ISSN 3007-0155
eISSN 3007-0163

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА**

№3(152)/2025

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2025
Astana, 2025

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.
№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: *vest_ math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series
Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.
Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА
Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.
Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.
Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,
тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, №3(152)/2025

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, №3(152)/2025

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, №3(152)/2025

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Жукабаева Т., Адамова А., Боранбай Ж., Бенкалифа Е., Марденов Е. SDR көмегімен ақылды ортада Zigbee байланыс қауіпсіздігін талдау
Zhukabayeva T., Adamova A., Boranbay Z., Benkhelifa E., Mardenov Y. Analyzing the Security of Zigbee Communication in Smart Environments via SDR
Жукабаева Т., Адамова А., Боранбай Ж., Бенкалифа Е., Марденов Е. Анализ безопасности связи ZigBee в умной среде с помощью SDR 6

Утесов А.Б., Утесова Г.И. К(Е)Д–қойылымында анизотропты жалпыланған Соболев класы функцияларын оптималды жуықтау
Utessov A.B., Utessova G.I. Optimal C(N)D-recovery of functions from the anisotropic generalized Sobolev class
Утесов А.Б., Утесова Г.И. Оптимальное восстановление функций из обобщенного анизотропного класса Соболева в контексте К(В)П 22

Жубанышева А., Наурызбаев Н., Таугынбаева Г., Нуртазина К., Темиргалиев Н. Монти Холл парадоксының статистикалық жүйелілігінің авторлық кездейсоқтық алгоритмдерімен расталынылуы
Zhubanysheva A.Zh., Nauryzbayev N.Zh., Taugynbayeva G.E., Nurtazina K.B., Temirgaliev N. Statistical Regularity in the Monty Hall Paradox Using Proprietary Random Algorithms
Жубанышева А., Наурызбаев Н., Таугынбаева Г., Нуртазина К., Темиргалиев Н. Наличие статистической регулярности в парадоксе Монти Холла на авторских случайных алгоритмах 30

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2025, Vol. 152, №3, P. 6-21.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

Article
IRSTI: 81.93.29

ANALYZING THE SECURITY OF ZigBee COMMUNICATION IN SMART ENVIRONMENTS via SDR

T. Zhukabayeva [1], A. Adamova [2,*], Z. Boranbay [3] E. Benkhelifa [4], Y. Mardenov [5]

[1,2,3] *Astana IT University, Mangilik El ave. 55/11, Astana, 010000, Kazakhstan*
[4] *Cybersecurity Research Centre, Staffordshire University, Leek Road site ST4 2DF, Stoke-on-Trent, U.K.*
[5] *Astana International University, Kabanbay batyr ave. 8, Astana, 010000, Kazakhstan*
**corresponding author: aigul.adamova@astanait.edu.kz*

Abstract. The development of smart cities is accompanied by the widespread adoption of wireless networks based on the ZigBee protocol, due to its energy efficiency and compatibility with Internet of Things architectures. However, the active use of this protocol in an open radio environment increases the risk of unauthorized radio-frequency interference. The study aims to experimentally assess the vulnerability of ZigBee networks to targeted jamming using software-defined radio. The paper presents the stages of preparing a test environment with real devices, identifying the active data transmission channel, and generating tone interference using the SDR platform HackRF One and the GNU Radio environment. The conducted experiment showed that, when affecting a specific frequency, up to 95% of packets may be lost, rendering the network inoperable. The obtained results confirm the critical vulnerability of the ZigBee protocol at the physical layer and highlight the need to develop additional protection mechanisms for wireless IoT networks, especially within urban infrastructure. The proposed methodology can be used to test the resilience of devices in practical scenarios and to support the development of monitoring systems capable of detecting and withstanding external attacks.

Keywords: ZigBee, SDR, HackRF, GNU Radio, jamming, radio interference, information security, IoT.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/3.1

2000 Mathematics Subject Classification: 94A05; 94C12.

1. Introduction

Modern concepts for the development of smart cities are based on the deep integration of digital technologies with urban infrastructure facilities with the aim to improve the quality of life of the population, rational use of resources, and increasing the level of public and technological safety [1]. One of the key technological components in these processes is wireless sensor networks (WSN), among which the ZigBee protocol occupies a special place - a low power, energy-efficient solution

for data exchange between devices on the Internet of Things (IoT) that complies with the IEEE 802.15.4 standard [2, 3].

ZigBee is widely used in urban subsystems such as intelligent outdoor lighting control, environmental monitoring, utility automation, traffic management, and security systems. The integration of this technology into the IoT architecture is an important element in building smart urban infrastructure [4]. However, the spread and increasingly widespread use of ZigBee is accompanied by a number of specific threats, primarily at the level of the physical data transmission channel [5]. Despite its energy efficiency and ease of implementation, the protocol is vulnerable to deliberate radio frequency interference, in particular jamming attacks, which can lead to local failures or even paralysis of critical city services.

One important factor is the high density of devices in the Industrial, Scientific, and Medical (ISM) band and the overlap of ZigBee frequencies with other popular wireless communication standards, such as Wi-Fi and Bluetooth [6]. This creates conditions for interference and requires an in-depth analysis of the radio environment as a whole, as well as the interaction of network components of different technological nature. This study proposes a proprietary experimental approach to assessing the security of ZigBee networks implemented in a smart city environment. To implement this approach, software-defined radio (SDR) tools were used, including the HackRF One platform and the GNU Radio environment [7], which were applied as the hardware and software basis for conducting experiments. In addition, a graph representation of the network topology is proposed, allowing the analysis of the resilience of IoT systems to targeted attacks from the point of view of graph theory. In addition, a graph representation of the network topology is proposed, allowing the analysis of the resilience of IoT systems to targeted attacks from the point of view of graph theory. This approach provides the ability to quantitatively assess network reliability, identify critical nodes, and develop adaptive protection mechanisms in an urban digital environment.

The main objective of this paper is to present a practical methodology for assessing the physical-layer security of ZigBee networks using SDR. Through real-device experiments, it demonstrates the impact of targeted jamming attacks, resulting in up to 95% packet loss. The study provides a framework for evaluating network resilience in smart city environments. However, despite numerous studies on ZigBee security, most of them are limited to computer modeling or theoretical analysis and are not supported by experimental data. This work aims to fill this gap by conducting a practical assessment of ZigBee's interference immunity using SDR tools and real IoT devices. The experiment was specifically designed to provide empirical verification of two key theoretical assumptions, which are formulated as the main research hypotheses in this work:

(1) The high susceptibility of the ZigBee physical layer to narrowband interference is due to the fixed channel assignment, making attacks targeting a specific frequency highly effective;

(2) There is a direct and measurable quantitative relationship between the intensity (power level) of the tonal interference and the resulting packet loss rate (PLR), confirming the practical feasibility of a low-power attack.

The scientific novelty of this study substantiates the conclusions and practical implementation of a reproducible, multi-component SDR methodology designed to quantitatively assess the impact of targeted jamming on the reliability of ZigBee communications. Unlike existing works focused on theoretical modeling or simulation of attacks, the proposed methodology allows obtaining real empirical data on the behavior of a ZigBee network under directed interference. This approach provides experimental confirmation of theoretical conclusions about the sensitivity of ZigBee to narrowband and tonal interference, which has not been previously implemented in research at this level. The results obtained can be used for the practical assessment of IoT network stability in urban environments and for developing measures to improve their protection against external influences and interference.

The paper has been organized as follows: The second section will present an overview of previous works. The third section will present ZigBee security system, the methodology will be presented in the fourth section. Experimental setup and implementation are presented in the fifth section. Then, we provide the results and discussion in the Section 6, and conclude the paper in Section 7.

2. Related work

ZigBee networks, being a core element of the IoT, remain vulnerable to a variety of security threats that can disrupt communication or compromise data integrity. Numerous studies have explored these vulnerabilities at different layers of the protocol stack. For instance, works [8-13] identify attacks such as communication disruption, ghost attack, replay attack, and key compromise, showing that ZigBee is highly sensitive to interference in the ISM band.

The main types of threats and their corresponding protocol layers are summarized in Table 1, which provides an overview of the most common attack vectors affecting ZigBee-based systems.

Several experimental studies have demonstrated that jamming can cause up to 95% packet loss under specific conditions [12]. However, most of these investigations relied on simulation models or specialized laboratory equipment, which limits reproducibility and practical applicability in real environments.

The use of SDR has recently emerged as a flexible and cost-effective approach for security testing of wireless protocols. Researchers have applied SDR to analyze deauthentication attacks [14] and to perform penetration testing of short-range communication standards such as BLE and ZigBee [15]. Yet, existing work rarely provides empirical results using real consumer IoT devices in realistic smart environment settings.

To address this gap, the present study focuses on a practical SDR-based experiment that evaluates the resilience of ZigBee communication under directed interference. In addition, it introduces a graph-based interpretation of network resilience, extending the experimental results with a quantitative analytical perspective.

3. ZigBee security system

ZigBee is one of the most common wireless communication protocols used in smart homes and industrial automation systems. It is based on the IEEE 802.15.4 standard and operates in the 2.4 GHz ISM band, ensuring low power consumption and stable data exchange between numerous devices.

However, the physical and MAC layers of ZigBee have limited protection mechanisms against interference and intentional jamming. The standard defines sixteen channels in the 2.4 GHz frequency range with 5 MHz spacing. Such fixed channel allocation makes ZigBee transmission predictable and, consequently, vulnerable to targeted interference.

Figure 1 shows the distribution of ZigBee channels within the 2.4 GHz band and their potential overlap with other wireless technologies. This overlap often becomes a source of signal degradation and packet loss in dense communication environments.

Although the protocol provides AES-128 encryption to ensure data confidentiality and authentication, these measures do not protect the communication channel itself. As a result, a network can be disabled by physical-layer interference without compromising encryption mechanisms.

These features make ZigBee an appropriate object for experimental analysis aimed at assessing its resilience to external interference using SDR tools. One of the most popular and affordable SDR devices is HackRF One, which combines broad functionality and open architecture (Figure 2). The device operates in the frequency range from 1 MHz to 6 GHz with a bandwidth of up to 20 MHz and 8-bit ADC resolution. It is controlled via a USB 2.0 interface and supports both reception and transmission (in half-duplex mode). Additional features include software-controlled gain, antenna power supply, and synchronization of multiple devices, making HackRF One a convenient tool for experimenting and testing various wireless communication protocols [16].

4. Methodology

The proposed methodology aims to identify the active ZigBee channel, configure SDR transmission parameters, and evaluate the effect of tone jamming on data exchange between real devices. The experimental setup was designed to ensure repeatability and to demonstrate how even simple interference can disrupt communication.

Table 1 – Threats to ZigBee networks

Ref.	Author, Year	Primary threats	Insights
[8]	Wang X., Hao S., 2022.	Communication Disruption	ZigBee networks face threats of attacks that can be launched from outside without knowledge of the encryption key, exploiting vulnerabilities at any time. These include communication interruptions and security key leaks, which pose significant risks during normal operation that does not require a commissioning phase.
[9]	Cayre, R.et al., 2021	Energy Depletion (Ghost Attack)	The paper demonstrates the feasibility of the attack through real-world experiments and highlights the critical implications for the security of IoT environments. Potential countermeasures are proposed to mitigate the impact of the attack, emphasizing the need for improved protection mechanisms in wireless networks.
[10]	Pan, T. 2021	Association and Replay Attacks, Association Table Vulnerability	ZigBee networks are subject to a number of threats, including association attacks, replay attacks, PANID conflict attacks, and malicious orphan frame attacks. In addition, vulnerabilities such as short network address conflicts and association table vulnerabilities further reduce ZigBee security.
[11]	Allakany A. et al., 2023	Cryptographic Key Compromise	The proposed solution improves the cryptographic strength of ZigBee communications by enhancing the standard AES encryption process without the need for asymmetric cryptography.
[12]	Sokolov V., Skladannyi P., Korshun N., 2023	Jamming	This article compares devices from different manufacturers, selects the most suitable one for experiments, prepares a test bench with three types of interference generators, and, based on the data obtained, shows that approximately 11% of data is lost during ZigBee packet transmission, and with directional suppression, the number of losses can reach 95%, rendering the network unusable. while the type of generator and signal level have a negligible effect on jamming efficiency.
[13]	Akestoridis D. G., Tague P., 2021	Network PANID, Conflicts	The authors demonstrate that an external attacker can completely discharge a commercial ZigBee device powered by a CR2450 lithium battery (3 V) in less than 16 hours.

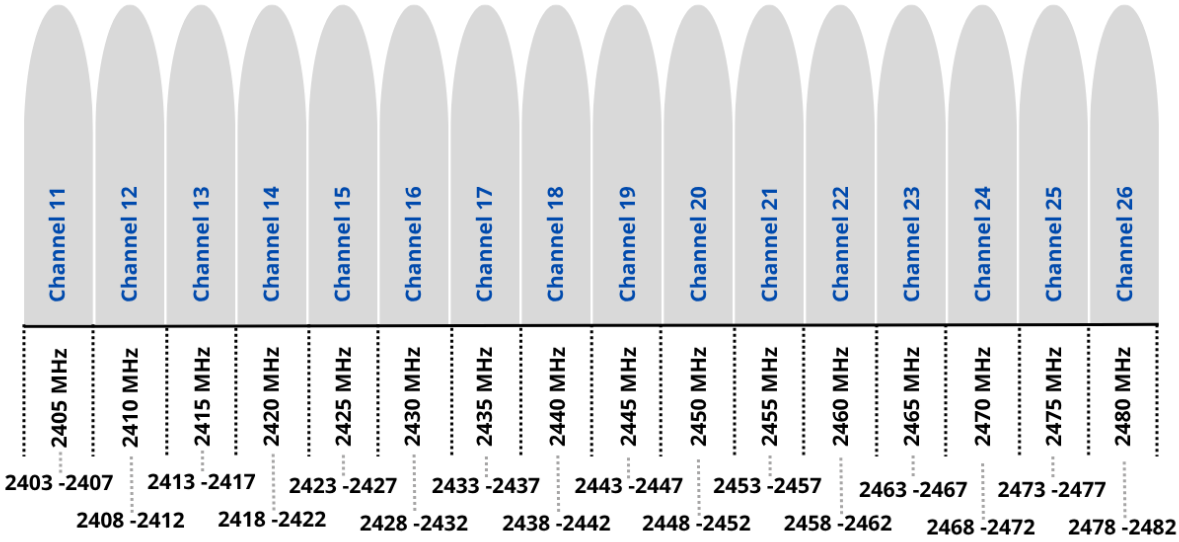


Figure 1 – List of ZigBee channels and frequencies.

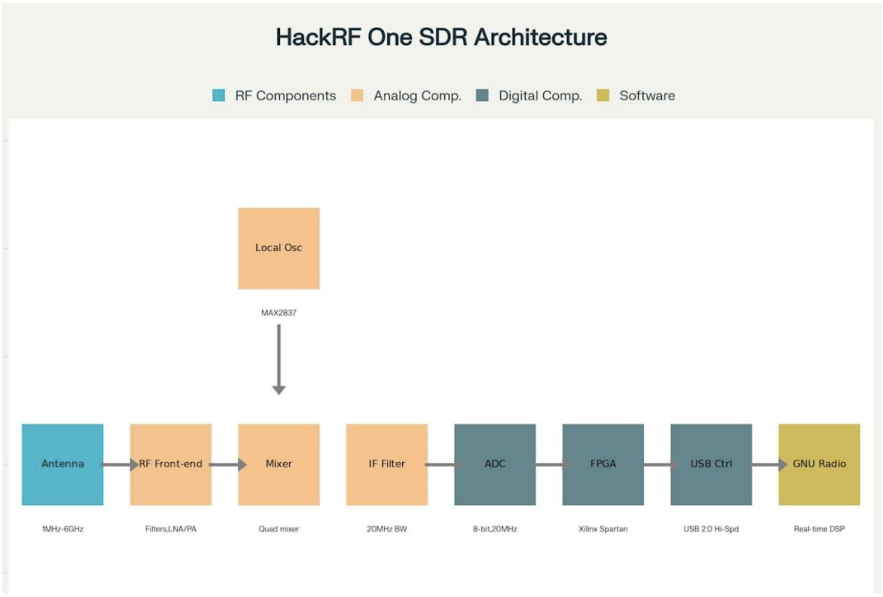


Figure 2 – HackRF Architecture.

The experiment was designed to verify the assumptions outlined in the introduction. The first assumption concerns the sensitivity of the ZigBee physical layer to narrowband interference, which may occur due to fixed channel allocation in the 2.4 GHz band. The second relates to how the intensity of a tone-jamming signal affects the packet-loss rate during data transmission. To test these assumptions, a controlled SDR-based setup was used. The HackRF One platform generated interference signals, while standard ZigBee IoT devices communicated through the selected channel under normal and disturbed conditions.

There are many different methods of jamming wireless networks [17, 18]. Figure 3 shows a comparison of the characteristics of various wireless network jamming methods in terms of effectiveness, required resources, and detection complexity. Broadband and protocol-oriented methods demonstrate the highest effectiveness (over 90%), but require significant computing and energy resources. Narrowband and pulse jamming have moderate effectiveness and are less noticeable, but their impact

is limited in terms of spectrum. The size of the circles reflects the difficulty of detection: the smaller the circle, the more difficult it is to detect interference.

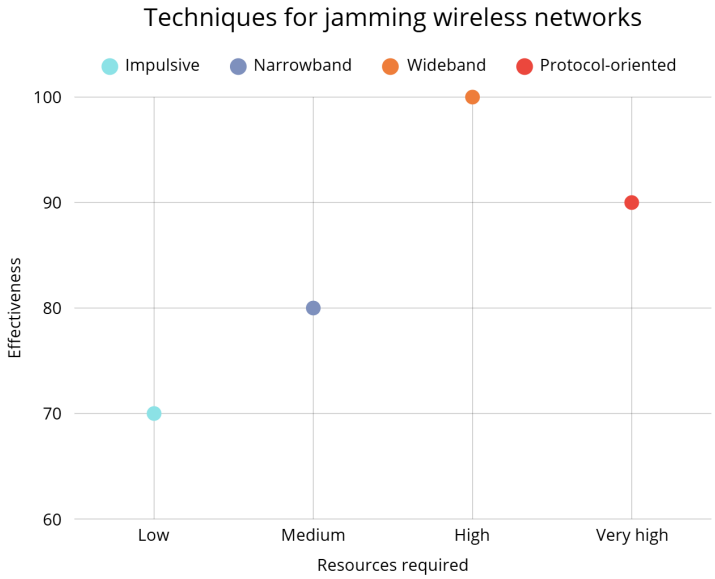


Figure 3 – Classification of methods of influencing wireless networks with technical characteristics.

Figure 4 shows the three levels of an IoT system—physical, network, and application—each of which is subject to certain types of vulnerabilities [19]. The physical layer includes devices and sensors, where the main threats are weak physical protection, lack of encryption, vulnerable firmware, and open ports. The network layer includes data transmission technologies (Wi-Fi, Bluetooth, etc.) that are vulnerable to attacks on passwords, configurations, and network services [20]. The application layer covers cloud platforms and applications, where the main risks are compromised credentials, insecure interfaces, and outdated software. This multi-level structure emphasizes the need for a comprehensive analysis when conducting penetration tests [21].

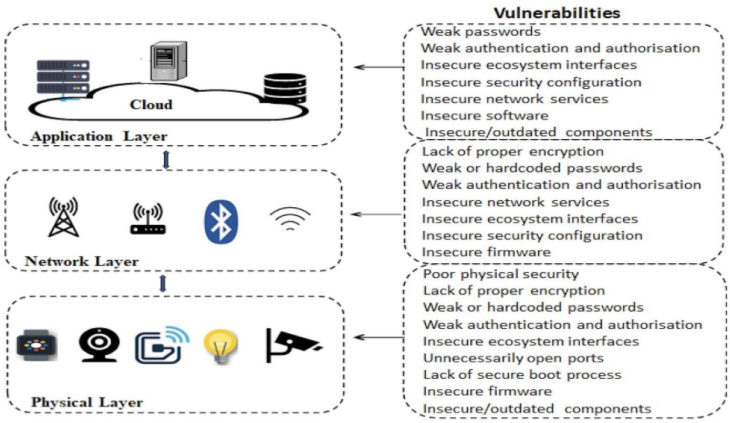


Figure 4 – Multi-level protection for IoT ecosystems.

Physical protection remains a critical element of overall cybersecurity strategy. Device protection mechanisms include preventing unauthorized access to microchips, blocking debug interfaces (such as UART, JTAG), and using tamper-evident enclosures. Among hardware methods, the most widespread are encryption and digital signing of firmware, setting passwords for booting in debug mode, using external cryptographic coprocessors, and physically shielding critical components [22].

At the network level, the key principle is segmentation—the logical division of infrastructure into isolated zones. This is achieved by separating IoT devices into separate VLANs, microsegmenting

sensitive services, and implementing inter-network interaction control policies. The Zero Trust approach complements the architecture by eliminating the concept of a "trusted zone" and requiring verification of each connection regardless of its source. In turn, real-time monitoring technologies based on machine learning methods allow behavioral anomalies to be identified and potential attacks to be predicted [23].

At the application level, security begins at the design stage. The principle of Security by Design involves embedding protective mechanisms into the architecture of an IoT product from the outset, including mandatory component updates, verification of library sources, and the use of modern cryptographic protocols. In recent years, particular attention has been paid to post-quantum cryptography, protocols with perfect forward secrecy (PFS), and distributed key management systems that increase resistance to compromise [24].

Figure 5 shows the general research methodology, where the main stages are preparation of the experimental environment, identification of the active ZigBee channel, SDR configuration and generation of tonal interference, simulation of an attack at the physical level, observation of device responses and data collection, analysis of results, and spectrum visualization.

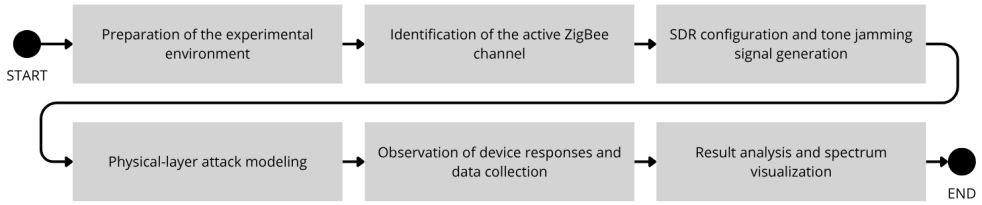


Figure 5 – Research methodology

Thus, ensuring security in wireless IoT networks requires a comprehensive approach that covers all levels of the system. The use of SDR platforms opens up wide opportunities for testing and auditing security, but requires compliance with legal norms and ethical frameworks. The new generation of attack detection systems using intelligent behavioral analysis demonstrates high effectiveness in combating modern threats and should become an integral part of a secure IoT infrastructure.

5. Experimental Setup and Implementation

During the course of the work, an experimental model of a jammer device capable of effectively suppressing the ZigBee radio channel was developed and implemented. The main objective of the experiment is to evaluate how directed tone interference affects data transmission between ZigBee devices in a smart home scenario. In this study, the HackRF One SDR platform was chosen due to its flexibility and availability, allowing to reproduce the experiment in typical laboratory or educational settings. The research covers both the technical aspects of building the jammer, including the choice of hardware platform, interference generation, and synchronization strategy with the target channel.

GNU Radio, an open platform that supports visual programming and flexible configuration, is often used to design and implement digital signal processing circuits in an SDR environment. GNU Radio includes the GNU Radio Companion (GRC) environment, where users can assemble a signal flow graph from ready-made blocks: sources, filters, demodulators, and visualizers. Standard components include signal sources (generators, files, external SDR devices), receivers (audio, file, graphical window), and processing blocks, including various types of filters and demodulators for AM, FM, QAM, PSK, and others. This approach provides maximum clarity and flexibility in the design of radio systems.

The spectral analysis (Figure 6) conducted in the 2.4 GHz frequency range clearly demonstrates the dense coexistence of various wireless protocols, including ZigBee, Wi-Fi, and Bluetooth, operating within the same ISM band. This creates conditions for mutual interference and competition for radio resources, especially under conditions of increased load or directed exposure. One of the key tools for visual analysis is a waterfall diagram, which displays changes in the spectrum over time.

This makes it possible to identify both sustained and short-term transmissions, including hidden signals or sporadic activity characteristic of certain types of attacks or penetration tests.

Spectral analysis (Figure 7), which is the basis of radio monitoring, allows not only to record the current structure of the signal environment, but also to quickly determine the presence of abnormal activity, such as broadband interference, directed narrowband signals, or unusual modulation forms. In the context of wireless network security, this approach is used both for preliminary assessment of the environment and for post-incident analysis. The use of SDR tools, such as HackRF One in conjunction with GNU Radio, allows the monitoring process to be automated by configuring filtering, visualization, and logging parameters depending on the target tasks.

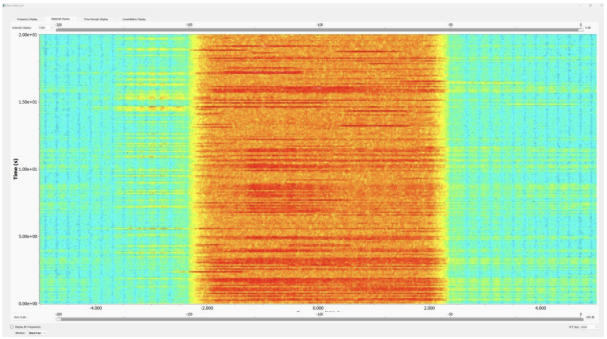


Figure 6 – Spectral analysis

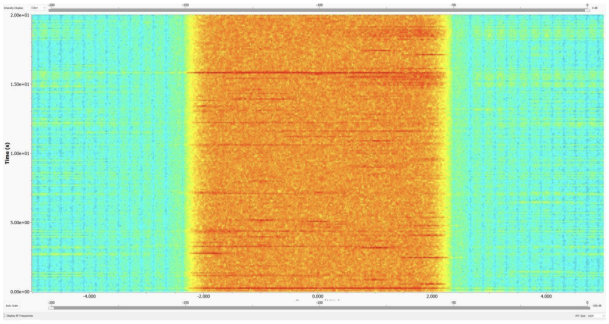


Figure 7 – Spectral analysis of noise

One effective approach to detecting active and potentially hidden devices in the radio frequency environment is broadband scanning in the range from 10 MHz to 8 GHz. Modern receiver modules based on SDR architecture allow detecting both continuously transmitting devices (e.g., hidden cameras and microphones) and devices with periodic or pulsed transmission characteristics, such as motion sensors, GPS trackers, and remote control systems. A distinctive feature of such systems is the ability to classify signals by activity type and time structure.

Correlation analysis is used to clarify the connection between radio signals and events in the observed environment, allowing the moments of transmission to be correlated with user actions, application launches, or sensor activations. Signal sources are localized using directional antennas and phase methods, which allow the location to be determined with an accuracy of several meters, especially in open spaces or with a pre-known map of the premises.

Wireshark, one of the most powerful tools for capturing and analyzing wireless traffic, is widely used for network-level analysis. With the appropriate settings, Wireshark can decrypt secure Wi-Fi connections, including WPA/WPA2, provided that the keys are available or the four-way handshake has been successfully captured. After decryption, both protocol and application data can be analyzed, including DNS queries, HTTP traffic, and other interactions.

In the case of the ZigBee protocol, analysis requires the use of specialized frameworks such as KillerBee or Attify ZigBee Toolkit, which not only allow you to intercept ZigBee frames, but also identify devices, their roles in the network, and potentially interact with them through command emulation or packet injection. These tools are indispensable in the context of assessing the security of IoT networks and detecting unauthorized devices. The presented results allow for an in-depth assessment of the resilience of ZigBee networks to targeted radio interference and serve as a basis for further developments in the field of protecting wireless IoT protocols from physical-layer attacks.

6. Results and Discussion

To accurately identify the active ZigBee channel used for communication between the Aqara Hub M1S Gen 2 and the Aqara Motion Sensor P1, the CatSniffer utility was used in the experiment. This tool is a set of software tools designed to intercept and analyze ZigBee packets operating on the IEEE 802.15.4 standard in the 2.4 GHz band (channels 11 to 26). Compatible USB devices capable of listening to the air at the channel level are used as radio receivers. An important part

of the complex is the CativityDetector module, which allows you to visualize the level of network activity by displaying the number of packets intercepted on each channel. To determine the most active channel, the cativity.py script, which is part of CatSniffer Tools, was used. It was launched twice at different intervals, performing a sequential scan of all 16 ZigBee channels. During the scan, signal transmission was manually initiated using the Aqara motion sensor: it was activated by hand movement, triggering a response. In both cases, the highest level of activity was observed on channel 25, indicating its use in this ZigBee session. The number of packets recorded and the visualized activity on this channel significantly exceeded similar indicators on other frequencies, which made it possible to unambiguously identify the operating frequency of the pair of devices under study.

A key step in preparing for experimental attack simulation was determining the frequency channel actually used in the ZigBee network under investigation. To do this, we used the CatSniffer software tool, specifically its activity visualization module, CativityDetector. During observations of network traffic between the Aqara Hub M1S Gen 2 and the Aqara Motion Sensor P1, two independent scans of the ZigBee frequency range (channels 11 to 26, within 2.4 GHz) were performed. Figure 8 shows the result of the first run of the cativity.py script, during which 19 packets were recorded on channel 25. Figure 9 shows the data from the second run, where 24 packets were detected on the same channel. In both cases, channel 25 (corresponding to a frequency of 2480 MHz) showed the highest level of activity, while the other frequency channels remained virtually empty. Thus, the experiment made it possible to identify channel 25 with high confidence as the active ZigBee transmission channel in the device cluster under consideration.

The obtained results confirm that even a low-power continuous tone can significantly disrupt ZigBee packet transmission. This finding experimentally supports earlier theoretical assumptions and provides quantitative evidence of the protocol's physical-layer weakness. The proposed approach can be further used to test other IoT protocols under similar interference conditions.

Figure 8 – First launch of CativityDetector

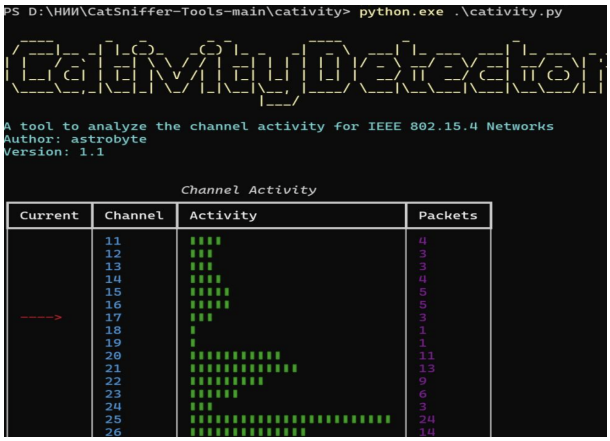


Figure 9 – Second launch of CativityDetector

After successfully identifying the active channel and confirming the functioning of network exchange using HackRF One, the next stage of the research was to simulate active interference with the connection. To do this, a block diagram for generating radio interference was constructed in the GNU Radio software environment, using a signal that overlaps the spectrum at a frequency of 2480 MHz. The goal was to create conditions under which data transmission between the coordinator (Aqara Hub) and the end device (motion sensor) would become impossible or significantly impeded. The approach used was based on broadband carrier generation sufficient to overlap the channel 25 frequency band, while the signal parameters (amplitude, shape, modulation) were selected in such a way as to achieve stable suppression at a limited distance, while maintaining an acceptable level of electromagnetic radiation in the experimental environment.

To simulate the impact on an active ZigBee channel, a block diagram was developed in the GNU Radio environment, allowing for the transmission of a continuous sine wave in a narrow frequency

range. This type of interference is known as tone jamming and is designed to create stable interference within a single channel. The main task is to disrupt the reception of ZigBee packets by generating a stable carrier signal near the center frequency of the transmission channel.

Figure 10 shows the signal flow structure. The input element of the circuit is the Signal Source block, which generates a cosine wave with a sampling rate of 2 megasamples per second. The signal frequency is set to zero, which means transmission at the center frequency set in the transmitter, and the amplitude is equal to one, ensuring maximum signal power. The next component of the circuit, Multiply Const, scales the amplitude, in this case leaving it unchanged. The Soapy HackRF Sink output block is tuned to a center frequency of 2.475 GHz, which allows it to affect channel 25, whose frequency boundary is 2.480 GHz. This creates interference that overlaps part of the channel and disrupts ZigBee transmission reception. To ensure quantitative transparency and reinforce the empirical basis of the claim, the protocol analyzer (CatSniffer) recorded a stable flow of packets prior to jamming, yielding 19 and 24 packets in two independent runs, respectively. Upon activation of the narrowband tone jamming, the packet reception rate immediately dropped to zero, resulting in a 100% PLR for the entire duration of the interference. This quantitative result serves as empirical confirmation of a complete DoS condition. Furthermore, it exceeds the 'up to 95%' packet loss reported in prior theoretical studies [12], thus demonstrating the high efficacy of the proposed methodological approach.

Figure 10 – Research methodology

The Aqara Home mobile app was used to confirm the effectiveness of the jamming. It provides visual control of device activity by recording events from sensors, including motion detection and changes in lighting. Under normal conditions, when motion is detected, the Aqara P1 sensor transmits data to the hub, and this is reflected in the app's event log. However, when interference was generated at a frequency of 2.475 GHz, data transmission was temporarily interrupted. This indicates a disruption in the channel level of communication between the hub and the sensor. After the interference was turned off, event transmission was restored, indicating the targeted and controlled nature of the interference. The experiment confirmed that even simple sinusoidal interference generated by SDR devices can temporarily disable a ZigBee connection within a single channel, which must be taken into account when designing secure IoT systems.

Experiment results:

- After turning on the jamming signal, we noticed that the sensor and hub lost connection.
- In the Aqara interface, the app stopped recording events from the sensor.
- When the jamming stopped, the connection was automatically restored, which shows that the channel was successfully jammed locally and temporarily (Figure 11).

The experiment confirmed that even using a simple signal generated by SDR (HackRF + GNU Radio) tools, it is possible to effectively disrupt the operation of a real ZigBee network. The data recorded in the mobile application provides independent confirmation of the successful attack and its consequences at the user interaction level.

The obtained results confirm the theoretical assumptions formulated in the introduction. The experiments demonstrated that ZigBee communication is highly sensitive to narrowband interference due to the fixed channel allocation in the 2.4 GHz band. Even low-power continuous tones produced a sharp decline in the packet reception rate, reaching up to 95 % packet loss under the strongest interference. A proportional relationship between the intensity of the jamming signal and the degree

of packet loss was also observed. These findings provide experimental confirmation of the physical-layer vulnerability of ZigBee networks and support the analytical predictions reported in earlier theoretical studies.

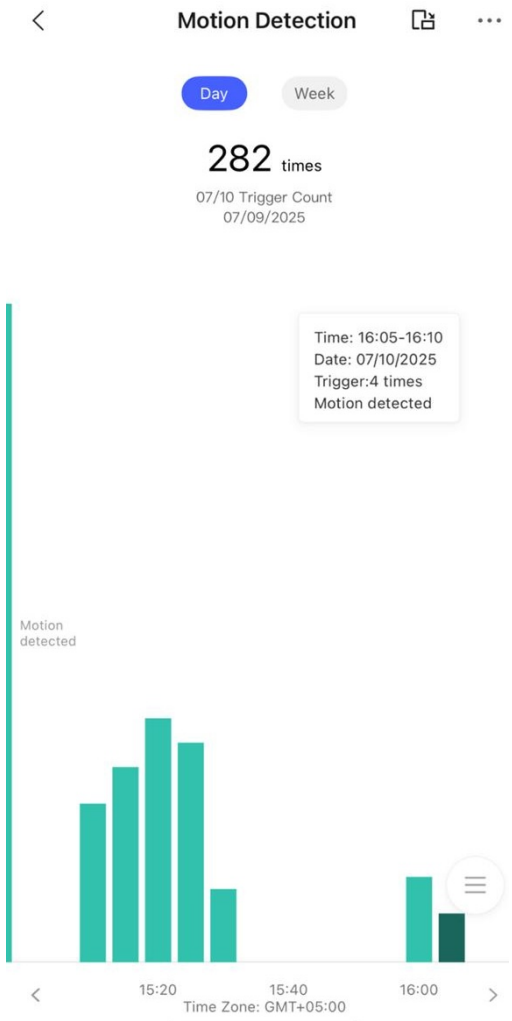


Figure 11 – Motion sensor graph

7. Conclusion

The study confirmed the vulnerability of the ZigBee protocol to directed radio-electronic interference at the physical channel level. Using the HackRF One SDR platform and the GNU Radio environment, an effective signal jamming model was created, simulating a tone jamming attack. Experiments with Aqara consumer IoT devices showed that even simple sinusoidal interference can temporarily disrupt stable data transmission. Spectral analysis and the use of CatSniffer confirmed the activity of ZigBee channel 25 and allowed us to accurately select the frequency target. The Aqara Home mobile app demonstrated real-time communication loss, confirming the success of the attack. The proposed methodology can be used both for security audits and for simulating attacks in laboratory conditions. The work emphasizes the importance of including radio frequency protection in the overall security strategy for IoT networks. A multi-level approach to cybersecurity—from the physical level to applications—is a prerequisite for infrastructure resilience. SDR tools have proven to be a flexible and affordable way to analyze threats and test vulnerabilities. The scientific contribution of this study consists in developing an accessible and reproducible SDR-based method for assessing ZigBee's physical-layer resilience. The practical value lies in the possibility of using this

approach for testing smart home and smart city devices before deployment in real environments. The experiment confirmed that even using a simple signal generated by SDR (HackRF + GNU Radio) tools, it is possible to effectively disrupt the operation of a real ZigBee network. The data recorded in the mobile application provides independent confirmation of the successful attack and its consequences at the user interaction level. The results of the study are relevant for developers, researchers, and operators of systems working with wireless IoT technologies.

8. Acknowledgment

This research has been funded by the Committee of Science of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No.BR24992852 "Intelligent models and methods of Smart City digital ecosystem for sustainable development and the citizens" quality of life improvement").

Authors' Contributions: the authors' contribution is equal.

References

1 Arora A., Jain A., Yadav D., Hassija V., Chamola V., Sikdar B. Next Generation of Multi-Agent Driven Smart City Applications and Research Paradigms// IEEE Open Journal of the Communications Society - 2023 - No.4 - P.2104–2121. DOI: https://doi.org/10.1109/ojcoms.2023.3310528.

2 Houssein E. H., Othman M. A., Mohamed W. M., Younan M. Internet of Things in smart cities: Comprehensive review, open issues, and challenges// IEEE Internet of Things Journal - 2024 - No.11(21) - P.34941–34952. DOI: https://doi.org/10.1109/JIOT.2024.3449753.

3 Yang A., Zhang C., Chen Y., Zhuansun Y., Liu H. Security and privacy of smart home systems based on the Internet of Things and stereo matching algorithms// IEEE Internet of Things Journal - 2020 - No.7(4) - P.2521–2530. DOI: https://doi.org/10.1109/JIOT.2019.2946214.

4 Yang J., Sun L. A comprehensive survey of security issues of smart home system: "Spear" and "Shields," theory and practice// IEEE Access - 2022 - No.10 - P.124167–124192. DOI: https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3224806.

5 Sivapriyan R., Sushmitha S. V., Pooja K., Sakshi N. Analysis of security challenges and issues in IoT enabled smart homes// In 2021 IEEE International Conference on Computation System and Information Technology for Sustainable Solutions (CSITSS), IEEE - 2021 - pp. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1109/CSITSS54238.2021.9683324.

6 Eltholth A. A. Improved spectrum coexistence in 2.4 GHz ISM band using optimized chaotic frequency hopping for Wi-Fi and Bluetooth signals// Sensors - 2023 - No.23(11) - P.5183. DOI: https://doi.org/10.3390/s23115183.

7 Joosens D. et al. Software-defined radio-based Internet of Things communication systems: an application for the DASH7 Alliance Protocol// Applied Sciences – 2025 – Vol.15. – №. 1. – P.1-34.

8 Wang X., Hao S. Don't Kick Over the Beehive// Proceedings of the 2022 ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security - 2022 - P.2857–2870. DOI: https://doi.org/10.1145/3548606.3560703.

9 Cayre R., Galtier F., Auriol G., Nicomette V., Kaâniche M., Marconato G. WazaBee: Attacking ZigBee networks by diverting Bluetooth Low Energy chips// In 2021 51st Annual IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN), IEEE - 2021 - pp. 376–387. DOI: https://doi.org/10.1109/DSN48987.2021.00049.

10 Pan T. ZigBee Wireless Network Attack and Detection// Advances in Artificial Intelligence and Security - 2021 - P.391–403. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-78621-2_32.

11 Allakany A., Elsisi M., Soliman M., Wang H. Enhancing security in ZigBee wireless sensor networks: A new approach and mutual authentication scheme for D2D communication// Sensors - 2023 - No.23(12) - P.5703. DOI: https://doi.org/10.3390/s23125703.

12 Sokolov V., Skladannyi P., Korshun N. ZigBee Network Resistance to Jamming Attacks// 2023 IEEE International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo) - 2023 - P.161–165. https://doi.org/10.1109/ukrmico61577.2023.10380360.

13 Akestoridis D.G., Tague P. HiveGuard: A network security monitoring architecture for Zigbee networks// In 2021 IEEE Conference on Communications and Network Security (CNS), IEEE - 2021 - pp. 209-217.

14 Calderon L., Salvador G.T. Detection and Analysis of Flipper Zero Deauthentication Signals Using HackRF One Software-Defined Radio// 2024 International Conference on Innovation and Intelligence for Informatics, Computing, and Technologies (3ICT), IEEE – 2024. – P. 798-804.

15 Dini M.T., Sokolov V. Penetration tests for Bluetooth Low Energy and ZigBee using the software-defined radio// arXiv preprint arXiv:1902.08595 - 2019. DOI: https://arxiv.org/abs/1902.08595.

16 Sugadev M., Kaushik M., Vijaykumar V., Ravi T. Implementation of NOAA Weather Satellite Receiver using HackRF-One SDR// In 2022 International Conference on Computer Communication and Informatics (ICCCI), IEEE - 2022 - pp. 1-4.

17 Pirayesh H., Zeng H. Jamming attacks and anti-jamming strategies in wireless networks: A comprehensive survey// IEEE communications surveys and tutorials - 2022 - No.24(2) - P.767-809.
18 Alrefaei F., Alzahrani A., Song H., Alrefaei S. A survey on the jamming and spoofing attacks on the unmanned aerial vehicle networks// In 2022 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), IEEE - 2022 - pp. 1-7.
19 Sarker I. H., Khan A. I., Abushark Y. B., Alsolami F. Internet of things (iot) security intelligence: a comprehensive overview, machine learning solutions and research directions// Mobile Networks and Applications - 2023 - No.28(1) - P.296-312.
20 Mozaffariahrar E., Theoleyre F., Menth M. A survey of Wi-Fi 6: Technologies, advances, and challenges// Future Internet - 2022 - No.14(10) - P.293.
21 Gupta M., Singh S. A survey on the zigbee protocol, it's security in internet of things (iot) and comparison of zigbee with bluetooth and wi-fi// In Applications of artificial intelligence in engineering: proceedings of first global conference on artificial intelligence and applications (GCAIA 2020) - Singapore: Springer Singapore - 2021 - pp. 473-482.
22 Yang X., Shu L., Liu Y., Hancke G., Ferrag M., Huang K. Physical security and safety of IoT equipment: A survey of recent advances and opportunities// IEEE Transactions on Industrial Informatics - 2022 - No.18(7) - P.4319-4330.
23 Jahangeer A., Bazai S., Aslam S., Marjan S., Anas M., Hashemi S. A review on the security of IoT networks: From network layer's perspective// IEEE Access - 2023 - Vol.11 - P.71073-71087.
24 Mishra N., Pandya S. Internet of things applications, security challenges, attacks, intrusion detection, and future visions: A systematic review// IEEE Access - 2021 - No.9 - P.59353-59377.

SDR көмегімен ақылды ортада Zigbee байланыс қауіпсіздігін талдау

Т. Жукабаева [1], А. Адамова [2], Ж. Боранбай [3], Е. Бенкалифа [4], Е. Марденов [5]

[1,2,3] Astana IT University, Мәнгілік Ел даңғылы 55/11, Астана, 010000, Қазақстан
[4] Киберқауіпсіздікті зерттеу орталығы, Стаффордшир университеті, Leek Road көшесі ST4 2DF, Сток он Трент, Ұлыбритания
[5] Астана Халықаралық университеті, Қабанбай батыр даңғылы 8, Астана қ., 010000, Қазақстан

Аннотация. Ақылды қалалардың дамуы Zigbee хаттамасына негізделген сымсыз желілерді кеңінен енгізумен қатар жүреді, оның энергия тиімділігі мен заттар интернетінің архитектурасымен үйлесімділігі бар. Алайда, бұл хаттаманы ашық радио ортада белсенді пайдалану рұқсат етілмеген радиоэлектрондық әсерге байланысты тәуекелдердің артуына әкеледі. Бұл зерттеудің мақсаты ZigBee желілерінің бағдарламалық құралмен анықталған радионы пайдалана отырып, сигналды бағытталған өшіруге осалдығын эксперименттік бағалау болып табылады. Жұмыста нақты құрылғылармен сынақ ортасын дайындау кезеңдері, белсенді деректер арнасын анықтау және hackrf платформасы, SDR платформасы мен GNU radio ортасы арқылы тондық кедергілерді құру ұсынылған. Жүргізілген эксперимент белгілі бір жиілікке ұшыраған кезде пакеттердің 95% дейін жоғалатынын көрсетті, бұл желіні жұмыс істеуге жарамсыз етеді. Нәтижесінде ZigBee хаттамасының физикалық деңгейдегі маңызды осалдығын растайды және сымсыз IoT желілері үшін, әсіресе қалалық инфрақұрылым жағдайында қосымша қорғаныс механизмдерін әзірлеу қажеттілігін көрсетеді. Ұсынылған әдіс қолданбалы сценарийлерде құрылғылардың қауіпсіздігін тексеру үшін және сыртқы шабуылдарға төзімділікті бақылау жүйелерін құру кезінде қолданыла алады.

Түйін сөздер: ZigBee, SDR, HackRF, GNU радиосы, кептелу, радио кедергілері, ақпараттық қауіпсіздік, IoT.

Анализ безопасности связи ZigBee в умной среде с помощью SDR

Т. Жукабаева [1], А. Адамова [2], Ж. Боранбай [3], Е. Бенкалифа [4], Е. Марденов [5]

[1,2,3] Astana IT University, проспект Мәңгілік ел 55/11, г. Астана, 010000, Казахстан
[4] Центр исследований кибербезопасности, Стаффордширский университет, улица Leek Road ST4 2DF, Сток он Трент, Великобритания
[5] Международный университет Астана, проспект Кабанбай батыра 8, г. Астана, 010000, Казахстан

Аннотация. Развитие умных городов сопровождается широким внедрением беспроводных сетей, построенных на протоколе ZigBee, благодаря его энергоэффективности и совместимости с архитектурой интернета вещей. Однако активное использование данного протокола в открытой радиосреде приводит к возрастанию рисков, связанных с несанкционированным радиоэлектронным воздействием. Цель настоящего исследования заключается в экспериментальной оценке уязвимости ZigBee-сетей к направленному глушению сигнала с использованием программно-определяемого радио. В работе представлены этапы подготовки тестовой среды с реальными устройствами, определение активного канала передачи данных и генерация тональной помехи с помощью SDR-платформы HackRF One и среды GNU Radio. Проведённый эксперимент показал, что при воздействии на определённую частоту теряется до 95% пакетов, что делает сеть непригодной для функционирования. Полученные результаты подтверждают критическую уязвимость ZigBee-протокола на физическом уровне и подчёркивают необходимость разработки дополнительных механизмов защиты для беспроводных IoT-сетей, особенно в условиях городской инфраструктуры. Предложенная методика может быть использована для тестирования защищённости устройств в прикладных сценариях и при создании систем мониторинга устойчивости к внешним атакам.

Ключевые слова: ZigBee, SDR, HackRF, GNU Radio, глушение, радиопомехи, информационная безопасность, IoT.

References

1 Arora A., Jain A., Yadav D., Hassija V., Chamola V., Sikdar B. Next Generation of Multi-Agent Driven Smart City Applications and Research Paradigms, IEEE Open Journal of the Communications Society. 2023. No.4. P.2104–2121. DOI: https://doi.org/10.1109/ojcoms.2023.3310528.

2 Houssein E. H., Othman M. A., Mohamed W. M., Younan M. Internet of Things in smart cities: Comprehensive review, open issues, and challenges, IEEE Internet of Things Journal. 2024. No.11(21). P.34941–34952. DOI: https://doi.org/10.1109/JIOT.2024.3449753.

3 Yang A., Zhang C., Chen Y., Zhuansun Y., Liu H. Security and privacy of smart home systems based on the Internet of Things and stereo matching algorithms, IEEE Internet of Things Journal. 2020. No.7(4). P.2521–2530. DOI: https://doi.org/10.1109/JIOT.2019.2946214.

4 Yang J., Sun L. A comprehensive survey of security issues of smart home system: "Spear" and "Shields," theory and practice, IEEE Access. 2022. No.10. P.124167–124192. DOI: https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3224806.

5 Sivapriyan R., Sushmitha S. V., Pooja K., Sakshi N. Analysis of security challenges and issues in IoT enabled smart homes, In 2021 IEEE International Conference on Computation System and Information Technology for Sustainable Solutions (CSITSS), IEEE. 2021. pp. 1–6. DOI: https://doi.org/10.1109/CSITSS54238.2021.9683324.

6 Eltholth A. A. Improved spectrum coexistence in 2.4 GHz ISM band using optimized chaotic frequency hopping for Wi-Fi and Bluetooth signals, Sensors. 2023. No.23(11). P.5183. DOI: https://doi.org/10.3390/s23115183.

7 Joosens D. et al. Software-defined radio-based Internet of Things communication systems: an application for the DASH7 Alliance Protocol, Applied Sciences. 2025. Vol.15. №1.P.1-34.

8 Wang X., Hao S. Don't Kick Over the Beehive, Proceedings of the 2022 ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security. 2022. P.2857–2870. DOI: https://doi.org/10.1145/3548606.3560703.

9 Cayre R., Galtier F., Auriol G., Nicomette V., Kaâniche M., Marconato G. WazaBee: Attacking ZigBee networks by diverting Bluetooth Low Energy chips, In 2021 51st Annual IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN), IEEE. 2021. pp. 376–387. DOI: https://doi.org/10.1109/DSN48987.2021.00049.
10 Pan T. ZigBee Wireless Network Attack and Detection, Advances in Artificial Intelligence and Security. 2021. P.391–403. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-78621-2_32.
11 Allakany A., Elsisi M., Soliman M., Wang H. Enhancing security in ZigBee wireless sensor networks: A new approach and mutual authentication scheme for D2D communication, Sensors. 2023. No.23(12). P.5703. DOI: https://doi.org/10.3390/s23125703.
12 Sokolov V., Skladannyi P., Korshun N. ZigBee Network Resistance to Jamming Attacks. 2023 IEEE International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo). 2023. P.161–165. https://doi.org/10.1109/ukrmico61577.2023.10380360.
13 Akestoridis D.G., Tague P. HiveGuard: A network security monitoring architecture for Zigbee networks, In 2021 IEEE Conference on Communications and Network Security (CNS), IEEE. 2021. pp. 209-217.
14 Calderon L., Salvador G.T. Detection and Analysis of Flipper Zero Deauthentication Signals Using HackRF One Software-Defined Radio, 2024 International Conference on Innovation and Intelligence for Informatics, Computing, and Technologies (3ICT), IEEE. 2024. P. 798-804.
15 Dini M.T., Sokolov V. Penetration tests for Bluetooth Low Energy and ZigBee using the software-defined radio, arXiv preprint arXiv:1902.08595. 2019. DOI: https://arxiv.org/abs/1902.08595.
16 Sugadev M., Kaushik M., Vijaykumar V., Ravi T. Implementation of NOAA Weather Satellite Receiver using HackRF-One SDR. In 2022 International Conference on Computer Communication and Informatics (ICCCI), IEEE. 2022. pp. 1-4.
17 Pirayesh H., Zeng H. Jamming attacks and anti-jamming strategies in wireless networks: A comprehensive survey, IEEE communications surveys and tutorials. 2022. No.24(2). P.767-809.
18 Alrefaei F., Alzahrani A., Song H., Alrefaei S. A survey on the jamming and spoofing attacks on the unmanned aerial vehicle networks, In 2022 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), IEEE. 2022. pp. 1-7.
19 Sarker I. H., Khan A. I., Abushark Y. B., Alsolami F. Internet of things (iot) security intelligence: a comprehensive overview, machine learning solutions and research directions. Mobile Networks and Applications. 2023. No.28(1). P.296-312.
20 Mozaffariahrar E., Theoleyre F., Menth M. A survey of Wi-Fi 6: Technologies, advances, and challenges. Future Internet. 2022. No.14(10). P.293.
21 Gupta M., Singh S. A survey on the zigbee protocol, it's security in internet of things (iot) and comparison of zigbee with bluetooth and wi-fi. In Applications of artificial intelligence in engineering: proceedings of first global conference on artificial intelligence and applications (GCAIA 2020) - Singapore: Springer Singapore. 2021. pp. 473-482.
22 Yang X., Shu L., Liu Y., Hancke G., Ferrag M., Huang K. Physical security and safety of IoT equipment: A survey of recent advances and opportunities. IEEE Transactions on Industrial Informatics. 2022. No.18(7). P.4319-4330.
23 Jahangeer A., Bazai S., Aslam S., Marjan S., Anas M., Hashemi S. A review on the security of IoT networks: From network layer's perspective. IEEE Access. 2023. Vol.11. P.71073-71087.
24 Mishra N., Pandya S. Internet of things applications, security challenges, attacks, intrusion detection, and future visions: A systematic review. IEEE Access. 2021. No.9. P.59353-59377.

Information about authors:

Tamara Kokenovna Zhukabaeva – PhD, professor, Astana IT University, Mangilik El ave. 55/11, Astana, 010000, Kazakhstan.
Aigul Duysenbinovna Adamova – Corresponding author, PhD, associate Professor, Astana IT University, Mangilik El ave. 55/11, Astana, 010000, Kazakhstan.
Zhandos Boranbay – Senior Lecturer, School of Cybersecurity, Astana IT University, Mangilik El ave. 55/11, Astana, 010000, Kazakhstan.
Elhadj Benkhelifa – PhD, professor, Cybersecurity Research Centre, Staffordshire University, Leek Road site ST4 2DF, Stoke-on-Trent, United Kingdom.
Yerik Mardenov – Astana International University, Kabanbay batyr ave. 8, Astana, 010000, Kazakhstan.

Жукабаева Тамара Кокеновна – PhD, профессор, Astana IT University, Мәнгілік Ел даңғылы 55/11, Астана қ., 010000, Қазақстан.

Адамова Айгуль Дюсенбиновна – Байланыс үшін автор, PhD, қауымдастырылған профессор, Astana IT University, Мәнгілік Ел даңғылы 55/11, Астана қ., 010000, Қазақстан.
Боранбай Жандос – "Киберқауіпсіздік" мектебінің аға оқытушысы, Astana IT University, Мәнгілік Ел даңғылы 55/11, Астана қ., 010000, Қазақстан.
Бенкалифа Елхадж – PhD, профессор, Киберқауіпсіздікті зерттеу орталығы, Стаффордшир университеті, Leek Road көшесі ST4 2DF, Сток он Трент, Ұлыбритания.
Марденов Ерик – Астана Халықаралық университеті, Қабанбай батыр даңғылы 8, Астана қ., 010000, Қазақстан.

Received: 30.07.2025. Revised: 21.09.2025.

Approved: 25.09.2025. Available online: 30.09.2025.

.

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2025, Vol. 152, №3, P. 22-29.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

Мақала
ҒТАМР: 27.25.19

К(Е)Д–ҚОЙЫЛЫМЫНДА АНИЗОТРОПТЫ ЖАЛПЫЛАНҒАН СОБОЛЕВ КЛАСЫ ФУНКЦИЯЛАРЫН ОПТИМАЛДЫ ЖУЫҚТАУ

А.Б. Утесов, Г.И.Утесова*
Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Әлия Молдағұлова даңғылы 34, Ақтөбе, Қазақстан
**corresponding author: ugi_a@mail.ru*

Аннотация. Мақалада анизотропты жалпыланған $W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}$ Соболев класынан алынған функцияларды жуықтау есебі Компьютелік (есептеуіш) диаметр тұрғысынан толық шешілген. Периодты функцияларды олардың тригонометриялық Фурье коэффициенттерінің кему жылдамдығы бойынша классификациялау негізінде алынған анизотропты жалпыланған $W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}$ Соболев класы дәрежелік шкаладағы анизотропты $W_2^{r_1,\ldots,r_s}$ Соболев класымен салыстырғанда дәл әрі терең шкаладағы класс болып табылады. Жұмыста зерттелінді класс функцияларын сызықтық функционалдар түріндегі мәліметтер бойынша құрылған есептеу агрегаттарымен жуықтау қателігінің тұрақтыға дейінгі дәлдікпен жоғарыдан және төменнен бағалаулары алынған. Және де, тригонометриялық Фурье коэффициенттері негізінде оптималды есептеу агрегаты құрылып, түрі айқын жазылған. Сонымен қатар, төменнен бағалаудағы $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ есептеу агрегаттар жиыны барлық мүмкін ортонормаланған жүйелерге сәйкес Фурье қатарларының дербес қосындыларын, арнайы ұйытқыларды, ортодиаметрлерді, сызықтық диаметрлерді, вейвлеттер мен гриди алгоритмдерді қамтығандықтан жектілікті кең жиын болып табылады. Мақалада қойылған есептің екінші бөліміне сәйкес тригонометриялық Фурье коэффициенттері түріндегі сызықтық мәліметтердің оптималділікті жоғалтпайтын және реті бойынша жақсартылматын $\overline{\varepsilon}_N$ қателігі анықталды. Ал үшінші бөлігі бойынша Фурье коэффициенттері негізінде құрылған барлық есептеу агрегаттарының шектік қателігі анықталған $\overline{\varepsilon}_N$ шамасынан аспайтындығы дәлелденді.

Түйін сөздер: Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, сызықтық функционалдар, есептеу агрегаты, функцияларды оптималды жуықтау, шектік қателік, анизотропты жалпыланған Соболев класы

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/3.2

2000 Mathematics Subject Classification: 41A30; 41A45

1. Кіріспе

Функцияларды жуықтау есебі әртүрлі қойылымдарда зерттелген (толығырақ [1]-[5] еңбектер мен ондағы библиографияларды қараңыз). Бұл жұмыста анизотропты жалпыланған Соболев класы функцияларын оптималды жуықтау есебі «Компьютерлік (есептеуіш) диаметр» (қысқаша К(Е)Д) қойылымында шешілген. Бірінен кейін бірі тізбектей шығарылатын,

әрқайсысы өз алдына жеке мәселе болып табылатын К(Е)Д-1, - 2 және - 3 есептерінің жинақталған К(Е)Д қойылымы туралы толыққанды мәліметті [6] мақаласынан табуға болады.

К(Е)Д-1 есебі – бұрыннан белгілі «оптималды жуықтау қателігінің дәл ретін табу» есептерінің жалпылауы болып табылады. Ал К(Е)Д-2 есебінің екінші бөлігі және К(Е)Д-3 есептері жуықтаулар теориясында бұрын-соңды қарастырылмаған – жаңа есептер. К(Е)Д-2 есебінде оптималды жуықтау қателігінің дәл ретін жүзеге асыратын есептеу агрегатының шектік қателігі анықталады, ал К(Е)Д-3 есебінде екінші есепте анықталған шектік қателіктің ауқымдылығы, яғни шектік қателіктері осы шамадан аспайтын есептеу агрегаттарының жиыны анықталады.

Енді К(Е)Д есебінің қысқаша қойылымына тоқталайық. D_N, T, F, Y берілсін (анықтамалары төменде келтіріледі). Барлық сатыларға ортақ және негізгі болатын

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N, T, F, Y) = \inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N} \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N), T, F, Y), \tag{1}$$

мұндағы

$$\delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N), T, F, Y) =$$

$$= \sup_{f\in F} \sup_{|\gamma_N^{(1)}|\le 1,\dots,|\gamma_N^{(N)}|\le 1} \left\| (Tf)(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N; \cdot) \right\|_Y$$

және ε_N-теріс емес мүшелі тізбек, F - Ω_F жиынында анықталған функциялар жиыны, Y – Ω_Y жиынында анықталған функциялардың нормаланған кеңістігі, $T-F$ класын Y кеңістігіне бейнелейтін оператор, $l^{(N)} \equiv l^{(N)}(f) = (l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f))-$ F класының f функциясы туралы $l_N^{(1)} : F \mapsto C, ..., l_N^{(N)} : F \mapsto C$ функционалдарынан алынған сандық мәлімет, φ_N-әрбір бекітілген $(z_1, \dots, z_N) \in \mathrm{C}^N$ үшін тек y айнымалысынан тәуелді болып, Y кеңістігінде жататын $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; y) : \mathrm{C}^N \times \Omega_Y \mapsto \mathrm{C}$ функциясы, $D_N - (l^{(N)}, \varphi_N)$ жұптарынан құралған жиын.

y айнымалысына тәуелді сандық $\varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); y)$ функциясы ретіндегі $(l^{(N)}, \varphi_N)$ жұбы бұдан әрі есептеу агрегаты деп аталады.

Және де, оң $\{a_n\}_{n\ge1}$ және $\{b_n\}_{n\ge1}$ тізбектері үшін $a_n \asymp b_n$ жазуы n-нен тәуелсіз қайсыбір $A > 0$ және $B > 0$ шамалары мен барлық n үшін $Aa_n \le b_n \le Ba_n$ теңсіздіктерінің орындалатынын білдіреді.

К(Е)Д-1. $\asymp \delta_N(0; D_N, T, F, Y)$ шамасының дәл реті анықталады, яғни $\delta_N(0; D_N, T, F, Y) \asymp \psi_N$ қатынасы орындалатындай қандай да бір $\{\psi_N\}_{N\ge1}$ оң тізбегі табылады және

$$\delta_N(0; (\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N), T, F, Y) \asymp \psi_N$$

болатын $(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N) \equiv \overline{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); \cdot)$ есептеу агрегаты құрылады (осы жағдайда $(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ есептеу агрегатын оптималды деп те атайды);

К(Е)Д- 2. $(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ есептеу агрегаты үшін $\delta_N(\overline{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N), T, F, Y) \asymp \psi_N$ қатынасы және $+\infty$-ке өсіп ұмтылатын кез келген оң η_N тізбегі үшін

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N(\eta_N\overline{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N), F, Y)}{\psi_N} = +\infty$$

теңдігі орындалатындай $\overline{\varepsilon}_N > 0$ тізбегінің ($(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ есептеу агрегатының шектік қателігі) бар болу және оны анықтау есебі зерттеледі;

К(Е)Д - 3. Шектік қателіктің ауқымдылығы анықталады: $+\infty$-ке өсіп ұмтылатын кез келген η_N оң тізбегі үшін

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N(\eta_N\overline{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N), F, Y)}{\psi_N} = +\infty$$

теңдігі орындалатындай $(l^{(N)}, \varphi_N)$ есептеу агрегаттарының жиыны құрылады.

(1) өрнегіндегі F класын, Y кеңістігін, $T : F \mapsto Y$ бейнелеуін және D_N жиынын нақтылай отырып, К(Е)Д –қойылымындағы оптималды жуықтаудың әртүрлі есептеріне келеміз (мысалы, [7]-[11] жұмыстарын қараңыз).

Анизотропты жалпыланған Соболев класы анықтамасы. Әрбір $r > 0$ санына $[0,1]$ сегментінде кемімейтін және үзіліссіз ω_r функциясы сәйкес қойылған болсын. Егер $\omega_r(0) = 0$ болып, қайсыбір $C_0(r) \geq 0$ шамасы мен барлық $0 < \delta < \mu \leq 1$ үшін $\frac{\omega_r(\mu)}{\mu^r} \leq C_0(r)\frac{\omega_r(\delta)}{\delta^r}$ теңсіздігі орындалса, онда ω_r функциясы *r-реттi тегістік модулі типті функция* деп аталады.

$r_1 > 0, ..., r_s > 0 (s = 2, 3, ...)$-ретті тегістік модулі типті $\omega_{r_1}(\delta), ..., \omega_{r_s}(\delta)$ функциялары берілсін. Сонда әрбір айнымалысы бойынша бірпериодты, $[0,1]^s$ бірлік кубында Лебег мағынасында интегралданатын,

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi i(m,x)}, m \in Z^s$$

тригонометриялық Фурье-Лебег коэффициенттері

$$\sum_{m\in Z^s} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(\omega_{r_1}^{-2}\left(\frac{1}{max\left\{1, |m_1|\right\}}\right) + ... + \omega_{r_s}^{-2}\left(\frac{1}{max\left\{1, |m_s|\right\}}\right)\right) \leq 1$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$ функцияларының жиыны анизотропты жалпыланған Соболев класы деп аталады да, $W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ символымен белгіленеді.

Осы уақытқа дейін анизотропты жалпыланған Соболев класы [12] жұмысында функциялар мен жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімдерін гильберттік метрикада оптималды жуықтау есептерінде қарастырылғанын айта кетейік. Сондай-ақ, [13] мақаласында алғашқы шарттары $W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ класына тиесілі толқындық теңдеу шешімдері оптималды дискреттелген.

2. Негізгі нәтижелер

Мақалада L_N арқылы сызықтық $l_N^{(1)} : W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s \mapsto C, ..., l_N^{(N)} : W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s \mapsto C$ функционалдарына сәйкес $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ есептеу агрегаттарының жиыны белгіленіп,

$$Tf = f, F = W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s, Y = L^q(0,1)^s, D_N = L_N$$

нақтыланулarында анизотропты жалпыланған Соболев класына тиесілі f функцияларын L_N жиынынан алынған есептеу агрегаттарымен $L^q, 2 \leq q \leq \infty, L^\infty(0,1)^s \equiv C[0,1]^s-$ метрикасында оптималды жуықтау есебі зерттеледі.

Жұмыстың маңыздылығы – оптималды жуықтаудың ψ_N дәл ретін және $\overline{\varepsilon}_N$ шектік қателігін табуда В.И. Коляда [14] жұмысында енгізген, үзіліссіздік модулінің орташа функциясы деген атауға ие $\Omega_{r_1,...,r_s}(\delta), \delta \in [0,1]$ функциясының қолданылуы. Бұл функция $[0,1]$ сегментінде қатаң өсетін, $\omega_{r_1}(\delta), ..., \omega_{r_s}(\delta)$ тегістік модулі типті функциялары арқылы анықталады: егер

$$\overline{\omega}_{r_1}(\delta) = \omega_{r_1}(\delta)/\omega_{r_1}(1), \ldots, \overline{\omega}_{r_s}(\delta) = \omega_{r_s}(\delta)/\omega_{r_s(1)}$$

және

$$\overline{\Omega}_{r_1,...,r_s}(\delta) = \prod_{i=1}^{s} \overline{\omega}_{r_i}^*(\delta)$$

болса, онда әрбір $\delta \in [0,1]$ нүктесіне $\Omega_{r_1,...,r_s}(\delta) = \overline{\Omega}_{r_1,...,r_s}^*(\delta)$ саны сәйкес қойылады, мұнда g^* арқылы g функциясына кері функция белгіленген.

Енді негізгі нәтижелерді келтірейік.

Теорема 1. *$s = 2, 3, \ldots, 2 \leq q \leq \infty$ сандары және $[0,1]$ сегментінде қатаң өспелі, қайсыбір $C_1(r_i) > 0 (i = 1, ..., s)$ шамасы мен барлық $0 \leq \delta, \eta \leq 1$ үшін*

$$\omega_{r_i}(\delta\eta) \le C_1(r_i)\omega_{r_i}(\delta)\omega_{r_i}(\eta) \tag{2}$$

теңсіздігін қанағаттандыратын r_i ретті тегістік модулі типті ω_{r_i} *функциясы берілсін. Егер*

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \Omega^2_{r_1,\dots,r_s}\left(\frac{1}{2^\tau}\right)\cdot 2^\tau < \infty \tag{3}$$

және әрбір $K = 1, 2, \dots$ *үшін*

$$N_i \equiv N_i(K) = [1/\overline{\omega}^*_{r_i}(\Omega_{r_1,\dots,r_s}(1/K))], A_K = \{m \in Z^s : |m_1| \le N_1, \dots, |m_s| \le N_s\}$$

болса, онда барлық $N \equiv N(K) = \prod\limits_{i=1}^{s}(2N_i + 1)$ *үшін*

$$\delta_N(0; L_N, Tf = f, W_2^{\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}}, L^q) \asymp \delta_N(0; (\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N), Tf = f, W_2^{\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}}, L^q) \asymp$$

$$\asymp \frac{N^{1/2}}{N^{1/q}}\Omega_{r_1,\dots,r_s}\left(\frac{1}{N}\right),$$

қатынастары орындалады, мұндағы $[a]$ *саны* a *санының бүтін бөлігін білдіреді,* $(\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ *есептеу агрегаты* A_K *жиынының қайсыбір* $\{\widetilde{m}^{(1)}, \dots, \widetilde{m}^{(N)}\}$ *реттелуі бойынша*

$$\overline{l}_N^{(1)}(f) = \hat{f}(\widetilde{m}^{(1)}), \dots, \overline{l}_N^{(N)}(f) = \hat{f}(\widetilde{m}^{(N)}), \overline{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x) = \sum_{\nu=1}^{N} z_\nu e^{2\pi i(\widetilde{m}^{(\nu)}, x)}$$

теңдіктерімен анықталған.

Теорема 2. *Оптималды* $(\overline{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ *есептеу агрегаты үшін* $\overline{\varepsilon}_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\Omega_{r_1,\dots,r_s}\left(\frac{1}{N}\right)$ *тізбегі шектік қателік болады.*

Теорема 3. *Әрбір* $N = N(K)$ *үшін* Φ_N *символымен* $l_N^{(1)}(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N^{(N)}(f) = \hat{f}(m^{(N)})$ *Фурье коэффициенттеріне сәйкес* $(l^{(N)}, \varphi_N)$ *есептеу агрегаттарының жиыны белгіленсін. Онда кез келген* $(l^{(N)}, \varphi_N) \in \Phi_N$ *үшін*

$$\overline{\lim_{K\to+\infty}} \frac{\delta_N(\eta_N\overline{\varepsilon}_N, (l^{(N)}, \varphi_N), Tf = f, W_2^{\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}}, L^q)}{\delta_N(0; L_N, Tf = f, W_2^{\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}}, L^q)} = +\infty$$

теңдігі орындалады.

Ескерту. (2) шартын тригонометриялық Фурье қатарларының абсолютті жинақтылығын зерттеуде П.Л.Ульянов [15] енгізген. Бұл шартты дәрежелік функциялармен қоса параметрлері $r > 0, \gamma > 0, M \ge \max\{e^2, 2e^{\gamma/r}\}$ болатын

$$\omega_r(\delta) = \begin{cases} \delta^r \ln^\gamma(M/\delta), & \text{егер} \quad \delta \in (0, 1], \\ 0, & \text{егер} \quad \delta = 0 \end{cases}$$

функциялары да қанағаттандырады.

Егер әрбір $i = 1, 2, ..., s$ үшін параметрлері $r_i > 0, \alpha_i \ge 0, M_i \ge \max\{e^2, 2e^{\alpha_i/r_i}\}$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын

$$\widetilde{\omega}_{r_i}(\delta) = \begin{cases} \delta^{r_i} \ln^{\alpha_i}(M_i/\delta), & \text{егер} \quad \delta \in (0, 1], \\ 0, & \text{егер} \quad \delta = 0 \end{cases}$$

функциялары және $\lambda \equiv (\frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_s})^{-1}$ болса, онда

$$\tilde{\omega}^*_{r_i}(\frac{1}{N}) \asymp N^{-\frac{1}{r_i}}(\ln(2N))^{-\frac{\alpha_i}{r_i}}, \tilde{\Omega}_{r_1,\dots,r_s}(\frac{1}{N}) \asymp N^{-\lambda}(\ln(2N))^{\lambda(\frac{\alpha_1}{r_1}+\dots+\frac{\alpha_s}{r_s})} \tag{4}$$

қатынастары орындалып, (3) шарты $\lambda > 1/2$ шартына эквивалентті болады.

[16] мақаласында $r_\tau > 0, \beta_\tau \in R(\tau = 1, ..., s)$ сандары үшін әрбір айнымалысы бойынша бір периодты, $[0,1]^s$ бірлік кубында Лебег бойынша интегралданатын, $\hat{f}(m)$ тригонометриялық Фурье – Лебег коэффициенттері

$$\sum_{m\in Z^s} |\hat{f}(m)|^2(\overline{m}_1^{2r_1}\ln^{2\beta_1}(\overline{m}_1+1)+\cdots+\overline{m}_s^{2r_s}\ln^{2\beta_s}(\overline{m}_s+1))\le 1, (\bar{m}_\tau=\max\{1,|m_\tau|\})$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$ функцияларының $W_2^{r;\beta} = W_2^{r_1,...,r_s;\beta_1,...,\beta_s}(0,1)^s$ класы енгізілген. $\beta_1 \le 0, \ldots, \beta_s \le 0$ мәндерінде $W_2^{\widetilde{\omega}_r} \equiv W_2^{\widetilde{\omega}_{r_1},...,\widetilde{\omega}_{r_s}}(0,1)^s$ класы функцияларын қандай да бір тұрақты шамаға көбейту арқылы $W_2^{r;\beta}$ класын алуға болады. Сондықтан жоғарыдағы үш теоремадан, (4) қатынастары мен (3) шартының $\lambda > 1/2$ шартына эквивалентті болатынын ескерсек, $W_2^{r;\beta}$ класы функцияларын оптималды жуықтау есебіне байланысты келесі тұжырымдар шығады.

Салдар 1. *$s = 2, 3, \ldots, 2 \le q \le \infty, r_1 > 0, \ldots, r_s > 0, \beta_1 \le 0, \ldots, \beta_s \le 0$ сандары берілсін және $\lambda > 1/2$ шарты орындалсын. Егер әрбір $K = 2, 3, ...$ үшін*

$$N_i \equiv N_i(K) = [K^{\lambda/r_i}(\ln K)^{-\lambda(\beta_1/r_1+\cdots+\beta_s/r_s)/r_i}(\ln K)^{\beta_i/r_i}]$$

болса, онда барлық $N \equiv N(K) = \prod_{i=1}^{s}(2N_i+1)$ үшін

$$\delta_N(0; L_N, Tf = f, W_2^{r;\beta}, L^q) \asymp \delta_N(0; (\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N), Tf = f, W_2^{r;\beta}, L^q) \asymp$$

$$\asymp \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda(\ln N)^{\lambda(\beta_1/r_1+\cdots+\beta_s/r_s)}}.$$

Салдар 2. *$f \in W_2^{r;\beta}$ жағдайында оптималды $(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ есептеу агрегаты үшін*

$$\overline{\varepsilon}_N = \frac{1}{N^{\lambda+1/2}(\ln N)^{\lambda(\beta_1/r_1+\cdots+\beta_s/r_s)}}$$

тізбегі шектік қателік болады.

Салдар 3. *Әрбір $(l^{(N)}, \varphi_N) \in \Phi_N$ үшін*

$$\overline{\lim_{K\to\infty}} \frac{\delta_N(\eta_N\overline{\varepsilon}_N, (l^{(N)}, \varphi_N), Tf = f, W_2^{r;\beta}, L^q)}{\delta_N(0; L_N, Tf = f, W_2^{r;\beta}, L^q)} = +\infty$$

теңдігі орындалады.

3. Қорытынды

К(Е)Д - 2 және К(Е)Д - 3 есептерін шешуге арналған зерттеу жұмыстарында (функциялар мен олардың туындылары және интералдарын оптималды жуықтау есептерінде, математикалық физиканың классикалық теңдеулерін оптималды дискреттеу есептерінде) осы уақытқа дейін анизотропты жалпыланған Соболев класы қарастырылмаған. Сондықтан бұл мақала нәтижелері жуықтаулар теориясында, сандық анализ, есептеу математикасы бағыттарында алынған жаңа ғылыми нәтижелер қатарынан орын алатыны сөзсіз.

Авторлар үлесі. Авторлардың үлесі тең.

Әдебиеттер тізімі

1 Dinh Dung, Temlyakov V.N., Tino Ullrich. Hyperbolic Cross Approximation. arXiv:1601.03978v1[math.NA]. -2016. -154 p.

2 Temlyakov V. Multivariate Approximation. -Cambridge: Cambridge University Press, 2018. -551 p.

3 Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems // Journal of Complexity. -2022. -Vol. 71. -P. 101653.

4 Ажгалиев Ш. У., Темиргалиев Н. Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω //Матем. сб. -2007. -Т. 198. № 11ю -С. 3–20.
5 Темиргалиев Н. , Жубанышева А. Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления // Изв. вузов. Матем. -2019. № 1. -С. 89–97.
6 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, вычислительная математика и численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник ЕНУ имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. №3. -С. 8 – 88.
7 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. -2015. -Т. 55. № 9. -С. 1474–1485.
8 Темиргалиев Н., Жубанышева А. Ж. Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения // Изв. вузов. Матем. – 2017. № 3. -С. 89–95.
9 Utesov A.B., Bazarkhanova A.A. On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit // Differential Equations. -2021. -Vol. 57 (12). -P. 1726-1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168
10 Utesov A.B. Optimal Recovery of Functions from Numerical Information on Them and Limiting Error of the Optimal Computing Unit // Mathematical Notes. -2022. -Vol. 111(5). -P. 759 – 767. DOI: 10.1134/S0001434622050108
11 Taugynbayeva G., Azhgaliev Sh., Zhubanysheva A., Temirgaliyev N. Full C(N)D – study of computational capabilities of Lagrange polinomials // Mathematics and Computers in Simulation. -2025. -Vol. 227. -P. 189-208.
12 Утесов А.Б. Задача восстановления функций и интегралов на обобщенных классах и решения уравнения теплопроводности: дисс. кандидата физ.- мат. наук. Алматы, 2001.
13 Abikenova Sh., Utesov A., Temirgaliev N. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Clases // Mathematical notes. -2012. -Vol. 91(3). -P. 430-434.
14 Kolyada V.I. The embedding of certain classes of functions of several variables //Siberian Mathematical Journal. -1973. -Vol. 14:4. -P. 530 - 546.
15 Ul'yanov P.L. Absolute convergence of trigonometric Fourier series // Doklady Mathematics. – 1992. -Vol. 45. No 1. -P. 83-88.
16 Утесов А.Б. Оптимальное восстановление функций из анизотропных классов Соболева в степенно-логарифмической шкале // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика. -2021. -Т. 136. № 3. -С. 37-41.

Optimal C(N)D-recovery of functions from the anisotropic generalized Sobolev class

A.B.Utessov, G.I.Utessova
K.Zhubanov Aktobe Regional University, A. Moldagulova ave., 34, Aktobe, 030000, Kazakhstan

Abstract. In this paper, the problem of recovering functions from an anisotropic generalized Sobolev class in the context of the computational (numerical) diameter is completely solved. The anisotropic generalized Sobolev class $W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}$, which arises from the classification of periodic functions according to the rate of decay of their trigonometric Fourier coefficients, represents a finer scale of function characteristics than the anisotropic Sobolev class $W_2^{r_1,\ldots,r_s}$ in the power scale. The paper presents two-sided estimates, up to multiplicative constants, for the approximation error of functions from the considered class by computational aggregates constructed from information given in the form of linear functionals. In addition, based on trigonometric Fourier coefficients, the optimal computational aggregate is explicitly constructed. It is noted that the set of computational aggregates $(l^{(N)}, \varphi_N)$ used in the lower bounds is sufficiently wide, containing all partial sums of Fourier series with respect to various orthonormal systems, all possible finite convolutions with special kernels, as well as all finite approximation sums used in orthogonal widths, linear widths, and greedy algorithms. Furthermore, in the second part of the paper, the limiting error $\overline{\varepsilon}_N$ of numerical information in the form of trigonometric Fourier coefficients is obtained, which preserves the optimality of the computational aggregate and cannot be improved in order. In the third part, it is proved that all computational aggregates constructed using trigonometric Fourier coefficients do not have a limiting error greater than $\overline{\varepsilon}_N$.

Keywords: Computational (numerical) diameter, linear functionals, computational aggregate, optimal recovery of functions, limiting error, anisotropic generalized Sobolev class.

Оптимальное восстановление функций из обобщенного анизотропного класса Соболева в контексте К(В)П

А.Б.Утесов, Г.И.Утесова

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, пр. А. Молдагуловой, 34, Актобе, 030000, Казахстан

Аннотация. В статье полностью решена задача восстановления функций из анизотропного обобщённого класса Соболева $W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}$ в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника. Анизотропный обобщенный класс Соболева $W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}$ как результат классификации периодических функций по скорости убывания их тригонометрических коэффициентов Фурье является более тонкой шкалой характистики функций по сравнению с анизотропным классом Соболева $W_2^{r_1,\ldots,r_s}$ в степенной шкале. В работе получены двусторонние оценки с точностью до константы для погрешности приближения функций из рассматриваемого класса вычислительными агрегатами, построенными по информации, заданной линейными функционалами. Кроме того, на основе тригонометрических коэффициентов Фурье в явном виде построен оптимальный вычислительный агрегат, обеспечивающий наилучшее приближение. Отметим, что множество вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$ в оценке снизу является достаточно широким множеством, содержащим все частичные суммы рядов Фурье по всевозможным ортонормированным системам, всевозможные конечные свертки со специальными ядрами, а также все конечные суммы приближения, использующиеся в ортопоперечниках, линейных поперечниках и жадных алгоритмах. В статье согласно второй части поставленной задачи найдена погрешность $\overline{\varepsilon}_N$ числовой информации вида тригонометрических коэффициентов Фурье, сохраняющая оптимальность вычислительного агрегата и неулучшаемая по порядку. В третьей части доказано, что все построенные по тригонометрическим коэффициентам Фурье вычислительные агрегаты не имеют большей предельной погрешности чем $\overline{\varepsilon}_N$.

Ключевые слова: Компьютерный (вычислительный) поперечник, линейные функционалы, вычислительный агрегат, оптимальное восстановление функций, предельная ошибка, анизотропный обобщённый класс Соболева.

References

1 Dinh Dung, TemlyakovV.N., Tino Ullrich. Hyperbolic Cross Approximation. arXiv:1601.03978v1[math.NA]. 2016. 154 p.

2 Temlyakov V. Multivariate Approximation. Cambridge: Cambridge University Press. 2018. 551 p.

3 Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems, Journal of Complexity. 2022. Vol. 71. P. 101653.

4 Azhgaliev Sh. U., Temirgaliev N. Informativeness of all the Linear Functionals in the recovery of functions in the classes H_p^{ω} , Mathematical sb. 2007. Vol. 198. No 11. P. 1535-1551.

5 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Computational (Numerical) diameter in the context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2019. No 1. P. 89-97. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-89-97

6 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Teoriya priblizhenij, vychislitelnaya matematika i chislennyj analiz v novoi koncepcii v svete Kompyuternogo (vychislitelnogo) poperechnika[Approxmation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter], Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, seriya Matematika. Informatika. Mekhanika. 2018. Vol. 124. No 3. P. 8-88. [in Russian]

7 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical physics. 2015. Vol. 55(9). P. 1432-1443.

8 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. Order Estimates of the Norms of Derivatives of Functions with Zero Values on Liniar Functionals and Their Applications, Russian Mathematics. 2017. Vol. 61(3). P. 77-82.

9 Utesov A.B., Bazarkhanova A.A. On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit, Differential Equations. 2021. Vol. 57 (12). P. 1726-1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168

10 Utesov A.B. Optimal Recovery of Functions from Numerical Information on Them and Limiting Error of the Optimal Computing Unit, Mathematical Notes. 2022. Vol. 111(5). P. 759- 767. DOI: 10.1134/S0001434622050108

11 Taugynbayeva G., Azhgaliev Sh., Zhubanysheva A., Temirgaliyev N. Full C(N)D – study of computational capabilities of Lagrange polinomials, Mathematics and Computers in Simulation. 2025. Vol. 227. P. 189-208.
12 Utesov A.B. Zadacha vosstanovleniya funkcij i integralov na obobshennyh klassah i reshenya uravneniya teploprovodnosti [The problem of restoration of the functions and integrals on the generalized classes and solutions of the heat conduction equation]: PhD dissertation in physics and mathematics. Almaty, 2001. [in Russian]
13 Abikenova Sh., Utesov A., Temirgaliev N. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes, Mathematical notes. 2012. Vol. 91(3). P. 430-434.
14 Kolyada V.I. The embedding of certain classes of functions of several variables, Siberian Mathematical Journal. 1973. Vol. 14:4. P. 530-546.
15 Ul'yanov P.L. Absolute convergence of trigonometric Fourier series, Doklady Mathematics, 1992. Vol. 45:1. P. 83-88.
16 Utesov A.B. Optimal'noe vosstanovlenie funkcij iz anizotropnyh klassov Soboleva v stepenno – logarifmicheskoj shkale [Optimal recovery of functions from anisotropic Sobolev classes on a power- logarithmic scale], Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, Computer Science, Mechanics Series. 2021. Vol. 136. No 3. P. 37-41. [in Russian] DOI:https://doi.org/10.32523/2616-7182.

Авторлар туралы мәлімет:

Утесов Әділжан Базарханұлы – физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қ. Жұбанов Ақтөбе өңірлік университетінің "Математика" кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Ә. Молдағұлова даңғ., 34, 030000 Ақтөбе, Қазақстан.
Утесова Гүлжан Ізтұрғанқызы – Қ. Жұбанов Ақтөбе өңірлік университетінің "Информатика және ақпараттық технологиялар" кафедрасының аға оқытушысы, Ә. Молдағұлова даңғ., 34, 030000 Ақтөбе, Қазақстан.

Utessov Adilzhan Bazarkhanovich – candidate of physic- mathematical science, associate professor of the Mathematic department, Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, A.Moldagulova ave., 34, Aktobe, 030000, Kazakhstan.
Utessova Gulzhan Izturganovna - senior lecturer at the Department of Informatics and Information Technology, Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, 34, A. Moldagulova ave., 34, Aktobe, 030000, Kazakhstan.

Қабылданған күні: 08.08.2025. Өңдеуден кейін: 30.08.2025.
Мақұлданған күні: 27.09.2025. Онлайн қолжетімді: 30.09.2025.

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2025, Vol. 152, №3, P. 30-59.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

Статья
МРНТИ: 27.43.51

НАЛИЧИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ В ПАРАДОКСЕ МОНТИ ХОЛЛА НА АВТОРСКИХ СЛУЧАЙНЫХ АЛГОРИТМАХ [1]

А.Ж. Жубанышева [1], Н.Ж. Наурызбаев [2], Г.Е. Таугынбаева [3]*,
К.Б. Нуртазина [4], Н.Темиргалиев [5]

[1] *Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Астана, 010008, Казахстан*

[1] *zhubanysheva_azh@enu.kz,* [2] *nauryzbayev_nzh@enu.kz,* [3*] *taugynbayeva_gye@enu.kz*
[4] *nurtazina_kb@enu.kz* [5] *ntmath10@mail.ru*

Аннотация. В статье изучается ставшая классической с середины 70-х годов XX века задача Теории вероятностей, известная как «Парадокс Монти Холла». Она иллюстрирует различие между субъективным восприятием случайности и объективными математическими доказательствами, подтверждаемыми соответствующими вычислительно-статистическими экспериментами. Проведён подробный логический анализ интуитивного восприятия решения задачи, рассматриваемый как еще один вариант описания когнитивного диссонанса, когда даже научно обоснованные факты не могут изменить точку зрения человека со своим сложившимся естественно-научным восприятием действительности и математическое обоснование оптимального выбора приза игроком, да еще в двух теоретико-вероятностных интерпретациях. Каждая из них присоединяется к известным теоретико-вероятностным выводам, которые, в очередной раз, подверглись статистической проверке при помощи численных экспериментов.

Здесь особенность состояла в том, что в дополнение к известным теоретико-экспериментальным выводам, полученным применением ставших классическими методов Монте-Карло (Mersenne Twister, PCG) методов квази Монте-Карло с уточнениями типа Sobel, Halton, Faure, Niederreiter с малыми дискрепансами и Линейным конгруэнтным генератором с локальными оптимальностями, вычислительные процедуры выполнены с ранее неиспользованными генераторами случайных чисел – авторскими алгоритмами Линейного конгруэнтного генератора в неулучшаемой редакции и метода квази Монте-Карло со сверхэкономными в заданиях сетками Коробова с малыми знаменателями p (в том смысле, что координата $\frac{ak}{p}$ узла сетки мощности p со знаменателем p и есть «малое» в условиях возможного, тогда как в случайных алгоритмах в десятичных дробях нет ограничения длины по отношению к p).

Проведенные вычисления показали, что и эти оба алгоритма случайности подтверждают статистическую регулярность в приближении к теоретической вероятности выигрыша как при сохранении игроком своего выбора, так и при переходе на оставленную ведущим закрытую дверь в процессе увеличения числа испытаний – количества игр (что можно интерпретировать и в обратную сторону как подтверждение качества примененных авторских датчиков случайности).

[1]Работа выполнена в рамках проекта No. AP19680525, финансируемого Комитетом науки Министерстванауки и высшего образования Республики Казахстан

Статья демонстрирует наличие статистической регулярности в игре Монти Холла и служит наглядным примером формирования вероятностных заключений со статистическим подтверждением.

Ключевые слова: Парадокс Монти Холла, интуиция, здравый смысл, парадокс, детерминистическая регулярность, случайность, статистическая регулярность, линейный конгруэнтный генератор, метод квази Монте-Карло.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/3.3

2000 Mathematics Subject Classification: 62-XX; 60-XX; 62P15; 62P99

Введение. Интрига игры «Парадокс Монти Холла» состояла в том, что в возможно малом в три шкатулки с одним призом в них вероятности $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ в малом количестве демонстрационных испытаний плохо различимы, к тому же здесь действует психологический фактор: негативное последствие, вызванное бездействием, причиняет меньшее сожаление, чем вызванное каким-либо действием, мол старался на собственное поражение.

Теория вероятностей и математическая статистика позволяют выявлять скрытые случайные закономерности в ситуациях, где интуитивные ожидания человека иногда оказываются ошибочными (под термином «случайность» понимается отсутствие детерминистической регулярности). Одним из показательных примеров подобного противоречия между интуицией и строгим математическим рассуждением является Парадокс Монти Холла – задача, получившая широкую известность благодаря телевизионной игре «Let's Make a Deal» и последующим математическим дискуссиям (см., напр., [1]-[7]). Несмотря на простоту формулировки, данный парадокс на протяжении десятилетий вызывал и продолжает вызывать оживлённые споры среди любителей науки, преподавателей и студентов, став классическим примером «когнитивного конфликта» между вероятностной логикой и человеческим восприятием случайности.

Актуальность исследования обусловлена тем, что парадокс Монти Холла служит эффективной иллюстрацией фундаментальных принципов вероятностно-статистического мышления, изучения действительности на основе моделирования и последующей экспериментальной проверки возникших случайных событий. В рамках активного внедрения цифровых технологий в образование и научные исследования особое значение приобретают методы компьютерного моделирования, позволяющие эмпирически подтвердить теоретические результаты. Проведение статистической проверки парадокса с использованием различных генераторов случайных чисел открывает возможности для анализа не только самого явления, но и качества вероятностных моделей, лежащих в основе оптимальных решений в различных проблемах всевозможной действительности.

Научная новизна данной статьи заключается в том, что в ней выполнено численное моделирование парадокса Монти Холла с применением альтернативных датчиков случайных чисел, ранее не использовавшихся в подобных исследованиях. Именно, для имитации случайных выборов применены линейный конгруэнтный генератор и метод квази Монте-Карло собственного авторского производства, что позволяет подтвердить результаты, полученные при использовании иных случайных и квази случайных последовательностей. Такие случайные эксперименты в совокупности обеспечивают более глубокое понимание статистической устойчивости вероятностных закономерностей и демонстрируют, как различные способы генерации случайности влияют на распределение результатов и характеристик сходимости частот к теоретическим вероятностям.

Статья организована следующим образом. Бытового мышления рассуждениям, логически приводящим к равной вероятности выигрыша игроком приза независимо от следования своему выбору или переходу на выбор ведущего посвящен §1. Обоснования чего основаны на известном со средней школы классическом определении вероятностей, в котором вероятность каждого элементарного события-исхода эксперимента равна числу $\frac{1}{\text{количество исходов эксперимента}}$.

В игре «Парадокс Монти Холла» имеются три двери, за одной из которых находится автомобиль, за другими по одной козе и обо всем этом знает ведущий. Игра начинается с вероятностной модели из трех дверей с одним призом, в которой сначала в действии только игрок – выбирает одну дверь из трех с целью выигрыша авто, называемую «Первоначальный выбор игрока», согласно классическому определению имеющий вероятность $\frac{1}{3}$. Затем вступает в игру Монти Холл, для продолжения игры оставляя дверь «Первоначальный выбор игрока» и из двух остальных дверей открывает одну дверь за которой коза, оставшуюся дверь назовем «Выбор ведущего». Таким образом, после вступления в игру ведущего, в игре остаются две двери «Первоначальный выбор игрока» и «Выбор ведущего», за одной из которых находится авто. Тем самым, игра находится в новой вероятностной модели, где две двери, за одной из которых без предпочтения друг другу находится авто, которые согласно классическому определению имеют равную вероятность выигрыша $\frac{1}{2}$. Таким образом, нахождение авто за каждой из дверей «Первоначальный выбор игрока» и «Выбор ведущего» имеет равную вероятность $\frac{1}{2}$, что приводит к выводу, что игрок с равными шансами на выигрыш может остановиться на своем выборе или же может перейти к выбору ведущего. Именно в этом и заключается называемое «Выбор по интуиции» решение «Парадокса Монти Холла».

Авторы данной статьи в теории вероятностей следуют принципу, что в учебной литературе и на занятиях в каждой задаче должно быть построено вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в полном содержании – это для того чтобы понимать саму вероятностную идеологию, тогда как в применениях можно использовать только возникающие в процессе решения задачи события и их вероятности. Следующие §2 и §3 посвящены двум интерпретациям построения вероятностного пространства игры Монти Холла, приводящим к вероятностям $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ выигрыша приза соответственно при сохранении игроком своего выбора и при изменении выбора на оставшуюся закрытой дверь. Кроме того, в §2 описан алгоритм проведения численного эксперимента.

В §4 приведены два датчика авторских случайных чисел.

Линейный конгруэнтный генератор с более чем 50-летней историей под названием «Спектральный критерий» от Дональда Кнута с постановкой задачи в 10 строк текста, которая полностью решена в 10-ти строках ответа (см. [8]-[9]). Задача состоит в нахождении волшебных-магических целых положительных чисел a и N с неограниченно растущим N среди всех возможных, в ответе выписаны три явно подбираемые системы пар, дающие неулучшаемый порядок определяющего случайность показателя, последний четвертый случай показывает потерю свойства случайности, все это в практическом итоге выписывается в одну строку прямого нахождения искомых чисел.

Метод квази Монте-Карло представлен построением на основе алгебраической теории чисел оптимального алгоритма нахождения случайных чисел со свойством сверхсжатия информации, когда N искомых числовых показателей вычисляются за порядка $NlnlnN$ элементарных арифметических операций и отдельно выписан метод вычислительного поиска тех же случайностей, – все со свойсвом с неулучшаемой в степенной шкале величиной дискрепанса, меры наибольшей разбросанности N точек в единичном кубе.

Вообще, в процессе математического изучения действительности, по-видимому, всегда нужно различать ее математическую модель и экспериментальное подтверждение или неподтверждение полученных теоретических выводов, причем и в обратном направлении равнозначно. Последующий §5 посвящен подтверждению статистической регулярности выигрыша приза в игре «Парадокс Монти Холла» при стратегиях – игрок остается при своем первоначальном выборе либо меняет выбор на оставшуюся закрытой дверь, понятно, независимо от вероятностных моделей, которые имеют одни и те же обсуждаемые вероятности. И, наконец, "Заключительные замечания" о перспективах тем данной статьи.

§1. **Еще раз про «Парадокс Монти Холла» в русле бытового мышления.** Такое название носит вероятностного содержания игра на американском телешоу «Let's Make a Deal» (Давайте заключим сделку) в честь ведущего этой передачи. На сцене три одинаковые двери,

за одной – авто, за двумя другими – козы. В шоу участвуют ведущий и игрок, цель последнего, разумеется, в выигрыше авто. Монти Холл, ведущий шоу, который знает, где находится авто, предлагает игроку выбрать одну из дверей. Первое действие состоит в выборе игроком двери, которая остается *закрытой*, то будет в дальнейшем «выбор игрока». Во втором действии шоу выбор производит ведущий, из двух оставшихся дверей *открывая* дверь, за которой коза, для точности речи, оставшуюся *закрытой* дверь здесь и всюду ниже будем называть «выбор ведущего». В своих действиях ведущий подчиняется следующим правилам:

– Монти знает, за какой дверью находится авто, и, как следствие, за какими дверями находятся козы, но без их персонификаций, что, конечно, не имеет значения: авто – выигрыш, коза – проигрыш.

– Монти *всегда* открывает одну дверь, дверь за которой скрывается коза.

– Монти *никогда* не открывает дверь, которую игрок выбрал изначально (что теоретически возможно, если за дверью, выбранной игроком, коза, о чем знает ведущий, и потому может открыть как дверь с козой, но предусмотрен запрет).

– Если Монти *может* открыть более одной двери, не нарушив первые два правила, это когда игрок выбрал дверь с авто и потому ведущему известно, что за оставшимися двумя дверями козы, то он выбирает свою дверь без предпочтения какой-либо из них случайным образом (что на языке Теории вероятностей означает «с вероятностью $\frac{1}{2}$»).

Особо отметим, что игрок в этих двух своих выборах сохраняет шанс выигрыша – авто либо за первоначальном выбором игрока, либо за выбором ведущего. Действительно, если бы они оба были проигрышными, то авто оказалось бы за дверью, которую надлежит открыть Монти Холлу, что невозможно – нельзя открывать дверь с авто.

После того, как Монти откроет свою дверь, он предлагает игроку новый выбор – остаться с первоначальным выбором или переключиться на другую неоткрытую дверь, в этот итоговый раз после второго выбора игрока ведущий открывает указанную игроком дверь, - с авто или с козой. Именно здесь наступает основополагающая интрига игры: как игроку максимизировать свои шансы в вероятностных показателях на выигрыш автомобиля?

Бытового мышления рассуждения такие: ведущий всегда в итоге убирает одну проигрышную дверь, и тогда для игрока шансы появления автомобиля за двумя неоткрытыми становятся равны, – «аргумент 50 на 50» вне зависимости от сохранения первоначального выбора или перехода на выбор ведущего.

То же в вероятностных терминах звучит так: «Как только Монти открывает свою дверь, в игре остаются две двери. Поскольку они с равной вероятностью $\frac{1}{2}$ будут выигрышными, не имеет значения, переключается игрок или нет».

Таким образом, так называемый «здравый смысл» решает, что в игре на выигрыш авто шансы игрока остаться в своем первоначальном выборе или перейти на другую дверь, оставленную закрытой ведущим, одинаковы – с равной вероятностью для нахождения авто игрок может выбрать любую из двух оставшихся в игре.

Здесь снова обратимся к основам Вероятностной науки – отсутствие «детерминистической регулярности», что налицо в виде неизвестности до второго открытия двери местонахождения авто из трех возможных, поэтому надлежит убедиться в наличии «статистической регулярности».

Изоморфизм шоу Монти Холла. В целях обеспечения возможности воспроизводства игры в камерных условиях изменим двери на шкатулки, авто на шарик, а коз уберем вообще.

Здесь заметим, это в Математике есть *изоморфизм*, когда три двери и за ними две козы могут быть заменены на какие угодно три одинаковых предмета с тремя признаками – одним и отличными от него двумя идентичными. В частности, три шкатулки с шариком в одной из них и пустыми двумя, или же три карты разных мастей, две из которых приняты за копии одного и того же, и тогда игра Монти Холла с любой из них переносится на все такие же.

Теперь обратимся к проверяемой реальности.

Статистика шоу Монти Холла. Как оказалось, нет доступной публичной *точной статистики по реальному игровому шоу* "Let's Make a Deal" – например, сколько сезонов или

эпизодов было, сколько раз игроки переключались или оставались при первоначальном выборе, а также сколько раз выигрывали автомобиль или козу. Такое детальное распределение *не публиковалось официально* и, скорее всего, *не фиксировалось* в виде открытых данных. Тем не менее, вполне выполнимые, что называется «в домашних условиях», со шкатулками-шариком, картами и т.п., показывают следующие проценты выигрыша: поменявшие первоначальное решение – это около 66%, на оставшихся при своем выборе приходится около 34%, что в шкале $\frac{k}{3}$ из трех дверей есть соответственно $\frac{2}{3}$ с $k=2$ и $\frac{1}{3}$ с $k=1$.

Так что приведенные в решении рассуждения, какими бы логичными они не казались, не подтверждаются практикой: в рамках экспериментальной статистической регулярности получено, что игрок с вероятностью $\frac{1}{3}$ выигрывает при сохранении своего первоначального выбора, тогда как при переходе на выбор ведущего вероятность выигрыша в два раза выше и равна $\frac{2}{3}$.

Парадокс Монти Холла в терминах «три шкатулки – один шарик» в противостоянии «Интуиция – строгое математическое доказательство». Снова вернемся к условию задачи. Таким образом, допустим, что один игрок и один ведущий вступают в игру, в которой игроку надо найти шкатулку с шариком: имеются три абсолютно одинаковые шкатулки, в одной из них, известной только ведущему, шкатулке лежит шарик, в двух других ничего нет. Сначала игрок произвольно, пока у игрока нет никаких оснований предпочесть какую-то из трех, выбирает одну из них, но не открывает, поэтому не знает, есть или нет в ней шарик. После чего ведущий, который, повторимся, заранее знает, в какой из шкатулок лежит шарик, открывает и показывает игроку из двух оставшихся пустую шкатулку, затем ее удаляет из игры, – ведущий всегда может такое действие осуществить: если игрок выбрал пустую шкатулку, то из двух оставшихся все равно для удаления одна пустая найдется, если же он выбрал шкатулку с шариком, то оставшиеся две пустые, так что ведущий может удалить любую из них.

Тем самым, в задаче поиска игроком шкатулки с шариком возникла новая ситуация: шкатулок с неизвестным для игрока содержанием «есть в ней шарик или нет» осталось 2 – первая игроком выбранная шкатулка и вторая оставленная неоткрытой ведущим, которую условились называть «выбор ведущего». Какую из них – выбранную из трех шкатулок самим игроком или из остальных двух выбранную ведущим выбрать игроку? И тогда ведущий отрывает выбранную игроком шкатулку, и игрок видит – выиграл или проиграл.

Здесь сталкиваются интуиция как процесс умозрительного постижения истины только по своему приобретенному на происходящий момент опыту без доказательного обоснования и строгое математическое доказательство, причем случаи их противоречия относятся к замечательным, именуемым специальным термином «парадокс».

Само название задачи говорит об ожидаемом ответе в виде неподтверждения интуитивного заключения, но это после вычислений по двум вероятностным пониманиям.

Начнем с нахождения величин искомых вероятностей по интуиции и с позиций «здравого смысла» с одним одинаковым ответом $\frac{1}{3}$ нахождения приза и для первоначального выбора игрока, и для перехода к выбору ведущего, да еще с равной вероятностью $\frac{1}{2}$ для каждого из этих двух оставшихся возможных выборов.

Итак, разметим шкатулки цифрами 1, 2, 3 и определим события A_1 и $\overline{A}_1$ соотвественно как наличие и отсутствие шарика в первой шкатулке, A_2 и $\overline{A}_2$ то же во второй, A_3 и $\overline{A}_3$ – в третьей шкатулке.

Естественно предположить, что изначально наличие шарика в каждой из трех шкатулок равновероятно:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Этим фиксируем, что если бы игрок остановился на своем первоначальном выборе, то вероятность нахождения шкатулки с шариком равна $\frac{1}{3}$, ибо реализуется одно и только одно из событий A_1, A_2, A_3 с номером шкатулки с шариком, причем известным только одному ведущему.

Теперь приступим к самой игре. Событие A_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ – приз находится в шкатулке под номером i есть исходная стадия игры, еще до действий игрока и ведущего.

Первая стадия игры заключается в выборе игроком шкатулки, номер которой обозначим буквой j , и назовем «выбор игрока». Далее перейдем ко второй стадии игры, сложившейся после выбора игроком одной шкатулки из трех, когда выбор из двух оставшихся уже за ведущим.

Опишем этот заключительный сценарий. Для получения интуитивных выводов здесь достаточно рассмотреть одну конкретную ситуацию. Не уменьшая общности, с точностью до перехода к другому номеру шкатулки, можем считать, что игроком выбрана третья – «выбор игрока» есть шкатулка под номером 3. Тогда, в зависимости от наличия или отсутствия шарика в выбранной игроком в шкатулке, «выбор ведущего» производится следующим образом.

Если, во-первых, выбор игрока третьей шкатулки оказался $\overline{A}_3$ содержания без шарика, тогда выбор ведущего однозначно есть шкатулка 1 с шариком A_1 , если шарик в первой шкатулке, с удалением пустой второй шкатулки (или A_2 , когда ведущий показывает и удаляет пустую первую шкатулку). Если же, во-вторых, «выбор игрока» есть A_3 – шарик в третьей шкатулке, то первые две шкатулки пусты – имеют место $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, так что если ведущий откроет $\overline{A}_1$, то «выбор ведущего» будет $\overline{A}_2$, если же ведущий откроет $\overline{A}_2$, то «выбор ведущего» будет $\overline{A}_1$.

В результате остаются две шкатулки: на первом этапе игры «первоначальный выбор игрока» производится без предпочтений одной из трех возможностей выбора шкатулки с вероятностью $\frac{1}{3}$ нахождения шарика в каждой из трех имеющихся шкатулок, и тогда, согласно классическому определению, вероятность выигрыша игроком при своем «первоначальном выборе игрока» равна $\frac{1}{3}$.

Второй этап игры, создавшийся после открытия ведущим пустой шкатулки, меняет вероятностные рассмотрения – остаются две шкатулки – «выбор игрока» и «выбор ведущего» без предпочтения одного из этих выборов, да еще, когда в одной и только одной из них находится шарик. Тем самым получаем, что вероятность нахождения шарика в каждый из шкатулок с названиями «выбор игрока» и «выбор ведущего» одинакова, стало быть, без предпочтения одного из этих двух выборов, и потому согласно классическому определению вероятности равна $\frac{1}{2}$. Также обратим внимание на то, что вероятность нахождения шарика по «выбору игрока» в процессе рассмотрения поднялась с $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{2}$.

Итоговый выбор игрока первичного собственного или перехода на выбор ведущего для нахождения шкатулки с шариком имеют одну и ту же вероятность $\frac{1}{2}$, и потому для игрока нет разницы в том, что он сохранит свой выбор или перейдет на выбор ведущего.

Это и есть *интуитивный выбор,* по приведенным рассуждениям логически правильный – при независимых двух действиях показательно удаляется одна пустая шкатулка и остаются две равновероятные шкатулки, в каждой из которых с вероятностью $\frac{1}{2}$ находится шарик.

Запомним главное: «интуитивная» вероятность нахождения шкатулки с шариком при сохранении игроком своего первоначального выбора – выбор игрока – равна $\frac{1}{2}$, то же с той же вероятностью $\frac{1}{2}$ и при переходе на «выбор ведущего».

Теперь перейдем к теоретико-вероятностным рассмотрениям.

Итак, **вероятностное решение задачи «Парадокс Монти Холла» методом математического обоснования на основе формулы Байеса,** – строится описывающее игру «Парадокс Монти Холла» вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, в котором доказывается, что вероятность выигрыша игроком приза при сохранении своего первоначального выбора равна $\frac{1}{3}$, а при переходе на выбор ведущего имеет вероятность $\frac{2}{3}$.

§2. **Парадокс Монти Холла на примере трех одинаковых шкатулок с одним шариком только в одной из них в контексте формулы Байеса *с описанием* вероятностного пространства.** В приведенных интуитивных рассуждениях не было использовано то обстоятельство, что выбор ведущего производится после выбора игрока,

другими словами, *в изменившихся условиях*, при этом вероятности вычисляются по формуле Байеса.

Таким образом, аккуратно проследим за разворачивающимися действиями.

Парадокс Монти Холла – это классическая задача теории вероятностей, которая часто вызывает дефект восприятия реальности, что в описании выглядит так: «*Следует сказать, что магистранты делятся на тех, которые понимают решение, и которые не понимают. Причем аргументы редко помогают изменить мнение тех, кто решение не понимает*».

Как это сообщалось выше, в этой игре по результатам экспериментов имеет место *статистическая регулярность выигрыша* с вероятностью $\frac{1}{3}$ сохранения игроком своего выбора и вероятностью $\frac{2}{3}$ при переходе на выбор ведущего. Выше в терминах «три шкатулки – один шарик» в рамках интуитивных рассуждений были установлены противоречащие «статистической регулярности» величины вероятностей отыскания шарика при сохранении и перемене своего первоначального выбора игроком в равном количестве $\frac{1}{2}$.

Перейдем к описанию вероятностного пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Опять же, цифры 1, 2, 3 используем для обозначения имеющихся трех шкатулок.

Для описания игры «Парадокс Монти Холла» будем использовать обозначения A, B, M, V в соответствии с присвоенными действиями над шкатулками с их номерами в виде нижних индексов, которые будем называть «событиями»:

$A : A_1, A_2, A_3 \equiv A_i \ \ (i = 1,\ 2,\ 3)$ – шарик *находится* в шкатулке под номером i (как это и было раньше),

$B : B_1, B_2, B_3 \equiv B_j \ \ (j = 1,\ 2,\ 3)$ – игрок *выбирает* шкатулку под номером j ,

$M : M_1, M_2, M_3 \equiv M_k \ \ (k = 1,\ 2,\ 3)$ – ведущий *открывает* шкатулку без шарика под номером k ,

$V : V_1, V_2, V_3 \equiv V_\tau \ \ (\tau = 1,\ 2,\ 3)$ – шкатулка с названием «выбор ведущего» под номером τ .

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ составлено, в неполном описании, с привлечением лишь необходимого для поставленной цели, из событий $A, B, M, V,$ алгебры над ними вместе с условными событиями, вероятности которых определены по правилам игры «Парадокс Монти Холла».

Игра состоит в последовательности событий

$$(A_i, B_j, M_k, V_\tau) ,$$

или, что то же самое, вектора (i, j, k, τ) с координатами из чисел 1, 2, 3, в котором произвольны первые два – эта шкатулка с шариком под номером i и выбранная игроком шкатулка под номером j . Остальные шкатулки – открываемая ведущим пустая шкатулка под номером k и оставшаяся неоткрытой вторая шкатулка под номером τ , зависят от взаимоотношений между первыми шкатулками i и j в виде $i = j$ или $i \neq j$.

Изучаемая задача основана на теореме полной вероятности и формуле Байеса.

Поэтому, начиная с событий A_1, A_2 и A_3 с распределением вероятностей (1), вычисляются вероятности событий, входящих в эти формулы, включая вероятности невозможного и достоверного событий равных соответственно 0 и 1, двух равновозможных взаимодополнительных событий с вероятностями $\frac{1}{2}$ каждая.

Итак, игра разбивается на части различного содержания. Игрок выбрал шкатулку B_j , ведущий открыл несовпадающую с ней пустую шкатулку M_k . Тогда выбор ведущего есть никак незадействованная третья шкатулка V_τ с $\tau \neq j, \tau \neq k$.

И тем, на выбор игрока остаются две шкатулки B_j и V_τ с номерами j и τ соответственно. В условиях открытия ведущим пустой шкатулки M_k вероятность выигрыша при сохранении игроком своего выбора неизвестного содержания шкатулки B_j находится заменой ее на заведомо выигрышное A_j с тем же номером j , стало быть, есть вероятность условного события $A_j|M_k$, то же с заменой V на A тем же номером τ с переходом на вероятность условного события $A_\tau|M_k$.

В итоге,

1^0. Шкатулка с номером j как сохранение игроком своего выбора с вероятностью выигрыша $P(A_j|M_k)$,

2^0. Шкатулка с номером τ как выбор ведущего с вероятностью выигрыша $P\left(A_{\tau|}M_k\right)$.

Итак, приступим к решению поставленной задачи.

Покажем, что в этих обозначениях цель «выбор шкатулки с шариком – нахождение шарика – выигрыш» в синомном понимании в итоговом решении игрока сохранить свой выбор шкатулки или перейти на выбор ведущего имеет следующее распределение вероятностей:

- «выбор игрока» имеет вероятность выигрыша

$$P(A_j|M_k) = \frac{1}{3}, \tag{2}$$

- «выбор ведущего» имеет вероятность выигрыша

$$P(A_\tau|M_k) = \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Вероятность условного события $A|M$ выполнения события A при условии, если ведущий открыл шкатулку M, по формуле Байеса равна

$$P(A|M) = \frac{P(M|A)\cdot P(A)}{P(M)}\ .$$

Теорема полной вероятности для события M приводит к равенству

$$P(A|M) = \frac{P(M|A)\cdot P(A)}{P(M|A_1)\cdot P(A_1) + P(M|A_2)\cdot P(A_2) + P(M|A_3)\cdot P(A_3)}\ .$$

В этой формуле в силу (1) имеем

$$P(A|M) = \frac{P(M|A)\cdot \frac{1}{3}}{P(M|A_1)\cdot \frac{1}{3} + P(M|A_2)\cdot \frac{1}{3} + P(M|A_3)\cdot \frac{1}{3}} = \tag{4}$$

$$= \frac{P(M|A)}{P(M|A_1) + P(M|A_2) + P(M|A_3)},$$

где в знаменателе два слагаемых, поскольку

$$P(M_j|A_j) = 0\ \ (j = 1,\ 2,\ 3), \tag{5}$$

ибо при $i = j$ ведущий не может открыть шкатулку j как пустую, когда в ней приз A_j, и потому $M_j|A_j = \emptyset$ (как это общепринято, $\emptyset$ – пустое множество).

Пусть выбор игрока есть B_j $(j = 1,\ 2,\ 3)$, тогда теоретически возможны два случая: $B_j \neq A_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ и $B_j = A_j$, что означает «шкатулка j пуста» и «в шкатулке j шарик» соответственно.

1^0. $i \neq j$ – шкатулка j пуста в распределении шкатулок B_1, M_3, V_2.

Имеем первый случай B_j пустой шкатулки в следующей конкретизации $j = 1$ – шкатулка B_1 пуста

$$B_1:\ j = 1,\ B_1 \neq A_i\ \ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Тогда в условиях пустой шкатулки B_1 шарик находится либо в шкатулке 2, либо в шкатулке 3. Для определенности допустим, что шарик в шкатулке $i = 2$, тогда ведущему без вариантов остается открыть пустую шкатулку $k = 3$. Тем самым, шкатулки распределились так $B_1, M_3,\ V_2$: выбор игрока $j = 1$, выбор ведущего $\tau = 2$, ведущий открывает пустую шкатулку $k = 3$.

В этих договоренностях вычислим вероятность выигрыша $P(A_1|M_3)$ при сохранении игроком своего выбора B_1.

Вычисление $P(A_1|M_3)$:

$$P(A_j|M_k) = P(A_1|M_3) \overset{(4)}{=} \frac{P(M_3|A_1)}{P(M_3|A_1) + P(M_3|A_2) + P(M_3|A_3)} \overset{(5)}{=} \tag{6}$$

$$\overset{(5)}{=}\frac{P\left(M_3|A_1\right)}{P\left(M_3|A_1\right)+P\left(M_3|A_2\right)}\,,$$

поскольку событие $M_3|A_3$ – в шкатулке 3 находится шар, тогда M_3 – открытие пустой шкатулки 3 невозможно, и потому действует равенство (5).

Вычислим надлежащие определению величины $P\left(M_3|A_1\right)$ и $P\left(M_3|A_2\right)$ из (6), в котором помним, что игрок выбрал $j=1$.

Нахождение $P\left(M_3|A_1\right)$: шарик в 1, игрок выбрал 1, ведущий по своему желанию может открыть любую пустую из двух взаимодополнительных событий M_2 и M_3, то есть с равной вероятностью

$$P\left(M_3|A_1\right)=\frac{1}{2}=P\left(M_2|A_1\right). \tag{7}$$

Нахождение $P\left(M_3|A_2\right)$: шарик в 2, игрок выбрал 1, ведущий обязан выбрать шкатулку M_3 с вероятностью достоверного события, ибо шкатулки 2 и 1 уже задействованы, так что

$$P\left(M_3|A_2\right)=1. \tag{8}$$

В итоге, в силу (6)-(8) имеем

$$P\left(A_1|M_3\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\,, \tag{9}$$

что доказывает (2) при $j=1,\ k=3,\ i=2$ (в предположении $B_j\neq A_i\ \ (i=1,\ 2,\ 3)$).

Вычисление $P\left(A_2|M_3\right)$. Теперь найдем вероятность (3) получения приза в условиях $B_1, M_3,\ V_2$ по выбору ведущего $t=2$, $i=2,\ k=3$, тогда в силу (2), (7) и $P\left(M_3|A_3\right)=0$ имеем:

$$P\left(A_i|M_k\right)=P\left(A_2|M_3\right)\overset{(4)}{=}\frac{P\left(M_3|A_2\right)}{P\left(M_3|A_1\right)+P\left(M_3|A_2\right)+P\left(M_3|A_3\right)}\overset{(5)}{=} \tag{10}$$

$$\overset{(5)}{=}\frac{P\left(M_3|A_2\right)}{P\left(M_3|A_1\right)+P\left(M_3|A_2\right)}\,.$$

Нахождение $P\left(M_3|A_2\right)$: шарик в 2, игрок выбрал 1, так что шкатулки 2 и 1 уже в игре, и потому ведущий без вариантов выбирает M_3, и тем приходим к (8).

Нахождение $P\left(M_3|A_1\right)$: шарик в 1, игрок выбрал 1, ведущий по своему желанию может открыть любую пустую из двух взаимодополнительных событий M_2 и M_3, то есть с равной вероятностью (7).

Стало быть, из (10), (8) и (7) следует

$$P\left(A_2|M_3\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\,. \tag{11}$$

Тем самым, (3) выполнено при $j=1,\ i=2,\ k=3$ (в предположении $B_j\neq A_i\ \ (i=1,\ 2,\ 3)$).

2^0**.** $i=j$ **– шкатулка** j **с шариком в распределении шкатулок** B_1, M_2, V_3. Имеем второй случай «Выбранная первоначально игроком шкатулка B_j с шариком $B_j=A_j$ » в конкретизации «Выбор игрока $B_1: j=1$ ». Ведущему известно, что $B_1=A_1: i=j=1$ шарик находится в первоначально выбранной игроком шкатулке 1, так что ведущий по своему желанию (случайно), может открыть M_2 и M_3 – пустые шкатулки 2 и 3, пусть теперь откроет $M_2(k=2)$, тогда $V_3\ \ (\tau=3)$ есть выбор ведущего, так что находимся в условиях $B_1,\ M_2, V_3$.

Вычисление $P\left(A_1|M_2\right)$. Вероятность $P\left(A_1|M_2\right)$ нахождения приза по выбору игрока при $j=1,\ k=2$ есть

$$P\left(A_j|M_k\right)=P\left(A_1|M_2\right)\overset{(4)}{=}\frac{P\left(M_2|A_1\right)}{P\left(M_2|A_1\right)+P\left(M_2|A_2\right)+P\left(M_2|A_3\right)}\overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=}\frac{P\left(M_2|A_1\right)}{P\left(M_2|A_1\right)+P\left(M_2|A_3\right)}\,. \tag{12}$$

Нахождение $P\left(M_2|A_3\right)$: в условиях $B_1, M_2,\ V_3,\ A_3$ шарик в 3, игрок выбрал 1, так что ведущий однозначно открывает M_2 с вероятностью достоверного события

$$P\left(M_2|A_3\right)=1. \tag{13}$$

Нахождение $P\left(M_2|A_1\right)$: в условиях $B_1, M_2,\ V_3, A_1$ шарик в 1, игрок выбрал 1, так что ведущий с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$ может открыть и M_2 , и M_3

$$P\left(M_2|A_1\right)=\frac{1}{2}=P\left(M_2|A_1\right). \tag{14}$$

Таким образом, вероятность $P\left(A_1|M_2\right)$ выигрыша по выбору игрока в случае $B_1=A_1$ по (12)-(14) равна

$$P\left(A_1|M_2\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\ ,$$

что подтверждает (2).

Вычисление $P\left(A_3|M_2\right)$. Теперь в условиях $B_1, M_2,\ V_3,\ A_3$ случае $B_1=A_1$, $i=\tau=3,\ k=2$ вероятность $P\left(A_3|M_2\right)$ выигрыша по выбору ведущего V_3 равна

$$P\left(A_i|M_k\right)=P\left(A_3|M_2\right)\overset{(4),(5)}{=}\frac{P\left(M_2|A_3\right)}{P\left(M_2|A_1\right)+P\left(M_2|A_3\right)}. \tag{15}$$

Все составляющие выражения (15) были вычислены ранее:

$$P\left(M_2|A_3\right)\overset{(13)}{=}1\ \text{ и }\ P\left(M_2|A_1\right)\overset{(14)}{=}\frac{1}{2}.$$

Из (15), (14) и (13) получаем

$$P\left(A_3|M_2\right)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3},$$

то есть в выборе Ведущего с $i=3,\ \ k=2$ приходим к (3).

В итоге, и второй случай $B_1=A_1$, подтверждает выводы (2)-(3), так что доказательство выполнено.

В заключение отметим, что выбранные конкретизации $i,\ j$ и k применены для сокращения записей, а выводы (2)-(3) во всех остальных случаях устанавливаются теми же рассуждениями и верны.

Увеличение количества шкатулок раскрывает механизм происходящего. Оставляя условия игры, увеличим количество шкатулок с трех, например, до ста. При этом в одной из шкатулок находится шарик, остальные 99 – пусты. Игрок с вероятностью $\frac{1}{100}$ нахождения шарика выбирает одну из шкатулок, поскольку, согласно классическому определению, с равной вероятностью $\frac{1}{100}$ шарик находится в каждой из 100 шкатулок, а игрок выбрал ровно одну. После этого из оставшихся 99 шкатулок, из которых 98 пусты, если выбранная игроком шкатулка пуста и все 99 пусты, если выбранная игроком шкатулка с шариком, ведущий может и открывает 98 пустых шкатулок. В итоге остаются две шкатулки – первоначально выбранная игроком и одна оставшаяся шкатулка, которую, как и прежде, назовем «выбор ведущего». Опять же, ведущий предлагает игроку выбрать одну из этих двух шкатулок.

Теперь, обозначая через $P\left(D\right)$ вероятность нахождения приза в шкатулке D , в случае ста шкатулок с одним шариком имеем

$$1=P\left(B\right)+P\left(V\cup\left(\bigcup_{k=1}^{98}M^{(k)}\right)\right)=\frac{1}{100}+P\left(V\right)+\sum_{k=1}^{98}P\left(M^{(k)}\right),$$

где $M^{(1)},\ldots\ ,\ M^{(98)}$ – это 98 пустых шкатулок, открытых ведущим, с оставлением шкатулки B – выбор игрока с вероятностью выигрыша $P\left(B\right)=\frac{1}{100}$ и шкатулки V – выбор ведущего, причем все 100 шкатулок как события с шариком или без независимы.

Но, с учетом «ведущий открывает 98 пустых шкатулок» с вероятностями $P\left(M^{(1)}\right) = 0, \ldots, P\left(M^{(98)}\right) = 0$, получаем

$$P(V) = \frac{99}{100} - \sum_{k=1}^{98} P\left(M^{(k)}\right) = \frac{99}{100} - \sum_{k=1}^{98} 0 = \frac{99}{100},$$

уже по общему свойству аддитивности вероятности.

В случае трех шкатулок это было доказано выше на основе формулы Байеса пересчета вероятностей после получения новой информации, в случае ста шкатулок теоретическое доказательство приведенных здесь эвристических рассуждений сохраняется.

В итоге, вероятность нахождения шарика в выбранной игроком шкатулке равна $\frac{1}{100}$, тогда в одной оставленной в игре ведущим шкатулке $\frac{99}{100}$, так что заключительный переход игрока на выбор ведущего однозначен.

Алгоритм численного эксперимента по проверке статистической регулярности вероятностной задачи «Парадокс Монти Холла» в вероятностном описании.

I. Алгоритм расположения событий по правилам игры «Парадокс Монти Холла» в последовательности экспериментов в зависимости от случайных целых чисел x_n, y_n и z_n, где $n = 1, 2, \cdots -$ номер эксперимента

a) $A_i^n \equiv x_n \,(mod\ 3) = 1, 2, 3$ – номер шкатулки с шариком;

b) $B_j^n \equiv y_n \,(mod\ 3) = 1, 2, 3$ – номер шкатулки «Выбор игрока»;

c) Если $i \neq j$, то $M_k^n : k \neq i,\ k \neq j,\ V_\tau^n : \tau \neq k,\ \tau \neq j$ – если в шкатулке «Выбор игрока» B_j^n нет шарика $j \neq i$, то действия ведущего однозначны: одна из шкатулок пуста $M_k^n\ (k \neq i,\ k \neq j)$, другая с шариком $V_\tau^n(\tau \neq k,\ \tau \neq j)$.

d) Если $i = j$, то полагаем $k_1 \neq j, k_2 \neq j, k_1 < k_2$, $M_k^n : k = k_1$, $V_\tau^n : \tau = k_2$,

e) Выбор k_1 и k_2 $(k_1 < k_2)$ в неоднозначном выборе ведущего случаен, что обеспечивается последовательностью случайных величин $z_n \,(mod\ 2) = 1, 2$:

Если $z_n = 1$, то $k = k_1$ и тогда $M_{k_1}^n (k = k_1)$ и $V_{k_2}^n (\tau = k_2)$,

Если $z_n = 2$, то $k = k_2$ и тогда $k = k_2, \tau = k_1$, $M_{k_2}^n$ и $V_{k_1}^n$.

II. На номере эксперимента n вместе с A_i^n «Шкатулка с шариком» и B_j^n «Выбор игрока» остается V_τ^n – «Выбор ведущего».

На этом этапе заполняется Таблица 1.

Таблица 1 – Распределение шкатулок

n-номер эксперимента	Распределение шкатулок		
	1	2	3
	A_i^n	B_j^n	V_τ^n
1			
...			
n	i	j	τ
...			
N			

III. На номере n эксперимента по предыдущим данным A_i^n, B_j^n и V_τ^n находятся результаты «1-выигрыш игрока» и «0 – проигрыш игрока».

f) Игрок в поиске приза оставляет за собой свой выбор B_j^n : на номере j по данным (i, j, τ) из Таблицы 1 производится сравнение с A_i^n с результатами 1 и 0

$B_j^n = A_j^n \Rightarrow 1$, если номер j совпадает с номером i, то выигрыш 1,

$B_j^n \neq A_j^n \Rightarrow 0$, если номер j не совпадает с номером i, то проигрыш 0.

g) Игрок меняет свой выбор на выбор ведущего V_τ^n : на номере τ по данным (i, j, τ) из таблицы 1 производится сравнение с A_i^n.

$V_\tau^n = A_t^n \Rightarrow 1$, если номер τ совпадает с номерами i, то выигрыш 1,

$V_\tau^n \neq A_\tau^n \Rightarrow 0$, если номер τ не совпадает с номерами i, то проигрыш 0.

На этом этапе продолжается Таблица 1, что оформлено в Таблице 2.

Таблица 2 – Распределение шкатулок

n-номер эксперимента	Выигрыш состоялся-1 или не состоялся -0				
	1	2	3	4	5
	A_i^n	B_j^n	V_τ^n	Игрок сохраняет свой выбор B_j^n	Игрок меняет свой выбор на выбор ведущего V_τ^n
1				0 или 1	0 или 1
2				0 или 1	0 или 1
...				...	...
n	i	j	τ	$i=j\Rightarrow 1, i\neq j\Rightarrow 0$	$\tau=j\Rightarrow 1, \tau\neq j\Rightarrow 0$
...				...	...
N					

IV. Частоты выигрыша при «Игрок сохраняет свой выбор» и при «Игрок меняет свой выбор на выбор ведущего» и построение графика (Количество экспериментов, частота выигрышей при «Игрок сохраняет свой выбор») и (Количество экспериментов, частота выигрышей при «Игрок меняет свой выбор на выбор ведущего»).

Таблица 3 – Распределение шкатулок

Количество экспериментов	Количество и частота выигрышей в проведенном количестве экспериментов				
	6	7	8	9	10
	Общее количество выигрышей при «Игрок сохраняет свой выбор» в проведенном количестве экспериментов	Общее количество выигрышей при «Игрок меняет свой выбор на выбор ведущего» в проведенном количестве экспериментов	Общее количество выигрышей в проведенном количестве экспериментов	Частота выигрыша при «Игрок сохраняет свой выбор» в проведенном количестве экспериментов	Частота выигрыша при «Игрок меняет свой выбор на выбор ведущего» в проведенном количестве экспериментов
N	$\sum_1(N)$	$\sum_2(N)$	$\sum_1(N)+\sum_2(N)$	$\frac{\sum_1(N)}{\sum_1(N)+\sum_2(N)}$	$\frac{\sum_2(N)}{\sum_1(N)+\sum_2(N)}$

На Рисунке 1 показано схематическое представление частот выигрыша при фиксированном количестве проведенных экспериментов N.

§3. **Парадокс Монти Холла на примере трех одинаковых шкатулок с одним шариком только в одной из них *с построением* вероятностного пространства**

Вероятностная модель задачи Монти Холла описывает последовательность действий, происходящих в одном опыте: размещение приза, первый выбор игрока, действие ведущего и последующее окончательное решение игрока. Каждой из трех шкатулок присваивается свой номер 1, 2, 3. Под элементарным исходом одного испытания игры Монти Холла будем понимать четверку

$$\omega = (i, j, k, \tau),$$

где $i \in \{1;2;3\}$ – номер шкатулки, в которой находится приз (событие A_i), $j \in \{1;2;;3\}$ – номер шкатулки, первоначально выбранной игроком (событие B_j), $k \in \{1;2;3\}$ – номер пустой шкатулки, открытой ведущим (событие M_k), $\tau \in \{1;2;3\}$ – окончательный выбор игрока (событие V_τ).

Рисунок 1 – График частот в игре «Парадокс Монти Холла»

Правила игры запрещают ведущему открывать шкатулку с призом или шкатулку, выбранную игроком. Поэтому для допустимых исходов справедливы ограничения

$$k \neq i, k \neq j.$$

После открытия ведущим пустой шкатулки k две оставшиеся остаются закрытыми, одна из которых ранее была выбрана игроком. Для любой пары различных номеров j и k обозначим через $t_{j,k}$ единственный элемент множества $\{1,2,3\}\backslash\{j,k\}$. Таким образом, $t_{j,k}$ однозначно определяется правилами игры. Открытую ведущим шкатулку игрок, разумеется, не выбирает. Окончательный выбор игрока может принимать только два значения: либо первоначальный выбор j, либо другая закрытая шкатулка $t_{j,k}$. Это приводит к следующему описанию пространства элементарных исходов

$$\Omega = \{(i,j,k,\tau):\ i,j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\ \tau\in\{j,t_{j,k}\}\}.$$

События, соответствующие отдельным этапам эксперимента, задаются как подмножества пространства Ω:

$$A_i = \{(i,j,k,\tau):\ j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\ \tau\in\{j,t_{j,k}\}\}\ (i=1,2,3),$$
$$B_j = \{(i,j,k,\tau):\ i,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\ \tau\in\{j,t_{j,k}\}\}\ (j=1,2,3),$$
$$M_k = \{(i,j,k,\tau):\ i,j,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\ \tau\in\{j,t_{j,k}\}\}\ (k=1,2,3),$$
$$V_\tau = \{(i,j,k,\tau):\ i,j,k\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\ \tau\in\{j,t_{j,k}\}\}\ (\tau=1,2,3).$$

Событие выигрыша определяется совпадением окончательного выбора игрока с фактическим расположением приза

$$C = \{(i,j,k,\tau):\ i,j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\ \tau=i\}.$$

Две стратегии поведения игрока описываются подмножествами Ω.

Стратегия H_1 (игрок сохраняет первоначальный выбор):

$$H_1 = \{(i,j,k,\tau):\ i,j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\tau=j\}.$$

Стратегия H_2 (игрок переходит к оставшейся закрытой шкатулке):

$$H_2 = \{(i,j,k,\tau):\ i,j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\tau=t_{j,k}\}.$$

Вероятность элементарного исхода $(i,j,k,\tau)\in\Omega$ по правилу произведения вероятностей раскладывается по стадиям эксперимента

$$P\left(\{(i,j,k,\tau)\}\right) = P\left(A_iB_jM_kV_\tau\right) = P\left(A_i\right)\,P\left(B_j \mid A_i\right)\,P\left(M_k \mid A_iB_j\right)\,P\left(V_\tau \mid A_iB_jM_k\right). \quad (16)$$

Размещение приза по трем шкатулкам равновероятно:

$$P(A_i) = \frac{1}{3}. \quad (17)$$

Поскольку первый выбор игрока одной шкатулки j из трех возможных произволен и не зависит от расположения приза в шкатулке i, то

$$P(B_jA_i) = P(B_j) = \frac{1}{3}. \quad (18)$$

Условная вероятность действия ведущего полностью задаётся правилами игры. Если первоначально выбранная игроком шкатулка пустая $j \neq i$, то ведущий имеет единственный допустимый вариант открытия пустой шкатулки с вероятностью достоверного события:

$$P(M_kA_iB_j) = 1.$$

Если в первоначально выбранной игроком шкатулке j находится приз $j = i$, то ведущий выбирает с одинаковой вероятностью между двумя пустыми шкатулками

$$P\left(M_k \mid A_iB_j\right) \equiv P(M_kA_iB_i) \equiv P(M_kA_jB_j) = \frac{1}{2}.$$

После того, как ведущий открыл шкатулку k, игроку известно, что событие M_k произошло и шкатулка k пуста. Это означает, что все элементарные исходы, в которых одновременно выполняются события A_k и M_k, имеют нулевую вероятность, поскольку правила игры запрещают ведущему открывать шкатулку с призом. Поэтому при переходе к условным вероятностям при условии M_k из рассмотрения устраняются все исходы с A_k, тогда как исходы, в которых выполняется событие A_j, остаются допустимыми и их вероятность не изменяется.

Следовательно, после учёта события M_k условная вероятность события A_j остаётся равной $1/3$, а вероятностная масса всех остальных допустимых исходов сосредоточивается на событии $A_{t_{j,k}}$. В терминах окончательного выбора игрока получаем

$$P\left(V_j|A_iB_jM_k\right) = \frac{1}{3},\;\; P(V_{t_{j,k}}|A_iB_jM_k) = \frac{2}{3}. \quad (19)$$

Итоговая формула для вероятности любого элементарного исхода согласно (17)-(19) по формуле (16) приводит к равенствам

$$P\left(\{(i,j,k,\tau)\}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot P\left(M_k \mid A_iB_j\right)\cdot P\left(V_\tau \mid A_iB_jM_k\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}, & \text{если } \tau = j \neq i, \\ \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{27}, & \text{если } j \neq i,\ \tau = t_{j,k}, \\ \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{54}, & \text{если } j = i = \tau, \\ \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{27}, & \text{если } j = i,\ \tau = t_{j,k}. \end{cases} \quad (20)$$

Эта вероятностная структура выведена из правил игры Монти Холла и далее будет использована при численном моделировании стратегий H_1 и H_2.

Определим событие CH_1 выигрыша приза при стратегии H_1, в равенствах $i = j = \tau$ оставляя i:

$$CH_1 \equiv C \cap H_1 =$$
$$\{(i,j,k,\tau):\; i,j,k,\tau \;\in \{1,2,3\},\; k \neq i,\; k \neq j,\; \tau = i\} \cap$$

$$\cap\,\{(i,j,k,\tau):\; i,j,k,\tau \;\in \{1,2,3\},\; k \neq i,\; k \neq j, \tau = j\} =$$

$$\overset{i=j=\tau}{=}\{(i,i,k,i):\ i,k\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i\},$$

что есть

$$CH_1=\{(1,1,2,1);(1,1,3,1);\ (2,2,1,2);(2,2,3,2);(3,3,1,3);(3,3,2,3)\}.$$

Поэтому согласно (20)

$$P(CH_1)=\sum_{\omega\in CH_1}P(\{\omega\})=\frac{1}{54}\cdot 6=\frac{1}{9}.$$

Теперь для вычисления условной вероятности $P(C|H_1)$ необходимо верятность события – стратегии

$$H_1=\{(i,j,k,\tau):\ i,j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\tau=j\}=$$
$$=\{(1,1,2,1),(1,1,3,1),(1,2,3,2),(1,3,2,3),(2,2,1,2),(2,2,3,2),(2,1,3,1),$$
$$(2,3,1,3),(3,3,1,3),(3,3,2,3),(3,2,1,2),(3,1,2,1)\},$$

тем самым искомая вероятность

$$P(H_1)=\sum_{\omega\in H_1}P(\{\omega\})=\frac{1}{54}\cdot 6+\frac{1}{27}\cdot 6=\frac{18}{54}=\frac{1}{3}.$$

Тогда условная вероятность равна

$$P(C|H_1)=\frac{P(CH_1)}{P(H_1)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}.$$

Теперь найдем вероятность выигрыша при стратегии H_2. Так как

$$CH_2=\{(i,j,k,i):\ i,j,k\ \in\{1,2,3\},\ i\neq j,\ k\neq i,\ k\neq j,\}=$$
$$=\{(i,j,k,\tau):\ i,j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\ \tau=i\}\cap$$
$$\cap\{(i,j,k,\tau):\ i,j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\tau=t_{j,k}\}=$$
$$\overset{i=\tau\neq j}{=}\{(i,j,k,i):\ i,j,k\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i\neq j\}=$$
$$=\{(1,2,3,1),(1,3,2,1),(2,1,3,2),(2,3,1,2),(3,1,2,3),(3,2,1,3)\}.$$

Следовательно, событие выигрыша при стратегии H_2 реализуется тогда и только тогда, когда индекс шкатулки с призом i *не совпадает* с индексом первоначального выбора игрока j. Аналогично, согласно (20)

$$P(CH_2)=\sum_{\omega\in CH_2}P(\{\omega\})=\frac{2}{27}\cdot 6=\frac{4}{9}.$$

Опять же для вычисления условной вероятности $P(C|H_2)$ вычислим вероятность события – стратегии

$$H_2=\{(i,j,k,\tau):\ i,j,k,\tau\ \in\{1,2,3\},\ k\neq i,\ k\neq j,\tau=t_{j,k}\}=$$
$$=\{(1,1,2,3),(1,1,3,2),(1,2,3,1),(1,3,2,1),(2,2,1,3),(2,2,3,1),(2,1,3,2),$$
$$(2,3,1,2),(3,3,1,2),(3,3,2,1),(3,2,1,3),(3,1,2,3)\},$$

тогда

$$P(H_2)=\sum_{\omega\in H_2}P(\{\omega\})=\frac{1}{27}\cdot 6+\frac{2}{27}\cdot 6=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}.$$

Тогда условная вероятность равна

$$P(C|H_2)=\frac{P(CH_2)}{P(H_2)}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}.$$

§4. Случайности к вычислениям статистической регулярности вероятностной задачи «Парадокс Монти Холла». Статистическая проверка Парадокса Монти Холла, в дополнение к многочисленным известным, возможна также на основе ранее не использованных

датчиков случайных чисел – это авторские линейный конгруэнтный генератор [8]-[9] и метод квази Монте-Карло [10]-[14].

1^0. Линейная конгруэнтная последовательность Лехмера в случайности Ковэю и Макферсона [8]-[9].

Линейная конгруэнтная последовательность Лехмера создана в 1948 году от уравнения прямой $y = ax + c$ в виде перестановки последовательности $1, 2, \ldots, N$ по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} \equiv ax_n + c \pmod{N} \ (n \geq 0).$$

Случайность Ковэю и Макферсона 1965 года предложения состоит в нахождении a и c в зависимости от N такими, чтобы в разложении в конечную тригонометрическую сумму Фурье фиксированного количества последовательных элементов этой последовательности координата наиболее близкого к нулю ненулевого коэффициента Фурье будет наиболее от того же нуля удалена, – отсюда и название «Спектральный критерий».

И в этом, наверное, вся ценность этой задачи – в Математике много примеров, когда опирающаяся на самое начальное фундаментальное постановка сама фундаментальна.

Есть Стэнфорд, столица Кремниевой долины, в нем Дональд Кнут.

Дональд Кнут (Лекс Фридман, научный журналист, 2025 год): *Дональд Кнут один из величайших и самых влиятельных учёных в области Компьютерных наук и Математики за всю историю. Он лауреат премии Тюринга за 1974 год, которую называют Нобелевской премией в мире вычислительной техники. Он автор многотомного труда своего Магпит opus "Искусство программирования".*

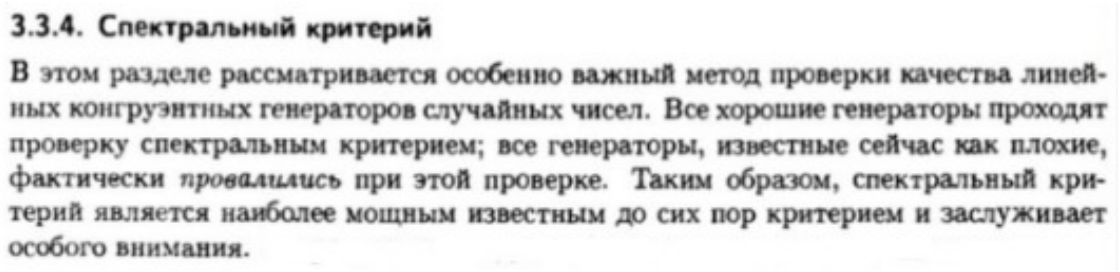
Он внёс несколько ключевых вкладов в строгий анализ вычислительной сложности алгоритмов, включая популяризацию асимптотической сложности, которую мы все с любовью знаем как "Big-O notation". Он также создал систему вёрстки TeX, которую используют большинство специалистов в области компьютерных наук, физиков, математиков, да и в целом учёных и инженеров, чтобы писать научные статьи и придавать им прекрасный вид.

Роль монографии Д.Э. Кнута «Искусство программирования» [15] в мире Компьютерных наук возводится на уровень всего Человечества:

Журнал American Scientist включил «Искусство программирования» в список 12 лучших физико-математических монографий XX-го столетия вместе с работами Дирака по квантовой механике, Эйнштейна по теории относительности и немногочисленными другими.

Обложка третьего издания первого тома книги содержит цитату Билла Гейтса: *«Если вы считаете себя действительно хорошим программистом..., прочитайте „Искусство программирования“ (Кнута)... Если вы сможете прочесть весь этот труд, то вам определённо следует отправить мне резюме»*.

Обратимся к самой монографии:



3.3.4. Спектральный критерий

В этом разделе рассматривается особенно важный метод проверки качества линейных конгруэнтных генераторов случайных чисел. Все хорошие генераторы проходят проверку спектральным критерием; все генераторы, известные сейчас как плохие, фактически *проваливались* при этой проверке. Таким образом, спектральный критерий является наиболее мощным известным до сих пор критерием и заслуживает особого внимания.

В каждом из трех изданий своей монографии Дональд Кнут описывал состояние этой темы на момент ее подготовки, в последнем известном изложение вместе с сопутствующими сведениями составляет порядка 50 страниц текста.

На четверти страницах текста выписано то, что в течение 50 лет не нашло полного и окончательного решения в тысячах и десятках тысяч публикаций со всеми высшими наукометрическими показателями, и в этом мощь, красота и таинство Математики –

на 10 строк постановки задачи 10 строк полного решения с последующей практической рекомендацией равно в 1 строку.

Генератор случайных чисел Лехмера или же *Линейная конгруэнтная последовательность* максимального периода 1948 года создания есть, по определению, рекуррентная последовательность $\langle x_n \rangle$ целых неотрицательных чисел $x_{n+1} = (ax_n + c) \, mod \; N$, $n \geq 0$, где целые числа $a > 1$, $N > a$, $c > 0$ таковы, что c и N взаимно просты, $a-1$ кратно каждому простому делителю N и кратно 4, если N кратно 4. Также для s-мерной $(s \geq 2)$ последовательности $y_1 = (x_1, ..., x_s)$, $y_2 = (x_2, ..., x_{s+1}), \ldots, y_{N-s+1} = (x_{N-s+1}, ..., x_N)$ положим

$$\nu_s(a, N) = inf \left\{ \sqrt{m_1^2 + \cdots + m_s^2} : m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s, m \neq 0, \; \sum_{j=1}^{s} m_j a^{j-1} \equiv 0 (mod \; N) \right\}.$$

И тогда задача заключается при заданных $s \geq 2$, $\tau \geq 2, \lambda \geq 1$ в выборе пар N и a такими, что $(a-1)^\tau \equiv 0 \, (mod \; N)$, $(a-1)^{\tau-1} \not\equiv 0 \, (mod \; N)$, $\lambda N = (a-1)^\tau$ и чтобы величина $\nu_s(a, N)$ была возможно большой при известной оценке сверху $\nu_s(a, N) \leq \gamma(s) N^{\frac{1}{s}}$.

Полное решение проблемы «SC-спектральный критерий» в «*магических*» $\equiv$ «*волшебных*» числах a и N заключается в следующем

1^0. SC–2: $\nu_2^2\big(a, N; (a-1)^2 = N\big) = (a-1)^2\Big(1 - 2\frac{a-2}{(a-1)^2}\Big) = N\Big(1 - 2\frac{\sqrt{N}-1}{N}\Big)$.

2^0. SC $(2 \leq s = \tau)$:

$N^{\frac{2}{s}} \left(1 - (b_s - 1)N^{-\frac{1}{s}}\right)^2 = (a - b_s)^2 \leq \nu_s^2(a, N; (a-1)^s = N) \leq a^2 + 1 = N^{\frac{2}{s}} \left(1 + 2N^{-\frac{1}{s}} + 2N^{-\frac{2}{s}}\right)$.

3^0. SC $(2 \leq s < \tau, \; \lambda \geq 1)$:

$(N\lambda)^{\frac{2}{\tau}} \left(1 - (b_s - 1)(N\lambda)^{-\frac{1}{\tau}}\right)^2 = (a - b_\tau)^2 \leq \nu_s^2(a, N; (a-1)^\tau = N, \; 1 \leq \lambda \leq (a-1)^{\tau-s}) \leq a^2 + 1 =$
$(N\lambda)^{\frac{2}{\tau}} \left(1 + 2(N\lambda)^{-\frac{1}{\tau}} + 2(N\lambda)^{-\frac{2}{\tau}}\right)$.

4^0. SC $(s > \tau \geq 2, \; \lambda \geq 1)$:

$\nu_s^2(a, N; (a-1)^\tau = N\lambda, \; \lambda \geq 1) \leq \sum_{k=0}^{\tau} \left(\binom{\tau}{k}\right)^2$.

где $(-b_m)$ есть наибольший по модулю отрицательный биномиальный коэффициент в разложении $(a-1)^m$ по степеням a : $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_4 = 4$, $b_5 = 10$, $b_6 = 20$, $b_7 = 35$, $b_8 = 56$, $b_9 = 126$, $b_{10} = 252$, $b_{11} = 462, b_{12} = 792$, $b_{13} = 1716, b_{14} = 3432, b_{15} = 6435, ...$ и т.д.

Отметим, что в пунктах 1^0-3^0 установлена, можно сказать, «усиленная» асимтотика порядка ранее известной оценки сверху, стало быть, неулучшаемая, тогда как пункт 4^0 завершает полную картину как случай неприменимости.

Практический выбор a и N : $a = 4^{r_0} p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t} + 1$, $N = 4^{u_0} p_1^{u_1} \cdots p_t^{u_t}$, $2 \leq s \leq \tau = max \left\{ \left\lceil \frac{u_1}{r_1} \right\rceil ; \ldots ; \left\lceil \frac{u_t}{r_t} \right\rceil \right\}$.

По-видимому, вряд ли из всех возможных Больших данных x_0, a, c, N *экспериментальнo* можно выделить «*магические*» $\equiv$ «*волшебные*» числа a и N, что есть еще один возможный ответ на вопрос “Может ли ML-AI полностью заменить Науку?”.

2^0. Метод квази Монте-Карло на основе алгебраической теории чисел. Являющаяся искомой случайная многомерная последовательность

$$x_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(s)}\right) \; (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{21}$$

будет извлечена из метода Монте-Карло по правилу

$$x_k^{(1)} \equiv a_1 k \, (mod \; N), \ldots, x_k^{(s)} \equiv a_s k \, (mod \; N), \tag{22}$$

в котором для безгранично возрастающих целых положительных N по вполне определенному алгоритму вычисляются целые положительные числа $a_1, ..., a_s$ такие, что соответствующая

этим числам s-мерная последовательность ($\{...\}$ - дробная часть, $a=(a_1,...,a_s)$)

$$\xi_k(a)=\left(\left\{\frac{a_1}{N}k\right\},...,\left\{\frac{a_s}{N}k\right\}\right)\equiv\left(\left\{a\frac{k}{N}\right\}\right)\ (k=1,...,N) \tag{23}$$

является равномерно распределенной.

Пусть дано целое положительное число s. Конечное множество $\{\eta_k\}_{k=1}^N$ точек s-мерного единичного куба $[0,1]^s$ называют сеткой, а η_k – ее узлами.

Дискрепансом (впервые как самостоятельное понятие «дисперсия интенсивности» изучалось в [16], введение самого термина относят к ван дер Корпуту [17]) сетки $\{\eta_k\}_{k=1}^N$ из $[0,1]^s$ называют число

$$D_s(\eta_1,\eta_2...,\eta_N)=sup\left\{\left|\frac{G_J}{N}-\frac{|J|}{1}\right|=\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\chi_J(\eta_k)-\prod_{j=1}^{s}(b_j-a_j)\right|:\ J=\prod_{j=1}^{s}[a_j,b_j]\subset[0,1]^s\right\},$$

где J – параллелепипед в $[0,1]^s$ со сторонами, параллельными осям, $|J|$ – его s-мерный объем, G_J – количество членов $\eta_1,...,\eta_N$, содержащихся в $J,\chi_B(x)$ – характеристическая функция множества B.

Дискрепанс есть количественная характеристика отклонения доли $\frac{G_J}{N}$ сетки $\eta_1,...,\eta_N$ в J от идеального распределения $\frac{|J|}{1}$, выраженного отношением меры J к мере всего единичного куба, и, тем самым, позволяет количественно отличить «хорошее» распределение от «плохого».

Последовательность сеток $\left\{\eta_k^{(N_t)}\right\}_{k=1}^{N_t}$ из $[0,1]^s$, где $\{N_t\}_{t=1}^{\infty}$– достаточно плотная возрастающая (не быстрее степенной скорости) последовательность целых положительных чисел, называют равномерно распределенной на $[0,1]^s$, если для некоторых положительных величин $c(s)$ и $\beta(s)$ и всех $t\geq 1$ имеет место неравенство

$$D_s\left(\eta_1^{(N_t)},\eta_2^{(N_t)},...,\eta_{N_t}^{(N_t)}\right)\leq c(s)\frac{ln^{\beta(s)}N_t}{N_t}. \tag{24}$$

Обратимся к построению сеток (22)-(24).

В 1959 году Н.М.Коробов (см.[18]) доказал, что для любого целого положительного N существуют взаимно простые с N целые числа $a_1,...,a_s$ такие, что соответствующая этим числам сетка (23) является равномерно распределенной. В дальнейшем сетки вида (23) из других соображений были переоткрыты в 1962 году Э. Хлавкой [19], применение теории дивизоров также приводит к таким же сеткам ([10-14]).

Теоретический и практический интерес к построению сеток вида (23) объясняется, в частности, следующим. В общем случае, для записи сетки объема N требуется sN действительных чисел. Достоинством сеток вида (23) является тот факт, что они полностью определяется, независимо от объема N, заданием $s+1$ целых чисел $(N,a_1(N),...,a_s(N))\in Z^{s+1}$ (и легко выписывается за $\asymp N$ элементарных арифметических операций), причем каждая координата каждого узла сетки есть обыкновенная дробь с малым, в данных условиях, знаменателем N.

Так, например, при размерности $s=10$ и количестве узлов сетки $N=10^6$ объем записи и хранения сетки в памяти ЭВМ составляет $sN=10^7$ чисел, в то время как в случае сетки вида (23) запись и хранение обеспечивается $s+1=11$ целыми числами (причем, независимо от числа узлов N. Тем самым, в случае равномерно распределенных сеток (23), по указанию С.М.Никольского нами названного «Сетка Коробова», речь идет о *сверхсжатии* информации объема sN до $s+1$ и, по тем же причинам, в *сверхэкономном* хранении в памяти ЭВМ.

Пусть $l\geq 3$ – простое число, $\theta=\cos\frac{2\pi}{l}+i\sin\frac{2\pi}{l}=e^{i\frac{2\pi}{l}}$ и пусть

$$N(m)=\prod_{k=1}^{s}\left(m_1+m_2\theta^{\ k}+...+m_s\theta^{\ (s-1)k}\right),$$

где

$$s=l-1, m=(m_1,...,m_s)\in Z^s.$$

Алгоритм построения равномерно распределенных сеток:

Теорема А (Е. Баилов, Н. Темиргалиев [14]). *Пусть даны* $l = s+1 \geq 3$ – *простое число и* $r > 1$. *Пусть дано* $R > 1$ *и*

$$E = \Gamma_R \equiv \{m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s : \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \leq R\}, \overline{m}_j = \max\{1, |m_j|\} \ (j = 1, \dots, s) .$$

Тогда существуют простое p,

$$p \equiv 1(modl), \ p \leq c(s) R ln^s R \equiv T$$

и целое положительное число a, $(a, p) = 1$, $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1(modp)$, *для отыскания которых согласно алгоритму, состоящему в последовательном выполнении следующих действий*

Шаг 1. *Находится* $K(E) = \prod_{m \in E} N(m)$;

Шаг 2. *Методом решета Эратосфена находятся все простые числа* p *из промежутка* $(1, 18slnK(E))$;

Шаг 3. *Непосредственной проверкой каждого простого* $p, p \equiv 1(modl), \ p \in (1, 18s \ \ln K(E))$ *находится такое p, которое не делит K(E);*

Шаг 4. *Находится целое* a *такое, что* $a^{\frac{p-1}{l}} \not\equiv 1(modp)$
достаточно выполнить $T \ln\ln T$ *элементарных арифметических операций, такие, что для сетки*

$$\xi_k(a) = \left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{k}{p} a^{\frac{p-1}{l}}\right\}, ..., \left\{\frac{k}{p} a^{\frac{p-1}{l}(s-1)}\right\}\right) (k = 1, ..., p)$$

имеет место соотношение

$$D_s(\xi_1(a), ..., \xi_p(a)) << \frac{ln^{2s} T}{T}.$$

Однако реализация этого алгоритма является достаточно трудоемким процессом. Поэтому обратимся к вычислительным экспериментам для нахождения сетки $\{\xi_k(a)\}_{k=1}^p$.

Положим

$$b_r(x) = \sum_{m=(m_1,...,m_s) \in Z^s} (\overline{m}_1 ... \overline{m}_s)^{-r} e^{2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

где $r > 1$ и $\overline{m}_j = \max\{1, \ |m_j|\}$, $j = 1, \dots, s$.

Справедлива

Теорема В (М.Б. Сихов, Н. Темиргалиев [20]). *При данных* $r > 1$ *и* $s = 1, 2, \ \dots$, *существуют положительные величины* $c_1, c_2, \ c_3, \beta_1$ *и* β_2 *такие, что для всякого целого положительного* p *и для всякого целочисленного вектора* $(a_1, \dots, a_s)$ *неравенство*

$$c_3(s) \frac{(\ln p)^{\frac{s-1}{2}}}{p} \leq D_s\left[\left\{\left(\frac{a_1}{p}k, \dots, \frac{a_s}{p}k\right)\right\}_{k=1}^p\right] \leq c_1(s) \frac{(\ln p)^{\beta_1(s)}}{p}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\left|\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p b_r\left(\frac{a_1}{p}k, \dots, \frac{a_s}{p}k\right) - 1\right| \leq c_2(s) \frac{(\ln p)^{\beta_2(s)}}{p}.$$

Отсюда следует, что в тех случаях, когда функция $b_r(x)$ может быть представлена в виде элементарной функции, а к таковым относятся случаи целых положительных r , установление равномерной распределенности сетки

$$\left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{a^{\frac{p-1}{l}}}{p}k\right\}, ..., \left\{\frac{a^{\frac{p-1}{l}(s-1)}}{p}k\right\}\right) \ (k = 1, 2, \dots, p) \tag{25}$$

сводится к вычислению величины

$$\Delta(s, r, a, p) \equiv \left|1 - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p b_r\left(\frac{k}{p}, \left\{\frac{a^{\frac{p-1}{l}}}{p}k\right\}, ..., \left\{\frac{a^{\frac{p-1}{l}(s-1)}}{p}k\right\}\right)\right|,$$

где функция $b_r(x)$ при целых положительных r есть алгебраический многочлен Бернулли.

Выпишем функции $b_r(x)$
при $r=4$:

$$\sum_{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s}(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-4}e^{2\pi i(m,x)}=\prod_{j=1}^{s}\left[1+\frac{\pi^4}{45}-\frac{2\pi^4}{3}{x_j}^2(1-x_j)^2\right],$$

при $r=6$:

$$\sum_{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s}(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-6}e^{2\pi i(m,x)}=\prod_{j=1}^{s}\left[1+\frac{(2\pi)^6}{6!}\left(\frac{1}{42}-\frac{1}{2}x_j^2+\frac{5}{2}x_j^4-3x_j^5+x_j^6\right)\right],$$

при $r=8$:

$$\sum_{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s}(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-8}e^{2\pi i(m,x)}=\prod_{j=1}^{s}1+\frac{(2\pi)^8}{8!}\left(\frac{1}{30}-\frac{2}{3}x_j^2+\frac{7}{3}x_j^4-\frac{14}{3}x_j^6+4x_j^7-x_j^8\right),$$

при $r=10$:

$$\sum_{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s}(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-10}e^{2\pi i(m,x)}=\prod_{j=1}^{s}\left[1+\frac{(2\pi)^{10}}{10!}\left(\frac{5}{66}-\frac{3}{2}x_j^2+5x_j^4-7x_j^6+\frac{15}{2}x_j^8-x_j^9+x_j^{10}\right)\right].$$

Результаты проведенных нами вычислительных экспериментов оформлены в виде таблицы, где p – число узлов, a – целое число, такое что $(a,p)=1$, $a^{\frac{p-1}{l}}\not\equiv 1\,(modp\,)$.

Вычисления организованы в следующем порядке.

Даны простое $l=s+1\geq 3$ и целое $r\geq 2$, выписываются в порядке возрастания простые числа $p, p\equiv 1(mod\ l)$. Из них последовательно выбираются p, для каждого из которых находится целое положительное число $a=a(p,s)$ такое, что $a^{\frac{p-1}{l}}\not\equiv 1(mod\ p)$. По полученному числу $a=a(p,s)$, находятся целые положительные числа $a_2=a_2(a,p,s),\ldots,a_s=a_s(a,p,s)$,

$$a_t\equiv a^{\frac{p-1}{l}(t-1)}\,(mod\ p),\quad 1\leq a_t<p\,(t=2,\ldots s),\ a_1\equiv 1,$$

затем вычисляются величины

$$\Delta\equiv\Delta(s,r,p,a)=\beta_p 10^{-\tau}, 1\leq\beta_p<10.$$

Величины $\Delta(s,r,p,a)$ разбиваются на группы с одинаковым показателем $\tau\,(\tau=1,2,\ldots)$, из которых в искомую таблицу выносятся значения коэффициентов $a_2,\ldots,a_s$ с наименьшим числом узлов p и с наименьшей погрешностью Δ.

В таблице нумерация коэффициентов производится последовательно по строкам. При этом параметр a заносится во второй столбец (первый столбец отведен числу узлов p), коэффициент a_2 – в третий столбец и т.д. до случая s переменных. Случаи $s=4$, $s=10$, $s=12$ даны в Таблицах 4-6 (см. [11, 13]).

Таблица 4 – Значения $a_2,\ldots,a_s$ и Δ при $s=6$

p	a	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\Delta(s,r,p,a)$	
							$r=4$	$r=6$
31	2	2	4	8	8.8E-01	2E-01	8.8E-01	2E-01
379	2	125	86	138	195	119	7.6E-01	1.4E-01
421	2	359	18	176	324	25	5.9E-01	1.1E-01
449	2	359	18	176	324	25	5.7E-01	1.1E-01
463	2	118	34	308	230	286	5.4E-01	1.1E-01
1009	2	105	935	302	431	859	9.3E-02	5.6E-03
...	...	...	...	...	...	...	...	...
75209	2	66662	23270	39115	63309	26732	9.8E-07	1.2E-10
94207	2	13212	85580	10546	1599	23620	8.5E-07	1.6E-10
109537	2	99712	28528	17583	96411	37901	3.3E-07	2.5E-11

215503	2	57262	58499	206609	160864	149639	7.2E-08	2.7E-12
243671	2	135142	218714	155088	28773	182619	5.2E-08	1.9E-12
476981	2	8824	115073	388584	325788	465806	8.1E-09	1.3E-13
501019	2	130214	200798	32219	332779	353434	8.7E-09	1E-13
965189	2	863106	758445	225078	651860	166036	9.1E-10	3.9E-15

Таблица 5 – Значения $a_2, ..., a_s$ и Δ при $s = 10$

p	a	$a_2, ..., a_{10}$	$\Delta(s, r, p, a)$		
			$r = 4$	$r = 6$	$r = 8$
23231	2	690, 9680, 9394, 21943, 5341, 572, 21544, 9883, 9538	7, 1E-01	3.9E-02	З.ЗЕ-03
25873	2	16747, 24562, 10860, 11103, 18563, 10466, 10400, 17637, 671	8.5E-01	5.7E-02	5E-03
28183	2	18418, 12136, 1475, 26321, 4395, 5534, 15484, 535, 17763	6.5E-01	4.2E-02	3.7E-03
29569	2	4699, 22127, 10169, 627, 18942, 5768, 18628, 8732, 19465	6.1E-01	3.7E-02	ЗЕ-03
117833	2	14328, 26498, 5418, 94990, 45570, 14307, 79109, 38125, 99045	9.3E-02	3.6E-03	2E-04
298651	2	230692, 86617, 6507, 92918, 62382, 231258,147802, 52965, 192068	9.8E-03	9E-05	1.1E-06
311323	2	275448, 6343, 21988, 72982, 308503, 298848, 169474, 258440, 286586	9E-03	7.1E-05	7.5E-07
347887	2	103500, 113496, 83558, 130067, 99148, 195161, 148506, 27566, 59713	9.8E-03	1.2E-04	2.1E-06

Таблица 6 – Значения $a_2, ..., a_s$ и Δ при $s = 12$

p	a	$a_2, ..., a_{12}$	$\Delta(s, r, p, a)$		
			$r = 4$	$r = 6$	$r = 8$
232961	2	171101, 42214, 134770, 103107, 40199, 148535, 72662, 111175, 189142, 142105, 168035	5E-01	2.2E-02	1.6E-03
246247	2	77327, 95275, 112179, 168711, 241931, 167600, 25590, 203285, 241950, 159331, 112086	7.5E-01	3.6E-02	2.6E-03
251057	2	136464, 19264, 24649, 39450, 89549, 15261, 59289, 157, 85003, 11764, 104038	8.3E-01	4.5E-02	3.4E-03
251707	2	44381, 65886, 6347, 26074, 93115, 11289, 120179, 244576, 166495, 103903, 46803	9.3E-01	5.1E-02	3.5E-03
255763	2	211008, 129972, 176812, 86160, 47951, 60328, 110351, 24525, 118421, 244794, 108398	8.6E-01	5.3E-02	4.6E-03
258337	2	257215, 225536, 118868, 190333, 91073, 117546, 123595, 53379, 42946, 123607, 39915	8E-01	4.7E-02	4.2E-03

§5. Организация численного эксперимента по проверке статистической регулярности вероятностной задачи «Парадокс Монти Холла». В данном параграфе производятся вычислительные эксперименты для подтверждения или опровержения двух теоретических вероятностей стратегий игрока. Излагаются принципы симмуляции экспериментов на основе авторских линейного конгруэнтного генератора (LCG) и метода квази Монте - Карло (QMC).

1^0. Алгоритм построения выборки элементарных исходов

Численное моделирование основывается на построении выборки

$$\{\omega^{(n)} = (i(n), j(n), k(n), v(n))\}_{n=1}^{N} \subset \Omega,$$

в которой каждый элемент $\omega^{(n)}$ представляет один допустимый исход эксперимента Монти Холла. Генерация выборки осуществляется двумя независимыми методами: методом линейного конгруэнтного генератора и методом квази Монте-Карло, использующим одномерные координатные последовательности, полученные из сеток Коробова. В обоих случаях исходы формируются синхронно по четырём координатам, и при каждой реализации обеспечивается выполнение условий допустимости $k(n) \neq i(n)$ и $k(n) \neq j(n)$, а также требования $\nu(n) \in \{j(n), t_{j(n),k(n)}\}$.

Конкретизация «магических-волшебных» чисел линейного конгруэнтного генератора. Применяется рекуррентная формула случайных целых неотрицательных чисел Лехмера 1948 года максимального периода

$$x_{n+1} \equiv ax_n + c \; mod \; N,$$

с «магическими-волшебными» числами

$$a = 3, c = 12345, N = 2^{31} = 2147483648, x_0 = 0, (a-1)^{\tau} \equiv 0 \; mod \; N, (a-1)^{(\tau-1)} \not\equiv 0 \; mod \; N,$$

попадающих при $s = \tau = 31$ под Спектральный критерий Ковэю – Макферсона 1965 года

$$SC(2 \leq s = \tau) : N^{\frac{2}{s}}(1 - (b_{s-1})N^{(-1/s)})^2 = (a - b_s)^2 \leq \nu_s^2(a, N; (a-1)^s = N) \leq$$

$$\leq a^2 + 1 = N^{\frac{2}{s}}(1 + 2N^{-\frac{1}{s}} + 2N^{-\frac{2}{s}}).$$

Из этой последовательности последовательно формируются четыре координаты элементарного исхода

$$i(n) = (X_n mod \; 3 + 1), j(n) = (X_{n+1} mod \; 3) + 1.$$

После определения $i(n)$ и $j(n)$ выбирается номер шкатулки, которую должен открыть ведущий. Если $i(n) \neq j(n)$, то ведущий обязан открыть единственную допустимую шкатулку, и тогда $k(n)$ определяется однозначно. Если же $i(n) = j(n)$, то существует две допустимые шкатулки, и выбор между ними осуществляется с помощью следующего члена генератора $k(n) = u(X_{n+2} \mod 2)$, где функция $u(\cdot)$ отображает остаток $\{0, 1\}$ в два доступных номера шкатулок.

После выбора $k(n)$ окончательное решение игрока генерируется независимым выбором между двумя допустимыми значениями — его первоначальной шкатулкой $j(n)$ и единственной другой закрытой шкатулкой $t_{j(n),k(n)}$

$$\nu(n) = u(X_{n+3} \; mod \; 2),$$

где $u(\cdot)$ выбирает один из двух элементов множества $\{j(n), t_{j(n),k(n)}\}$.

Таким образом, метод LCG порождает допустимую последовательность исходов $\omega^{(n)} \in \Omega$, полностью согласованную с вероятностной структурой модели.

Выбор QMC-последовательности. В QMC по Таблице 4 производится следующий отбор параметров

p	a	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\Delta(s, r, p, a)$	
							$r = 4$	$r = 6$
109537	2	99712	28528	17583	96411	37901	3.3E-07	2.5E-11

Для фиксированного простого числа $p = 109537$ и набора коэффициентов $a_3 = 28528, a_4 = 17583, a_5 = 96411, a_6 = 37901$ (из Таблицы 4)определяется четыре последовательности

$$Y_n^{(\gamma)} \equiv (a_{\gamma+2}n) \mod p, (\gamma = 1, 2, 3, 4; n = 0, 1, 2, \dots).$$

Каждая из этих последовательностей служит источником дискретных равномерных значений на множестве $\{0,1,\ldots,p-1\}$. Элементарный исход формируется аналогично LCG-методу, но с заменой X_n на четыре независимых координатных последовательности решётки

$$i(n) = (Y_n^{(1)}\ mod\ 3) + 1, j(n) = (Y_n^{(2)} mod\ 3) + 1.$$

Если $i(n) \neq j(n)$, то выбор ведущего однозначен, и $k(n)$ определяется правилом игры. Если $i(n) = j(n)$, то ведущему необходимо выбрать одну из двух допустимых шкатулок, и этот выбор осуществляется по трёхмерной координате

$$k(n) = u(Y_n^{(3)} \mod 2).$$

Окончательное решение игрока формируется по четвёртой координате

$$\nu(n) = u(Y_n^{(4)} \mod 2),$$

где функция $u(\cdot)$ отображает остаток $\{0,1\}$ в два элемента множества $\{j(n), t_{j(n),k(n)}\}$.

Так же как и в LCG-методе, каждая четверка $\omega^{(n)}$ автоматически принадлежит множеству допустимых исходов Ω.

В обоих методах из одной исходной числовой последовательности строятся координаты $(i(n), j(n), k(n), v(n))$, причём:

– координаты $i(n)$ и $j(n)$ определяются по остатку по модулю 3;

– выбор ведущего $k(n)$ вычисляется строго в соответствии с правилами игры и использует остаток по модулю 2 лишь тогда, когда имеется два допустимых варианта;

– окончательный выбор игрока $v(n)$ всегда генерируется как равновероятный выбор между двумя значениями $\{j(n), t_{j(n),k(n)}\}$.

В результате формируется выборка из N допустимых элементарных исходов

$$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(N)} \in \Omega,$$

полностью согласованная с вероятностной структурой модели, построенной в §1. Эта выборка далее используется для вычисления статистических частот событий $C \cap H_1$ и $C \cap H_2$, а также приближенных значений условных вероятностей выигрыша $P(CH_1)$ и $P(CH_2)$.

Формирование экспериментальных данных. На основе алгоритма, описанного выше, для каждого номера опыта n формируются исходные величины

$$A_i^n = i(n), B_j^n = j(n), V_t^n = t(n)$$

где $i(n)$ – номер шкатулки с призом, $j(n)$ – первоначальный выбор игрока, а $t\,(n) = t_{j(n),k(n)}$ – оставшаяся закрытой шкатулка, определяемая по тройке $(i(n), j(n), k(n))$.

Эти три значения заносятся в строку с номером n Таблицы 7. Таблица 7 содержит исходные данные каждого опыта и служит основанием для вычисления выигрышей по двум стратегиям в Таблице 8.

На номере n эксперимента по данным A_i^n, B_j^n и V_τ^n определяются результаты «1 — выигрыш» и «0 — проигрыш» для двух стратегий поведения игрока.

Стратегия $\mathbf{H_1}$ "игрок сохраняет первоначальный выбор". Окончательный выбор равен $j(n)$. Сравнение производится с $A_i^n = i(n)$:

– если $j(n) = i(n)$, в таблицу заносится 1;

– если $j(n) \neq i(n)$, заносится 0.

Стратегия $\mathbf{H_2}$ "игрок меняет первоначальный выбор на оставивший ведущим шкатулке". Окончательный выбор равен $V_\tau^n = \tau(n)$:

– если $\tau(n) = i(n)$, заносится 1;

– если $\tau(n) \neq i(n)$, заносится 0.

Эти две величины записываются в соответствующие графы Таблицы 8.

Таблица 7 – Исходные данные эксперимента

n-номер эксперимента	Распределение шкатулок			
	1	2	3	4
	A_i^n	B_j^n	M_k^n	V_τ^n
1	2	1	3	1
2	1	1	2	3
3	1	1	3	1
4	1	3	2	3
5	3	3	1	2
...	...	...	...	...
99998	3	3	2	1
99999	3	1	2	1
100000	1	2	3	2

Таблица 8 – Результаты двух стратегий

n -номер эксперимента	1 A_i^n	2 B_j^n	3 V_τ^n	4 Выигрыш /проигрыш если игрок сохраняет свой выбор B_j^n	5 Выигрыш /проигрыш если игрок меняет свой выбор на V_t^n	6 Выигрыш состоялся-1 или не состоялся-0
1	2	1	1	0	1	0
2	1	1	3	1	0	0
3	1	1	1	1	0	1
4	1	3	3	0	1	0
5	3	3	2	1	0	0
...	...	...	...	...	...	...
99995	2	1	1	0	1	0
99996	1	3	1	0	1	1
99997	3	3	1	1	0	0
99998	3	1	1	0	1	0
99999	1	2	2	0	1	0

После заполнения Таблицы 8 вычисляются накопительные суммы выигрышей $\Sigma_0(n)$ и выигрышей при двух стратегий

$$\Sigma_0(n)=\sum_{m=1}^{n} I_C\left(\omega^{(m)}\right), \Sigma_1(n)=\sum_{m=1}^{n} I_{H_1\cap C}\left(\omega^{(m)}\right), \Sigma_2(n)=\sum_{m=1}^{n} I_{H_2\cap C}\left(\omega^{(m)}\right),$$

и общая сумма

$$\Sigma(n)=\Sigma_1(n)+\Sigma_2(n).$$

Далее вычисляются накопительные относительные частоты

$$f_0(n)=\frac{\Sigma_0(n)}{\Sigma(n)}, f_1(n)=\frac{\Sigma_1(n)}{\Sigma(n)}, f_2(n)=\frac{\Sigma_2(n)}{\Sigma(n)},$$

которые приведены в Таблице 9.

Таблица 9 – Накопительные суммы и относительные частоты

	7	8	9	10	11

Количество экспериментов

	Общее количество выигрышей при «Игрок сохраняет свой выбор» в проведенном количестве экспериментов	Общее количество выигрышей при «Игрок меняет свой выбор на выбор ведущего» в проведенном количестве экспериментов	Общее количество выигрышей в проведенном количестве экспериментов	Частота выигрыша при «Игрок сохраняет свой выбор» в проведенном количестве экспериментов	Частота выигрыша при «Игрок меняет свой выбор на выбор ведущего» в проведенном количестве экспериментов
n	$\sum_1(n)$	$\sum_2(n)$	$\sum_1(n)+\sum_2(n)$	$\frac{\sum_1(n)}{\sum_1(n)+\sum_2(n)}$	$\frac{\sum_2(n)}{\sum_1(n)+\sum_2(n)}$
1	0	1	1	0	1
2	1	1	2	0, 5	0, 5
3	2	1	3	0, 666667	0, 333333
4	2	2	4	0, 5	0, 5
5	3	2	5	0, 6	0, 4
...	...	...	...	...	...
99996	33301	66695	99996	0, 333023	0, 666977
99997	33301	66696	99997	0, 33302	0, 66698
99998	33302	66696	99998	0, 333027	0, 666973
99999	33302	66697	99999	0, 333023	0, 666977
100000	33302	66698	100000	0, 33302	0, 66698

В нижеследующих Рисунках 2-5 приведены относительные частоты выигрышей при двух стратегиях в зависимости от количества проведенных опытов N.

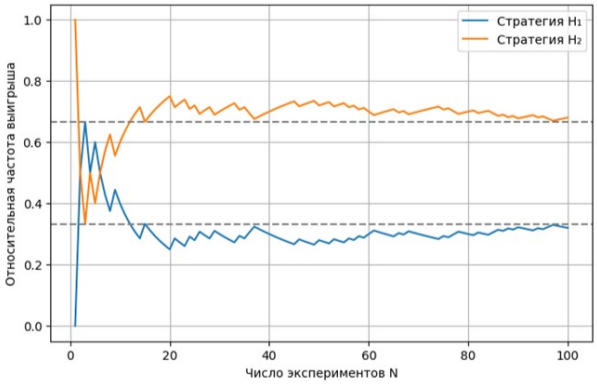


Рисунок 2 – Относительная частота выигрыша, реализованная по авторскому линейному конгруэнтному генератору – LCG при стратегиях H_1 и H_2 .

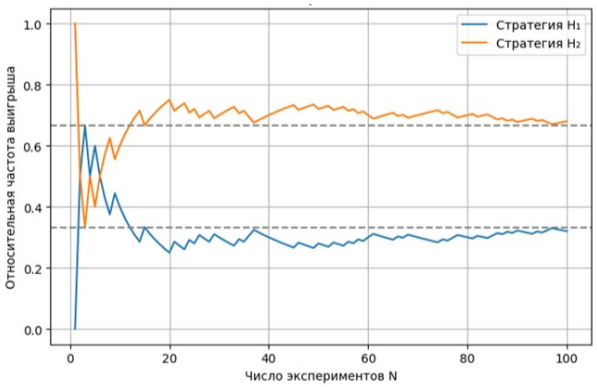


Рисунок 3 – Относительная частота выигрыша, реализованная по методу квази Монте - Карло – QMC при стратегиях H_1 и H_2 .

Вычислительные эксперименты показывают, что относительные частоты по двум стратегиям с ростом увеличения количество испытаний стабилизируются в окрестности условных вероятностей выигрыша.

1. В обоих экспериментах наблюдается сходимость частот к теоретическим вероятностям $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

2. Алгебраический генератор демонстрирует более равномерное покрытие интервала и меньшие флуктуации.

3. Оба метода подтверждают классический результат задачи Монти Холла, при этом Alg даёт более устойчивое приближение.

Заключительные замечания. Канторовская теория множеств показывает, что трансцендентных чисел мощности континуума неограничено больше, чем счетного количества алгебраических (напомним, что все действительные числа делятся на два класса – алгебраические числа, которые являются корнями алгебраического многочлена с целыми коэффициентами, а остальные – трансцендентные), при всем этом к какому из этих классов принадлежит данное действительное число, например, число e^{π^2} или π^{e^2}, относится к

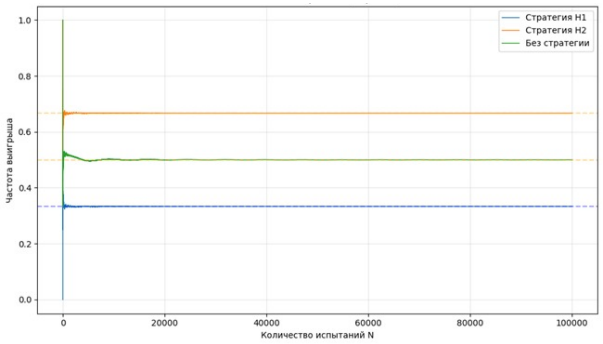


Рисунок 4 – Относительная частота выигрыша, реализованная по авторскому линейному конгруэнтному генератору – LCG при стратегиях H_1 и H_2 и без учета стратегий.

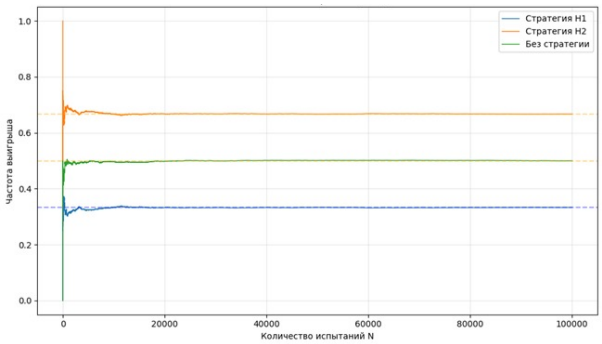


Рисунок 5 – Относительная частота выигрыша, реализованная по методу квази Монте - Карло – QMC при стратегиях H_1 и H_2 и без учета стратегий.

труднейшим задачам теории чисел, и каждый нетривиальный результат становится событием в математической жизни.

Тот же эффект массовости, когда объектов много, но указывать конкретно один из них затруднительно, относится и к датчикам случайных чисел.

Применения случайности необозримы, включая использованную здесь «Экспериментальное подтверждение или опровержение теоретического вероятностного результата (и не только) получается серией компьютерных реализаций объекта рассмотрения посредством алгоритма случайности как гаранта «общего случая», а не специальной подобранности». Итоговый вывод определяется по степени близости к теоретической вероятности частоты подтверждения свойства изучения.

Так была построена вероятностная модель «Парадокс Монти Холла» со статистическим подтверждением. Однако в данную тематику термин «статистическое подтверждение» вносит неопределенность – всяческих случайностей различной природы построено много, поэтому каждый раз надо указывать, на основании какой случайности получен данный статистический вывод, при всей своей массовости никогда нельзя прийти к итоговому окончательному статистическому обоснованию.

Исследованная в данной статье проблема «Парадокс Монти Холла» с теоретическим решением и последующим статистическим подтверждением могла бы иметь обратное направление: сначала статистический эксперимент выдает результат в вероятностях $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$, который принимается в виде гипотезы с последующим теоретическим обоснованием.

Есть и такой сценарий теоретического и статистического: гипотеза Коллатца «Взяв любое целое положительное число, если оно четное, делим его пополам, а если нечетное — умножаем на 3 и прибавляем 1, и так далее, — то в конечном итоге мы всегда придем к числу 1, и после этого начнётся цикл $4 \to 2 \to 1$ » на сегодня не имеет теоретического решения, вместе с тем Теренс Тао получил статистическое подтверждение в 99% этой гипотезы [21].

По-видимому, небезынтересна тематика, объединяющая теоретические исследования с соответствующими статистическими подтверждениями в обоих направлениях – от теории к статистике и от поставленной проблемы с отсутствием даже гипотез к статистическим экспериментам, которые могут прояснить перспективы дальнейшего. Варианты таких сочетаний можно продолжить, во всем этом определенно одно – в качестве статистических методов исследований, наряду с многими другими, предлагаются показавшие свою эффективность в модели «Парадокс Мотни Холла» авторские датчики случайных чисел "Линейный конгруэнтный генератор" и "Метод квази Монте-Карло".

Список литературы

1 Selvin S. A problem in probability// The American Statistician. -1975. -Vol. 29(1). -P. 67–71.

2 Morgan P., Chaganty N.R., Dahiya R.C., Dovi R.L. Let's Make a Deal: The Player's Dilemma // The American Statistician. -1991. -Vol. 45(4). -P. 284–287.
3 Granberg, D. Brown, T. The Monty Hall dilemma// Personality and Social Psychology Bulletin. -1995. -Vol. 21(7). -P. 711–723.
4 Rosenhouse J. The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brain Teaser, Oxford University Press, 2009.
5 Li M. Understanding the Monty Hall Problem Through a Quantum Measurement Analogy. 2025. arXiv:2506.00012.
6 Alrahili M. Simulation of the Monty Hall Problem // International Journal of Computer Applications. -2016. -Vol. 152. № 6. -P. 16-19.
7 Silveira F.L., Velloso W.F., Santos A.P. The Monty Hall problem, information and entropy // Revista Brasileira de Ensino de Física. — 2023. — Vol. 45, № e20230037. — URL: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9468347.pdf (Дата обращения: 08.12.2025).
8 Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period // arXiv:1607.00950
9 Темиргалиев Н. Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 123. № 2. -С. 8-55.
10 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем. сб. -1990. -Т. 181. № 4. -С. 490-505.
11 Жубанышева А.Ж. Теория и практика реализации эффективных алгоритмов нахождения оптимальных коэффициентов в смысле Коробова. PhD диссертация. Астана: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. 2010.
12 Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных // Докл. РАН. -2007. -Т. 416. № 2. -С. 169-173.
13 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж.Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. -2009. -Vol. 49:1. -P. 14–25.
14 Баилов Е.А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. -2014. -Т. 54:7. -С. 1059–1077.
15 Кнут Д.Э. Искусство программирования, том 2. Получисленные алгоритмы. –Москва: Издательский дом Вильямс, 2001. – 832 с.
16 Bergstrom V. Einige Bemerkungen zur. Theorie der diophantischen Approximationen//Eysiogr.Sdlsk. Land. Fцrh. -1936. -Vol. 66. № 13. -P. 1-19.
17 Van der Corput J.G. Verteilungs funktionen, I-VIII // Proc.Akad. Amsterdam. -1935. -Vol. 38. № 8. -P. 813-821.
18 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Москва: Изд-во МЦНМО, 2004. — 285 с.
19 Hlawka E. Zur angendherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatsh. Math. -1962. B. 66. Z. 140-151.
20 Сихов М.Б., Темиргалиев Н.Т. Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова // Матем. заметки. -2010. -Т. 87:6. -С. 948–950.
21 Terence T. Almost all Collatz orbits attain almost bounded values. arXiv:1909.03562v5. 15 Feb 2022

Монти Холл парадоксының статистикалық жүйелілігінің авторлық кездейсоқтық алгоритмдерімен расталынылуы

А.Ж. Жұбанышева, Н.Ж. Наурызбаев, Ғ.Е. Тауғынбаева, Қ.Б. Нұртазина, Н.Темірғалиев

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты , Сәтпаев 2, Астана, 010008, Қазақстан

Аннотация. Мақалада XX ғасырдың 70-жылдарының ортасынан бері ықтималдықтар теориясында ерекшелігімен танымал «Монти Холл парадоксы» атты мәселесі қарастырылады. Ол кездейсоқтықты іштей сезіну мен сандық-статистикалық эксперименттер арқылы расталатын қатаң математикалық дәлелдеме арасындағы айырмашылықты айқын көрсетеді. Ғылыми тұрғыдан негізделген нақты деректердің өзі кей жағдайда адамның қалыптасқан дүниетанымы мен көзқарасын өзгерте алмайтын және ойыншының жүлдені оңтайлы таңдауын математикалық негіздеу екі түрлі теориялық-ықтималдық сипатта ұсынылған есептің шешімін интуитивті қабылдауға когнитивтік диссонанстың тағы бір көрінісі ретінде түсіндірілетін жан-жақты логикалық талдау жүргізілген. Ол екеуінің әрқайсысы белгілі

ықтималдық-теориялық қорытындыларға қосыла отырып, сандық эксперименттермен тағы да статистикалық тексеруден өтеді.

Жұмыстың ерекшелігі классикалық Монте-Карло (Mersenne Twister, PCG) әдістерін, Sobel, Halton, Faure, Niederreiter түріндегі аз мәнді дискрепансты квази Монте-Карло әдістерін және локалды оптималды Сызықтық конгруэнтті генераторды қолдану арқылы алынған белгілі теориялық-эксперименттік қорытындылармен қатар сандық эксперименттер бұрын соңды қолданылмаған кездейсоқ сандар генераторларын, атап айтқанда, сызықтық конгруэнтті генератордың жақсартылмайтын авторлық алгоритмдері мен p бөлімі «кішкене» болатын (p қуатты тор түйінінің а k/p координатасының p бөлімі «аз» болып саналу мағынасында) анықталуы аса үнемді Коробов торлары арқылы берілген квази Монте-Карло әдісін қолдану болып табылады.

Жүргізілген есептеулер бұл екі алгоритмнің де ойыншы бастапқы таңдауын сақтаған жағдайда да, жүргізуші қалдырған жабық есікке ауысқан жағдайда да, сынақтар саны (ойындар саны) артқан сайын теориялық ұтыс ықтималдығына жуықтауда статистикалық заңдылықты растайтынын көрсетті (мұны кері бағытта да – авторлық кездейсоқтық генераторлар жоғары сапасының дәлелі ретінде де қабылдауға болады). Мақалада ықтималдық қорытындылардың статистикалық заңдылықпен расталуы Монти Холл ойыны мысалында да орын алатындығы көрсетіледі.

Ключевые слова: Монти Холл парадоксы, интуиция, ақыл-ойға негізделген түсінік, парадокс, детерминистік заңдылық, кездейсоқтық, статистикалық заңдылық, сызықтық конгруэнтті генератор, квази Монте-Карло әдісі.

Statistical Regularity in the Monty Hall Paradox Using Proprietary Random Algorithms

A.Zh. Zhubanysheva, N.Zh. Nauryzbayev, G.E. Taugynbayeva, K.B. Nurtazina, N. Temirgaliev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpayev Street, Astana, 010008, Kazakhstan

Abstract. The article examines a classical problem in probability theory that has been widely discussed since the mid-1970s, known as the Monty Hall Paradox. It illustrates the discrepancy between the subjective perception of randomness and objective mathematical proofs, which are supported by appropriate computational and statistical experiments. A detailed logical analysis of the intuitive perception of the problem's solution is carried out and interpreted as another manifestation of cognitive dissonance, where even scientifically justified facts fail to change an individual's viewpoint formed within their established natural-scientific worldview. The mathematical justification of the player's optimal prize-selection strategy is presented in two probabilistic interpretations. Each of these interpretations aligns with well-known results of probability theory, which have once again been subjected to statistical verification through numerical experiments.

A distinctive feature of this study is that, in addition to the established theoretical and experimental results obtained using classical Monte Carlo methods (Mersenne Twister, PCG), quasi–Monte Carlo methods with refinements such as Sobol, Halton, Faure, and Niederreiter low-discrepancy sequences, as well as a linear congruential generator with local optimality properties, the computational procedures were also performed using previously unused random number generators. These include proprietary algorithms of a linear congruential generator in a non-improvable formulation and a quasi Monte - Carlo method based on ultra-economical Korobov lattices with small denominators p. In this context, the coordinate ak/p of a lattice node of size p with denominator p is considered "small" within admissible limits, whereas in random algorithms, there is no restriction on the length of decimal expansions relative to p.

The computations demonstrate that both of these randomness algorithms also confirm statistical regularity in convergence to the theoretical winning probabilities, both when the player keeps

their initial choice and when they switch to the remaining unopened door, as the number of trials (games) increases. This result may also be interpreted inversely as confirmation of the quality of the proprietary randomness generators employed.

The article demonstrates the existence of statistical regularity in the Monty Hall game and serves as an illustrative example of the formation of probabilistic conclusions supported by statistical validation.

Keywords: Monty Hall paradox, intuition, common sense, paradox, deterministic regularity, randomness, statistical regularity, linear congruential generator, quasi Monte - Carlo method.

References

1 Selvin S. A problem in probability, The American Statistician. 1975. Vol. 29(1). P. 67–71.
2 Morgan P., Chaganty N.R., Dahiya R.C., Dovi R.L. Let's Make a Deal: The Player's Dilemma, The American Statistician. 1991. Vol. 45(4). P. 284–287.
3 Granberg, D. Brown, T. The Monty Hall dilemma, Personality and Social Psychology Bulletin. 1995. Vol. 21(7). P. 711–723.
4 Rosenhouse J. The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brain Teaser, Oxford University Press, 2009.
5 Li M. Understanding the Monty Hall Problem Through a Quantum Measurement Analogy. 2025. arXiv:2506.00012.
6 Alrahili M. Simulation of the Monty Hall Problem, International Journal of Computer Applications. 2016. Vol. 152. № 6. P. 16-19.
7 Silveira F.L., Velloso W.F., Santos A.P. The Monty Hall problem, information and entropy, Revista Brasileira de Ensino de Física. 2023. Vol. 45, №e20230037. Available at: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9468347.pdf (Accessed: 08.12.2025).
8 Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period, arXiv:1607.00950
9 Temirgaliyev H. Elementary construction of the linear congruent Lehmer sequence with the degree of randomness that is required by the spectral test of Coveyou and MacPherson, Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, Computer Science, Mechanics Series. 2018. Vol. 123. №2. P. 8–55.
10 Temirgaliev N. Application of the divisors theory to numerical integration of periodic functions in several variables, Math. USSR-Sb. 1991. Vol. 69. № 2. P. 527–542
11 Zhubanysheva A.Zh. Teoriya i praktika realizatsii effektivnykh algoritmov nakhozhdeniya optimal'nykh koeffitsientov v smysle Korobova [Theory and Practice of Implementing Efficient Algorithms for Finding Optimal Coefficients in the Sense of Korobov]: PhD dissertation. Astana: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2010.
12 Temirgaliev N., Bailov E.A., Zhubanysheva A.Zh. General algorithm for the numerical integration of periodic functions of several variables, Dokl. Math. 2007. Vol. 76. P. 681–685.
13 Zhubanysheva A.Zh., Temirgaliev N., Temirgalieva Zh.N. Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Comput. Math. Math. Phys. 2009. Vol. 49. № 1. P. 12–22.
14 Bailov E.A., Sikhov M.B., Temirgaliev N. General algorithm for the numerical integration of functions of several variables, Comput. Math. Math. Phys. 2014. Vol. 54. № 7. P. 1061–1078.
15 Knuth D.E. Iskusstvo programmirovaniya, tom 2. Poluchislennye algoritmy [The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms]. Moscow: Izdatel'skiy dom Vilyams, 2001. 832 p.[in Russian]
16 Bergstrom V. Einige Bemerkungen zur. Theorie der diophantischen Approximationen, Eysiogr.Sdlsk. Land. Furh. 1936. Vol. 66. № 13. P. 1-19.
17 Van der Corput J.G. Verteilungs funktionen, I-VIII, Proc.Akad. Amsterdam. 1935. Vol. 38. № 8. P. 813-821.
18 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Theoretical and Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis]. Moscow: Izdatel'stvo MCNMO, 2004. 285.
19 Hlawka E. Zur angendherten Berechnung mehrfacher Integrale, Monatsh. Math. 1962. B. 66. Z. 140-151.
20 Sikhov M.B., Temirgaliev N. On an Algorithm for Constructing Uniformly Distributed Korobov Grids, Math. Notes. 2010. Vol. 87. № 6. P. 916–917.
21 Terence T. Almost all Collatz orbits attain almost bounded values. arXiv:1909.03562v5. 15 Feb 2022

Сведения об авторах:

Жубанышева Аксауле Жанбыршиевна – PhD, старший научный сотрудник института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Наурызбаев Нурлан Жумабаевич – PhD, старший научный сотрудник института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Таугынбаева Галия Ерболовна – ***автор для корреспонденции,*** PhD, старший научный сотрудник института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Нуртазина Карлыгаш Бегахметовна – к.ф.-м.н., старший научный сотрудник института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Темиргалиев Нурлан – д.ф.-м.н., профессор, директор института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Aksaule Zhubanysheva – PhD, Senior scientific researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Nurlan Nauryzbayev – PhD, Senior scientific researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Galiya Taugynbayeva – ***corresponding author,*** PhD, Senior scientific researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Karlygash Nurtazina – Cand. of phys.-math. sci., Assoc. Pr., Senior scientific researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Nurlan Temirgaliyev – Doct. of phys.-math. sci., professor, Director Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Поступила: 13.08.2025. После редакции: 23.08.2025.
Одобрена: 13.09.2025. Доступна онлайн: 30.09.2025.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы.
- 2025. 3(152). - Астана: ЕҰУ. 60-б. Басуға қол қойылды: 30.09.2025.
Ашық қолданыстағы электронды нұсқа: http://bulmathmc.enu.kz/
Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген:
http://bulmathmc.enu.kz/

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды