салдарлық конструкцияларды

аннотациялау жергілікті морфологиялық және синтаксистік ерекшеліктерді бейімдеуді талап етеді.

*Халықаралық аннотациялық сұлбаларды қазақ тіліне тікелей қолданудың шектеулері*

PDTB, FrameNet және BECauSE сияқты халықаралық аннотациялық сұлбалар себептілікті сипаттау үшін маңызды теориялық және әдістемелік негіз береді. Алайда оларды қазақ тіліне тікелей қолдану бірқатар типологиялық қиындықтарға алып келеді. Бұл қиындықтардың басты себебі – қазақ тілінің агглютинативті құрылымы және себептік мағынаның көбіне сөздің ішкі морфологиялық құрамында берілуі.

Ағылшын тілі сияқты аналитикалық тілдерде себептілік көбіне because, since, therefore, as а result сияқты дербес лексикалық немесе дискурстық маркерлер арқылы беріледі. Мұндай жағдайда себептік көрсеткішті жеке токен ретінде белгілеу салыстырмалы түрде жеңіл. Ал қазақ тілінде себептік мағына көбіне -ғандықтан, -етіндіктен, -ғаны үшін, -ған соң, -май/-мей сияқты күрделі морфологиялық және морфосинтаксистік тұлғалар арқылы беріледі. Бұл тұлғаларда шақтық, қимылдық, себептік, болымсыздық және септік мағыналар бір форма ішінде қабаттасып келеді.

Мысалы, «Кешіккендіктен, ол жиналысқа қатыса алмады» сөйлеміндегі «кешіккендіктен» тұлғасы жеке жалғаулық емес, түбір, есімше тұлғасы, номиналдану және септік мағынасының біріккен формасы болып табылады. Сондықтан мұндай бірлікті тек дискурстық маркер ретінде белгілеу жеткіліксіз. Оны морфологиялық құрылым, каузалдық маркер және себеп фрагментінің құрамдас бөлігі ретінде қатар қарастыру қажет.

Сонымен қатар қазақ тілінде кейбір формалар бір мезгілде бірнеше мағына бере алады. Мысалы, -ған соң және -ғаннан кейін тұлғалары бір контексте уақыттық ретті, екінші контексте себептік тәуелділікті, үшінші жағдайда себеп-мезгілдік қабаттасуды білдіруі мүмкін. Осыған байланысты KazCausal схемасы халықаралық аннотациялық тәжірибені қазақ тілінің морфологиялық және семантикалық ерекшеліктеріне бейімдейді. Атап айтқанда, ол себеп фрагментін, салдар фрагментін, маркерді, құрылымдық типті және семантикалық ішкі типті бір мезгілде белгілеуге мүмкіндік береді.

Соңғы жылдары табиғи тілдерді өңдеу, яғни NLP саласында себеп-салдарлық қатынастарды аннотациялау бағытында елеулі ілгерілеу байқалады. Арнайы корпустар мен аннотациялық сұлбаларды жасау себептік байланыстарды неғұрлым нақты әрі жүйелі сипаттауға мүмкіндік береді. CaTeRS [8], Richer Event Description [9] және TimeML Causal [10] сияқты жобалар осы салаға айтарлықтай үлес қосты. Алайда бұл жобалардың көпшілігі оқиға құрылымымен ғана шектеледі немесе себептілікті нақты морфосинтаксистік маркерлермен байланыстырмай, интуитивті түсініктерге сүйене отырып қарастырады.

2024 жылы ұсынылған EventFull құралы осы саладағы зерттеулер арасындағы маңызды жетістіктердің бірі болып саналады [11]. Бұл құрал мәтіндегі оқиғалар арасындағы уақыттық, себептік және кореференттік қатынастарды кешенді әрі келісімді түрде аннотациялауға мүмкіндік береді. Аннотациялау үдерісін жеңілдетіп, аннотаторлар арасындағы сәйкестікті арттыру арқылы NLP саласындағы болашақ зерттеулер мен қолданбалар үшін құнды ресурсқа айналды. Сондай-ақ, себептілікті анықтаудың заманауи әдістеріне арналған кең көлемді шолу жарық көріп, бар тәсілдерді жүйелеп, негізгі ғылыми және технологиялық қиындықтарды анықтап берді.

Халықаралық сұлбалар қазақ тіліндегі себептілікті сипаттау үшін маңызды теориялық база ұсынғанымен, оларды қазақ тіліне механикалық түрде көшіру жеткіліксіз. Қазақ тілінде себептік мағына түбір, есімше/көсемше тұлғасы, болымсыздық көрсеткіші, номиналдану, септік және шылау элементтері арқылы бір морфологиялық кешенде берілуі мүмкін. Kaz-Causal сұлбасы дәл осы ерекшелікті есепке алып, халықаралық тәжірибені қазақ тілінің типологиялық табиғатына бейімдейді.

Кесте 1-де көрсетілгендей, KazCausal сұлбасының басты ерекшелігі – себептілікті қазақ тіліндегі морфологиялық және морфосинтаксистік құрылымдармен бірге қарастыруы. Бұл

**Кесте 1 – Халықаралық аннотациялық сұлбалар мен KazCausal сұлбасының салыстырмалы сипаттамасы**

| Критерий                        | PDTB                  | FrameNet                     | BECauSE 2.0              | KazCausal                                           |
|---------------------------------|-----------------------|------------------------------|--------------------------|-----------------------------------------------------|
| Негізгі объект                  | Дискурстық қатынас    | Семантикалық фрейм           | Себептік конструкция     | Қазақ тіліндегі себеп-салдарлық құрылым             |
| Аннотация деңгейі               | Сөйлемаралық байланыс | Лексикалық бірлік және фрейм | Конструкция және қатынас | Морфология, маркер, себеп, салдар, семантикалық тип |
| Морфологиялық маркерлер         | Қамтымайды            | Ішінара                      | Шектеулі                 | Арнайы қамтиды                                      |
| Агглютинативті тілге бейімделуі | Жоқ                   | Ішінара                      | Жоқ                      | Иә                                                  |
| Қабаттасқан қатынастар          | Ішінара               | Шектеулі                     | Иә                       | Иә, арнайы белгіленеді                              |
| Қазақ тіліне бейімделуі         | Жоқ                   | Жоқ                          | Жоқ                      | Иә                                                  |

тәсіл агглютинативті тілдердегі себептік маркерлерді жеке лексема ретінде ғана емес, толық формант және себеп фрагментінің құрамдас бөлігі ретінде белгілеуге мүмкіндік береді.

Аталған шолу сөйлем және мәтін деңгейінде қолданылатын әдістер таксономиясын ұсына отырып, модельдердің дәлдігі мен әмбебаптығын жетілдіру қажеттілігін анықтады.

Ал соңғы кездегі зерттеулерде себеп-салдарлық байланыстарды анықтау үшін терең нейрондық желілердің архитектураларын қолдану кеңінен таралуда. Атап айтқанда, 2025 жылғы эмпирикалық зерттеу BioBERT-BiGRU сияқты модельдердің себепті байланыстарды автоматты түрде айқындауда жоғары тиімділікке ие екенін көрсетті [12]. Бұл нәтижелер модель архитектурасы мен трансферлік оқыту стратегияларын дұрыс таңдаудың маңызды екенін дәлелдейді.

Кең таралған, кең қолданысқа ие ағылшын, француз, араб, итальян т.б. және басқа тілдер үшін аннотталған конструкцияларды анықтауға бағытталған зерттеулер де, корпустар да, сол салаға арналған ғылыми ізденістер де кездеседі. Алайда құрылымдық жүйесі жағынан агглютинативті тілдер қатарына кіретін қазақ тілінің құрылымдық конструкцияларына қатысты зерттеу тәжірибелері аз ғана деуге болады. Қазақ тілінің ұлттық корпусы Qazcorpus.kz [13] және Qazcorpora.kz [14] сияқты жекелеген бастамалар бар болғанымен, себеп-салдарлық конструкцияларға арналған арнайы корпус әлі жасалған жоқ. Ғылыми әдебиеттерде себептілікті білдіретін морфологиялық маркерлер – -ғандықтан, -май, -үшін жұрнақтары, -нан кейін, -соң сияқты постпозициялық құрылымдар, өйткені, себебі, неге десен сияқты жалғаулықтар сипатталғанымен, бұл сипаттамалар фрагментарлы сипатта және формалды аннотациялық сұлбамен толықтырылмаған. Сондықтан біздің зерттеу жұмысымыз осындай себеп-салдарлық конструкцияларды анықтауға бағытталған корпус құрудағы алғашқы талпыныс болып табылады және зерттеудің өзектілігін танытады.

Қазақ тіліндегі себеп-салдарлық конструкцияларды аннотациялау бағыты бойынша алғашқы арнайы зерттеулердің бірі ретінде KazCausal корпусына арналған жұмыс ерекше маңызға ие. Авторлар қазақ тіліндегі каузалдық конструкцияларды қолмен аннотациялау мәселесін қарастырып, KazCausal сұлбасының бастапқы қағидаларын ұсынды. Бұл зерттеуде қазақ тіліндегі себептік маркерлер, себеп және салдар фрагменттері, сондай-ақ синтетикалық, аналитика-синтетикалық және аналитикалық құрылымдар жүйеленді. Аталған жұмыс осы мақалада ұсынылып отырған KazCausal сұлбасын әрі қарай кеңейтуге, құрылымдық типтер бойынша сандық талдау жасауға және аннотация сапасын F1 мен Cohen's k көрсеткіштері арқылы бағалауға негіз болды.

### 3. Материалдар мен әдістер

#### 3.1. Корпус құрылымы және дереккөздер

Зерттеу барысында корпус құрылымына қазақ тіліндегі ғылыми, публицистикалық және нормативтік сипаттағы мәтіндерден алынған 1250 каузалды сөйлем енгізілді. Бұл сөйлемдердің барлығы себеп-салдарлық қатынасқа ие тілдік бірліктер ретінде іріктелді. Сондықтан зерттеуде каузалды және каузалды емес сөйлемдердің арақатынасы емес, каузалды сөйлемдердің ішкі құрылымдық типтері, морфологиялық көрсеткіштері және семантикалық қабаттары талданды.

Корпус бес домен бойынша жүйеленді: филология, құқық, дінтану, саясат және лингвистика. Мұндай көпдоменді іріктеу себеп-салдарлық қатынастардың әртүрлі ғылыми және қоғамдық дискурстарда қалай көрінетінін салыстыруға мүмкіндік береді

Кесте 2 – Корпустағы каузалды сөйлемдердің домендер және құрылымдық типтер бойынша таралуы

| Домен          | SYNTHETIC CAUSE | ANALYTICO SYNTHETIC CAUSE | ANALYTIC CAUSE | Барлығы     | Үлесі       |
|----------------|-----------------|---------------------------|----------------|-------------|-------------|
| Филология      | 123             | 115                       | 103            | 341         | 27,3%       |
| Құқық          | 91              | 97                        | 82             | 270         | 21,6%       |
| Дінтану        | 56              | 60                        | 47             | 163         | 13,0%       |
| Саясат         | 58              | 62                        | 55             | 175         | 14,0%       |
| Лингвистика    | 103             | 91                        | 107            | 301         | 24,1%       |
| <b>Барлығы</b> | <b>431</b>      | <b>425</b>                | <b>394</b>     | <b>1250</b> | <b>100%</b> |

Кесте 2-де көрсетілгендей, корпус көлемі 1250 каузалды сөйлемнен тұрады. Ең көп мысал филология және лингвистика домендерінен алынған, бұл аталған салаларда түсіндіру, негіздеу және себеп-салдарлық байланыстардың жиі қолданылуымен байланысты. Құқық доменінде санкциялық және нормативтік себептілік, саясат мәтіндерінде логикалық негіздеу, ал дінтану мәтіндерінде мотивациялық және түсіндірмелік қатынастар жиі кездеседі.

#### 3.2. Құрылымдық типтер бойынша жіктеу

KazCausal сұлбасында барлық каузалды сөйлемдер үш негізгі құрылымдық типке бөлінді: SYNTHETIC\_CAUSE, ANALYTICO\_SYNTHETIC\_CAUSE және ANALYTIC\_CAUSE. Бұл жіктеу қазақ тіліндегі себептілік мағынасының берілу жолдарын формалды түрде сипаттауға мүмкіндік береді.

Кесте 3-те 1250 каузалды сөйлемнің құрылымдық типтер бойынша жалпы таралуы берілді. Нәтижелер синтетикалық және аналитика-синтетикалық құрылымдардың үлесі бір-біріне жақын екенін көрсетті: сәйкесінше 34,5% және 34,0%. Аналитикалық құрылымдар 31,5%-ды құрайды. Бұл қазақ тілінде себеп-салдарлық қатынастардың тек дербес жалғаулықтармен емес, морфологиялық және морфосинтаксистік тәсілдер арқылы да белсенді берілетінін дәлелдейді.

Кесте 3 - Корпустағы каузалды сөйлемдердің құрылымдық типтер бойынша жалпы үлесі

| Құрылымдық тип            | Саны        | Үлесі       |
|---------------------------|-------------|-------------|
| SYNTHETIC_CAUSE           | 431         | 34,5%       |
| ANALYTICO_SYNTHETIC_CAUSE | 425         | 34,0%       |
| ANALYTIC_CAUSE            | 394         | 31,5%       |
| <b>Барлығы</b>            | <b>1250</b> | <b>100%</b> |

Кесте 4-те қазақ тіліндегі каузалды құрылымдардың негізгі типтері мен маркерлері көрсетілген. Синтетикалық құрылымдарда себептік мағына морфологиялық қосымшалар

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2026, Том 154, №1  
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2026, Том 154, №1

арқылы берілсе, аналитика-синтетикалық құрылымдарда морфологиялық тұлға мен септеулік/шылау тіркеседі. Аналитикалық құрылымдарда себеп-салдарлық қатынас дербес жалғаулықтар мен лексикалық маркерлер арқылы беріледі. Бұл типология KazCausal аннотациялық сұлбасында себеп, салдар және маркер компоненттерін жүйелі түрде белгілеуге мүмкіндік береді.

Кесте 4 – Каузалды құрылымдардың негізгі типтері мен маркерлері

| Құрылымдық тип                   | Сипаттамасы                                                                   | Негізгі маркерлер                                       | Мысал                                            |
|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| <b>SYNTHETIC CAUSE</b>           | Себептік мағына сөздің морфологиялық құрамында беріледі                       | -ғандықтан,<br>-гендіктен,<br>-атындықтан,<br>-май/-мей | Жаңбыр жауғандықтан, жол тайғақ болды.           |
| <b>ANALYTICO SYNTHETIC CAUSE</b> | Морфологиялық тұлға мен шылау/септеулік тіркеседі                             | -ған соң, -ғаннан кейін,<br>-ғаны үшін                  | Ережені бұзғаны үшін, студентке ескерту берілді. |
| <b>ANALYTIC CAUSE</b>            | Себептік қатынас дербес жалғаулықтар мен лексикалық маркерлер арқылы беріледі | себебі, өйткені, сондықтан                              | Ол сабаққа келмеді, себебі ауырып қалды.         |

### 3.3. KazCausal аннотациялық сұлбасы және формалды моделі

KazCausal аннотациялық сұлбасы қазақ тіліндегі себеп-салдарлық құрылымдарды көпдеңгейлі бірлік ретінде сипаттайды. Бұл зерттеуде себептілік объективті дүниедегі себеп-салдар заңы ретінде емес, мәтінде автор тарапынан қалай берілгені тұрғысынан қарастырылады. Сондықтан аннотацияның негізгі міндеті – сөйлемдегі қай фрагмент себеп, қай фрагмент салдар екенін және олардың арасындағы байланысты қандай тілдік маркер орнататынын белгілеу.

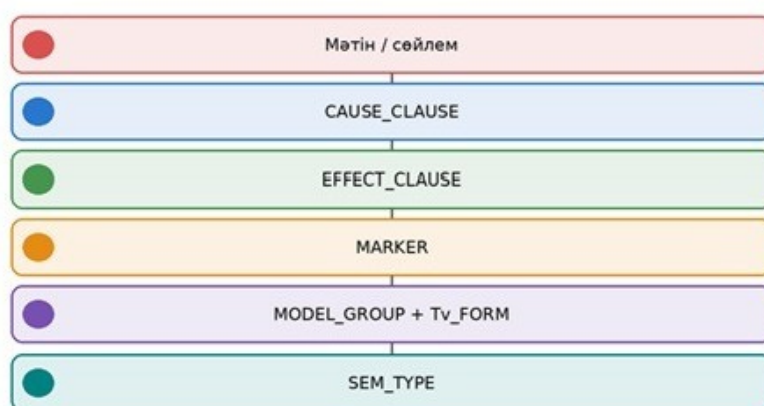
KazCausal сұлбасында әрбір каузалды құрылым төмендегі формалды модель арқылы сипатталады:

$$K = \langle C, E, M, ST, TF, G, SemT \rangle,$$

мұндағы C - себеп фрагменті, E - салдар фрагменті, M - каузалдық маркер, ST - құрылымдық тип, TF - нақты морфологиялық немесе синтаксистік модель, G - басқарылушылық сипаты, SemT - семантикалық ішкі тип. Мұндай формализация аннотацияланған деректерді кейінгі NLP модельдерін оқытуға жарамды құрылымданған ресурсқа айналдырады.

Сурет 4-те KazCausal аннотациялық моделінің көпдеңгейлі құрылымы көрсетілген. Модельде мәтін немесе сөйлем бастапқы бірлік ретінде алынып, себеп фрагменті, салдар фрагменті, каузалдық маркер, құрылымдық тип, нақты морфологиялық форма және семантикалық тип қабаттары арқылы белгіленеді. Мұндай көпқабатты құрылым қазақ тіліндегі себеп-салдарлық қатынастарды жүйелі түрде сипаттауға және оларды автоматты аннотациялау үдерісіне бейімдеуге мүмкіндік береді.

Кесте 5-те KazCausal аннотациялық сұлбасында қолданылатын негізгі қабаттар, олардың белгілері, сипаттамалары және мысалдары берілген. Бұл қабаттар себеп пен салдар фрагменттерін, каузалдық маркерді, құрылымдық типті, нақты форманы және семантикалық қатынас түрін жеке-жеке белгілеуге мүмкіндік береді. Осылайша, аннотация сұлбасы қазақ тіліндегі каузалды құрылымдарды формалды және бірізді түрде сипаттауға негіз болады.



Сурет 1 – KazCausal көпдеңгейлі аннотациялық моделі

Кесте 5 - KazCausal аннотациялық қабаттарының сипаттамасы

| Қабат            | Белгі         | Сипаттамасы                                                  | Мысал                                      |
|------------------|---------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Себеп фрагменті  | CAUSE_CLAUSE  | Салдарға негіз болатын оқиға, күй немесе әрекет              | Ғылыми мақала кіріспеден басталатындықтан  |
| Салдар фрагменті | EFFECT_CLAUSE | Себептен туындайтын нәтиже                                   | зерттеу мақсаты мен міндеттері айқындалады |
| Маркер           | MARKER        | Себеп-салдарлық байланысты білдіретін көрсеткіш              | басталатындықтан                           |
| Құрылымдық тип   | MODEL_GROUP   | Синтетикалық, аналитика-синтетикалық немесе аналитикалық тип | SYNTHETIC                                  |
| Нақты форма      | Tv_FORM       | Морфологиялық немесе синтаксистік үлгі                       | Tv=атындықтан                              |
| Семантикалық тип | SEM_TYPE      | Қатынас мағынасы                                             | DEPENDENCE                                 |

### 3.4. Қолмен аннотациялау үдерісі және Label Studio құралын қолдану

Зерттеу барысында қазақ тіліндегі себеп–салдарлық құрылымдарды жүйелі түрде белгілеу үшін Label Studio платформасы қолданылды. Бұл құрал мәтін ішіндегі себеп фрагментін, салдар фрагментін және каузалдық маркерді жеке span ретінде белгілеуге, сондай-ақ әрбір мысалға құрылымдық және семантикалық сипаттама беруге мүмкіндік береді. Аннотациялау бірлігі ретінде жеке сөз ғана емес, сөйлем ішіндегі мағыналық фрагмент алынды, себебі қазақ тілінде себептік мағына көбіне бір лексема арқылы емес, морфологиялық және морфосинтаксистік кешен арқылы беріледі.

Label Studio ортасында KazCausal аннотациялық сұлбасы бірнеше деңгей бойынша іске асырылды. Бірінші деңгейде сөйлем ішіндегі себеп бөлігі CAUSE\_CLAUSE, салдар бөлігі EFFECT\_CLAUSE, ал себеп–салдарлық байланысты білдіретін көрсеткіш MARKER ретінде белгіленді. Екінші деңгейде конструкцияның құрылымдық SYNTHETIC, ANALYTICO\_SYNTHETIC немесе ANALYTIC типтері анықталды. Үшінші деңгейде нақты морфологиялық немесе синтаксистік модель, яғни Tv\_FORM таңдалды. Төртінші деңгейде басқарылушылық сипаты MANAGED немесе UNMANAGED түрінде белгіленді. Бесінші деңгейде семантикалық ішкі тип анықталды: DEPENDENCE, EMOTIVE\_REACTION, SANCTION, JUSTIFICATION және басқа да мағыналық қатынастар.

Аннотация үдерісі бірнеше кезеңнен тұрды. Алдымен корпус мәтіндері алдын ала өңделіп, сөйлемдерге бөлінді. Кейін себептік маркерлері бар немесе себеп–салдарлық мағынасы

контекст арқылы байқалатын сөйлемдер іріктелді. Үшінші кезеңде аннотаторлар әр сөйлемдегі себеп фрагментін, салдар фрагментін және маркерді белгіледі. Төртінші кезеңде әрбір сөйлемге құрылымдық модель және семантикалық тип тағайындалды. Соңғы кезеңде даулы мысалдар қайта қаралып, аннотация ережелері негізінде біріздендірілді.

Мысалы, «Ғылыми мақала кіріспеден басталатындықтан, зерттеу мақсаты мен міндеттері айқындалады» деген сөйлемде «Ғылыми мақала кіріспеден басталатындықтан» фрагменті себеп бөлігі ретінде, «зерттеу мақсаты мен міндеттері айқындалады» фрагменті салдар бөлігі ретінде, ал «басталатындықтан» тұлғасы каузалдық маркер ретінде белгіленеді. Құрылымдық типі – SYNTHETIC, нақты тұлғасы – Tv=атындықтан, басқарылушылық сипаты – UNMAN-AGED, семантикалық ішкі типі – DEPENDENCE ретінде анықталады.

Осылайша Label Studio негізіндегі аннотациялау тәсілі қазақ тіліндегі себеп-салдарлық құрылымдарды тек жалпы себептік қатынас ретінде емес, көпдеңгейлі құрылымдық-семантикалық бірлік ретінде сипаттауға мүмкіндік берді. KazCausal сұлбасының Label Studio платформасында іске асырылу үлгісі сурет 2-де көрсетілген.

Сурет 2 – Label Studio ортасында KazCausal сұлбасы бойынша себеп-салдарлық құрылымды көпдеңгейлі аннотациялау үлгісі

Сурет 2-де көрсетілгендей, бір сөйлем бірнеше деңгей бойынша белгіленеді: CAUSE\_CLAUSE, EFFECT\_CLAUSE, MARKER, MODEL\_GROUP, Tv\_FORM, GOVERNANCE және SEM\_TYPE. Бұл KazCausal схемасының қазақ тіліндегі себептік құрылымдарды тек лексикалық деңгейде емес, морфологиялық, синтаксистік және семантикалық деңгейлерде қатар сипаттайтынын көрсетеді.

### 3.5. Аннотация сапасын бағалау

Аннотация сапасын бағалау үшін екі түрлі өлшем қолданылды. Біріншісі - каузалдық маркерлер мен себеп-салдар фрагменттерін анықтау сапасын бағалайтын F1 көрсеткіші, екіншісі - аннотаторлар арасындағы келісім деңгейін анықтайтын Cohen's Kappa коэффициенті.

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP},$$

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN},$$

$$F_1 = \frac{2 \times (\text{Precision} \times \text{Recall})}{\text{Precision} + \text{Recall}},$$

$$\kappa = \frac{P_o - P_e}{1 - P_e},$$

мұндағы TP - дұрыс белгіленген каузалдық бірліктер саны, FP - қате белгіленген бірліктер саны, FN - белгіленбей қалған каузалдық бірліктер саны.  $P_o$  - аннотаторлар арасындағы нақты сәйкестік үлесі, ал  $P_e$  - кездейсоқ сәйкестік ықтималдығы.

Зерттеу нәтижесінде себептік маркерлерді белгілеу бойынша  $F1=0.81$ , ал себептілік қатынастарының типтерін анықтау бойынша  $k=0.72$  мәні алынды. Бұл көрсеткіштер KazCausal сұлбасының аннотациялау кезінде жеткілікті деңгейде бірізді қолданылғанын көрсетеді.



Сурет 3 – KazCausal корпусын құру және аннотациялау үдерісі

Сурет 3-те корпус құрудың негізгі кезеңдері берілген: мәтіндерді жинау, каузалды сөйлемдерді іріктеу, Label Studio арқылы қолмен аннотациялау, құрылымдық типтерді жіктеу және сапаны бағалау. Бұл жұмыс процесі корпус деректерін кейінгі NLP модельдеріне бейімдеуге мүмкіндік береді.

Аталған зерттеу жұмысында қазақ тіліндегі себеп-салдарлық құрылымдардың үш негізгі түрі айқындалды. Олар:

- синтетикалық,
- аналитикалық-синтетикалық,
- аналитикалық.

Мұндағы синтетикалық құрылымдардың мағынасын себеп мағынасын білдіретін аффикстер арқылы беріледі. Мәселен, -ғандықтан, -май, -ғаны үшін және т.б. Аналитикалық-синтетикалық құрылымдар мағынасы – синтетикалық және аналитикалық тәсілдердің үйлесуі арқылы беріледі. Мұнда -ған соң, -ғаннан кейін және т.б. аффикстер қолданылады. Аналитикалық құрылымдар мағынасы – жалғаулықтар арқылы жасалған құрылымдар болып табылады, олар өйткені, себебі, неге десең және т.б. түрінде кездеседі.

Сонымен қатар, семантикалық қатынастардың келесідегідей сыныптары белгіленеді:

- hasCause (себеп бар),
- hasConsequence (салдар бар),
- hasSanction (санкциялық себеп),
- isEmotionallyTriggeredBy (эмоциялық реакцияға итермелейді),
- isAmbiguousCause (көп мағыналы себеп),
- isNegativeCause (теріс себеп),
- isPositiveCause (оң себеп),
- performedBy (орындаушысы),
- experiencedBy (тәжірибелеуші субъект) және т.б.

Мысалы: Бұл жолдастық кездесу болғандықтан, қосалқы құрамдағы ойыншыларды тексеріп алуға жақсы мүмкіндік болды [15]. Мұндағы,

**себеп:** Бұл жолдастық кездесу болғандықтан.

**салдар:** қосалқы құрамдағы ойыншыларды тексеріп алуға жақсы мүмкіндік болды.

**маркер:** болғандықтан.

Осылайша, әрбір мысал құрылымдық модель мен семантикалық белгілер тұрғысынан таңбаланады. Бұл тәсіл алынған корпусқа әрі лингвистикалық талдау, әрі NLP модельдерін оқыту үшін пайдалануға төмендегідей мүмкіндіктерді береді:

1. қазақ тіліндегі себеп-салдарлық конструкциялар (ССК) үшін аннотациялық схеманы енгізеді;

2. 10-нан астам құрылым түрін жүйелейді;

3. грамматикалық форма мен семантикалық функция арасындағы байланысты жүйелейді;

4. қазақ тіліндегі себептілік онтологиясын құруға арналған жалпы базаны қалыптастырады.

Бұл зерттеу қазақ тіліндегі себеп-салдарлық байланыстарды анықтауға негізделген сапалы лингвистикалық ресурсты жасау жолындағы алғашқы қадам болып табылады. Аталған



зерттеу теориялық және қолданбалы мақсаттарға жетуге бағытталған және болашақта формалды семантикалық талдау, машиналық оқыту, автоматты аннотация, онтология құру және интеллектуалды мәтін өңдеу сияқты зерттеу салаларында кеңінен қолданыла алады.

Жоғарыда атап өткендей, ағылшын, француз сияқты кең қолданыстағы тілдер үшін тілдегі белгілі бір конструкцияларды анықтауға бағытталған аннотацияланған бай ресурстар жасалғанын байқаймыз, алайда қазіргі қазақ тілі осы бағытта айтарлықтай артта қалып отыр. Сондай терең тиянақты зерттеуді қажет ететін ғылыми зерттеу нысандарының бірі – қазіргі қазақ тіліндегі себеп-салдарлық байланыстарды анықтау және аталған конструкцияларды аннотациялау. Қазіргі қазақ тіліндегі бұл конструкция ғылыми әдебиеттерде, жаңалықтар мәтіндерінде және публицистикалық сипаттағы ресурстарда кеңінен қолданылады. Осы себеп-салдарлықты білдіретін морфологиялық маркерлер - ғандықтан, -май, -үшін жұрнақтары, -нан кейін, -соң сияқты постпозициялық құрылымдар, өйткені, себебі, неге десең сияқты жалғаулықтармен сипатталғанымен, бұл сипаттамалар фрагментарлы сипатта ғана және формалды аннотациялық сұлбамен толықтырылмағаны анықталды.

Осы олқылықтың орнын толтыру мақсатында біздің бұл зерттеу ізденісіміз қазіргі қазақ тіліндегі себеп-салдарлық конструкцияларды жүйелі түрде аннотациялаудың алғашқы талпынысын ұсынады. Ізденушілердің арнайы әзірлеген KazCausal аннотациялық сұлбасы мынадай құрамдас бөліктерден тұрады:

- формалық классификация (синтетикалық, аналитика-синтетикалық, аналитикалық конструкциялар);
- семантикалық қатынастар (hasCause, hasConsequence, hasSanction, isEmotionallyTriggeredBy, isAmbiguousCause және т.б.);
- себеп түрлерінің типологиясы: жалпы себеп, санкциялайтын себеп, эмоциялық себеп, теріс себеп, баламалы себеп.

Осылайша, KazCausal алғаш рет позитивті себеп (арқасында), баламалы мотивация (-ғандықтан ба) және қарсы қойылған себеп (қарамастан) сияқты категорияларды енгізеді. Бұл категориялар қазақ тілінің прагматикалық және риторикалық ерекшеліктерін ескеруге мүмкіндік береді.

Жалпы, KazCausal аннотациялық сұлбасы халықаралық тәжірибені морфологиялық тұрғыдан бай және агглютинативті тіл жағдайына бейімдеп қана қоймай, оны жаңа ұғымдармен толықтырады. Бұл ресурс лингвистикалық зерттеулер үшін қолданбалы міндеттерді шешуді алға қояды. Бұл міндеттерге автоматты мәтіндік талдау, себептік байланыстарды анықтау, онтологиялар құру және NLP модельдерін оқыту үшін де маңызды құрал тағайындау мәселелері жатады.

Зерттеу барысында қарастырылған түрлі тілдердегі себеп-салдарлық конструкциялардың аннотациялық сұлбаларының арасында біршама айырмашылықтар мен ерекшеліктер кездеседі. Біз зерттеу нысанына алынған аталған аннотациялық сұлбаларды өзара салыстыра отырып, ерекшеліктерін анықтадық (Кесте 6 қараңыз)

Кесте – 6. Әртүрлі тілдердегі себеп-салдарлық конструкциялардың аннотациялық сұлбаларының салыстырмалы талдауы

| № | Сипаттамасы    | PDTB                                      | FrameNet                            | BECauSE 2.0                         | KazCausal                                                |
|---|----------------|-------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1 | Негізгі тәсілі | Дискурстық байланыстардың элементтері     | Семантикалық фреймдер               | Конструкциялар мен мағыналар        | Конструкциялар мен мағыналар                             |
| 2 | Негізгі бағыты | Анық және анық емес дискурстық қатынастар | Лексико-семантикалық сценарийлер    | Себептік конструкциялар             | Қазақ тіліндегі себеп-салдарлық конструкциялар           |
| 3 | Аннотация түрі | Сөйлемдер арасындағы байланысты белгілеу  | Лексикалық бірліктерді аннотациялау | Мәтіндегі конструкцияларды белгілеу | Синтетикалық және аналитикалық конструкцияларды белгілеу |

|    |                                      |                                   |                                    |                              |                                                                    |
|----|--------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| 4  | Көп мағыналықты қолдану              | Иә                                | Жоқ                                | Иә                           | Иә                                                                 |
| 5  | Қолданылатын конструкциялар          | Дискурстық маркерлер              | Етістіктер, зат есімдер және т.б.  | Барлық тілдік құралдар       | Морфология, постпозициялар, жалғаулықтар, синтаксис                |
| 6  | Қосымша семантикалық қатынастар      | Шарт, қарсы қою, нәтиже           | Explanation, Purpose және т.б.     | Уақыт, корреляция, салыстыру | Санкция, эмоциялық себеп, альтернативалық модальдылық              |
| 7  | Тілдері                              | Ағылшын                           | Көптілді (EN, FR, DE)              | Ағылшын                      | Қазақ                                                              |
| 8  | Формализация деңгейі                 | Орташа, байланыстырғыш элементтер | Жоғары, фреймдер мен рөлдер        | Жоғары, қатынастар           | Жоғары, конструкция түрлері мен семантикасы бөлек белгіленеді      |
| 9  | Агглютинативті тілдерді қолдану      | Жоқ                               | Ішінара, локализация арқылы        | Жоқ                          | Иә                                                                 |
| 10 | Эмоциялық себеп категориясының болуы | Жоқ                               | Жоқ                                | Ішінара иә                   | Иә                                                                 |
| 11 | Онтологиялық сәйкестік               | Ішінара                           | Иә, фреймдік онтологиямен байланыс | Жоқ                          | OWL/RDF арқылы жоспарлануда                                        |
| 12 | Корпустың болуы                      | Иә, PDTB 3.0                      | Иә                                 | Иә                           | Иә, қолмен аннотацияланған синтетикалық және аналитикалық формалар |

Жоғарыдағы кесте 6-ға сәйкес, қысқартылған атаулардың төмендегідей көрсеткіштері бар. Олар:

- PDTB – дискурстық маркерлерге негізделген классикалық аннотациялық сұлба.
- FrameNet – себептілікті семантикалық фреймдер арқылы сипаттаушы сұлба.
- BECauSE 2.0 – семантикалық және құрылымдық қиылыстарды белгілейтін озық сұлба.
- KazCausal – қазақ тілінің морфологиялық және синтаксистік ерекшеліктерін ескеретін алғашқы аннотациялық сұлба.

PDTB, FrameNet, BECauSE 2.0 сұлбаларынан KazCausal-дың басты ерекшеліктері ретінде қолмен аннотацияланған синтетикалық және аналитикалық формалардың болуын, агглютинативті тілдерді қолдай алатындығын, санкция, эмоциялық себеп, альтернативтілік, модалдылық сияқты қосымша семантикалық қатынасты білдіре отырып, себеп-салдарлық конструкцияларды аннотациялауға мүмкіндік беретіндігін атауға болады.

Демек, KazCausal – себептілікті білдіретін морфологиялық құрылымдар мен синтаксистік конструкциялардың ерекшеліктерін ескере отырып, қазақ тіліне арнайы бейімделген алғашқы аннотациялық сұлба болып табылады. Аталған сұлбаны өзге де түркі тілдес, морфологиялық және синтаксистік ерекшеліктері ұқсас болып келетін тілдерді жобалау үшін де қолдануға болады деп есептейміз.

#### 4. Нәтижелер және талқылау

Зерттеу нәтижелері қазақ тіліндегі себеп-салдарлық қатынастардың тек дербес жалғаулықтар арқылы ғана емес, морфологиялық формалар, аналитика-синтетикалық

құрылымдар және контекстік семантикалық белгілер арқылы да берілетінін көрсетті. Корпустық талдау барысында каузалды құрылымдар үш негізгі құрылымдық тип бойынша жүйеленді: SYNTHETIC\_CAUSE, ANALYTICO\_SYNTHETIC\_CAUSE және ANALYTIC\_CAUSE. Бұл жіктеу қазақ тіліндегі себептілік категориясының көпқабатты табиғатын ашуға мүмкіндік берді.

Алынған нәтижелер бойынша синтетикалық және аналитика-синтетикалық құрылымдар қазақ тіліндегі каузалдық қатынастарды білдіруде маңызды орын алады. Бұл қазақ тілінің агглютинативті құрылымымен тікелей байланысты. Себептік мағына көп жағдайда жеке жалғаулық арқылы емес, етістік негізіне жалғанатын қосымша, жұрнақтар немесе есімше мен шылаулардың тіркесуі арқылы беріледі. Сондықтан қазақ тіліндегі себеп-салдарлық қатынастарды автоматты түрде анықтау үшін тек лексикалық маркерлерге сүйену жеткіліксіз. Морфологиялық көрсеткіштерді, синтаксистік позицияны және семантикалық контексті қатар ескеретін көпдеңгейлі модель қажет.

#### 4.1. Морфологиялық және аналитика-синтетикалық құрылымдардың ерекшелігі

Зерттеу нәтижелері қазақ тілінде себептік мағынаның дербес жалғаулықтар арқылы ғана емес, сөздің морфологиялық құрамына кіріккен формалар арқылы да белсенді берілетінін көрсетті.

SYNTHETIC\_CAUSE тобына жататын -ғандықтан, -гендіктен, -атындықтан, -май/-мей тұлғалары себептілікті тікелей морфологиялық деңгейде білдіреді. Бұл формаларда қимыл, шақ, болымсыздық және себептік мағына бір тілдік бірлік ішінде қабаттасады.

ANALYTICO\_SYNTHETIC\_CAUSE тобы қазақ тіліндегі себептіліктің аралық, яғни морфологиялық және синтаксистік тәсілдердің біріккен түрін көрсетеді. -ған соң, -ғаннан кейін, -ғаны үшін сияқты құрылымдар көбіне уақыттық реттілік, санкция немесе мақсаттық реңкпен қатар жүреді. Сондықтан оларды тек уақыттық немесе тек себептік маркер ретінде қарастыру жеткіліксіз.

ANALYTIC\_CAUSE тобына себебі, өйткені, сондықтан, неге десең сияқты дербес жалғаулықтар мен лексикалық маркерлер жатады. Бұл құрылымдар халықаралық дискурстық аннотация сұлбаларына жақынырақ болғанымен, қазақ тіліндегі себептіліктің тек бір бөлігін ғана қамтиды. Корпуста аналитикалық құрылымдардың үлесі 31,5% болуы қазақ тіліндегі каузалдық қатынастардың басым бөлігі морфологиялық немесе аралас тәсілдер арқылы берілетінін көрсетеді.

Осы нәтижелер қазақ тіліндегі себептілік категориясының типологиялық тұрғыдан күрделі екенін дәлелдейді. Ағылшын немесе басқа аналитикалық тілдерде себеп-салдарлық байланыс көбіне дербес жалғаулықтар мен дискурстық маркерлер арқылы берілсе, қазақ тілінде бұл мағына сөздің морфологиялық құрамында, есімше тұлғаларында және шылаулы тіркестерде көрініс табады. Сондықтан *KazCausal* сұлбасы себеп фрагментін, салдар фрагментін және маркерді ғана емес, нақты морфологиялық форманы да жеке қабат ретінде белгілеуді ұсынады.

#### 4.2. Қабаттасқан семантикалық қатынастар

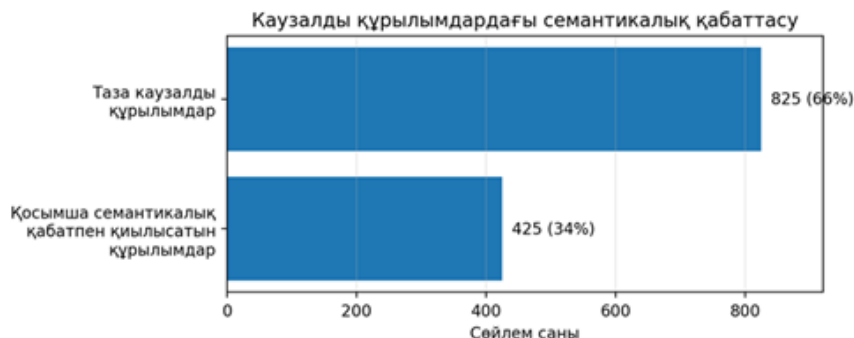
Қазақ тіліндегі кейбір себептік құрылымдар бір мезгілде бірнеше мағына бере алады. Мысалы, -ған соң және -ғаннан кейін тұлғалары кейде уақыттық реттілікті, кейде себептік тәуелділікті, ал кейбір контексте уақыт-себеп қабаттасуын білдіреді. -ғаны үшін тұлғасы себептік қатынаспен қатар санкциялық реңкті де көрсете алады. Осыған байланысты *Kaz-Causal* сұлбасы бірнеше семантикалық белгіні қатар қоюға мүмкіндік береді.

Кесте 7-де қазақ тіліндегі қабаттасқан семантикалық қатынастардың негізгі түрлері көрсетілген. Кестеде себеп-салдарлық мағынамен қатар жүретін DEPENDENCE, SANCTION, EMOTIVE\_REACTION, JUSTIFICATION және TEMPORAL\_CAUSE сияқты семантикалық типтер беріліп, олардың сипаттамасы, маркерлік формалары және нақты мысалдары ұсынылған. Бұл жіктеу қазақ тіліндегі себептілік қатынастарының тек бір мағынамен шектелмей, контекстке байланысты санкциялық, эмоциялық, негіздеу және уақыттық мағыналармен қабаттаса алатынын көрсетеді.

Қабаттасқан семантикалық қатынастарды жеке белгілеу аннотация сапасын арттырады. Себебі бір ғана маркер әртүрлі контексте әртүрлі қызмет атқаруы мүмкін. Мысалы, -ған соң тұлғасы бір сөйлемде уақыттық реттілікті білдірсе, екінші сөйлемде салдардың пайда болуына себеп болған алдыңғы әрекетті көрсетеді. Мұндай жағдайларда маркердің сыртқы формасына ғана сүйену жеткіліксіз, оның сөйлем ішіндегі семантикалық қызметін де анықтау қажет.

Кесте 7 - Қабаттасқан семантикалық қатынастардың негізгі түрлері

| Семантикалық тип | Сипаттамасы                                           | Маркер/форма            | Мысал                                          |
|------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------|------------------------------------------------|
| DEPENDENCE       | Бір оқиға екінші оқиғаның тікелей себебі болады       | -ғандықтан, себебі      | Күн суық болғандықтан, балалар сыртқа шықпады. |
| SANCTION         | Әрекет санкциялық немесе нормативтік салдарға әкеледі | -ғаны үшін              | Тәртіпті бұзғаны үшін, айыппұл салынды.        |
| EMOTIVE_REACTION | Себеп эмоциялық реакцияны тудырады                    | -ғанына, -геніне        | Жеңіске жеткеніне қуанды.                      |
| JUSTIFICATION    | Пікірдің немесе шешімнің негіздемесі беріледі         | себебі, өйткені         | Бұл әдіс тиімді, себебі нәтиже нақты көрінеді. |
| TEMPORAL_CAUSE   | Уақыттық және себептік мағына қатар көрінеді          | -ған соң, -ғаннан кейін | Жұмыс аяқталған соң, есеп тапсырылды.          |



Сурет 4 – KazCausal көпдеңгейлі аннотациялық моделі

Сурет 4-те таза каузалды құрылымдар мен қосымша семантикалық қабаттармен қиылысатын құрылымдардың арақатынасын көрсетеді. Қабаттасқан құрылымдар қазақ тіліндегі себептілік категориясының контекстке тәуелді және көпмағыналы сипатын дәлелдейді. Бұл нәтиже KazCausal сұлбасында көптанбалы семантикалық аннотацияны қолданудың қажеттілігін көрсетеді.

#### 4.3. Себептік құрылымдарды анықтаудың алгоритмдік логикасы

KazCausal сұлбасы тек қолмен аннотациялауға арналған нұсқаулық қана емес, сонымен қатар автоматты анықтау жүйесіне бейімделген формалды модель болып табылады. Себептік құрылымдарды автоматты түрде анықтау логикасы төмендегі кезеңдер арқылы сипатталады:

- 1) мәтінді алдын ала өңдеу және сөйлемдерге бөлу;
- 2) каузалдық маркер кандидаттарын анықтау;
- 3) маркердің синтетикалық, аналитика-синтетикалық немесе аналитикалық типін белгілеу;
- 4) маркер позициясына сүйене отырып себеп фрагментінің шекарасын анықтау;
- 5) салдар фрагментін негізгі предикативтік бөлік ретінде белгілеу;
- 6) құрылымдық модель мен нақты Tv\_FORM түрін таңдау;

- 7) контекстке қарай семантикалық ішкі типті анықтау;
- 8) аннотация нәтижесін құрылымданған форматта сақтау.

Бұл алгоритм ережеге негізделген маркерлік іздеу мен контекстік семантикалық талдауды біріктіреді. Мұндай гибриді тәсіл қазақ тіліндегі морфологиялық себептік тұлғаларды автоматты түрде анықтауға қолайлы, себебі себептік мағынаның бір бөлігі ашық лексикалық маркерлер арқылы, ал екінші бөлігі сөз ішіндегі форманттар арқылы беріледі.

Алгоритмдік логиканың негізгі артықшылығы – оның көпдеңгейлі аннотациялық құрылымға сүйенуі. Бірінші деңгейде маркер анықталса, келесі деңгейде оның құрылымдық типі белгіленеді. Одан кейін себеп пен салдар фрагменттерінің шекарасы көрсетіліп, соңында семантикалық ішкі тип таңдалады. Мұндай кезеңдік тәсіл NLP модельдерін оқыту үшін құрылымданған дерек дайындауға мүмкіндік береді. Әсіресе KazBERT, BiLSTM-CRF, SpERT немесе MRC негізіндегі модельдер үшін себеп, салдар, маркер және семантикалық типтің бөлек белгіленуі supervised learning міндеттерін нақтылауға жағдай жасайды.

Осылайша, ұсынылған KazCausal сұлбасы қазақ тіліндегі себеп-салдарлық қатынастарды тек лингвистикалық сипаттау құралы ғана емес, сонымен қатар автоматты ақпарат алу, мәтінді семантикалық талдау және себептік байланыстарды машиналық өңдеу міндеттеріне арналған дерекқорлық негіз ретінде қарастыруға болады.

## 5. Шектеулер және болашақ зерттеу бағыттары

KazCausal сұлбасы қазақ тіліндегі себеп-салдарлық құрылымдарды жүйелі аннотациялауға мүмкіндік бергенімен, зерттеу барысында бірқатар шектеулер анықталды. Біріншіден, кейбір құрылымдарда себептік мағына айқын маркер арқылы емес, контекстік немесе прагматикалық түрде беріледі. Мұндай жағдайларда аннотаторға «бұл себеп пе, әлде тек тақырыптық/бағалау қатынасы ма?» деген шешім қабылдау қажет болады.

Екіншіден, бастау көзі, бағыт, тақырыптық байланыс, әлеуметтік мәртебе, бағалау позициясы сияқты домендер ағымдағы сұлбаға енгізілмеді. Себебі оларды бірізді аннотациялау үшін арнайы онтологиялық модельдер қажет. Үшіншіден, кейбір мақсаттық құрылымдар екіжақты себептілік сипатқа ие болуы мүмкін: бір әрекет мақсатқа жетудің себебі болса, мақсаттың өзі сол әрекеттің мотивациясы ретінде түсіндіріледі.

Болашақ зерттеулерде корпус көлемін ұлғайту, әлеуметтік желі және ауызша дискурс материалдарын қосу, KazBERT негізіндегі автоматты аннотация модулін құру, сондай-ақ KazCausal сұлбасын басқа түркі тілдеріне бейімдеу жоспарланады.

### Қорытынды

Бұл мақалада қазақ тіліндегі себеп-салдарлық құрылымдарды аннотациялауға арналған KazCausal сұлбасы ұсынылды. Зерттеу қазақ тіліндегі себептіліктің морфологиялық, аналитика-синтетикалық және аналитикалық тәсілдер арқылы берілетінін және бұл тәсілдердің барлығы NLP тұрғысынан формалды түрде белгіленуі қажет екенін көрсетті.

1250 каузалды сөйлемнен тұратын корпус үш құрылымдық тип бойынша жүйеленді: SYNTHETIC\_CAUSE - 431 сөйлем (34,5%), ANALYTICO\_SYNTHETIC\_CAUSE - 425 сөйлем (34,0%), ANALYTIC\_CAUSE - 394 сөйлем (31,5%). Бұл нәтижелер қазақ тіліндегі себептік қатынастардың едәуір бөлігі морфологиялық және морфосинтаксистік деңгейде берілетінін дәлелдейді.

F1=0.81 және Cohen's k=0.72 көрсеткіштері KazCausal сұлбасының қолмен аннотациялау кезінде жеткілікті дәрежеде бірізді қолданылатынын көрсетті. Ұсынылған сұлба қазақ тіліндегі себеп-салдарлық қатынастарды автоматты түрде анықтауға арналған болашақ модельдер үшін лингвистикалық және есептеу негізін қалыптастырады. Сонымен қатар бұл тәсіл агглютинативті және төмен ресурсты тілдердегі каузалдық қатынастарды зерттеу үшін типологиялық тұрғыдан маңызды үлгі бола алады.

KazCausal аннотациялық сұлбасы мен осы сұлбаға негізделген корпус – қазақ тіліндегі себеп-салдарлық конструкцияларды жүйелі сипаттауға бағытталған алғашқы қадам болып табылады. Алайда, зерттеу барысында бірқатар шешілмеген мәселелер мен басы ашық сұрақтар анықталып, олар болашақта қосымша зерттеуді қажет ететіндігіне көз жеткіздік:

1. Себептілікті анықтаудағы күмәнді шешімнің шектеулері.

KazCausal бірнеше тегті қатар белгілеуді және қабаттасқан қатынастарды ко-аннотациялауды қолдағанымен, аннотациялаушыға бәрі бірдей «бұл себеп пе, жоқ па» деген күмәнді шешім қабылдауға тура келеді. Бұл әсіресе прототиптік емес себептік құрылымдарда қиындық тудырады (арқасында, себеп болды, белгісі ретінде).

Аннотация кезінде аннотациялаушылар жиі жартылай интуитивтік таңдау жасайды, ол әсіресе төмендегі құрылымдарда байқалады:

- риторикалық себептілікті білдіретін құрылымдарда;
- шартты сөйлемдердегі логикалық тәуелділіктерде;
- айқын себептік маркері жоқ эмоциялық реакцияларда.

Мұндай жағдайларда континуалды себептілік шкаласын енгізу – яғни, себептілікті жоқтан бастап айқын формаға дейінгі спектр түрінде көрсету – тиімді шешім болар еді. Алайда, бұл тәсілді формализациялау және автоматтандыру аса күрделі.

2. Себептілікпен ішінара қабаттасатын семантикалық домендерді алып тастау.

KazCausal жобасы себептілікпен байланысты кейбір мағыналық салаларды әдейі қамтымайды, себебі оларды анық және бірізді аннотациялау мүмкін емес. Мұндай домендерге:

- бастау көзі / бағыт (жарықтан шыққан ұшқындар, мақсатқа жету жолында);
- тақырыптық қатынас (саяси шешімге риза болмау);
- бөліктік-компоненттік қатынастар (жоба аясында жүзеге асырылады);
- дәлелділік (эвиденциалдылық) (болжам бойынша, ақпарат негізінде);
- әлеуметтік/құқықтық мәртебе (азамат ретінде, оқытушы ретінде);
- бағалау позициясы (бұл қадам халықты қауіпке тіреді).

Мұндай мағыналарды формализациялау үшін арнайы онтологиялар қажет болар еді, ал бұл ағымдағы зерттеу шеңберінен тыс ғылыми нысан болып табылады. Осы аспектілерді болашақ зерттеулерде қарастыру жоспарлануда.

3. Екіжақты себептілікті білдіретін құрылымдар.

Зерттеу кезінде ұшырасатын қиындықтардың бірі – себептілікті екі бағытта имплицитті білдіретін құрылымдар. Бұл әсіресе қажетті шарт немесе міндеттілік мағынасында айқын көрін табады. Мысалы:

Табысты болу үшін, біз бәріміз бірігуіміз керек.

(Табысты болу үшін, барлығымыз бірігуіміз қажет). Мұнда: бір жағынан, бірігу – табыстың себебі; екінші жағынан, табысты болу ниеті – бірігудің мотивациясы. Мұндай жағдайлар hasPurpose немесе Motivation категорияларына жатқызылды. Дегенмен, толыққанды семантикалық сипаттама үшін анағұрлым күрделі логикалық модель қажет екені мойындалады.

4. Жетістіктер мен болашақ қолдану мүмкіндіктері.

Жоғарыда аталған шектеулерге қарамастан, KazCausal жобасы келесі маңызды ғылыми зерттеу нәтижелерін көрсетті:

- себеп-салдарлық конструкцияларды агглютинативті, морфологиялық күрделі тілде аннотациялау мүмкін екені дәлелденді;
- сызба мағыналық көпқабаттылық пен прагматикалық жүктемені ескеруге мүмкіндік береді;
- алынған деректерді лингвистикалық зерттеулерде де, NLP модельдерін (трансформерлер, sequence labeling) оқытуда да қолдануға болады;
- қабаттасқан қатынастарды аннотациялау (мысалы, hasCause + isTemporal) қазақ тіліндегі мағыналардың өзара әрекеттесуін жақсырақ түсінуге жол ашады және бұл тәсілді басқа түркі тілдеріне де бейімдеуге болады.

**Авторлар үлесі.** Авторлар үлесі тең.

## Әдебиеттер тізімі

- 1 R. Taberkhan and M.A. Sambetbayeva, KazCausal: Manual Annotation of Causal Constructions in the Kazakh Language, International Conference on Computer Science and Engineering, UBMK 2025 (2025), 463–467. <https://doi.org/10.1109/UBMK67458.2025.11206832>
- 2 K.K. Schuler, VerbNet: A broad-coverage, comprehensive verb lexicon, PhD dissertation, University of Pennsylvania, Philadelphia, 2005. AAI3179808. Available at: <https://www.proquest.com/docview/305449413> (Қол жеткізу күні: 20.11.2025).
- 3 M. Palmer, D. Gildea, and P. Kingsbury, The Proposition Bank: An annotated corpus of semantic roles, Computational Linguistics 31(1) (2005), 71–106. <https://doi.org/10.1162/0891201053630264>
- 4 J. Ruppenhofer, M. Ellsworth, M.R.L. Petruck, C.R. Johnson, C.F. Baker, and J. Scheffczyk, FrameNet II: Extended theory and practice, International Computer Science Institute, Berkeley, 2010. <https://d-nb.info/1136959238/34> (Қол жеткізу күні: 20.11.2025).
- 5 L. Vieu, P. Muller, M. Candito, and M. Djemaa, A general framework for the annotation of causality based on FrameNet, Proceedings of the Tenth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'16) (2016), 3807–3813. <https://aclanthology.org/L16-1603/> (Қол жеткізу күні: 25.11.2025).
- 6 R. Prasad, N. Dinesh, A. Lee, E. Miltsakaki, L. Robaldo, A. Joshi, and B. Webber, The Penn Discourse Tree-Bank 2.0, Proceedings of the Sixth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'08), Marrakech, Morocco, 2008. <https://aclanthology.org/L08-1093/> (Қол жеткізу күні: 25.11.2025).
- 7 J. Dunietz, L. Levin, and J.G. Carbonell, The BECauSE Corpus 2.0: Annotating causality and overlapping relations, Proceedings of the 11th Linguistic Annotation Workshop (LAW-XI) (2017), 95–104. <https://doi.org/10.18653/v1/W17-0812>
- 8 N. Mostafazadeh, A. Grealish, N. Chambers, J. Allen, and L. Vanderwende, CaTeRS: Causal and temporal relation scheme for semantic annotation of event structures, Proceedings of the Fourth Workshop on Events (2016), 51–61. <https://doi.org/10.18653/v1/W16-1007>
- 9 T. O’Gorman, K. Wright-Bettner, and M. Palmer, Richer Event Description: Integrating event coreference with temporal, causal and bridging annotation, Proceedings of the 2nd Workshop on Computing News Storylines (CNS 2016) (2016), 47–56. <https://doi.org/10.18653/v1/W16-5706>
- 10 P. Mirza, Extracting temporal and causal relations between events, Proceedings of the ACL 2014 Student Research Workshop (2014), 10–17. <https://doi.org/10.3115/v1/P14-3002>
- 11 A. Eirew, E. Nachshoni, A. Slobodkin, and I. Dagan, EventFull: Complete and Consistent Event Relation Annotation, Proceedings of the 2025 Conference of the Nations of the Americas Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies (System Demonstrations) (2025), 494–508. <https://doi.org/10.18653/v1/2025.naacl-demo.40>
- 12 M.A.K. Raiaan, M.A.A.S. Khan, A. Muhammad, T.T.M. Nguyen, and S. Hussain, A review on large language models: Architectures, applications, taxonomies, open issues and challenges, IEEE Access 12 (2024), 26839–26874. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3365742>
- 13 Qazcorpus : Қазақ тілінің ұлттық корпусы. <https://qazcorpus.kz/> (Қол жеткізу күні: 23.11.2025).
- 14 Qazcorpora: Қазақ тілінің корпустары. <https://qazcorpora.kz/> (Қол жеткізу күні: 23.11.2025).
- 15 Қазақстан футбол федерациясының ресми сайты, available at <https://kff.kz/kk/news/23788> (Қол жеткізу күні: 22.11.2025).

## TYPOLOGICAL DIFFERENCES BETWEEN SYNTHETIC AND ANALYTICAL CAUSAL STRUCTURES IN THE KAZAKH LANGUAGE

R. Taberkhan, M.A. Sambetbayeva

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan

**Abstract.** This article presents a methodology for the manual annotation and structural-semantic systematization of causal constructions in the Kazakh language based on the KazCausal annotation scheme.

The aim of the study is to formally describe the morphological, lexical, and syntactic means of expressing causality in Kazakh through an annotation model and to provide a scientific basis for the development of a corpus adapted to natural language processing tasks.

The study is based on 1,250 causal sentences selected from scientific, journalistic, and normative texts. All sentences were considered as linguistic units expressing cause-and-effect relations and were classified into three main structural types: SYNTHETIC\_CAUSE, ANALYTICO\_SYNTHETIC\_CAUSE, and ANALYTIC\_CAUSE.

The results show that synthetic constructions account for 431 sentences (34.5%), analytico-synthetic constructions for 425 sentences (34.0%), and analytic constructions for 394 sentences (31.5%). The proposed annotation scheme makes it possible to simultaneously annotate the cause fragment, the effect fragment, the causal marker, the structural type, the specific morphological form, and the semantic subtype. The quality of annotation was evaluated using an F1 score of 0.81 and Cohen's kappa coefficient of  $k=0.72$ .

The findings of the study provide a foundation for the development of typologically adapted NLP resources aimed at the automatic detection of cause-and-effect relations in the Kazakh language.

**Keywords:** text annotation, corpus linguistics, NLP, agglutinative languages, KazCausal, cause-and-effect relations, inter-annotator agreement.

## ТИПОЛОГИЧЕСКИЕ РАЗЛИЧИЯ СИНТЕТИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРИЧИННЫХ СТРУКТУР В КАЗАХСКОМ ЯЗЫКЕ

Р. Таберхан, М.А. Самбетбаева

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан

**Аннотация.** В статье предлагается методика ручного аннотирования и структурно-семантической систематизации причинно-следственных конструкций казахского языка на основе схемы KazCausal.

Цель исследования заключается в формальном описании морфологических, лексических и синтаксических средств выражения каузальности в казахском языке посредством аннотационной модели, а также в обосновании научных принципов создания корпуса, адаптированного к задачам обработки естественного языка.

В качестве объекта исследования были использованы 1250 каузальных предложений, отобранных из научных, публицистических и нормативных текстов. Все предложения рассматривались как языковые единицы, выражающие причинно-следственные отношения, и были классифицированы по трём основным структурным типам: SYNTHETIC\_CAUSE, ANALYTICO\_SYNTHETIC\_CAUSE и ANALYTIC\_CAUSE.

Полученные результаты показали, что синтетические конструкции составляют 431 предложение (34,5%), аналитико-синтетические конструкции — 425 предложений (34,0%), а аналитические конструкции — 394 предложения (31,5%). Предложенная схема позволяет одновременно аннотировать фрагмент причины, фрагмент следствия, каузальный маркер, структурный тип, конкретную морфологическую форму и семантический подтип. Качество аннотации было оценено с использованием показателей  $F1=0,81$  и коэффициента согласия Коэна  $k=0,72$ .

Результаты исследования формируют основу для разработки типологически адаптированных NLP-ресурсов, предназначенных для автоматического выявления причинно-следственных отношений в казахском языке.

**Ключевые слова:** аннотация текста, корпусная лингвистика, NLP, агглютинативные языки, KazCausal, причинно-следственные отношения, межаннотаторское согласие.

## References

- 1 R. Taberkhan and M.A. Sambetbayeva, KazCausal: Manual Annotation of Causal Constructions in the Kazakh Language, International Conference on Computer Science and Engineering, UBMK 2025 (2025), 463–467. <https://doi.org/10.1109/UBMK67458.2025.11206832>
- 2 K.K. Schuler, VerbNet: A broad-coverage, comprehensive verb lexicon, PhD dissertation, University of Pennsylvania, Philadelphia, 2005. AAI3179808. Available at: <https://www.proquest.com/docview/305449413> (accessed on November 20, 2025).
- 3 M. Palmer, D. Gildea, and P. Kingsbury, The Proposition Bank: An annotated corpus of semantic roles, Computational Linguistics 31(1) (2005), 71–106. <https://doi.org/10.1162/0891201053630264>

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2026, Том 154, №1  
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2026, Том 154, №1



- 4 J. Ruppenhofer, M. Ellsworth, M.R.L. Petruck, C.R. Johnson, C.F. Baker, and J. Scheffczyk, FrameNet II: Extended theory and practice, International Computer Science Institute, Berkeley, 2010. <https://d-nb.info/1136959238/34> (accessed on November 20, 2025).
- 5 L. Vieu, P. Muller, M. Candito, and M. Djemaa, A general framework for the annotation of causality based on FrameNet, Proceedings of the Tenth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'16) (2016), 3807–3813. <https://aclanthology.org/L16-1603/> (accessed on November 25, 2025).
- 6 R. Prasad, N. Dinesh, A. Lee, E. Miltsakaki, L. Robaldo, A. Joshi, and B. Webber, The Penn Discourse Tree-Bank 2.0, Proceedings of the Sixth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'08), Marrakech, Morocco, 2008. <https://aclanthology.org/L08-1093/> (accessed on November 25, 2025).
- 7 J. Dunietz, L. Levin, and J.G. Carbonell, The BECauSE Corpus 2.0: Annotating causality and overlapping relations, Proceedings of the 11th Linguistic Annotation Workshop (LAW-XI) (2017), 95–104. <https://doi.org/10.18653/v1/W17-0812>
- 8 N. Mostafazadeh, A. Grealish, N. Chambers, J. Allen, and L. Vanderwende, CaTeRS: Causal and temporal relation scheme for semantic annotation of event structures, Proceedings of the Fourth Workshop on Events (2016), 51–61. <https://doi.org/10.18653/v1/W16-1007>
- 9 T. O’Gorman, K. Wright-Bettner, and M. Palmer, Richer Event Description: Integrating event coreference with temporal, causal and bridging annotation, Proceedings of the 2nd Workshop on Computing News Storylines (CNS 2016) (2016), 47–56. <https://doi.org/10.18653/v1/W16-5706>
- 10 P. Mirza, Extracting temporal and causal relations between events, Proceedings of the ACL 2014 Student Research Workshop (2014), 10–17. <https://doi.org/10.3115/v1/P14-3002>
- 11 A. Eirew, E. Nachshoni, A. Slobodkin, and I. Dagan, EventFull: Complete and Consistent Event Relation Annotation, Proceedings of the 2025 Conference of the Nations of the Americas Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies (System Demonstrations) (2025), 494–508. <https://doi.org/10.18653/v1/2025.naacl-demo.40>
- 12 M.A.K. Raiaan, M.A.A.S. Khan, A. Muhammad, T.T.M. Nguyen, and S. Hussain, A review on large language models: Architectures, applications, taxonomies, open issues and challenges, IEEE Access 12 (2024), 26839–26874. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3365742>
- 13 Qazqorpus : Kazak tilinin ulttyk korpusy [Qazqorpus: National Corpus of the Kazakh Language], available at <https://qazqorpus.kz/> (accessed November 23, 2025) [in Kazakh]
- 14 Qazqorpora: Kazak tilinin korpustary [Qazqorpora: Corpora of the Kazakh Language], available at <https://qazqorpora.kz/> (accessed November 22, 2025) [in Kazakh]
- 15 Kazakhstan futbol federaciyasynyn resmi sajty [Official Website of the Kazakhstan Football Federation], available at <https://kff.kz/kk/news/23788> (accessed November 22, 2025) [in Kazakh].

#### Авторлар туралы мәлімет:

Таберхан Роман – Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Ақпараттық жүйелер кафедрасының 3 курс PhD докторанты, Сәтпаев 2, Астана, 010008, Қазақстан.

Самбетбаева Мадина – PhD докторы, қауымдастырылған профессор, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Ақпараттық жүйелер кафедрасының профессоры, Сәтпаев 2, Астана, 010008, Қазақстан.

#### Information about the authors:

Taberkhan Roman – 3rd-year PhD doctoral student, Department of Information Systems, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

Sambetbayeva Madina– Doctor PhD, Associate Professor, Professor of the Department of Information Systems, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

*Қабылданған күні: 24.11.2025. Өңдеуден кейін: 17.03.2026.*

*Мақұлданған күні: 31.03.2026. Онлайн қолжетімді: 17.06.2026.*



Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

**Article**

**IRSTI: 27.23; 24.01.45; 27.01.33**

**Mathematical Modeling and Effective Properties in Dispersed Composites<sup>1</sup>**

V. Mityushev

*Faculty of Computer Science and Mathematics, Cracow University of Technology, Warszawska str., 24,  
Krakow, Poland*  
*[wladimir.mitiuszew@pk.edu.pl](mailto:wladimir.mitiuszew@pk.edu.pl)*

**Abstract.** Determining the effective properties of dispersed composites, such as conductivity and permittivity, remains a central challenge in homogenization theory. This paper presents a comprehensive revision of the Self-Consistent Method and its modern variants, demonstrating that many so-called “new models” are, in fact, merely first-order approximations in concentration that reproduce the classical results of Maxwell, Clausius, Mossotti, and others. We establish a rigorous framework for assessing accuracy with respect to both inclusion concentration and contrast parameters. A particular role of simulations addresses to standard packages, when the opacity of numerical calculations often obscures the underlying probability distributions of inclusions. We conclude that the concept of a mathematical model is frequently misapplied in the study of dispersed random composites, especially when the fundamental principles of homogenization and asymptotic analysis are overlooked. Finally, we demonstrate how symbolic computation can be effectively employed to derive analytically correct formulas with precisely quantified accuracy.

Special attention is given to the relationship between analytical approaches and numerical simulations in the evaluation of effective material parameters. The paper emphasizes that reliable predictions require consistency with the fundamental principles of homogenization theory and the correct treatment of stochastic microstructures. By comparing classical and modern approaches, we identify the limits of applicability of commonly used approximations and clarify their asymptotic accuracy. The study also highlights the importance of transparent computational procedures, allowing the influence of inclusion geometry, concentration, and spatial distribution to be properly interpreted. The proposed methodology provides a unified perspective on dispersed composites and offers practical guidance for researchers working with effective medium theories, computational homogenization, and multiphase materials.

**Keywords:** Homogenization theory, dispersed composites, self-consistent method, asymptotic analysis, symbolic computation.

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2026/1.3>

**2000 Mathematics Subject Classification: 74Q15**

---

<sup>1</sup>Зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетімен қаржыландырылған (грант №AP22686434)

## 1. Introduction

The theory of homogenization is a mathematical theory devoted to PDE with rapidly oscillated coefficients. It is based on physical consideration of heterogeneous media and used to derive macroscopic, averaged equations and physical coefficients [2, 34, 17]. It allows engineers and physicists to replace a heterogeneous material with a homogenized material to predict its overall behavior. The microscopic structure of a material yields its macroscopic response which can be expressed by numerical data and analytical formulas.

Since the 19th century, the works of Maxwell, Clausius, Mossotti, and many others have served as the bedrock for various composites [30, Chapter 9]. J.C. Maxwell proposed Self Consistent Method (SCM) [21] in 1873. The Maxwell-Garnett<sup>2</sup> approximation was derived in 1904. It is suitable for the complex dielectric permittivity. The same formula for real conductivity (permittivity) was known as the Clausius-Mossotti approximation published in 1850. It coincides with Maxwell's approximation. Perhaps the universality of mathematical modeling was not clear in the XIX century. The historical notes [19] and references therein clarify the series of the above approximations.

The modern literature is saturated with a rich assortment of different approximations called mathematical models that often lack theoretical justification. A fundamental problem in contemporary research is the misuse of the term "model." In many cases, it is used as a "magic word" to allow empirical reasoning where rigorous exact science should prevail [30]. This has resulted in a proliferation of formulas that sometimes contradict one another, violate the Hashin-Shtrikman bounds, or ignore the fundamental symmetry of tensors.

The well-known Hill approach based on the Representative Volume Element (RVE) for elastic composites [15, 16] was revisited in [9]. It was rigorously shown that the RVE must constitute a fundamental domain of a plane or spatial torus. For example, a flat torus can be represented as a parallelogram in the complex plane with identified opposite edges [25]. Alternative choices of RVE shape may lead to inconsistencies with the fundamental principles of homogenization as clearly shown in [29].

This paper seeks to restore mathematical rigor by analyzing the asymptotic and numerical precision [38]. We argue that for a mathematically defined problem, there should be a unique mathematical expectation for effective constants. Discrepancies in results, particularly in computer simulations, are not evidence of "different valid models," but rather a reflection of differing numerical protocols [12] and oversimplified approaches.

In this paper, we discuss the principles of mathematical modeling using a physical and mechanical problem concerning the macroscopic properties of stochastic dispersed media as an illustrative example. All relevant aspects are considered, including mathematical theories, empirical formulations, the use of standard numerical packages, and artificial intelligence (AI).

## 2. Mathematical Modeling

The most popular analytical formulas for the effective conductivity (permittivity) of dispersed composites are the Maxwell [21], Maxwell-Garnett [22] and Bruggeman [5] approximations, Mori-Tanaka method for elastic composites [31]. The famous neutral Hashin-Shtrikman assemblage [14] for coated composites and its extensions [36, 6, 7, 8] as well as the Keller [18]-Matheron [20]-Dykhne [10] approach and its extensions [33, 3], deserve a special consideration not discussed here. We will discuss analytical formulas for two-phase composites based on self-consistent method (SCM).

A typical modern review of various analytical formulas for the effective properties of composites, including elastic media, begins with a discussion of these formulas and their numerous extensions. Lots of items are laid out on the counter and offered for usage. Some contradict others; some violate the Hashin-Shtrikman bounds; some disturb the symmetry of tensors. However, everything becomes allowed due to the democratic using the word "model". There is no theoretical justification when creating a new model, giving way to empirical reasons. Experiments might confirm the model for some data.

---

<sup>2</sup>James Clerk Maxwell and J.C. Maxwell Garnett are different persons.

We will not discuss a rich assortment of models and narrow our focus to the specific two-phase 2D macroscopically isotropic composites in order to derive precision of various modifications of SCM such as effective medium approximation, mean-field, Mori-Tanaka methods [31], etc. Some popular modifications of SCM are covered by the first-order approximation of Schwarz's method. This investigation explains plenty of illusory different formulas which are reduced to the same Maxwell-type estimation for dilute composites. Some higher-order extensions violate homogenization principles and lead to methodologically misleading results [28, 29].

SCM has multiple meanings in different fields of science and engineering. We pay particular attention to SCM in the theory of composites by Maxwell [21] developed by Hill [15, 16] and many others, and its relations to Schwarz's method. S.G. Mikhlin developed the alternating method of Schwarz in 1949 [23]. Mikhlin's work can be considered a mathematical embodiment of Schwarz's approach.

The main result of the present paper consists of applying Schwarz's method and functional equations to composites and deriving higher-order approximations for the effective constants. In particular, we demonstrate that Maxwell's SCM and its modern modifications coincide with the first-order approximation of Schwarz's method.

Investigation of SCMs for dispersed composites is presented in [32], where such materials were referred to as "grain composites." Following these studies, many engineers applied SCMs to compute numerical estimates of effective material constants for various composite systems. Nevertheless, the fundamental theoretical issue concerning the limitations of SCMs remained unresolved. The justification of SCM applicability has traditionally relied on the assumption of a dilute concentration of inclusions. It was observed that extending SCMs beyond this regime, specifically to higher-order terms in the inclusion volume fraction  $f$ , can lead to predictions that are physically inconsistent.

In [28], analytical expressions for effective properties were derived as power series expansions in the inclusion concentration  $f$  and the contrast parameter  $\varrho$ . These series were truncated to obtain polynomials in  $f^{1/2}$  and  $\varrho$ , with coefficients explicitly determined and symbolically dependent on the geometry and spatial distribution of inclusions. Furthermore, the accuracy of these approximations was rigorously established as  $O(|\varrho|^m f^{p/2})$ , where  $m$  denotes the number of Schwarz method iterations and  $p$  characterizes the order of the concentration approximation used at each step.

This situation highlights a fundamental issue: why do different formulas arise for the same composite system? The underlying reason is often a misuse of terminology, where the concept of a "model" is incorrectly equated with that of a "formula." In exact sciences, it is essential to distinguish clearly between the two. A mathematically well-defined problem should yield a unique solution; obtaining different results does not imply the existence of multiple models. A correct research methodology requires that the model be fully specified a priori, while the derivation of formulas is performed a posteriori. This principle also applies to probabilistic analyses of random composites, where the statistical description of inclusion distributions must be explicitly defined within the model. Only then can the expected values of effective properties be rigorously determined for the specified class of random media.

In many studies, random composites are simulated using algorithms that incorporate stochastic variables, the distributions of which are often implicitly embedded in computational procedures. Moreover, the results of such simulations may depend on the chosen numerical protocols. These factors can lead to different estimates of effective properties, reflecting variations in the assumed spatial distributions of inclusions.

The exact coefficients for the effective constants were derived in [11, 28] in the series in  $\varrho$  and  $f$ . This allows us to compare formulas from the previous publications with the asymptotic estimations to make conclusions concerning the validity of the formulas called "models." Such a comparison of the Maxwell formula (Clausius-Mossotti approximation) for equal disks yields the asymptotic formula for macroscopically isotropic composites

$$\lambda_e = \frac{1 + \varrho f}{1 - \varrho f} + O(f^3), \quad (1)$$

where  $\lambda_e$  denotes the macroscopic permittivity. The exact precision up to  $O(f^3)$  was established in [27]. Equation (1) was extended to other shapes of inclusions. Some authors add the precision term  $O(f^3)$  to such an approximation, however, it must be  $O(f^{5/2})$  as demonstrated in [28].

The Hashin-Shtrikman bounds for 2D two-phase macroscopically isotropic composites for real normalized permittivity of components  $\lambda_1$  and  $\lambda = 1$  when  $\lambda_1 > 1$  can be written in the form

$$\lambda_{HS}^- \leq \lambda_e \leq \lambda_{HS}^+, \quad (2)$$

where

$$\lambda_{HS}^- = 1 + \frac{2f(\lambda_1 - 1)}{(1 - f)(\lambda_1 - 1) + 2}, \quad \lambda_{HS}^+ = \lambda_1 + \frac{2(1 - f)(1 - \lambda_1)\lambda_1}{f(1 - \lambda_1) + 2\lambda_1}. \quad (3)$$

It was proved in that an extension of Maxwell's approach to a finite collection of inclusions (cluster) may give, at most, the effective properties of dilute clusters. Any general formula for 2D two-phase macroscopically anisotropic dispersed composites which does not include the location of disks holds up to  $O(f^2)$ ; for macroscopically isotropic composites up to  $O(f^{5/2})$ . This criterion of lower order formula could be extended to multi-phase composites except at the Hashin-Shtrikman type assemblages with neutral inclusions. For instance, a set of valuable formulas for multi-phase macroscopically anisotropic composites is valid up to  $O(f^{5/2})$ .

A significant portion of modern "model creation" involves adding complex analytical terms to a basic first-order formula. One can take the standard term (1) and append an arbitrary tale:

$$\frac{1 + \varrho f}{1 - \varrho f} = \frac{1 + \varrho f + 2.176\varrho^{7/3}f^{19/2}}{1 - \varrho f + 3.143\varrho^{17/4}f^{19/2}} + 1.823\varrho^{13/4}f^{13/2} \ln f + O(f^2). \quad (4)$$

The additional terms on the right-hand side are introduced in an ad hoc manner. Although the formula above is formally correct, it lacks practical significance. While the right-hand side may appear to define a "new model," it does not extend beyond a first-order approximation in  $f$ .

Both the differential scheme and the Mori-Tanaka method can be derived using similar arguments. Consider equation (1) with explicit dependence on the variable  $f$  and introduce an increment from  $f$  to  $f + \Delta f$  which induces a corresponding change from  $\lambda_e$  to  $\lambda_e + \Delta\lambda_e$ . Within the framework of the differential scheme, one assumes infinitesimally small increments. This allows one to pass to a differential equation for  $\lambda_e$ , whose solution yields a "new model." However, the principal limitation of this approach lies in the assumption that  $\Delta f$  is infinitesimal that does not yield the increasing of accuracy in  $f$ .

In Mori-Tanaka method, such an increment  $\Delta f$  typically implemented numerically. Tacitly, this method assumes that the behavior captured by the first-order approximation in  $f$  reflects the trend exhibited by higher-order approximations, see detailed discussion in [29].

This demonstrates that modifications such as Mori-Tanaka methods, effective medium approximations (EMA), and differential schemes are often just illusory different formulas that reduce to the same Maxwell (Clausius-Mossotti) estimation (1) for dilute composites. Applying such an approximation to non-dilute composites often results in physically unacceptable predictions.

### 3. Generalized alternating method of Schwarz and functional equations

The generalized alternating method of Schwarz, or shortly Schwarz's method, can be implemented in the form of different iterative schemes known in the theory of composites as the contrast and cluster expansions. The method was developed for the Riemann-Hilbert boundary value problem for a finitely connected domain in [4]. A short description with using of the Poincaré theta series can be found in [24].

The contrast expansion for 2D permittivity problems leads to a power series in  $\varrho$ . The cluster expansion means a series in  $f^{1/2}$ . Frequently, the authors of SCMs do not care about the precision in  $\varrho$  and  $f^{1/2}$ , and derive, in the best case, the same formula asymptotically equivalent to the Maxwell-Garnett formula. The analysis of precision demonstrate a discrepancy between the rigorously derived formulas for the effective permittivity of disks/spheres and some formulas obtained by SCM. Below,

we demonstrate and explain this precision effect on a simple example of 2D two-phase conductive composite with circular inclusions.

Let  $z = x + iy$  denote a complex variable. Let  $\omega_1 = 1$  and  $\omega_2 = i$  be the fundamental pair of periods on the complex plane  $\mathbb{C}$ . The fundamental parallelogram  $Q$  is defined by the vertices  $\pm \frac{1}{2}$  and  $\pm \frac{i}{2}$ .

The points  $m_1 + m_2 i$  ( $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ ) generate a doubly periodic lattice and the unit square cell

$$Q = Q_{(0,0)} = \left\{ z = t_1 + it_2 \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < t_1, t_2 < \frac{1}{2} \right\}.$$

Let the points  $a_k$  belong to  $Q$ . Consider non-overlapping inclusions  $D_k = \{|z - a_k| < r\}$  of conductivity  $\lambda$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) and the conductivity of the host be normalized to the unit. The conductivity  $\lambda$  is dimensionless and can be considered as the ratios of the conductivities of the  $k$ th inclusion to the conductivity of host.

We study conductivity of the doubly periodic composite when the host  $D + m_1 + im_2\omega_2$  and the inclusions  $D_k + m_1 + im_2$  are occupied by conducting materials. The functions  $u(\mathbf{x})$  and  $u_k(\mathbf{x})$  are harmonic in  $D$  and  $D_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) and continuously differentiable in closures of the considered domains. The perfect contact on the interface has the form

$$u = u_k, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{on } L_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

where  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$  denotes the outward normal derivative to  $L_k = \partial D_k$ . Let the external field be defined by the conditions

$$u(z + 1) = u(z) + 1, \quad u(z + i) = u(z). \quad (6)$$

Introduce the contrast parameter

$$\varrho = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}. \quad (7)$$

Introduce the double periodic complex flux

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \psi(z), \quad z \in D \quad (8)$$

and

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} - i \frac{\partial u_k}{\partial y} = \frac{\lambda + 1}{2} \psi_k(z), \quad z \in D_k \quad (9)$$

We have

$$\psi(z + 1) = \psi(z), \quad \psi(z + i) = \psi(z). \quad (10)$$

Following [28, 26] we have

$$\psi(t) = \psi_k(t) + \frac{\varrho r^2}{t^2} \overline{\psi_k(t)}, \quad t \in L_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

where the functions  $\psi(z)$  and  $\psi_k(z)$  are analytic in  $D$  and  $D_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) and continuous in the closures of considered domains.

The  $\mathbb{R}$ -linear problem (10) - (11) can be reduced to a system of integral equations on the torus  $Q$  corresponding to Schwarz's method. In the case of circular inclusion, these integral equations become the functional equations [11]. Introduce the operator in a Banach space associated to continuous functions

$$\left( W_{m_1, m_2}^{(m)} F \right) (z) = \left( \frac{r}{z - a_m - m_1 - im_2} \right)^2 \overline{F \left( a_m + \frac{r^2}{z - a_m + m_1 - im_2} \right)}. \quad (12)$$

Here, a function  $F(z)$  is analytic in all the disks  $D_k$  and continuous in their closures. The norm  $\|F\| = \max_k \max_{|z - a_k| \leq r} |F(z)|$ .

Introduce for  $m = k$

$$(J_{kk} F)(z) = \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} \left( W_{m_1, m_2}^{(k)} F \right) (z) \quad (13)$$

and for  $m \neq k$

$$(J_{km}F)(z) = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} \left( W_{m_1, m_2}^{(m)} F \right) (z). \quad (14)$$

The double series (12)–(14) are defined by the Eisenstein summation that correctly determines their convergence [11].

The system of functional equations corresponding to the  $\mathbb{R}$ -linear problem (10) - (11) can be written in the form

$$\psi_k(z) = \varrho \sum_{m=1}^N \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}}^* \left( W_{m_1, m_2}^{(m)} \psi_m \right) (z) + 1, \quad |z - a_k| \leq r \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (15)$$

where  $m_1, m_2$  run over integers  $\mathbb{Z}$  excluding  $m_1 = m_2 = 0$  for  $m = k$ . It was justified that the system of functional equations (15) can be solved by a method of successive approximations absolutely convergent for  $|\varrho| < 1$ . It was proved that the uniform convergence holds for  $|\varrho| = 1$ , i.e., in the considered Banach space. Attention, the absolute convergence can fail in this case.

Equations (15) can be easily solved by use of symbolic computations. The infinite double summations in  $m_1, m_2$  can be performed by application of the Eisenstein functions  $E_n(z)$ . Equations (15) can be solved by the contrast expansions in  $\varrho$  and by the expansions in  $f = N\pi r^2$ . This expansion equivalent to the expansion in  $r^2$  can be written in the form

$$\psi_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_m^{(n)}(z) r^{2n} \quad |z - a_k| \leq r \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} \psi_m^{(0)}(z) &= 1, \quad \psi_m^{(1)}(z) = \rho \sum_{k=1}^N E_2(z - a_k), \\ \psi_m^{(2)}(z) &= \varrho^2 \sum_{k, k_1=1}^N \overline{E_2(a_k - a_{k_1})} E_2(z - a_k), \\ \psi_m^{(3)}(z) &= \varrho^3 \sum_{k, k_1, k_2=1}^N E_2(a_k - a_{k_1}) \overline{E_2(a_{k_1} - a_{k_2})} E_2(z - a_{k_2}) \\ &\quad - 2\varrho^2 \sum_{k, k_1=1}^N \overline{E_3(a_k - a_{k_1})} E_3(z - a_k), \end{aligned} \quad (17)$$

It is assumed for shortness that  $E_n(z - a_k)$  is replaced with

$$\tilde{E}_n(z - a_k) = E_n(z - a_k) - (z - a_k)^{-n} \text{ for } k = m \quad (18)$$

and  $E_n(a_k - a_m) := S_n$  for  $k = m$ , where the lattice sums for the square array  $S_2 = \pi$ ,  $S_3 = 0$ , are used.

Following [28] the normalized effective conductivity of macroscopically isotropic composites can be found by the formula

$$\lambda_e = 1 + 2\varrho f \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \psi(a_m). \quad (19)$$

Substitute (17) into (19) and apply the asymptotic expansion in  $f$

$$\lambda_e = 1 + 2\varrho f \left( 1 + \frac{\varrho f}{\pi} e_2 + \frac{\varrho^2 f^2}{\pi^2} e_{22} + \frac{\varrho^2 f^3}{\pi^3} (\varrho e_{222} - 2e_{33}) \right) + O(f^5), \quad (20)$$

where the following structural sums (basic sums or  $e$ -sums) are introduced [11, Chapter 4]

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k_0=1}^N \sum_{k_1=1}^N E_2(a_{k_0} - a_{k_1}), \\
 e_{22} &= \frac{1}{N^3} \sum_{k_0=1}^N \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N E_2(a_{k_0} - a_{k_1}) \overline{E_2(a_{k_1} - a_{k_2})}, \\
 e_{33} &= \frac{1}{N^4} \sum_{k_0=1}^N \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N E_3(a_{k_0} - a_{k_1}) \overline{E_3(a_{k_1} - a_{k_2})}, \\
 e_{222} &= \frac{1}{N^4} \sum_{k_0=1}^N \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \sum_{k_3=1}^N E_2(a_{k_0} - a_{k_1}) \overline{E_2(a_{k_1} - a_{k_2})} E_2(a_{k_2} - a_{k_3}).
 \end{aligned} \tag{21}$$

The analytical expressions (17) and (19)-(21) can be continued practically without limitations [11]. The same concerns 2D elastic problems and 3D conductivity problems with perfectly conducting spherical inclusions. In particular, all the terms for a regular lattice are written explicitly. Hence, this yields exact formulas for a regular array of circular inclusions [1]. It should be noted that other frequently used empirical and approximate formulas diverge with the known exact formulas.

The structural sums for a macroscopically isotropic composites satisfy some relations. In particular,  $e_2 = \pi$  for ideally isotropic composites. This formula extend the famous Rayleigh's formula  $S_2 = \pi$  concerning lattice sums [35, 37]. The structural sum  $e_{22}$  varies with the location of inclusions. It can be proved that  $e_{22}$  is positive and  $e_{22} \geq \pi^2$ .

The formula (20) yields a proof of the the Maxwell (Clausius-Mossotti) approximation (1) and exclude any not justified empirical continuation similar to (1).

It is interesting to discuss the contrast approximation. The second order approximation in  $\varrho$  follows from the application of two iterations to equation (15). We have the same zero and first order approximations in (20), namely,

$$\lambda_e = 1 + 2\varrho f + 2\varrho^2 f^2 + O(f^3) = \frac{1 + \varrho f}{1 - \varrho f} + O(f^3), \tag{22}$$

where  $O(f^3)$  can be replaced with  $O(\varrho^3)$ . However, the third order terms are different.

Introduce the approximations in  $\varrho$

$$\psi_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_m^{(n)}(z; \varrho) \varrho^n \quad |z - a_k| \leq r \quad (k = 1, 2, \dots, N), \tag{23}$$

and

$$\begin{aligned}
 \psi_m^{(0)}(z; \varrho) &= 1, \quad \psi_m^{(1)}(z) = r^2 \sum_{k=1}^N E_2(z - a_k), \\
 \psi_m^{(2)}(z; \varrho) &= \sum_{l,k=1}^N \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}}^* \left( W_{m_1, m_2}^{(l)} E_2(z' - a_k) \right) (z), \quad |z - a_m| \leq r \quad (m = 1, 2, \dots, N).
 \end{aligned} \tag{24}$$

The second order approximation includes the term

$$\left( W_{m_1, m_2}^{(l)} E_2(z' - a_l) \right) (z) = \left( \frac{r}{z - a_l - m_1 - im_2} \right)^2 \overline{E_2 \left( a_l - a_k + \frac{r^2}{z - a_l - m_1 + im_2} \right)}. \tag{25}$$



It follows from equation (19) that

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \psi_m^{(2)}(a_m; \varrho) = \sum_{l,k=1}^N \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}}^* \left( \frac{r}{a_l - a_m + m_1 + im_2} \right)^2 \times$$

$$\overline{E_2 \left( a_l - a_k + \frac{r^2}{a_m - a_l - m_1 + im_2} \right)}.$$
(26)

Using an expansion in  $r^2$  following [11], one finds that this term contains the contribution  $\frac{2\varrho^3 f^3}{\pi^3} e_{22}$ . In addition, it includes infinitely many higher-order terms in  $f$ , for example, the term  $-\frac{4\varrho^3 f^3}{\pi^3} e_{33}$  which also appears in (20), whether in  $f$  or in  $\varrho$  is ultimately immaterial, as both approaches lead to the same resulting double series. However, the first method proves to be significantly more efficient for symbolic computations.

#### 4. Conclusion

The analysis presented in this paper demonstrates that many widely used self-consistent and mean-field approaches do not constitute independent mathematical models, but rather represent specific realizations of low-order asymptotic approximations. In particular, the classical Maxwell (Clausius–Mossotti) formula emerges as the universal first-order term with respect to the concentration of inclusions, while numerous modern extensions fail to improve their accuracy since they neglect asymptotic analysis.

A rigorous examination based on Schwarz’s method reveals that the precision of such formulas for two-phases composites must be assessed simultaneously in terms of the concentration parameter  $f$ , the contrast parameter  $\varrho$  and the structural sums that encode the geometric characteristics of the microstructure. Within this framework, it becomes evident that many modifications including differential schemes, effective medium approximations, and Mori–Tanaka-type constructions do not extend validity beyond the dilute regime and may produce physically inconsistent predictions when extrapolated. Furthermore, the discussion highlights the necessity of a clear distinction between a mathematically defined model and an empirical formula. For well-posed deterministic or probabilistic descriptions of composites, the effective properties are uniquely defined, and discrepancies observed in the literature are typically attributable to violation of asymptotic analysis.

In summary, the reliability of analytical expressions for effective properties must be grounded in homogenization theory and asymptotic justification rather than heuristic “model building.” Symbolic and analytical methods provide a consistent pathway to derive formulas with explicitly controlled accuracy, thereby restoring mathematical rigor to the study of dispersed composites.

It is interesting to observe an analogy between reviews generated by AI and those produced by certain groups of researchers who are primarily oriented toward the popularity of applied methods. In both cases, emphasis is often placed on methods with a large number of citations, despite well-known limitations in their applicability. This resembles a transition from skill to will [13], which may lead to AI hallucinations as well as similar effects within some research communities. In such cases, the high citation counts of works such as [5] and [31] (exceeding 11,000 citations at present) become a dominant argument for their continued inclusion in subsequent studies, overshadowing critical assessment.

If a group of people vote that  $2 \times 2 = 5$ , then they have produced a democratically agreed, but not a true mathematical statement. Mathematics is a dictatorship, see Principle of model and solution [30, page 223]. Its results are not decided by opinion or majority. We conclude this paper with a rhetorical question: May consensus including AI prevail over logic?

#### References

- 1 I. Andrianov and V. Mityushev, Exact and “exact” formulae in the theory of composites, Modern Problems in Applied Analysis, Springer International Publishing, Cham, 2018, 15–34.
- 2 N.S. Bakhvalov and G. Panasenko, Homogenisation: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials. Springer Science and Business Media, 2012.

- 3 W. Bielski and R. Wojnar, Plane flow through the porous medium with chessboard-like distribution of permeability, 2nd Workshop on Porous Media, 2018, 7.
- 4 B. Bojarski and V. Mityushev, R-linear problem for multiply connected domains and alternating method of Schwarz, *Journal of Mathematical Sciences* 189 (2013), no 1, 68–77.
- 5 D.A.G. Bruggeman, Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen, *Annalen der Physik* 416 (1935), no 7, 636–664.
- 6 A. Cherkaev, Optimal three-material wheel assemblage of conducting and elastic composites, *International Journal of Engineering Science* 59 (2012), 27–39.
- 7 A. Cherkaev and A.D. Pruss, Effective conductivity of spiral and other radial symmetric assemblages, *Mechanics of Materials* 65 (2013), 103–109. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.05.004>
- 8 A. Cherkaev, V. Mityushev, N. Rylko, and P. Kurtyka, The generalized Hashin–Shtrikman approach to Al/nano-TiC composite, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 478:2263 (2022). <https://doi.org/10.1098/rspa.2022.0164>
- 9 R. Czapla, P. Drygas, S. Gluzman, T. Ligocki, and V. Mityushev, Computational Strategy for Analyzing Effective Properties of Random Composites. Part II. Elasticity, *Materials* 18 (2025), 5041.
- 10 A.M. Dykhne, Conductivity of a two-dimensional two-phase system, *Soviet Physics JETP* 32 (1971), no 1, 63–65.
- 11 S. Gluzman, V. Mityushev, and W. Nawalaniec, *Computational Analysis of Structured Media*. Academic Press, Elsevier, Amsterdam, 2017.
- 12 S. Gluzman, Z. Zhunussova, A. Sarvarov, and V. Mityushev, Protocol-Dependent Critical Exponents in Random Composites: Beyond Universality, *Symmetry* 18 (2026), no 4, 700.
- 13 D. Grzonka, The New Engineer: Psychology, Systems, Open Source. Talk at the WordCamp Europe, Krakow, Poland, 4–6 June, 2026.
- 14 Z. Hashin and S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials, *Journal of Applied Physics* 33 (1962), 3125–3131. <https://doi.org/10.1063/1.1728579>
- 15 R. Hill, Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), 357–372.
- 16 R. Hill, A self-consistent mechanics of composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965), 213–222.
- 17 V.V. Jikov, S.M. Kozlov, and O.A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer Science & Business Media, 2012.
- 18 J.B. Keller, A theorem on the conductivity of a composite medium, *Journal of Mathematical Physics* 5 (1964), no 4, 548–549.
- 19 R. Landauer, Electrical conductivity in inhomogeneous media, *AIP Conference Proceedings* 40 (1978), no 1, 2–45.
- 20 G. Matheron, *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson, Paris, 1967.
- 21 J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. 1. Clarendon Press, 1873.
- 22 J.C.M. Maxwell-Garnett, Colours in Metal Glasses and in Metallic Films, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 203 (1904), no 359–371, 385–420.
- 23 S.G. Mikhlin, *Integral Equations: and Their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology*, Vol. 4. Elsevier, 2014.
- 24 V. Mityushev, Hilbert boundary value problem for multiply connected domains, *Complex Variables* 35 (1998), 283–295.
- 25 V. Mityushev, R-linear problem on torus and its application to composites, *Complex Variables* 50 (2005), no 7–10, 621–630.
- 26 V.V. Mityushev, R-linear and Riemann–Hilbert Problems for Multiply Connected Domains, *Advances in Applied Analysis*. Springer Basel, Basel, 2012, 147–176.
- 27 V. Mityushev and P. Dryga’s, Effective Properties of Fibrous Composites and Cluster Convergence, *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation* 17 (2019), no 2, 696–715. <https://doi.org/10.1137/18M1184278>
- 28 V. Mityushev and N. Rylko, Effective properties of two-dimensional dispersed composites. Part I. Schwarz’s alternating method, *Computers and Mathematics with Applications* 111 (2022), 50–60.
- 29 V. Mityushev, Effective properties of two-dimensional dispersed composites. Part II. Revision of self-consistent methods, *Computers and Mathematics with Applications* 121 (2022), 74–84.
- 30 V. Mityushev, R.A. Kycia, W. Nawalaniec, and N. Rylko, *Introduction to Mathematical Modeling and Computer Simulations*. Chapman and Hall/CRC, 2025.
- 31 T. Mori and K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica* 21 (1973), no 5, 571–574.
- 32 A.N. Norris, A differential scheme for the effective moduli of composites, *Mechanics of Materials* 4 (1985), no 1, 1–16.
- 33 Y.V. Obnosov, Exact solution of a boundary-value problem for a rectangular checkerboard field, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 452 (1996), no 1954, 2423–2442.

- 34 A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, Vol. 374. American Mathematical Society, 2011.
- 35 L. Rayleigh, On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 34 (1892), no 211, 481–502.
- 36 K. Schulgasser, Sphere assemblage model for polycrystals and symmetric materials, Journal of Applied Physics 54 (1983), 1380–1382. <https://doi.org/10.1063/1.332161>
- 37 S. Yakubovich, P. Drygas, and V. Mityushev, Closed-form evaluation of two-dimensional static lattice sums, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 472 (2016), no 2195.
- 38 A.Z. Zhubanysheva, N. Temirgaliev, and Z.N. Temirgalieva, Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki 49 (2009), no 1, 14–25.

## Дисперсті композиттердің математикалық модельдеуі мен тиімді қасиеттері

**В. Митюшев**

Компьютерлік ғылымдар және математика факультеті, Краков технология университеті, Варшава көш, 24, Краков, Польша

**Аннотация.** Дисперсті композиттердің тиімді қасиеттерін, мысалы, электрөткізгіштігі мен диэлектрлік өтімділігін анықтау гомогенизация теориясындағы негізгі мәселелердің бірі болып қала береді. Бұл мақалада өзін-өзі келісімді әдіске (Self-Consistent Method) және оның заманауи нұсқаларына жан-жақты талдау жасалады. Көптеген «жаңа модельдер» шын мәнінде қосындылар концентрациясы бойынша бірінші ретті жуықтаулар ғана екені және олардың Максвелл, Клаузиус, Моссотти және басқа ғалымдардың классикалық нәтижелерін қайта өндіретіні көрсетіледі. Қосындылар концентрациясы мен фазалар қасиеттерінің контраст параметрлерін ескере отырып, дәлдікті бағалаудың қатаң әдістемесі ұсынылады. Стандартты бағдарламалық пакеттерді қолданатын сандық модельдеуге ерекше назар аударылады, өйткені есептеулердің жабық сипаты көбінесе қосындылардың ықтималдық үлестірімдерін жасырып қалады. Зерттеу нәтижелері дисперсті кездейсоқ композиттерді талдауда математикалық модель ұғымының жиі қате қолданылатынын көрсетеді, әсіресе гомогенизация мен асимптотикалық талдаудың іргелі қағидалары ескерілмеген жағдайда. Сонымен қатар, аналитикалық тұрғыдан дұрыс және дәлдігі нақты бағаланған формулаларды шығару үшін символдық есептеулерді тиімді пайдалануға болатыны дәлелденеді.

Материалдардың тиімді параметрлерін анықтауда аналитикалық тәсілдер мен сандық модельдеу арасындағы өзара байланысқа ерекше көңіл бөлінеді. Жұмыста сенімді болжамдар жасау үшін гомогенизация теориясының іргелі қағидаларын сақтау және композиттердің стохастикалық микроқұрылымын дұрыс есепке алу қажеттігі көрсетілген. Классикалық және заманауи тәсілдерді салыстыру арқылы кеңінен қолданылатын жуықтаулардың қолданылу шектері анықталып, олардың асимптотикалық дәлдігі нақтыланады. Сондай-ақ есептеу рәсімдерінің ашықтығының маңыздылығы көрсетіліп, қосындылар геометриясының, олардың концентрациясының және кеңістіктік таралуының материалдың тиімді қасиеттеріне әсерін дұрыс түсіндіруге мүмкіндік беретіні атап өтіледі. Ұсынылған әдістеме дисперсті композиттерге біртұтас көзқарас қалыптастырып, тиімді орта теориялары, есептеуіш гомогенизация және көпфазалы материалдар саласында жұмыс істейтін зерттеушілерге практикалық ұсынымдар береді.

**Түйін сөздер:** гомогенизация теориясы, дисперсті композиттер, өзін-өзі келісімді әдіс, асимптотикалық талдау, символдық есептеулер.

## Математическое моделирование и эффективные свойства дисперсных композитов

**В. Митюшев**

Факультет компьютерных наук и математики, Краковский университет технологии, ул. Варшава, 24,  
Краков, Польша

**Аннотация.** Определение эффективных свойств дисперсных композитов, таких как проводимость и диэлектрическая проницаемость, остается одной из центральных задач теории гомогенизации. В данной работе представлен всесторонний пересмотр метода самосогласования (Self-Consistent Method) и его современных модификаций. Показано, что многие так называемые «новые модели» в действительности являются лишь приближениями первого порядка по концентрации включений, воспроизводящими классические результаты Максвелла, Клаузиуса, Моссотти и других исследователей. Разработан строгий подход к оценке точности с учетом как концентрации включений, так и параметров контраста свойств фаз. Особое внимание уделено компьютерному моделированию с использованием стандартных программных пакетов, поскольку непрозрачность численных вычислений нередко скрывает лежащие в их основе вероятностные распределения включений. Сделан вывод о том, что понятие математической модели часто используется некорректно при исследовании случайных дисперсных композитов, особенно когда игнорируются фундаментальные принципы гомогенизации и асимптотического анализа. Наконец, показано, как символьные вычисления могут эффективно применяться для вывода аналитически корректных формул с точно контролируемой точностью.

Особое внимание уделяется взаимосвязи между аналитическими подходами и численным моделированием при определении эффективных параметров материалов. В работе подчеркивается, что надежные прогнозы требуют согласованности с фундаментальными принципами теории гомогенизации и корректного учета стохастической микроструктуры композитов. Сравнение классических и современных подходов позволяет установить границы применимости широко используемых приближений и уточнить их асимптотическую точность. Также показана важность прозрачных вычислительных процедур, обеспечивающих корректную интерпретацию влияния геометрии включений, их концентрации и пространственного распределения на эффективные свойства материала. Предлагаемая методология формирует единый взгляд на дисперсные композиты и предоставляет практические рекомендации для исследователей, работающих в области теорий эффективной среды, вычислительной гомогенизации и многофазных материалов.

**Ключевые слова:** теория гомогенизации, дисперсные композиты, метод самосогласования, асимптотический анализ, символьные вычисления.

## References

- 1 I. Andrianov and V. Mityushev, Exact and “exact” formulae in the theory of composites, *Modern Problems in Applied Analysis*, Springer International Publishing, Cham, 2018, 15–34.
- 2 N.S. Bakhvalov and G. Panasenko, Homogenisation: averaging processes in periodic media: mathematical problems in the mechanics of composite materials. Springer Science and Business Media, 2012.
- 3 W. Bielski and R. Wojnar, Plane flow through the porous medium with chessboard-like distribution of permeability, 2nd Workshop on Porous Media, 2018, 7.
- 4 B. Bojarski and V. Mityushev, R-linear problem for multiply connected domains and alternating method of Schwarz, *Journal of Mathematical Sciences* 189 (2013), no 1, 68–77.
- 5 D.A.G. Bruggeman, Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen, *Annalen der Physik* 416 (1935), no 7, 636–664.
- 6 A. Cherkav, Optimal three-material wheel assemblage of conducting and elastic composites, *International Journal of Engineering Science* 59 (2012), 27–39.
- 7 A. Cherkav and A.D. Pruss, Effective conductivity of spiral and other radial symmetric assemblages, *Mechanics of Materials* 65 (2013), 103–109. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.05.004>

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2026, Том 154, №1  
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2026, Том 154, №1

- 8 A. Cherkaev, V. Mityushev, N. Rylko, and P. Kurtyka, The generalized Hashin–Shtrikman approach to Al/nano-TiC composite, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 478:2263 (2022). <https://doi.org/10.1098/rspa.2022.0164>
- 9 R. Czapla, P. Drygas, S. Gluzman, T. Ligocki, and V. Mityushev, Computational Strategy for Analyzing Effective Properties of Random Composites. Part II. Elasticity, *Materials* 18 (2025), 5041.
- 10 A.M. Dykhne, Conductivity of a two-dimensional two-phase system, *Soviet Physics JETP* 32 (1971), no 1, 63–65.
- 11 S. Gluzman, V. Mityushev, and W. Nawalaniec, *Computational Analysis of Structured Media*. Academic Press, Elsevier, Amsterdam, 2017.
- 12 S. Gluzman, Z. Zhunussova, A. Sarvarov, and V. Mityushev, Protocol-Dependent Critical Exponents in Random Composites: Beyond Universality, *Symmetry* 18 (2026), no 4, 700.
- 13 D. Grzonka, The New Engineer: Psychology, Systems, Open Source. Talk at the WordCamp Europe, Krakow, Poland, 4–6 June, 2026.
- 14 Z. Hashin and S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials, *Journal of Applied Physics* 33 (1962), 3125–3131. <https://doi.org/10.1063/1.1728579>
- 15 R. Hill, Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), 357–372.
- 16 R. Hill, A self-consistent mechanics of composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965), 213–222.
- 17 V.V. Jikov, S.M. Kozlov, and O.A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer Science & Business Media, 2012.
- 18 J.B. Keller, A theorem on the conductivity of a composite medium, *Journal of Mathematical Physics* 5 (1964), no 4, 548–549.
- 19 R. Landauer, Electrical conductivity in inhomogeneous media, *AIP Conference Proceedings* 40 (1978), no 1, 2–45.
- 20 G. Matheron, *Eléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson, Paris, 1967.
- 21 J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. 1. Clarendon Press, 1873.
- 22 J.C.M. Maxwell-Garnett, Colours in Metal Glasses and in Metallic Films, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 203 (1904), no 359–371, 385–420.
- 23 S.G. Mikhlin, *Integral Equations: and Their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology*, Vol. 4. Elsevier, 2014.
- 24 V. Mityushev, Hilbert boundary value problem for multiply connected domains, *Complex Variables* 35 (1998), 283–295.
- 25 V. Mityushev, R-linear problem on torus and its application to composites, *Complex Variables* 50 (2005), no 7–10, 621–630.
- 26 V.V. Mityushev, *R-linear and Riemann–Hilbert Problems for Multiply Connected Domains*, *Advances in Applied Analysis*. Springer Basel, Basel, 2012, 147–176.
- 27 V. Mityushev and P. Dryga’s, Effective Properties of Fibrous Composites and Cluster Convergence, *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation* 17 (2019), no 2, 696–715. <https://doi.org/10.1137/18M1184278>
- 28 V. Mityushev and N. Rylko, Effective properties of two-dimensional dispersed composites. Part I. Schwarz’s alternating method, *Computers and Mathematics with Applications* 111 (2022), 50–60.
- 29 V. Mityushev, Effective properties of two-dimensional dispersed composites. Part II. Revision of self-consistent methods, *Computers and Mathematics with Applications* 121 (2022), 74–84.
- 30 V. Mityushev, R.A. Kycia, W. Nawalaniec, and N. Rylko, *Introduction to Mathematical Modeling and Computer Simulations*. Chapman and Hall/CRC, 2025.
- 31 T. Mori and K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica* 21 (1973), no 5, 571–574.
- 32 A.N. Norris, A differential scheme for the effective moduli of composites, *Mechanics of Materials* 4 (1985), no 1, 1–16.
- 33 Y.V. Obnosov, Exact solution of a boundary-value problem for a rectangular checkerboard field, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 452 (1996), no 1954, 2423–2442.
- 34 A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Vol. 374. American Mathematical Society, 2011.
- 35 L. Rayleigh, On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 34 (1892), no 211, 481–502.
- 36 K. Schulgasser, Sphere assemblage model for polycrystals and symmetric materials, *Journal of Applied Physics* 54 (1983), 1380–1382. <https://doi.org/10.1063/1.332161>
- 37 S. Yakubovich, P. Drygas, and V. Mityushev, Closed-form evaluation of two-dimensional static lattice sums, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 472 (2016), no 2195.
- 38 A.Z. Zhubanysheva, N. Temirgaliev, and Z.N. Temirgalieva, Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, *Zhurnal Vychislitel’noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* 49 (2009), no 1, 14–25.

**Information about the author:**

Митюшев Владимир – Хабилит. докторы, проф., Компьютерлік ғылымдар және математика факультеті, Краков технология университеті, Варшава көш, 24, Краков, Польша.

Mityushev Vladimir – Dr hab., Prof., Faculty of Computer Science and Mathematics, Cracow University of Technology, Warszawska str., 24, Krakow, Poland.

*Received: 03.02.2026. Revised: 21.02.2026.*

*Approved: 31.03.2026. Available online: 17.06.2026.*



Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

Бас редактор:

Н. Темірғалиев

Жауапты редактор:

Ғ.Е. Тауғынбаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің  
хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы.  
- 2026. 1(154). - Астана: ЕҰУ. 47-б. Басуға қол қойылды: 17.06.2026.

Ашық қолданыстағы электронды нұсқа: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген:  
<http://bulmathmc.enu.kz/>

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,  
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті  
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды