

ISSN 3007-0155
eISSN 3007-0163

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА**

№2(151)/2025

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2025
Astana, 2025

БАС РЕДАКТОРЫ

Темірғалиев Н., ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Жұбанышева А.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алимхан Килан

PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бекенов М.И.

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Гогинова У.

ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джаватишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

ф.-м.ғ.д., проф., Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет) Долгопрудный, Ресей

Зунг Динь

ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам ұлттық университеті, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

ф.-м.ғ.д., проф., Тула мемлекеттік университеті, Тула, Ресей

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ

Кобельков Г.М.

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Курина Г.А.

ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей

Марков В.В.

ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей

Мейрманов А.М.

ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Нуртазина К.Б.

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Омарбекова А.С.

т.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Смелянский Р.Л.

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Тауғынбаева Г.Е.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Умирбаев У.У.

ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ

Холщевникова Н.Н.

ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.

Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.

№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,

тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410).

EDITOR-IN-CHIEF

Nurlan Temirgaliyev, *Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

Deputy Editor-in-Chief

Aksaule Zhubanysheva

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Nurlan Nauryzbayev

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Editorial board:

Evgueni Abakumov

*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee
Paris, France*

Alexander Iosevich

PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA

Alimhan Keylan

PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Makhsut Bekenov

Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof.

L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ushangi Goginava

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.

Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

Boris Golubov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and
Technology (State University)*

Dolgoprudnyi, Russia

Dũng Dinh

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute,
Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*

Valerii Ivanov

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, Russia

Georgii Kobel'kov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Galina Kurina

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh,
Russia*

Vladimir Markov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical
Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Anvarbek Meirmanov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Com-
munications and Informatics, Moscow, Russia*

Karlygash Nurtazina

*Cand. of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana,
Kazakhstan*

Asel Omarbekova

Cand. of Tech. Sci., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ruslan Smelyansky

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Galiya Taugynbayeva

PhD, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ualbay Umirbaev

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.,
Wayne State University, Detroit, USA*

Natalya Kholshchevnikova

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State
Technological University "Stankin", Moscow, Russia*

Hans-Juergen Schmeisser

*Dr. habil., Prof., Friedrich-Schiller University
Jena, Germany*

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.

Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series

Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Темиргалиев Н., д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Зам. главного редактора

Жубанышева А.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Зам. главного редактора

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алимхан Килан

PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Гогинова У.

д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

д.ф.-м.н., проф., Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Зунг Динь

д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий,

Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, Тула, Россия

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США

Кобельков Г.М.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Курина Г.А.

д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Марков В.В.

д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Мейрманов А.М.

д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Нуртазина К.Б.

к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Омарбекова А.С.

к.т.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Смелянский Р.Л.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Таугынбаева Г.Е.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Умирбаев У.У.

д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США

Холщевникова Н.Н.

д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402

Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). *E-mail:* vest_math@enu.kz

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Серия МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА

Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.

Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,

тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, №2(151)/2025

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics, computer science, mechanics series, №2(151)/2025

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия
Математика, компьютерные науки, механика, №2(151)/2025

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Поляков Н. Л., Савельев Д. И. Рудин-Кейслер алдыңғы ретінің жалпылаулары және олардың теориялық-модельдік қолданыстары

Poliakov N. L., Savelyev D. I. Generalizations of the Rudin-Keisler Preorder and Their Model-Theoretic Applications

Поляков Н. Л., Савельев Д. И. Обобщения предпорядка Рудин-Кейслера и их теоретико-модельные приложения 6

Амангелді Н., Барлыбаев А. Б., Турсынова Н.А. Көпдеңгейлі белгілерді біріктіру және кеңістіктік назар модуліне негізделген терең оқыту модельдері арқылы жеке қорғаныс құралдарын анықтау

Amangeldi N., Barlybayev A. B., Tursynova N. A. Multilevel Feature Fusion and Spatial Attention-Based Deep Learning Models for Personal Protective Equipment Detection

Амангелді Н., Барлыбаев А. Б., Турсынова Н.А. Обнаружение средств индивидуальной защиты с помощью моделей глубокого обучения на основе многоуровневого объединения признаков и пространственного внимания 12

Арыстангаликызы А. Бірқалыпты метрикада толқындық теңдеу үшін Коши есебінің шешімдерін дәл емес мәлімен бойынша жуықтау

Arystangalikyzy A. Approximation of the solutions to Cauchy problem for wave equation in uniform metric by inaccurate information

Арыстангаликызы А. Дискретизация решений задачи Коши для волнового уравнения по неточным данным в равномерной метрике 28

Article

IRSTI: 27.03.15; 27.17.21; 27.19.15

GENERALIZATIONS OF THE RUDIN–KEISLER PREORDER AND THEIR MODEL-THEORETIC APPLICATIONS

N. L. Poliakov¹, D. I. Saveliev²,

¹ *HSE University, 11, Pokrovsky Boulevard, Moscow, Russian Federation*

² *Higher School of Modern Mathematics MIPT, 1, Klimentovskiy lane, Moscow, Russian Federation*

E-mail: ¹ npolyakov@hse.ru

Abstract. Generalizing of the Rudin–Keisler preorder, we introduce relations R_α (and $R_{<\alpha}$) on the set $\beta\omega$ of ultrafilters on ω . They form an ordinal sequence of length ω_1 which is strictly increasing by inclusion and lies between the Rudin–Keisler preorder and the Comfort preorder. We show that the composition of these relations is expressed via a multiplication-like operation on ordinals. Explicit calculations of this operation show that $R_{<\alpha}$ is transitive (and so, a preorder) iff the ordinal α is multiplicatively indecomposable. The proposed constructions have several model-theoretic consequences. Generalizing significantly results of García-Ferreira, Hindman, and Strauss concerning an interplay between ultrafilter extensions of semigroups and the Comfort preorder, we prove that for every model $\mathfrak{A}$, ultrafilter $\mathfrak{u}$, and ordinal α , the set $\{\mathfrak{u} : \mathfrak{u} R_{<\alpha} \mathfrak{v}\}$ forms a submodel of the ultrafilter extension $\beta\mathfrak{A}$ of $\mathfrak{A}$ iff the ordinal α is additively indecomposable. Furthermore, generalizing Blass’ characterization of the Rudin–Keisler preorder via ultrapowers, we characterize the relations R_α , and in particular, the Comfort preorder, via a specific version of limit ultrapowers.

Keywords: ultrafilter, ultrafilter extension, Rudin–Keisler preorder, Comfort preorder, ultrapower, limit ultrapower

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/2.1>

2000 Mathematics Subject Classification: 03E20; 03E10; 03C20; 54D80; 54D35; 22A30

1. INTRODUCTION

As usual, βX denotes the standard Čech–Stone compactification of the discrete space X , which we identify with the set of ultrafilters over X (see [2, 7]). We consider here ultrafilters over ω although most of our results remain true for ultrafilters over any infinite set X .

Since the 1960s natural preorders have been studied in the theory of ultrafilters, of which the Rudin–Keisler preorder and the Comfort preorder are well known. The *Rudin–Keisler* preorder $\leq_{\text{RK}}$ on $\beta\omega$ is defined by letting $\mathfrak{u} \leq_{\text{RK}} \mathfrak{v}$ iff there exists $f : \omega \rightarrow \omega$ such that $\tilde{f}(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$, where $\tilde{f} : \beta\omega \rightarrow \beta\omega$ is the continuous extension of f . The *Comfort* preorder $\leq_{\text{C}}$ on $\beta\omega$ is defined by letting $\mathfrak{u} \leq_{\text{C}} \mathfrak{v}$ iff any $\mathfrak{v}$ -compact space is $\mathfrak{u}$ -compact, where a space X is $\mathfrak{u}$ -compact iff $\tilde{f}(\mathfrak{u}) \in X$ for any $f : \omega \rightarrow X$. (See [2, 7] for more on ultrafilters and $\leq_{\text{RK}}$, and [3, 4] for $\leq_{\text{C}}$.)

We introduce an ordinal sequence of relations lying between these two preorders and prove a number of their properties, including model-theoretic characterizations.

2. MAIN RESULTS

2.1. Basic definitions

For each ordinal α , we define a binary relation R_α on $\beta\omega$ as follows.

Definition 1. For $u, v \in \beta\omega$ and ordinal $\alpha > 0$, let:

- (i) $u R_0 v$ iff u is principal,
- (ii) $R_{<\alpha} := \bigcup_{\beta < \alpha} R_\beta$,
- (iii) $u R_\alpha v$ iff there exists a continuous map $f : \beta\omega \rightarrow \beta\omega$ such that
 - (a) $f(v) = u$ and
 - (b) $f(n) R_{<\alpha} v$ for all $n < \omega$.

The hierarchy is non-degenerate and lies between $\leq_{RK}$ and $\leq_C$ as stated in two following theorems.

Theorem 1. For all α ,

- (i) $R_1 = \leq_{RK}$;
- (ii) $R_{<(\alpha+1)} = R_\alpha$;
- (iii) $R_{<\alpha} \subset R_\alpha$ (the strict inclusion) whenever $\alpha < \omega_1$;
- (iv) $R_{<\omega_1} = R_{\omega_1}$.

Theorem 2. $R_{<\omega_1} = R_{\omega_1} = \leq_C$. So we have the increasing chain:

$$R_0 \subset R_1 = \leq_{RK} \subset R_2 \subset \dots \subset R_{<\omega} \subset R_\omega \subset R_{\omega+1} \subset \dots \\ \subset R_{<\alpha} \subset R_\alpha \subset R_{\alpha+1} \subset \dots \subset R_{<\omega_1} = R_{\omega_1} = \leq_C.$$

The R_α relations can also be defined in another way. If X, Y are spaces and α is an ordinal, $f : X^\alpha \rightarrow Y$ is *right-continuous w.r.t.* $A \subseteq X$ iff for all $\beta < \alpha$ the shift $x \mapsto f(a_0, a_1, \dots, x, b_{\beta+1}, b_{\beta+2}, \dots)$ is continuous whenever $a_0, a_1, \dots \in A$ and $b_{\beta+1}, b_{\beta+2}, \dots \in X$. As shown in [9, 10], if $n < \omega$, X is discrete, and Y is compact Hausdorff, then every $f : X^n \rightarrow Y$ uniquely extends to $\tilde{f} : (\beta X)^n \rightarrow Y$ that is right-continuous w.r.t. X . The ultrafilter extensions of relations $P \subseteq X^n$ can be defined in a similar manner. This provides a canonical way to obtain, for an arbitrary first-order model $\mathfrak{A}$, its *ultrafilter extension* $\beta\mathfrak{A}$ ([9, 10]), generalizing the well-known construction of ultrafilter extensions of semigroups comprehensively treated in [7]. (Some historical remarks can be found in [8].)

If $n < \omega$, the relations R_n can be redefined in terms of ultrafilter extensions of n -ary operations on ω as follows: $u R_n v$ iff there exists $f : \omega^n \rightarrow \omega$ such that $\tilde{f}(v, \dots, v) = u$. These observations can be expanded to all R_α by using ω -ary operations on ω . Such an operation is identified with a continuous map of the Baire space ω^ω into the discrete space ω ; these maps admit a natural hierarchy ranked by countable ordinals.

Proposition 1. Any continuous (in the Baire space) $f : \omega^\omega \rightarrow \omega$ uniquely extends to $\tilde{f} : (\beta\omega)^\omega \rightarrow \beta\omega$ that is right-continuous w.r.t. ω (in other words, ω -ary operations on ω extend to such operations on $\beta\omega$).

Proposition 2. Let $\alpha < \omega_1$ and $u, v \in \beta\omega$. Then $u R_\alpha v$ iff there exists a continuous $f : \omega^\omega \rightarrow \omega$ of rank α such that $\tilde{f}(v, v, \dots) = u$.

2.2. Composition of R_α and the relations $\leq_\alpha$

Using the alternative definition of the R_α relations, it is easy to see that for all $n, m < \omega$

$$R_m \circ R_n = R_{nm}$$

(so R_n are not preorders for $2 \leq n < \omega$). The composition of arbitrary R_α (or $R_{<\alpha}$) is expressed via a multiplication-like operation on ordinals. To simplify notation, denote $\sup_{\gamma < \alpha} (\gamma \cdot \beta)$ by

$(<\alpha) \cdot \beta$; the explicit calculation of these ordinals, used in getting the following result, is rather cumbersome.

Theorem 3. *Let $\alpha, \beta < \omega_1$.*

(i) $R_\alpha \circ R_\beta = R_\gamma$ where

$$\gamma = \begin{cases} \beta \cdot \alpha & \text{if } \beta = 0 \text{ or } \alpha < \omega, \\ \beta \cdot (\alpha + 1) - 1 & \text{if } 0 < \beta < \omega \text{ and } \alpha \geq \omega, \\ \beta \cdot (\alpha + 1) & \text{if } \alpha, \beta \geq \omega; \end{cases}$$

(ii) *If $\alpha > 0$ is limit, then $R_{<\alpha} \circ R_\beta = R_{<\gamma}$ where $\gamma = \beta \cdot \alpha$;*

(iii) *If $\beta > 0$ is limit, then $R_\alpha \circ R_{<\beta} = R_{<\gamma}$ where*

$$\gamma = \begin{cases} (<\beta) \cdot \alpha & \text{if } \alpha < \omega, \\ (<\beta) \cdot (\alpha + 1) & \text{otherwise;} \end{cases}$$

(iv) *If $\alpha, \beta > 0$ are limit, then $R_{<\alpha} \circ R_{<\beta} = R_{<\gamma}$ where $\gamma = (<\beta) \cdot \alpha$.*

Corollary 1. Let $2 \leq \alpha \leq \omega_1$. Then $R_{<\alpha}$ is a preorder iff α is multiplicatively indecomposable.

Define preorders between $\leq_{\text{RK}}$ and $\leq_{\text{C}}$ by letting $\leq_0 = \leq_{\text{RK}}$ and $\leq_{1+\alpha} = R_{<\omega^\alpha}$ for all $\alpha \leq \omega_1$. So, if α is infinite, $R_{<\alpha} = \leq_\alpha$ iff α is an epsilon number. Also $\leq_\alpha \circ \leq_\beta = \leq_\gamma$ where $\gamma = \max(\alpha, \beta)$.

2.3. Model-theoretic applications

In this section, we will examine two applications in model theory.

The first concerns ultrafilter extensions. As shown in [5], for any ultrafilter $\mathfrak{v}$ and semigroup S , the set $\{\mathfrak{u} : \mathfrak{u} \leq_{\text{C}} \mathfrak{v}\}$ forms a subsemigroup of βS . This can be expanded to arbitrary first-order models and relations $R_{<\alpha}$ as follows.

Corollary 2. For all ordinals $\alpha > 1$, ultrafilters $\mathfrak{v}$, and models $\mathfrak{A}$, the following are equivalent:

- (i) $\{\mathfrak{u} : \mathfrak{u} R_{<\alpha} \mathfrak{v}\}$ forms a submodel of the model $\beta \mathfrak{A}$;
- (ii) α is additively indecomposable.

Consequently, for all $\alpha > 0$, $\mathfrak{v}$, and $\mathfrak{A}$, the set $\{\mathfrak{u} : \mathfrak{u} \leq_\alpha \mathfrak{v}\}$ forms a submodel of $\beta \mathfrak{A}$.

The second application concerns ultrapowers. For a model $\mathfrak{A}$ with the universe A , a set I , an ultrafilter $\mathfrak{u}$ over I , and $f : I \rightarrow A$, let $f_{\mathfrak{u}}$ denote the $\mathfrak{u}$ -equivalence class of f , and $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A}$ the ultrapower of $\mathfrak{A}$ by $\mathfrak{u}$. As shown in [1], the Rudin–Keisler preorder has a natural characterization in terms of ultrapowers: $\mathfrak{u} \leq_{\text{RK}} \mathfrak{v}$ iff $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A} \preceq \prod_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}$ for all models $\mathfrak{A}$, and also iff $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{N} \preceq \prod_{\mathfrak{v}} \mathfrak{N}$ where $\mathfrak{N}$ is the *full model of ω* , i.e., it has the universe ω and all relations and operations on ω .

It is not difficult to characterize R_n with $n < \omega$ via ultrapowers in a similar manner:

Proposition 3. *For all $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, and $n < \omega$, the following are equivalent:*

- (i) $\mathfrak{u} R_n \mathfrak{v}$;
- (ii) $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A} \preceq \prod_{\mathfrak{v}} \dots \prod_{\mathfrak{v}} \mathfrak{A}$ (n times) for all models $\mathfrak{A}$;
- (iii) $\prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{N} \preceq \prod_{\mathfrak{v}} \dots \prod_{\mathfrak{v}} \mathfrak{N}$ (n times).

To handle the case $\alpha \geq \omega$, the following “skew version” of limit ultrapowers is used. First for any $e : A \rightarrow B$ define $e^{\mathfrak{u}} : \prod_{\mathfrak{u}} A \rightarrow \prod_{\mathfrak{u}} B$ by letting $e^{\mathfrak{u}}(g_{\mathfrak{u}}) := (e \circ g)_{\mathfrak{u}}$. Clearly, $e : \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ implies $e^{\mathfrak{u}} : \prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A} \preceq \prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{B}$. Then for every model $\mathfrak{A}$, ultrafilter $\mathfrak{u}$, and ordinals α , define the models $\mathfrak{A}_{\mathfrak{u}, \alpha}$ and their embeddings $e_{\beta \alpha}$ for $\beta < \alpha$:

- (i) $\mathfrak{A}_{\mathfrak{u}, 0} := \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{u}, 1} := \prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A}$, and $e_{01} = d$ (the diagonal map);
- (ii) if α is limit, then $\mathfrak{A}_{\mathfrak{u}, \alpha} := \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \mathfrak{A}_{\mathfrak{u}, \beta}$ w.r.t. the system $\{e_{\gamma \beta}\}_{\gamma < \beta < \alpha}$, and the maps $e_{\beta \alpha}$ ($\beta < \alpha$) are defined naturally;
- (iii) if $\alpha = \beta + 1$, then $\mathfrak{A}_{\mathfrak{u}, \alpha} := \prod_{\mathfrak{u}} \mathfrak{A}_{\mathfrak{u}, \beta}$, and the maps $e_{\delta \alpha}$ ($\delta < \alpha$) are defined as follows:
 - (a) if $\beta = \gamma + 1$, then $e_{\beta \alpha} := e_{\gamma \beta}^{\mathfrak{u}}$;

- (b) if $\beta > 0$ is limit, then for any $g \in A_{u,\beta}$

$$e_{\beta\alpha}(g) := e_{\gamma\beta}^u(h)$$
for some $\gamma < \beta$ and $h \in g \cap A_{u,\gamma+1}$;
(c) for any $\delta < \beta$, $e_{\delta\alpha} := e_{\beta\alpha} \circ e_{\delta\beta}$.

Lemma 1. All $\mathfrak{A}_{u,\alpha}$ are well defined, and if $\beta < \alpha$ then $e_{\beta\alpha} : \mathfrak{A}_{u,\beta} \preceq \mathfrak{A}_{u,\alpha}$.

Theorem 4. For $u, v \in \beta\omega$, and a limit ordinal $\alpha > 0$, the following are equivalent:

- (i) $u R_{<\alpha} v$;
- (ii) there is $\beta < \alpha$ such that $\mathfrak{A}_{u,1} \preceq \mathfrak{A}_{v,\beta}$ for all models $\mathfrak{A}$;
- (iii) there is $\beta < \alpha$ such that $\mathfrak{N}_{u,1} \preceq \mathfrak{N}_{v,\beta}$.

Consequently, $u \leq_C v$ iff $\mathfrak{A}_{u,1} \preceq \mathfrak{A}_{v,\omega_1}$ for all models $\mathfrak{A}$, and also iff $\mathfrak{N}_{u,1} \preceq \mathfrak{N}_{v,\omega_1}$.

3. CONCLUSION AND DISCUSSION

The relations R_α provide a natural “smooth” transition from the Rudin-Keisler preorder to the Comfort preorder surprisingly showing that these two preorders are essentially of the same nature. This provides new methods for establishing properties of the Comfort preorder on $\beta\omega$. The proposed skew version of limit ultrapowers raises natural questions. What are the properties of this model-theoretic construction? Is it true that the usual and skew limit ultrapowers are elementarily embedded in each other (perhaps with a rank shift)?

Authors' Contributions: the authors' contribution is equal.

References

- 1 Blass A.R. Orderings on ultrafilters: PhD Thesis, Harward University, Cambridge, Mass., 1970.
- 2 Comfort W.W., Negrepointis S. The theory of ultrafilters. Part of the book series: Grundlehren math. Wiss., (GL. Vol. 211) Springer, 1974.
- 3 García-Ferreira S. Three orderings on $\beta(\omega) \setminus \omega$ // Top. Appl. -1993. -Vol.50. -P.119–216.
- 4 García-Ferreira S. Comfort types of ultrafilters //Proc. Amer. Math. Soc. -1994. -Vol. 120. -P.1251–1260.
- 5 García-Ferreira S., Hindman N., Strauss D. Orderings of the Stone–Cech remainder of a discrete semigroup //Top. Appl. -1999. - Vol. 97:1-2. -P.127–148.
- 6 Goranko V. Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects, tech. report, 2007.
- 7 Hindman N., Strauss D., Algebra in the Stone–Cech Compactification: Theory and Applications, sec. rev. and ext. ed., De Gruyter, 2012.
- 8 Poliakov N.L., Saveliev D.I. On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations // Arch. Math. Log. -2021. - Vol. 60. -P.625–681.
- 9 Saveliev D.I. Ultrafilter extensions of models, Log. Appl., Lect. Notes Comp. Sci. Springer, 2011. -P.162–177.
- 10 Saveliev D.I. On ultrafilter extensions of models, The Infinity Project Proc., CRM Documents, 11, S.-D. Friedman et al. (eds.), 2012. P.599–616.

Рудин-Кейслер алдыңғы ретінің жалпылаулары және олардың теориялық-модельдік қолданыстары

Н. Л. Поляков¹, Д. И. Савельев²

¹ «Жоғары экономика мектебі» ұлттық зерттеу университеті, Покровский бульвары 11, Мәскеу, Ресей Федерациясы

² МФТИ Қазіргі заманғы математика жоғары мектебі, Климентовский қиылысы, 1, Мәскеу, Ресей Федерациясы

Аннотация. Мақалада Рудин–Кейслердің алғы ретін жалпылай отырып, ω -дағы $\beta\omega$ ультрасүзгілер жиынында R_α (және $R_{<\alpha}$) қатынастары енгізілді. Бұл қатынастар ω_1 ұзындықты, кірістіру бойынша қатаң өспелі және Рудин-Кейслер және Комфорт алғы реттерінің арасында жататын ординал тізбек құрайды. Мақалада осы қатынастардың композициясы ординалдарды көбейту амалына жақын операция арқылы өрнектелетіні

көрсетілді. Бұл операцияны нақты есептеу α ординалы мультипликативті жіктелмесе және тек сонда ғана $R_{<\alpha}$ қатынасы транзитивті екендігін (сондықтан алғы рет те болатындығын) көрсетеді. Ұсынылған құрылымдар бірқатар теориялық-модельдік салдарға ие. Жартылай топтардың ультракеңеюлері мен Комфорттың алғы реті арасындағы өзара байланыс туралы Гарсия-Феррейра, Хиндман және Штраусс нәтижелерін едәуір жалпылай отырып, авторлар мақалада кез келген $\mathfrak{A}$ моделі, u ультрасүзгісі мен α ординалы үшін $\{u : u R_{<\alpha} v\}$ жиыны $\beta\mathfrak{A}$ ультракеңеюінде $\mathfrak{A}$ моделінің ішкі моделін құруы үшін α ординалы аддитивті жіктелмейтін болуы қажетті және жеткілікті екендігі дәлелденді. Сонымен қатар, ультрадәрежелер арқылы Бласс берген Рудин–Кейслер алғы ретінің сипаттамасын жалпылай отырып, авторлармен R_α қатынастарының, дербес жағдайда, шектеулі ультрадәрежелердің арнайы нұсқамалары арқылы Комфорт алғы ретінің сипаттамасы берілді.

Түйін сөздер: ультрасүзгі, ультракеңею, Рудин–Кейслер алғы реті, Комфорт алғы реті, ультрадәреже, шектік ультрадәреже.

Обобщения предпорядка Рудин–Кейслера и их теоретико-модельные приложения

Н. Л. Поляков¹, Д. И. Савельев²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Покровский бульвар, 11, Москва, Российская Федерация

² Высшая школа современной математики МФТИ, Климентовский пер., 1, Москва, Российская Федерация

Аннотация. В статье введены отношения R_α (и $R_{<\alpha}$) на множестве $\beta\omega$ ультрафильтров на ω , которые обобщают предпорядок Рудин–Кейслера. Эти отношения образуют ординальную последовательность длины ω_1 , строго возрастающую по включению и лежащую между предпорядком Рудин–Кейслера и предпорядком Комфорта. В статье показано, что композиция этих отношений выражается через операцию, близкую к умножению ординалов. Явные вычисления этой операции показывают, что $R_{<\alpha}$ является транзитивным (и, следовательно, предпорядком), тогда и только тогда, когда ординал α мультипликативно неразложим. Предложенные конструкции имеют ряд теоретико-модельных следствий. Существенно обобщая результаты Гарсия-Феррейры, Хиндмана и Штраусса о взаимосвязи между ультрарасширениями полугрупп и предпорядком Комфорта, авторы доказывают, что для любой модели $\mathfrak{A}$, ультрафильтра u и ординала α , множество $\{u : u R_{<\alpha} v\}$ образует подмодель ультрарасширения $\beta\mathfrak{A}$ модели $\mathfrak{A}$, тогда и только тогда, когда ординал α аддитивно неразложим. Кроме того, обобщая характеристику предпорядка Рудин–Кейслера, данную Блассом с помощью ультрастепеней, авторы дают характеристику отношений R_α и, в частности, предпорядка Комфорта через специальную версию предельных ультрастепеней.

Ключевые слова: ультрафильтр, ультрарасширение, предпорядок Рудин–Кейслера, предпорядок Комфорта, ультрастепень, предельная ультрастепень.

References

- 1 Blass A. R. Orderings on ultrafilters: PhD Thesis, Harvard University, Cambridge, Mass., 1970.
- 2 Comfort W. W., Negrepointis S. The theory of ultrafilters. Part of the book series: Grundlehren math. Wiss., (GL, Vol.211) Springer, 1974.
- 3 García-Ferreira S. Three orderings on $\beta(\omega) \setminus \omega$, Top. Appl., 1993. V.50, P.119–216.
- 4 García-Ferreira S. Comfort types of ultrafilters, Proc. Amer. Math. Soc., 1994. V.120, P.1251–1260.
- 5 García-Ferreira S., Hindman N., Strauss D. Orderings of the Stone–Čech remainder of a discrete semigroup, Top. Appl., 1999. Vol.97:1–2. P.127–148.
- 6 Goranko V. Filter and ultrafilter extensions of structures: universal-algebraic aspects, tech. report, 2007.
- 7 Hindman N., Strauss D., Algebra in the Stone–Čech Compactification: Theory and Applications, sec. rev. and ext. ed., De Gruyter, 2012.
- 8 Poliakov N. L., Saveliev D. I. On ultrafilter extensions of first-order models and ultrafilter interpretations, Arch. Math. Log., 2021. V.60. P.625–681.

- 9 Saveliev D. I. Ultrafilter extensions of models, Log. Appl., Lect. Notes Comp. Sci., Springer, 2011. P.162–177.
10 Saveliev D. I. On ultrafilter extensions of models, The Infinity Project Proc., CRM Documents, 11, S.-D. Friedman et al. (eds.), 2012. P.599–616.

Information about authors:

Nikolai L. Poliakov – PhD, Associate Professor, HSE University, 11, Pokrovsky Boulevard, Moscow, Russian Federation.

Denis I. Saveliev – senior researcher, Higher School of Modern Mathematics MIPT, 1, Klimentovskiy lane, Moscow, Russian Federation.

Поляков Николай Львович – ф.-м.ғ.к., доцент, «Жоғары экономика мектебі» ұлттық зерттеу университеті, Покровский бульвары 11, Мәскеу, Ресей Федерациясы.

Савельев Денис Игоревич – аға ғылыми қызметкер, МФТИ Қазіргі заманғы математика жоғары мектебі, Климентовский қиылысы, 1, Мәскеу, Ресей Федерациясы.

Received: 05.06.2025. Revised: 23.06.2025.

Approved: 27.06.2025. Available online: 30.06.2025.



Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

Мақала
GTAMP: 28.23.37

КӨПДЕНГЕЙЛІ БЕЛГІЛЕРДІ БІРІКТІРУ ЖӘНЕ КЕҢІСТІКТІК НАЗАР МОДУЛІНЕ НЕГІЗДЕЛГЕН ТЕРЕҢ ОҚЫТУ МОДЕЛЬДЕРІ АРҚЫЛЫ ЖЕКЕ ҚОРҒАНЫС ҚҰРАЛДАРЫН АНЫҚТАУ¹

Н. Амангелді¹, А.Б.Барлыбаев², Н.А.Турсынова³,
^{1,2,3} Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтбаев көшесі 2, 010008, Астана,
Қазақстан
E-mail: amangeldi_n_3@enu.kz

Аннотация. Ұсынылып отырған зерттеу жұмысында түрлі өндіріс жұмыс орындарында кездесетін күрделі орталарда жеке қорғаныс құралдарын автоматты түрде тануға арналған терең оқыту модельдерінің тиімділігі қарастырылды. Жеке қорғаныс құралдары түрлі жарақаттар мен қауіпті әсерлерден сақтандыруға арналған, ал оларды қолдануды заманауи терең оқыту модельдерінің көмегімен бақылау маңызды әрі қажетті шешім болып табылады. Аталған зияндардың көп түрлілігіне орай, қорғаныс құралдарын толық қамту үшін көпклассты құрылымнан тұратын, әртүрлі көріністерді қамтыған, толық аннотацияланған заманауи, әлі зерделеніп үлгермеген деректер жиынын YOLOv11 терең оқыту желісімен оқытылып, олардың сенімділігі мен нақты қолданбалардағы әлеуеті бағаланды. Нәтижелер көрсеткендей, архитектуралық жағынан жетілдірілген модельдер күрделі және теңгерімсіз деректермен де тиімді жұмыс істей алады. Сонымен қатар, зерттеу барысында YOLOv8 және YOLOv10 модельдерімен салыстырмалы талдау жүргізіліп, әр архитектураның нұсқалары бойынша талдау жасалды. Бұл зерттеу өндірістік қауіпсіздік саласындағы интеллектуалды жүйелерді дамытуға үлес қосып, қызметкердің жұмыс орнындағы қауіпсіздік ережелерін сақтауын бақылау, сол арқылы өмірін сақтап қалу тұрғысынан практикалық қолдануға жарамды шешім ұсынады.

Түйін сөздер: терең оқыту, жеке қорғаныс құралы, өндірістік қауіпсіздік, интеллектуалды жүйе, компьютерлік көру.

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/2.2>

2000 Mathematics Subject Classification: 68T07

¹Зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетімен қаржыландырылған (грант №AP23483557)

Негізгі белгілер мен анықтамалар

Белгі / Термин	Анықтамасы
ЖҚҚ (PPE)	Жеке қорғаныс құралдары – жұмысшыларды зиянды өндірістік факторлардан қорғауға арналған арнайы құралдар жиынтығы.
YOLO	You Only Look Once – бір кезеңді нысан детекциясына арналған нейрондық желі архитектурасы.
YOLOv8 / v10 / v11	YOLO модельдерінің әртүрлі буындары; олар дәлдік, жылдамдық және архитектуралық күрделілік бойынша ерекшеленеді.
SH17	17 түрлі ЖҚҚ класын қамтитын ашық деректер жиынтығы, нақты өндірістік ортадан алынған кескіндермен аннотацияланған.
Precision	Дәлдік – модель тапқан объектілердің ішінде қаншасы шынайы дұрыс екенін көрсететін көрсеткіш.
Recall	Қамту – барлық шынайы объектілердің қаншасын модель дұрыс тапқанын сипаттайды.
mAP@50	Mean Average Precision, $IoU \geq 0.50$ жағдайындағы орташа дәлдік көрсеткіші.
mAP@50–95	IoU 0.50-ден 0.95-ке дейінгі аралықта алынған орташа дәлдік көрсеткіші (нақтырақ бағалау).
FPS	Frames Per Second – модельдің нақты уақыттағы өңдеу жылдамдығы (бір секундта өңделетін кадр саны).
SPFF	Spatial Pyramid Feature Fusion – әртүрлі масштабтағы белгілерді біріктіретін архитектуралық блок.
C2PSA	Cross-Channel Partial Spatial Attention – маңызды аймақтарға назар аударуға мүмкіндік беретін модуль.
Anchor-free	Алдын ала белгіленген якорь қораптарын пайдаланбай, нысандарды детекциялау тәсілі.
Overfitting	Модельдің оқыту деректеріне шамадан тыс бейімделіп, жаңа деректерге нашар жалпылау қабілеті.
Instance	Аннотацияланған нақты бір объект (мысалы, бір қолғап = 1 instance).

1. КІРІСПЕ

Соңғы бес жылда Қазақстан Республикасында өндірістік жарақат алу жағдайлары өзектілігін жоғалтқан жоқ. Жалпы жұмыс орнындағы төтенше жағдайлар саны біршама азайғанымен [1], ауыр жарақаттар мен адам өліміне әкелген оқиғалар жиі кездеседі. Бұл жағдай әсіресе өнеркәсіптік қауіпсіздік талаптарының орындалмауына және жеке қорғаныс құралдарын (ЖҚҚ) қолдануға немқұрайлықпен қарау немесе дұрыс пайдаланбауға байланысты туындайды. Мәселен, 2022 жылы елде 2 449 адам өндірістік жазатайым оқиғаға ұшырап, оның 202-сі қайтыс болса [2], 2023 жылы зардап шеккендер саны 2 670-ке жетті [3]. Олардың үштен бірінен астамында себеп – жұмыс процесінің дұрыс ұйымдастырылмауы, соның ішінде жұмысшыларға қажетті қорғаныс құралдарының берілмеуі немесе оларды қолданбауы болды. Ал 2025 жылдың алғашқы тоқсанында 293 адам зардап шегіп, 40 [4].

Бұл көрсеткіштер азайғанымен, ауыр жарақаттар мен қайғылы жағдайлар әлі де жиі тіркеліп отыр, әсіресе қауіпті саналатын салаларда (тау-кен өндірісі, құрылыс).

Аталған мәселелерді шешу үшін ЖҚҚ қолдануды бақылайтын заманауи шешімдер қажет [5, 6, 7], өз кезегінде аталмыш қорғаныс құралдары түрлі жарақаттар мен қауіпті әсерлерден сақтандыруға арналған негізгі құралдар болып табылады. Олар жұмысшыны қол-аяқтың сынуынан [8], көру немесе тыныс алу органдарының зақымдануынан, термиялық күйіктен, уланудан және химиялық заттардың зиянды әсерінен қорғауға көмектеседі. Ал еліміздегі түрлі статистикалық мәліметтер [1, 2, 3, 4] өндіріс орнында ЖҚҚ қолдануды қадағалайтын жүйелердің ескіруі немесе мүлде болмауының бірден-бір көрсеткіші екенін ескеріп, ал қолданыстағы бақылау жүйелері көп жағдайда қолмен тексеруге, адам факторына тәуелді және реактивті сипатта (яғни, жазатайым оқиғадан кейінгі әрекет) болып келеді.

Жасанды интеллект кеңінен дамып келе жатқан заманда ЖҚҚ қолдануды бақылауға бағытталған инновациялық ғылыми шешімдерді әзірлеу, түрлі өндірістік орталарда қызметкерлердің қауіпсіздік талаптарын орындауын бақылауды қамтамасыз ету арқылы, өндірістік жарақат алу жағдайларын алдын-алуға елеулі үлес қосады. Ұсынылып отырған зерттеудің мақсаты - ұсақ, бір-бірімен қабаттасқан және визуалды күрделі ЖҚҚ нысандарын неғұрлым сенімді әрі тұрақты түрде тани алатын сенімді шешім ұсыну.

Қойылған мақсатқа жету үшін YOLO (You Only Look Once) модельдер отбасына жататын заманауи YOLOv10 және YOLOv11 архитектуралары таңдалды,

2. ОТАНДЫҚ ЖӘНЕ ӘЛЕМДІК ҒЫЛЫМИ ШЕШІМДЕРГЕ ШОЛУ

Соңғы уақытта ЖҚҚ-ны анықтауға бағытталған YOLO архитектураларына негізделген терең оқыту модельдерінің тиімділігі әртүрлі зерттеулерде дәлелденді. Мысалы, López және әріптестері [5] өндірістік ортадағы ЖҚҚ сәйкестігін бақылауға арналған автоматтандырылған жүйені визуалды позаны бағалау әдісімен толықтыра отырып ұсынған. Ferdous өз жұмысында [6] құрылыс алаңдарында каска, қолғап және қауіпсіздік кеудешесін анықтауға арналған YOLO-ға негізделген арнайы архитектура әзірлеген. Kim мен Xiong [7] нақты биіктіктегі жұмыстарда қолдануға арналған жақсартылған YOLOv8 модельдерін енгізіп, нақты уақыттағы edge құрылғыларға бейімделген шешім ұсынған. Қазақстандық зерттеушілердің еңбектерінде [8] YOLOv8 және YOLOv10 модельдері арнайы дайындалған деректерде салыстырылып, YOLOv11 архитектурасының әлеуеті бағаланған. Сонымен қатар, GBSA-YOLOv8n моделі визуалды күрделі өндірістік ортада ЖҚҚ танудың дәлдігін арттыру мақсатында ұсынылған [9], ал YoloGA [10] алгоритмі эволюциялық есептеу әдістерін қолданып бейімделгіш тану механизмін қамтамасыз еткен. Сондай-ақ, Bento және әріптестері [11] YOLOv8–YOLOv11 модельдерін салыстырып, олардың тиімділігін арнайы таңбалауы бар деректерде (құжаттағы штамптарды тану) бағалаған. Бұл жұмыстар ЖҚҚ-ны тануға арналған заманауи архитектуралардың тәжірибелік маңыздылығын айғақтайды.

ЖҚҚ дәйекті және дұрыс пайдалануды қамтамасыз ету еңбек қауіпсіздігінің негізгі аспектісі болып табылады [12]. Әсіресе құрылыс алаңдары [13], өнеркәсіптік зауыттар [14] және денсаулық сақтау нысандары [15] сияқты қауіпті орталарда. Қолмен тексеруге немесе ретроспективті бейне талдауға негізделген ЖҚҚ сәйкестігін бақылаудың дәстүрлі әдістері көбінесе тиімсіз [16]. Мұндай әдістер адам қателігіне ұшырайды және нақты уақыт режимінде кері байланысты қамтамасыз ете алмайды. Осы мағынада ЖҚҚ қолдануды анықтау мен бағалауды автоматтандырудың перспективті шешімі ретінде компьютерлік көру технологиялары пайда болды [17]. Заманауи тәсілдер арасында YOLO (You Only Look once) нысанды анықтау модельдерінің [18] тобы өзінің жылдамдығы мен дәлдігіне байланысты нақты уақыттағы қолданбалар үшін әсіресе қолайлы.

Chen және т.б. [19] YOLOv7-WFD, жетілдірілген конволюциялық нейрондық желі моделін ұсынды. Бұл модель қауіптілігі жоғары жұмыс орындарында қауіпсіздік каскаларын анықтау үшін арнайы әзірленген. Кәдімгі үлгілерде табылған Precision мәні пен жалпылау шектеулерін қарастыра отырып, YOLOv7-WFD үш инновациялық құрамдас бөлікті біріктіреді: бейімді мүмкіндіктерді шығаруға арналған деформацияланатын Batch-SiLU модулі, мазмұнды

ескеретін іріктеуге арналған CARAFE модулі және төмен сапалы оқыту үлгілерінің әсерін азайту үшін Wise-IoU жоғалту функциясы. Түрлі жарықтандыру және окклюзия жағдайында 5000-нан астам аннотацияланған кескіндерді қамтитын SHEL5K деректер жинағында бағаланған кезде, модель орташа precision мәніне (mAP) 92,6% және нақты уақытта 79,3 кадр/с анықтау жылдамдығына қол жеткізді. Басқа YOLOv7 нұсқаларымен салыстырмалы эксперименттер ЖКҚ-ға қатысты алты санаттың барлығында өнімділіктің дәйекті жақсаруын көрсетті, бұл бетті анықтау дәлдігінің айтарлықтай жоғарылауына әкелді.

Elesaoui және т.б. [20] құрылыс секторындағы ЖКҚ анықтау үшін YOLO негізіндегі архитектуралардың, әсіресе YOLOv5 және YOLOv8 нұсқаларының өнімділігін жан-жақты салыстыруды жүргізді. Алты ЖКҚ класын (адам, кеудеше және төрт каска түсі) қамтитын 1330 нақты суреттен тұратын CHV деректер жинағын пайдалана отырып, зерттеу Precision мәні, Recall, F1, mAP, секундына кадрлар (FPS) және есептеу құнын қоса алғанда, негізгі көрсеткіштер бойынша он бес YOLO үлгісін бағалады. Модельдер арасында YOLOv8m ең жоғары mAP50-95 (92%), Precision мәні (0,92) және F1 ұпайын (0,88) көрсетті, бұл оны Precision мәні пен анықтау жылдамдығы бойынша ең теңдестірілген модельге айналдырды. YOLOv5x6 және YOLOv5l6 да бәсекеге қабілетті өнімділік көрсетті, әсіресе Precision мәні пен recall ерекше. Авторлар YOLOv8 сериясы анықтау дәлдігі мен қорытындының тиімділігі бойынша алдыңғы нұсқалардан асып түскенін, бұл модельдердің құрылыс алаңдарында нақты уақыттағы қауіпсіздікті бақылау үшін өміршеңдігін растайтынын атап өтті.

Өз жұмыстарында Kwon және т.б. [21] бас киім киетін құрылыс жұмысшылары мен кимейтіндерді ажырату тапсырмасына арналған терең нейрондық желінің өнімділігіне оқыту деректерінің сипаттамаларының әсерін зерттейді. Зерттеу терең нейрондық желіні үйрету үшін пайдаланылатын деректер жиынындағы вариациялар немесе сипаттар құрылыс жұмысшыларын қатты қалпақтарды пайдалану негізінде дәл анықтауда оның өнімділігіне қалай әсер ететінін зерттей отырып, оқу деректеріне қатысты сезімталдық талдауын арнайы жүргізеді.

Otgonbold және т.б. [22] өз зерттеулерінде SHD деректер жиынтығының айтарлықтай жақсартылған нұсқасы болып табылатын SHEL5K деректер жинағын ұсынды. Деректер жинағы жақсартылған деректер сапасы мен аннотация мәліметтері арқылы касканы анықтауды жақсарту үшін әзірленген. Деректер жинағы алты класс бойынша 75 000-нан астам мұқият таңбаланған даналары бар 5 000 кескінді қамтиды: каска, бас, каска киген бас, каска киген адам, каска кимеген адам және бет. Бұл деректер жиыны толық емес белгілер және шектеулі класс әртүрлілігі сияқты бар деректер жиынындағы маңызды шектеулерді қарастырады. Авторлар YOLOv3-SPP, YOLOv5(s,m,x), YOLOv4, YOLOR және Inception V2 бар Faster R-CNN қоса алғанда, әртүрлі заманауи нысанды анықтау үлгілерін пайдаланып SHEL5K салыстырды. Олардың ішінде YOLOR моделі Precision мәні (0,9322), recall(0,8066) және F1 ұпайлары (0,8637) арасындағы күшті тепе-теңдікпен ең жоғары mAP (0,8828) қол жеткізді. Салыстырмалы нәтижелер көрсеткендей, SHEL5K-де оқытылған модельдер SHD, NHW және Hardhat сияқты басқа жалпы деректер жинақтарында оқытылғандардан, әсіресе «каскасыз адам» және «бет» сияқты аз ұсынылған класстарды анықтауда жақсы нәтиже көрсетті.

Samma және т.б. [23] визуалды түрде ұқсас объектілердің жіктелу өнімділігін жақсарту үшін контрастты оқытуды қамтитын ЖКҚ анықтауға арналған жақсартылған YOLOv7 архитектурасын ұсынды. Көзілдіріксіз, көзілдіріксіз немесе қолғапсыз және қолғапсыз, әсіресе қиын нақты өмір жағдайында ЖКҚ элементтерін ажыратудағы стандартты нысан детекторларының шектеулерін мойындай отырып, авторлар YOLOv7 құрылымына контрастты жоғалту тармағын енгізді. Бұл түрлендіру желіге ендіру кеңістігінде семантикалық тұрғыдан әр түрлі класстарды жақсырақ бөлуге көмектеседі. Модель 12 ЖКҚ санаттары бар аннотацияланған CHV деректер жиынының кеңейтілген нұсқасында оқытылды және бағаланды және одан әрі жаңа ішкі деректер жиынында (JRCAI) сынақтан өтті. Эксперименттік нәтижелер контраст негізіндегі YOLOv7 моделінің негізгі YOLOv7 үлгісінен және YOLOv8, Faster-RCNN және DAB-DETR сияқты басқа үлгілерден CHV деректер

жинағындағы mAP@0,5 2%-ға және JRCAl деректер жинағында 4%-дан астам жақсаруымен жоғары екенін көрсетті.

Wang т.б. [24] нақты құрылыс орталарында орналастыруға бағытталған әртүрлі YOLO негізіндегі терең оқыту үлгілерін пайдалана отырып, жылдам және дәл ЖҚҚ анықтау бойынша жүйелі зерттеуді ұсынды. Авторлар ЖҚҚ-ға қатысты алты класста (адам, кеудеше және төрт түсті каска), позаны, қашықтықты және жарықтандыруды қоса алғанда, 9200-ден астам аннотацияланған даналары бар 1330 жоғары сапалы кескіндерден тұратын CHV деректер жинағын жасады. Олар YOLOv3, YOLOv4 және YOLOv5 салыстырды. Авторлар әртүрлі жағдайларда өнімділікті бағалады, соның ішінде қабат тереңдігі, кіріс кескінінің ажыратымдылығы, үлгі өлшемі және бұлыңғыр бет кескіндері. YOLOv5x нақты уақыттағы өңдеу жылдамдығын сақтай отырып (GPU-да 19,14 мс/сурет) mAP 86,55% ең өнімді модель болды. Бұған қоса, зерттеу модельдің құпиялылықты сақтайтын бұлыңғыр бет деректеріне беріктігін бірегей түрде бағалады, касканы анықтау mAP50 7% қысқарды, бірақ кеудешеге немесе адам класстарына әсер етпеді. Сыртқы деректер жиынындағы (Pictor-v3, GDUT-HWD) басқа заманауи детекторлармен салыстырмалы бағалау YOLOv5x моделінің тамаша дәлдігі мен бейімделгіштігін растап, оны өнеркәсіптік қондырғыларда нақты уақыттағы қауіпсіздік талаптарын бақылау үшін өте өміршең шешім ретінде орналастырады.

3. ӘДІСНАМА МЕН ДЕРЕКТЕР

3.1. Эксперимент деректері

Өндіріс орнында ЖҚҚ қолдануды автоматты түрде анықтайтын модель [25, 26, 27] әзірлеу үшін, қолданылатын деректер жиынтығы мен қамтылған класстардың күрделілігі мен әртүрлілігі аса маңызды рөл атқарады. Датасет неғұрлым шынайы өндірістік жағдайларды, әртүрлі қорғаныс құралдарын, жұмысшылардың түрлі кейіптерін, объектінің түрлі қашықтықта орналасуын, объекті орналасқан ортадағы визуалды өзгерістерді, яғни түрлі жарықтық деңгейін қамтыса, соғұрлым модель нақты өмірлік жағдайларда сенімді және икемді жұмыс істей алады [28, 29, 30]. Сонымен қатар, ЖҚҚ-ның бірнеше түрін бір мезетте тануға арналған көпклассты құрылым, аннотацияланған объектілер санының (instances) көлемді болуы модельдің практикалық қолдану аясын кеңейтеді. Осылайша, күрделі әрі жан-жақты таңбаланған датасетке негізделген шешімдер өнеркәсіптік қауіпсіздік жүйелерінде тиімді түрде қолдануға бейім болады.

Осы мақсатта, көпклассты құрылымнан тұратын, әртүрлі көріністерді қамтыған, толық аннотацияланған (Сурет 1. а) SH17 заманауи және күрделі бейнелер жиынтығы таңдалды [31].

Мысалы, SH17 деректер жиынтығында каскалар әртүрлі ракурста, қашықтықта және жарық жағдайында бейнелеу факторы модель үшін нақты визуалды күрделілікті тудырады, бірақ сонымен қатар оны шынайы ортаға бейімдеуге көмектеседі. Сурет 1. а -ға келетін болсақ, каска толық, анық көрінеді, түсі, текстурасы, формасы айқын және бетперде, көзілдірік, қолғап сияқты басқа да ЖҚҚ бір кадрда қамтылған. Ал сурет 1. б - суретте жұмысшылар орта қашықтықта тұрғанда түсірілген, каскалар бас формасы мен дене контурынан ерекшеленіп тұр. Түсірілу ракурсы биік болғандықтан касканы жоғарғы жағынан тануға мүмкіндік ашылады. Сурет 1. с - суретіндегі адамдар мен каскалар өте кішкентай, фоны күрделі.

Эксперименттер қолданған SH17 деректер жиынында ЖҚҚ класстары бойынша бейнелер мен аннотацияланған нысандар санының таралуы өте күрделі, яғни кескіндер мен кескіндегі инстанстар санының арасында қандай да бір заңдылықтар жоқ (Кесте - 1). 17 түрлі класс бойынша аннотацияланған, әртүрлі жеке қорғаныс пен адам денесінің бөліктерін қамтитын ашық әрі көпшілікке қолжетімді деректер жиынтығы, сонымен қатар сирек кездесетін қосымша категорияларды да қамтиды.

Датасеттің еркін таралуы және заманауи шынайы көріністерден тұруы, бұл жиынтықты ғылыми зерттеулерде қайталанатын эксперименттер жүргізу және салыстырмалы талдау



Сурет 1 – Жеке қорғаныс құралдарын тануға арналған өндірістік көріністерден құралған күрделі бейнелер жиынтығы. а) ЖҚҚ (каска, бетперде, қолғап) жақын ракурста толық әрі анық көрінген кадр; б) Кішкентай масштабтағы жұмысшылар мен каскалар, күрделі фон жағдайында; с)Орта қашықтықтағы кадр: каска дене контурынан ерекшеленіп, биіктен түсірілген.

Кесте 1 – SH17 деректер ЖҚҚ класстары бойынша бейнелер мен аннотацияланған нысандар санының таралуы)

Class (EN)	Класс (KZ)	Images	Instances
all	Барлығы	1620	15358
Helmet	Каска	1515	2734
Mask	Маска	987	1612
Safety Vest	Қауіпсіздік мешпеті	38	49
Gloves	Қолғаптар	1155	1855
Safety Glasses	Қауіпсіздік көзілдірігі	23	24
Boots	Қауіпсіздік аяқ киімі	75	151
Ear Protection	Құлаққап	64	149
Harness	Қауіпсіздік белбеуі	455	923
Coveralls	Арнайы жұмыс киімі	323	398
Respirator	Респиратор	254	529
Hard Hat	Қатты каска	93	154
Face Shield	Бетқорғағыш	1284	3212
Safety Belt	Қауіпсіздік белдігі	1314	2427
Knee Pads	Тізеқорғағыш	30	43
Reflective Tape	Жарық шағылыстырғыш лента	320	956
Goggles	Қорғаныс көзілдірігі	28	45
Other PPE	Басқа ЖҚҚ	45	97

жасау үшін тиімді етеді де модельдің әлсіз тұстарын айқындап, оның жалпылау қабілетін бағалауға мүмкіндік береді.

3.2. Әдіснама

Осындай күрделі деректер жиынтығының негізінде жасалған модельдер [5, 6, 7, 8, 9, 10] күрделі өндірістік және медициналық ортада қауіпсіздік талаптарының сақталуын автоматты түрде талдау үшін тиімді құрал бола алады.

Модельдің қандай объектілерді жиі кездестіріп үйренетінін және қандай нысандар сирек кездесетінін түсіну үшін ұсынылған бірінші кестеде (кесте 1) 8099 кескіні болғанымен, әр класс

бойынша инстанция (instance) саны берілген. Көп кездесетін класстар модельді тұрақты түрде оқытуға көмектессе, сирек кездесетіндер класстар көмегімен модельдің жалпылау қабілетін тексеруге болады.



Сурет 2 – YOLOv11 архитектурасымен оқыту сызбасы.

Сурет- 2-де YOLOv11 архитектурасы негізінде модельді оқыту процесінің негізгі кезеңдері бірізділікпен көрсетілген. Процестің негізгі қадамдары келесідей:

1-қадам: Кескінді қабылдау

Модель кіріс RGB форматындағы кескінді X қабылдайды. Бұл – үш арналы (қызыл, жасыл, көк) түсті стандартты сурет, яғни R.- әр пиксель үшін 3 түсті мәні бар, Yolo8 -11 YOLOv11 архитектуралары жағдайында, 640x640 өлшемді RGB сурет.

$$X \in \mathbb{R}^{H \times W \times 3}$$

Мұндағы H – биіктік, W – ен, 3 – RGB арналары.

2-қадам: Ерекшеліктерді шығару (C3K2 блогы)

C3k2 блогы F_{conv} конволюциялық қабаттар арқылы шеттер, бұрыштар мен текстуралар сияқты маңызды белгілерді шығарып, ақпараттың жүктемесін азайта отырып, маңызды белгілерді сақтауға мүмкіндік беретін bottleneck құрылымымен өңдейді. Аталмыш құрылым YOLOv11 сияқты заманауи архитектуралардың негізгі компоненті болып саналады. Бұл модельдің көріністегі маңызды мазмұнды (контур, текстура) ажыратуына мүмкіндік береді.

$$F_{\text{conv}} = \text{SiLU}(\text{BN}(W_1 * X + b_1)), \quad \text{SiLU}(x) = x \cdot \sigma(x)$$

Алдымен кескінге белгілі өлшемдегі салмақтар матрицасы W_1 фильтрі қолданылады, яғни конволюциялық ядро, одан соң алынған нәтижеге b_1 деп аталатын ығысу мәні (bias) қосылады. Мұнда b_1 – тұрақты шама, ол модельдің икемділігін арттырып, әрбір нейронның шығысын дәл баптауға мүмкіндік береді. Артынша бұл мәндер BN арқылы нормализацияланып, соңында бейсызықтық енгізу үшін SiLU активация функциясы қолданылып, модель өңдеуге қажетті белгілер жиынын қалыптастырады.

3-қадам: Нысандардың өлшемдерін талдау (SPFF модулі)

SPFF модулі суретті бірнеше масштабта талдайды. Модель үлкен (адам), орташа (каска) және ұсақ (көзілдірік) нысандарды тану үшін әртүрлі көлемдегі белгілерді біріктіреді (матрица өлшемдері ұсақ 20×20 , орташа 40×40 және үлкен 80×80).

$$F_{\text{SPFF}} = \text{Concat}(\text{MaxPool}_{20}(F_{\text{conv}}), \text{MaxPool}_{40}(F_{\text{conv}}), \text{MaxPool}_{80}(F_{\text{conv}}))$$

Нысандарды әртүрлі масштабта тану үшін модель бірнеше деңгейдегі белгілерді біріктіреді. Процесс SPFF (Spatial Pyramid Feature Fusion) модулінде іске асырылады. Кіріс белгілері F_{conv} әртүрлі өлшемдегі max pooling операцияларынан өтеді. Әрбір масштаб бойынша алынған белгілер тензорлары біріктіріліп (конкатенация арқылы), нәтижесінде F_{SPFF} — кеңістіктік пирамидадан алынған, байытылған көпдеңгейлі белгілер жиыны пайда болады.

4-қадам: Кеңістіктік назар аудару (C2PSA блогы)

C2PSA блогы – кеңістіктік назар модулі. Бұл кезеңде модель маңызды аймақтарға (мысалы, адамның беті, қолы, ЖКҚ элементтері) назар аударып, маңызсыз фондық ақпаратты елемей, детекцияны нақтылайды.

$$A = \sigma(\text{Conv}_{1 \times 1}(F_{\text{SPFF}}))$$

Берілген формула *SPFF* модулінен шыққан F_{SPFF} белгілерге (feature map) 1×1 ядросы бар конволюциялық қабат қолданылғанын көрсетіп, σ активациясы арқылы әрбір белгінің қаншалықты маңызды екенін анықтайтын маңыздылық картасы A (attention map) алынады.

Ары қарай маңызды белгілер F_{SPFF} бастапқы белгілермен көбейту арқылы күшейтіліп, маңызы аз белгілер әлсіретіледі.

$$F_{\text{att}} = A \odot F_{\text{SPFF}}$$

5-қадам: Нысандарды болжау (Detection Head)

Модельдің нысанды болжау кезеңінде әрбір табылған нысан үшін кескін ішіндегі орны ретінде координаталары мен өлшемдері — яғни x, y, w және биіктігі h анықталады. Екіншіден, осы нысанның шынымен бар-жоғын анықтайтын ықтималдық мәні p_{obj} және нысанның қандай сыныпқа жататыны туралы болжам p_c жасалып, әртүрлі сыныптарға (мысалы, каска, қолғап, көзілдірік) қатысты ықтималдықтар векторы ретінде беріледі. Алынған мәліметтер модельдің шығуында біріктіріліп, нысан туралы толық сипаттама береді.

$$\hat{Y} = \text{DetectionHead}(F_{\text{att}}) = \{(x, y, w, h), p_{\text{obj}}, \vec{p}_c\}$$

6-қадам: Модельдің жалпы шығын функциясы үш негізгі компоненттен тұрады: нысан шекарасының дәлдігін бағалау $\mathcal{L}_{\text{IoU}}$, нысанның бар-жоғын анықтау үшін бинарлық кросс-энтропия $\mathcal{L}_{\text{BCE}}$ және нысанды дұрыс сыныпқа жатқызу үшін көпкласстық энтропия $\mathcal{L}_{\text{CE}}$. Берілген компоненттер төмендегі формула арқылы қосылады:

$$\mathcal{L} = \lambda_{\text{box}} \cdot L_{\text{IoU}}(\hat{B}, B^*) + \lambda_{\text{obj}} \cdot L_{\text{BCE}}(p_{\text{obj}}, p_{\text{obj}}^*) + \lambda_{\text{cls}} \cdot L_{\text{CE}}(\vec{p}_c, \vec{p}_c^*)$$

$\hat{B}, B^*$ — болжанған және нақты шекаралар, ал $p_{\text{obj}}, p_{\text{obj}}^*$ нысанның бар немесе жоқтығының шынайы және ықтималдық мәні.

7-қадам. Модель есептелген шығын $\mathcal{L}$ негізінде өзінің параметрлерін (салмақтарын) жаңартып, градиенттік төмендеу әдісі арқылы жүзеге асады. Қателік желінің соңғы қабатынан бастап бастапқы қабаттарға қарай таратылады, ал әрбір қадамда параметрлер келесі формула бойынша жаңартылады:

$$\theta \leftarrow \theta - \eta \cdot \nabla_{\theta} \mathcal{L}$$

Мұндағы η — оқу жылдамдығы, ал $\nabla_{\theta} \mathcal{L}$ — шығын функциясының градиенті.

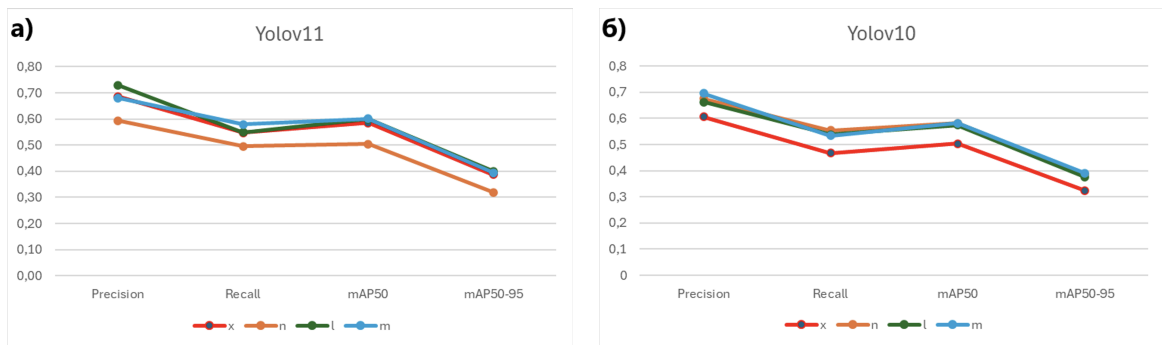
8-қадам: Келесі суретке көшу және қайталау.

Оқу үдерісі келесі кескінмен жалғасады. Мыңдаған кескіннен кейін модель нақты және сенімді тану қабілетіне ие болады.

Зерттеу барысында ұсынылып отырған YOLOv11 архитектурасымен қатар, оның алдындағы YOLOv8 және YOLOv10 модельдері де SH17 деректер жиыны негізінде оқытылып, салыстырмалы бағалау жүргізілді. YOLOv8 моделі — жылдамдық пен жеңілдікке бағытталған бір сатылы (one-stage) детектор, онда деректерді өңдеу жеңілдетілген C2f блогы қолданылса, YOLOv10 архитектурасы SPPCSPC және RepConv одан әрі жетілдірілген және оңтайландырылған модульдерді қолдана отырып, анықтау дәлдігін арттырып, есептеу тиімділігін қамтамасыз етеді. YOLOv10-нұсқалары өнімділік пен жылдамдықтың теңгерімін сақтай отырып, әртүрлі күрделілік деңгейлерінде (n, s, m, l, x) зерттелді.

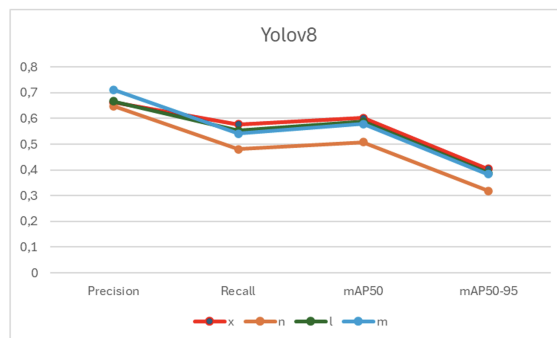
4. НӘТИЖЕЛЕР

Осы зерттеуде YOLOv11, YOLOv10 және YOLOv8 архитектуралары нақты өндірістік ортаны имитациялайтын жеке қорғаныс құралдары бейнелерінен құралған деректер жиынында сынау арқылы әр модельдің өнімділігі mAP@50, mAP@50-95, Precision және Recall метрикалары бойынша жалпы 17 класс бойынша орта есебі бағаланды.



Сурет 3 – а) YOLOv11 архитектурасының әртүрлі нұсқалары (n, m, l, x) бойынша Precision, Recall, mAP@50 және mAP@50–95 метрикалары нәтижелері; б) YOLOv10 архитектурасының әртүрлі нұсқалары (n, m, l, x) бойынша Precision, Recall, mAP@50 және mAP@50–95 метрикалары нәтижелері.

YOLOv11 архитектурасы өзінен бұрынғы YOLOv8 және YOLOv10 модельдерімен салыстырғанда барлық негізгі көрсеткіштер бойынша жақсы нәтиже көрсетті. Әсіресе сурет 3. YOLOv11 l және x нұсқалары жоғары Precision мәні және жалпыланған сапа бойынша алда тұр, яғни қорғаныс құралдарын анықтау жүйелерінде қолдану дұрыс шешім болады. YOLOv10 моделінде l және m нұсқалары орташа және жақсы нәтижелерге қол жеткізсе, x нұсқасы кейбір метрикаларда төмен нәтиже көрсетіп, қорғаныс құралдарын анықтау барысында модельдің күрделілігі мен оптимизация арасындағы тепе-теңдіктің сақталмағанын көрсетеді.



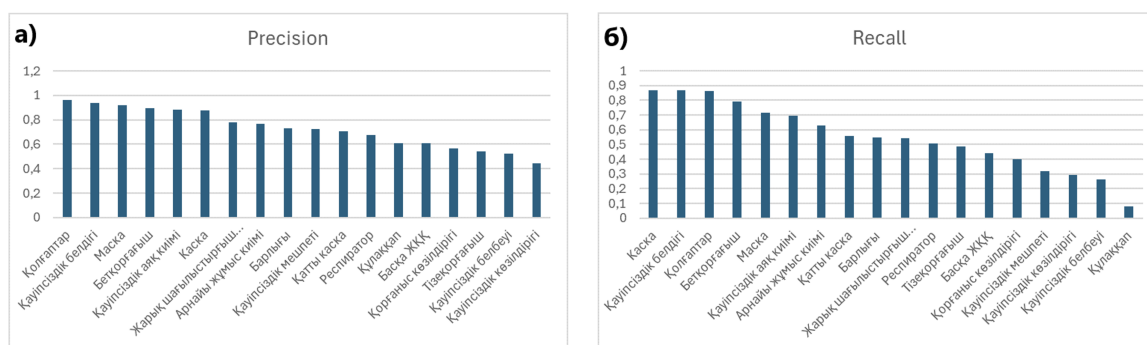
Сурет 4 – YOLOv8 модель нұсқаларының негізгі сапа көрсеткіштері бойынша салыстырмалы нәтижелері.

Сурет 4-те YOLOv8 архитектурасында x нұсқасы барлық көрсеткіштер бойынша тұрақты түрде жақсы нәтиже көрсетуі аталымыш архитектура соңғы версияларына қарамастан әлі де бәсекеге қабілетті модель бола алатынын көрсетеді.

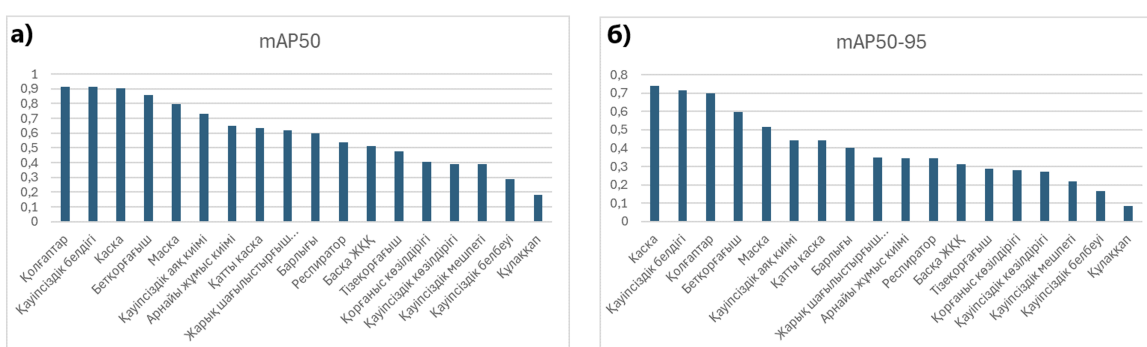
YOLOv11l моделінің ішкі класстар (сурет 5) бойынша нәтижелерін талдау кезінде қолғаптар, каска және қауіпсіздік белдігі сияқты ЖҚҚ түрлерінің жоғары precision мәні, Recall және mAP көрсеткіштеріне ие болғаны анықталды. Класстарда үлгілер саны жеткілікті және визуалды пішіні нақты болғандықтан, модель оларды сенімді тануға қабілетті. Мәселен, қолғаптарда Precision мәні 0.96-дан жоғары, ал каска мен бетқорғағыштарда mAP@50-95 көрсеткіші тиісінше 0.90 және 0.86 шамасында болды.

Керісінше, құлаққап, қауіпсіздік белбеуі және қорғаныс көзілдірігі сияқты класстарда визуалды ерекшеліктердің әлсіздігімен, аннотация санының аздығымен және нысанның кадрда толық көрінбеуімен байланыс көрсеткіштер айтарлықтай төмен. Класстарда Recall және mAP@50-95 мәндері 0.2 - 0.3 аралығында қалып отыр (сурет 6), модельдің оларды дұрыс тану қабілетінің шектеулі екенін көрсетеді.

Ал төмендегі графиктер бойынша YOLOv11l моделі үшін кейбір ЖҚҚ класстарында Precision пен деректер саны (images, instances) арасында белгілі бір байланыс байқалады.

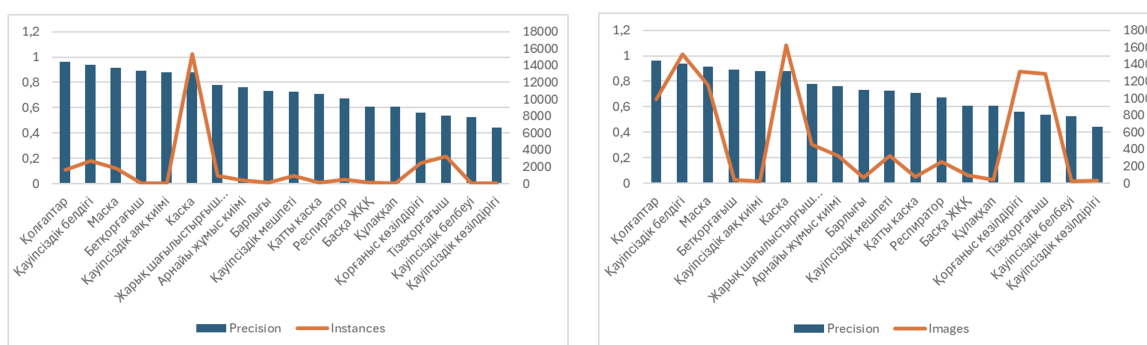


Сурет 5 – а) YOLOv11 моделі бойынша жеке қорғаныс құралдары класстарының Precision мәндері; б) YOLOv11 моделі бойынша жеке қорғаныс құралдары класстарының Recall мәндері.



Сурет 6 – YOLOv11 моделі бойынша жеке қорғаныс құралдары класстарының mAP@50 мәндері; б) YOLOv11 моделі бойынша жеке қорғаныс құралдары класстарының mAP@50–95 мәндері

Мысалы, қолғаптар, маска, қауіпсіздік белдігі сияқты класстарда бейнелер мен инстанстар саны көп және Precision мәні жоғары, модельдің оларды сенімді тануға үйренгенін көрсетеді. Керісінше, құлаққап, белбеу, қауіпсіздік көзілдірігі сияқты аз кездесетін және визуалды күрделі нысандарда Precision мәні те төмен, себебі дерек жеткіліксіз және нысанды анықтау қиын.



Сурет 7 – а) YOLOv11 моделі бойынша әр ЖҚҚ сыныбының дәлдігі (Precision) мен аннотацияланған нысандар саны (Instances) арасындағы өзара байланыс; б) Сурет 10 – YOLOv11 моделі бойынша әр ЖҚҚ сыныбының дәлдігі (Precision) мен кескіндер саны (Images) арасындағы өзара байланыс.

Алайда, каска сияқты класста инстанстар саны өте көп болғанымен (15 000-нан астам), Precision мәні басқа класстарға қарағанда төмендеу (≈ 0.71). Мұндай жағдайда модель асқын оқытуға (overfitting) ұшырауы мүмкін — яғни, ол осы классқа шамадан тыс бейімделіп, басқа нысандармен шатастырып тануы ықтимал.

Модельдерге жүргізілген салыстырмалы талдау нәтижелері YOLOv11 архитектурасының тиімділігін жоғары Precision мәні пен жалпыланған сапа көрсеткіштері бойынша алда тұрып, оны нақты өндірістік жағдайларда ЖҚҚ тануға арналған сенімді шешім ретінде ұсынуға негіз береді. Аталған модельдің жоғары жылдамдықта және нақты уақытта жұмыс істеу қабілетіне келетін болсақ, бір кескінді өңдеуге орта есеппен 9.7 миллисекунд жұмсады, оның ішінде 0.5 мс - алдын ала өңдеу, 5.3 мс - инференс, 3.9 мс - постпроцесс, яғни шамамен 103 кадр/сек (FPS) өнімділік көрсете алды. Сәйкесінше, өндірістік ортада нақты уақыт режимінде қолдануға толық жарамды деп тұжырымдауға болады.

5. ТАЛҚЫЛАУ

Отандық және әлемдік ғылыми шешімдерге шолу барысындағы [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24] жұмыстардың көпшілігі ЖҚҚ тану міндетін шешуде түрлі YOLO нұсқаларының тиімділігін көрсетті, алайда олар негізінен шектеулі класс санын (мысалы, каска, кеудеше, адам) ғана қамтыған. Көптеген зерттеулер CHV [20, 21, 22, 23] немесе SHEL5K [19, 20, 21, 22] сияқты деректер жиындарын пайдалана отырып, нақты бір немесе бірнеше ЖҚҚ түрлеріне (мысалы, каска немесе кеудеше) бағытталған [6], ал толық 17 немесе одан да көп классты қамтитын детекция модельдері сирек кездеседі. Көптеген шешімдер нақты өндірістік ортада кездестірілетін күрделі жағдайлар мен көп объектілі бейнелер үшін шектеулі болып келеді.

Бұл зерттеуде YOLOv10 және YOLOv11 модельдеріне негізделген тәсіл ұсынылып, ол бұрынғы зерттеулермен салыстырғанда 17 ЖҚҚ классын қамтуымен, сондай-ақ ұсақ және визуалды күрделі нысандарды танудағы нәтижелілігімен ерекшеленеді. Алайда бұл шешімнің де өзіндік шектеулері бар, олардың қатарында деректер құрылымы мен визуалды факторларға байланысты тану сапасының әртүрлі болуын атап өту керек.

Шектеулердің болуына бірнеше себеп бар, біріншіден, инстанстар санының аздығы модельдің осы класстар бойынша жеткілікті жалпылау қабілетін қалыптастыруына кедергі келтіреді. Қолғаптар сыныбында 1855 нысан болса, құлаққаптарда небәрі 149 ғана аннотация бар (кесте 1). Екіншіден, объектілердің өлшемі өте кіші және жиі кадр шетінде немесе шолақ көріністе орналасады, үшіншіден, визуалды ұқсастық пен қабаттасу жағдайлары жиі кездеседі. Құлаққаптар каска немесе шашпен бір визуалды фонға сіңісіп кетуі мүмкін, ал қорғаныс көзілдіріктері кейде бетқорғағышпен шатастырылады.

Бұған қоса, шолуда келтірілген жұмыстардың басым бөлігі деректердің теңгерімсіздігі [9, 10, 19], сирек кездесетін класстар (мысалы, құлаққап, тізеқорғағыш, қауіпсіздік белбеуі) немесе визуалды түрде шатастыратын нысандар (мысалы, көзілдірік пен бетқорғағыш) жағдайында модельдің қабілетін жеткілікті терең талдамаған. YOLOv7 [19] немесе YOLOv8 [8, 11, 20] негізіндегі модельдер көбінесе орташа көрсеткіштерге (мысалы, орташа mAP немесе F1) сүйене отырып бағаланып, нақты класстар бойынша әлсіз жақтары немесе модельдің жалпылау қабілеті егжей-тегжейлі қарастырылмаған.

Осы тұрғыдан алғанда, осы жұмыс YOLOv11 архитектурасын ЖҚҚ 17 сыныбы бойынша бағалай отырып, әрбір класстың нақты нәтижелері мен шектеулерін (мысалы, overfitting, деректер тапшылығы немесе визуалды шатастыру) жүйелі түрде талдайды. YOLOv11-дің жетілдірілген құрылымы күрделі ортада нақты қауіпсіздік элементтерін тануда анағұрлым тиімді екеніне көз жеткізу мақсатында YOLOv8 және YOLOv10 модельдерімен салыстыра отырып, дәлелденді. Осылайша, бұл зерттеу ЖҚҚ-ны автоматты анықтау саласындағы деректердің күрделілігі мен архитектуралық ерекшеліктердің модельдің жұмысына әсерін тереңірек ашуға үлес қосады.

6. ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл зерттеудің ғылыми жаңалығы YOLOv8, YOLOv10 және YOLOv11 модельдерінің SH17 деректер жиынында алғаш рет салыстырмалы түрде кешенді бағалануы болып табылады. Бұған дейін бұл архитектуралар дәл осы деректер базасында арнайы зерттелмеген және YOLOv11-дің тиімділігі YOLOv8 және YOLOv10 модельдерімен тікелей салыстырылмаған.

Зерттеу аясында әр архитектураның кемінде 4–5 нұсқасы (барлығы 15-ке жуық модель) сыналып, олардың өнімділігі күрделі және теңгерімсіз деректер жағдайында, нақты өндірістік ортаны бейнелейтін ортада бағаланды.

YOLOv11 архитектурасының l (large) нұсқасы визуалды жағынан ұқсас және қабаттасқан 17 түрлі ЖҚҚ класстарын сенімді тануда ерекше тиімділік көрсетті. Бұл модельдің SPFF және C2PSA сияқты құрылымдық ерекшеліктері ұсақ және сирек кездесетін объектілерді анықтау қабілетін арттырып, визуалды шу мен деректер теңгерімсіздігіне төзімділік танытты. YOLOv11-l нұсқасы Precision = 0.858, Recall = 0.874, mAP@50-95 = 0.727 нәтижелерімен тәжірибелік есептің талаптарына толық сай келді. Қолғаптар мен қауіпсіздік белдігі сияқты жиі кездесетін және визуалды тұрғыдан нақты объектілерде Precision көрсеткіші өте жоғары болса, керісінше, инстанстар саны көп болғанымен, каска класында Precision төменірек болып, модельдің асқын оқытуға бейімделу қаупін көрсетті.

7. ЗЕРТТЕУ ПЕРСПЕКТИВАЛАРЫ

Авторлар жоба аясында қазіргі уақытта отандық деректер жиынтығын әзірлеу жұмыстарын жүргізіп жатыр. Бүгінгі таңда Қазақстанда жеке қорғаныс құралдарын тануға арналған, құрылымы толық әрі сапалы аннотацияланған ашық деректер жиынтығы жоқ. Ол алдағы уақытта отандық мәліметтермен толықтырылып, Қазақстанның өндірістік салаларына бейімделген нақты міндеттерге икемделе алады.

Авторлардың қосқан үлесі:

Нұрзада Амангелді — зерттеу жұмысының идея авторы және жетекшісі; ғылыми міндетті тұжырымдап, модель архитектураларын іріктеу, эксперименттер жүргізу, нәтижелерді талдау, мақаланың негізгі мазмұнын жазу, ғылыми жаңалық пен қорытындыларды әзірлеу жұмыстарын атқарды.

Алибек Барлыбаев — әдеби шолуды дайындап, ғылыми көзқарастар мен тәсілдерді талдады, алынған нәтижелерді верификациялау және түсіндіру бойынша жұмыс жүргізді.

Назерке Турсынова — мақала мәтінін журнал талаптарына сай техникалық және тілдік тұрғыдан ресімдеп, құрылымдық үйлесімділікті қамтамасыз етті; кестелер, суреттер және әдебиеттер тізімінің дұрыс рәсімделуіне жауап берді.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Қазақстандағы өндірістік жарақаттану деңгейі 4,5%-ға азайған [Электронды ресурс]. - URL: <https://www.gov.kz/memleket/entities/enbek/press/news/details/924686?lang=ru> (Қаралған күні: 09.06.2025).
- 2 Статистика бойынша медициналық көрсеткіштер – 2022 жыл [Электронды ресурс]. - URL: <https://stat.gov.kz/ru/industries/social-statistics/stat-medicine/publications/6411/> (Қаралған күні: 09.06.2025).
- 3 Статистика бойынша медициналық көрсеткіштер – 2023 жыл [Электронды ресурс]. - URL: <https://stat.gov.kz/ru/industries/social-statistics/stat-medicine/publications/158509/> (Қаралған күні: 09.06.2025).
- 4 2025 жылдың басынан бері Қазақстанда өндірісте 40 адам қайтыс болған [Электронды ресурс]. - URL: <https://24.kz/ru/news/social/705980-40-pogibshikh-na-proizvodstve-v-kazakhstane-s-nachala-goda> (Қаралған күні: 09.06.2025).
- 5 Barlybayev A., Amangeldy N., Kurmetbek B., Krak I., Razakhova B., Tursynova N., Turebayeva R. Personal protective equipment detection using YOLOv8 architecture on object detection benchmark datasets: a comparative study, Cogent Engineering. – 2024. – Vol. 11, No. 1. – P. 2333209. – <https://doi.org/10.1080/23311916.2024.2333209>.
- 6 López L., Suárez-Ramírez J., Alemán-Flores M., Monzón N. Automated PPE compliance monitoring in industrial environments using deep learning-based detection and pose estimation, SSRN [Preprint]. – 2024 Nov 28. – <https://doi.org/10.2139/ssrn.5037705>.
- 7 Ferdous M., Ahsan S.M. PPE detector: a YOLO-based architecture to detect personal protective equipment (PPE) for construction sites, PeerJ Comput. Sci. – 2022. – Vol. 8. – Article e999. – <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.999>.
- 8 Kim D., Xiong S. Enhancing worker safety: real-time automated detection of personal protective equipment to prevent falls from heights at construction sites using improved YOLOv8 and edge devices, J. Constr. Eng. Manag. – 2025. – Vol. 151, No. 1. – P. 04024187. – [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CO.1943-7862.0002418](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CO.1943-7862.0002418).

- 9 Amangeldy N., Barlybayev A., Gazizova N., Kurmetbek B. Evaluation of YOLOv8 and YOLOv10 models in PPE recognition tasks, *J. Electr. Syst.* – 2024. – Vol. 20, No. 10. – P. 8141–8148. – Available from: <https://journal.esrgroups.org/jes/article/view/7051>.
- 10 Shi C., Zhu D., Shen J., Zheng Y., Zhou C. GBSG-YOLOv8n: a model for enhanced personal protective equipment detection in industrial environments, *Electronics*. – 2023. – Vol. 12, No. 22. – P. 4628. – <https://doi.org/10.3390/electronics12224628>.
- 11 Majumder A., Chatterjee S. YoloGA: an evolutionary computation based YOLO algorithm to detect personal protective equipment, *J. Intell. Fuzzy Syst.* – 2025 May 15. – [Epub ahead of print].
- 12 Bento J., Paixão T., Alvarez A.B. Performance evaluation of YOLOv8, YOLOv9, YOLOv10, and YOLOv11 for stamp detection in scanned documents, *Appl. Sci.* – 2025. – Vol. 15, No. 6. – P. 3154. DOI: <https://doi.org/10.3390/app15063154>.
- 13 Barro-Torres S., Fernández-Caramés T.M., Pérez-Iglesias H.J., Escudero C.J. Real-time personal protective equipment monitoring system, *Comput. Commun.* – 2012. – Vol. 36, No. 1. – P. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2012.01.005>.
- 14 Nikulin A., Ikonnikov D., Dolzhikov I. Smart personal protective equipment in the coal mining industry, *Int. J. Civ. Eng. Technol.* – 2019. – Vol. 10, No. 4. – P. 852–863.
- 15 Park S.H. Personal protective equipment for healthcare workers during the COVID-19 pandemic, *Infect. Chemother.* – 2020. – Vol. 52, No. 2. – P. 165. DOI: <https://doi.org/10.3947/ic.2020.52.2.165>.
- 16 Wong T.K.M., Man S.S., Chan A.H.S. Critical factors for the use or non-use of personal protective equipment amongst construction workers, *Saf. Sci.* – 2020. – Vol. 126. – Article 104663. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.104663>.
- 17 Zhang H., Mu C., Ma X., Guo X., Hu C. MEAG-YOLO: A novel approach for the accurate detection of personal protective equipment in substations, *Appl. Sci.* – 2024. – Vol. 14, No. 11. – P. 4766. DOI: <https://doi.org/10.3390/app14114766>.
- 18 Ragab M.G., Abdulkader S.J., Muneer A., et al. A comprehensive systematic review of YOLO for medical object detection (2018 to 2023), *IEEE Access*. – 2024. DOI: <https://doi.org/10.1109/access.2024.3386826>.
- 19 Chen J., Zhu J., Li Z., Yang X. YOLOv7-WFD: A novel convolutional neural network model for helmet detection in high-risk workplaces, *IEEE Access*. – 2023. – Vol. 11. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3323588>.
- 20 Elesawy A., Abdulkader E.M., Osman H. A detailed comparative analysis of You Only Look Once-based architectures for the detection of personal protective equipment on construction sites, *Eng.* – 2024. – Vol. 5, No. 1. DOI: <https://doi.org/10.3390/eng5010019>.
- 21 Kwon Y.H., Park S., Minh Luan T., Oh S., Heo J. Training data sensitivity analysis of deep neural network for differentiating construction laborers with/without safety helmets, *Computing in Civil Engineering 2023*, ASCE. – 2024. DOI: <https://doi.org/10.1061/9780784485248.062>.
- 22 Otgonbold M.E., Gochoo M., Alnajjar F., et al. SHEL5K: An extended dataset and benchmarking for safety helmet detection, *Sensors*. – 2022. – Vol. 22, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22062315>.
- 23 Samma H., Al-Azani S., Luqman H., Alfarraj M. Contrastive-based YOLOv7 for personal protective equipment detection, *Neural Comput. Appl.* – 2024. – Vol. 36, No. 5. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00521-023-09212-6>.
- 24 Wang Z., Wu Y., Yang L., et al. Fast personal protective equipment detection for real construction sites using deep learning approaches, *Sensors*. – 2021. – Vol. 21, No. 10. – Article 3478. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21103478>.
- 25 Nguyen N.T., Tran Q., Dao C.H., et al. Automatic detection of personal protective equipment in construction sites using metaheuristic optimized YOLOv5, *Arab J. Sci. Eng.* – 2024. – Vol. 49, No. 10. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13369-023-08700-0>.
- 26 Zhang Q., Pei Z., Guo R., et al. An automated detection approach of protective equipment donning for medical staff under COVID-19 using deep learning, *Comput. Model. Eng. Sci.* – 2022. – Vol. 132, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.32604/cmescs.2022.019085>.
- 27 Alateeq M.M., Fathimathul F.R., Ali M.A.S. Construction site hazards identification using deep learning and computer vision, *Sustainability*. – 2023. – Vol. 15, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.3390/su15032358>.
- 28 Wang Z., Cai Z., Wu Y. An improved YOLOX approach for low-light and small object detection: PPE on tunnel construction sites, *J. Comput. Des. Eng.* – 2023. – Vol. 10, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.1093/jcde/qwad042>.
- 29 Ahmad H.M., Rahimi A. SH17: A dataset for human safety and personal protective equipment detection in manufacturing industry, *J. Saf. Sci. Resil.* – 2024. – Vol. 6, No. 2. – P. 175–185. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnlssr.2024.09.002>.
- 30 Nath N.D., Behzadan A.H., Paal S.G. Deep learning for site safety: Real-time detection of personal protective equipment, *Automation in Construction*. – 2020. – Vol. 112. – Article 103085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2020.103085>.
- 31 SH17 dataset for PPE detection [Electronic resource] / Mughees Ahmad. – URL: <https://www.kaggle.com/datasets/mugheesahmad/sh17-dataset-for-ppe-detection>, free. – Accessed: 26.06.2025.

Обнаружение средств индивидуальной защиты с помощью моделей глубокого обучения на основе многоуровневого объединения признаков и пространственного внимания

Н. Амангелді, А.Б.Барлыбаев, Н.А.Турсынова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилёва, Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан

Аннотация. В предлагаемой исследовательской работе рассматривается эффективность моделей глубокого обучения для автоматического распознавания средств индивидуальной защиты в сложных условиях, встречающихся на различных промышленных рабочих местах. Поскольку средства индивидуальной защиты предназначены для защиты работников от различных травм и опасных воздействий, мониторинг их использования с применением современных моделей глубокого обучения является важным решением. Учитывая разнообразие этих опасностей, современный, но неисследованный набор данных с многоклассовой структурой, содержащий различные сцены и полностью аннотированный, был обучен на сети глубокого обучения YOLOv11 для оценки их надежности и потенциала в реальных приложениях. Результаты показывают, что архитектурно улучшенные модели могут эффективно работать даже со сложными и несбалансированными данными. Кроме того, в ходе исследования был проведен сравнительный анализ с моделями YOLOv8 и YOLOv10, а также был выполнен анализ для каждого варианта архитектуры. Данное исследование вносит вклад в развитие интеллектуальных систем в области промышленной безопасности и предлагает практическое решение для контроля соблюдения работниками правил безопасности на рабочем месте, тем самым спасая жизни.

Ключевые слова: глубокое обучение, средства индивидуальной защиты, промышленная безопасность, интеллектуальная система, компьютерное зрение.

Multilevel Feature Fusion and Spatial Attention-Based Deep Learning Models for Personal Protective Equipment Detection

N. Amangeldi, A.B. Barlybayev, N.A. Tursynova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan

Abstract. The proposed research work examines the effectiveness of deep learning models for the automatic recognition of personal protective equipment (PPE) in complex environments encountered in various industrial workplaces. Since PPE is designed to protect workers from multiple injuries and hazards. Monitoring their use using state-of-the-art deep learning models is an important solution. Given the diversity of these hazards, a state-of-the-art but unexplored multi-class dataset containing diverse scenes and fully annotated was trained on the YOLOv11 deep learning network to evaluate their robustness and potential in real-world applications. The results show that the architecturally improved models can effectively handle complex and imbalanced data. In addition, the study conducted a comparative analysis with YOLOv8 and YOLOv10 models and performed an analysis for each architecture variant. This research contributes to the understanding of the topic by providing new insights and perspectives on the development of intelligent systems in the field of industrial safety, offering a practical solution to monitor workers' compliance with safety rules in the workplace and thereby saving lives.

Keywords: deep learning, personal protective equipment, industrial safety, intelligent system, computer vision.

References

- 1 Kazakhstandayy ondiristik zharakattanu dengei 4.5%-ga azaigan [Kazakhstan's level of occupational injuries has decreased by 4.5%] [Electronic resource]. URL: <https://www.gov.kz/memleket/entities/enbek/press/news/details/924686?lang=ru> (Accessed: 09.06.2025).
- 2 Statistika boiynsha meditsinalyk korsetkishter – 2022 zhyl [Medical indicators according to statistics – year 2022] [Electronic resource]. URL: <https://stat.gov.kz/ru/industries/social-statistics/stat-medicine/publications/6411/> (Accessed: 09.06.2025).
- 3 Statistika boiynsha meditsinalyk korsetkishter – 2023 zhyl [Medical indicators according to statistics – year 2023] [Electronic resource]. URL: <https://stat.gov.kz/ru/industries/social-statistics/stat-medicine/publications/158509/> (Accessed: 09.06.2025).
- 4 2025 zhyl basynan beri Kazakhstanda ondiriste 40 adam kaitys bolgan [Since the beginning of 2025, 40 people have died in industrial accidents in Kazakhstan] [Electronic resource]. URL: <https://24.kz/ru/news/social/705980-40-pogibshikh-na-proizvodstve-v-kazakhstane-s-nachala-goda> (Accessed: 09.06.2025).
- 5 Barlybayev A., Amangeldy N., Kurmetbek B., Krak I., Razakhova B., Tursynova N., Turebayeva R. Personal protective equipment detection using YOLOv8 architecture on object detection benchmark datasets: a comparative study, *Cogent Engineering*. 2024. Vol. 11, No. 1. P. 2333209. DOI: <https://doi.org/10.1080/23311916.2024.2333209>.
- 6 López L., Suárez-Ramírez J., Alemán-Flores M., Monzón N. Automated PPE compliance monitoring in industrial environments using deep learning-based detection and pose estimation, *SSRN [Preprint]*. 2024 Nov 28. DOI: <https://doi.org/10.2139/ssrn.5037705>.
- 7 Ferdous M., Ahsan S.M. PPE detector: a YOLO-based architecture to detect personal protective equipment (PPE) for construction sites, *PeerJ Comput. Sci.* 2022. Vol. 8. Article e999. DOI: <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.999>.
- 8 Kim D., Xiong S. Enhancing worker safety: real-time automated detection of personal protective equipment to prevent falls from heights at construction sites using improved YOLOv8 and edge devices, *J. Constr. Eng. Manag.* 2025. Vol. 151, No. 1. P. 04024187. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CO.1943-7862.0002418](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CO.1943-7862.0002418).
- 9 Amangeldy N., Barlybayev A., Gazizova N., Kurmetbek B. Evaluation of YOLOv8 and YOLOv10 models in PPE recognition tasks, *J. Electr. Syst.* 2024. Vol. 20, No. 10. P. 8141–8148. URL: <https://journal.esrgroups.org/jes/article/view/7051>.
- 10 Shi C., Zhu D., Shen J., Zheng Y., Zhou C. GBSG-YOLOv8n: a model for enhanced personal protective equipment detection in industrial environments, *Electronics*. 2023. Vol. 12, No. 22. P. 4628. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics12224628>.
- 11 Majumder A., Chatterjee S. YoloGA: an evolutionary computation based YOLO algorithm to detect personal protective equipment, *J. Intell. Fuzzy Syst.* 2025 May 15. [Epub ahead of print].
- 12 Bento J., Paixão T., Alvarez A.B. Performance evaluation of YOLOv8, YOLOv9, YOLOv10, and YOLOv11 for stamp detection in scanned documents, *Appl. Sci.* 2025. Vol. 15, No. 6. P. 3154. DOI: <https://doi.org/10.3390/app15063154>.
- 13 Barro-Torres S., Fernández-Caramés T.M., Pérez-Iglesias H.J., Escudero C.J. Real-time personal protective equipment monitoring system, *Comput. Commun.* 2012. Vol. 36, No. 1. P. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2012.01.005>.
- 14 Nikulin A., Ikonnikov D., Dolzhikov I. Smart personal protective equipment in the coal mining industry, *Int. J. Civ. Eng. Technol.* 2019. Vol. 10, No. 4. P. 852–863.
- 15 Park S.H. Personal protective equipment for healthcare workers during the COVID-19 pandemic, *Infect. Chemother.* 2020. Vol. 52, No. 2. P. 165. DOI: <https://doi.org/10.3947/ic.2020.52.2.165>.
- 16 Wong T.K.M., Man S.S., Chan A.H.S. Critical factors for the use or non-use of personal protective equipment amongst construction workers, *Saf. Sci.* 2020. Vol. 126. Article 104663. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ssci.2020.104663>.
- 17 Zhang H., Mu C., Ma X., Guo X., Hu C. MEAG-YOLO: A novel approach for the accurate detection of personal protective equipment in substations, *Appl. Sci.* 2024. Vol. 14, No. 11. P. 4766. DOI: <https://doi.org/10.3390/app14114766>.
- 18 Ragab M.G., Abdulkader S.J., Muneer A., et al. A comprehensive systematic review of YOLO for medical object detection (2018 to 2023), *IEEE Access*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.1109/access.2024.3386826>.
- 19 Chen J., Zhu J., Li Z., Yang X. YOLOv7-WFD: A novel convolutional neural network model for helmet detection in high-risk workplaces, *IEEE Access*. 2023. Vol. 11. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3323588>.
- 20 Elesawy A., Abdelkader E.M., Osman H. A detailed comparative analysis of You Only Look Once-based architectures for the detection of personal protective equipment on construction sites, *Eng.* 2024. Vol. 5, No. 1. DOI: <https://doi.org/10.3390/eng5010019>.
- 21 Kwon Y.H., Park S., Minh Luan T., Oh S., Heo J. Training data sensitivity analysis of deep neural network for differentiating construction laborers with/without safety helmets, *Computing in Civil Engineering 2023, ASCE*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.1061/9780784485248.062>.
- 22 Otgonbold M.E., Gochoo M., Alnajjar F., et al. SHEL5K: An extended dataset and benchmarking for safety helmet detection, *Sensors*. 2022. Vol. 22, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22062315>.

- 23 Samma H., Al-Azani S., Luqman H., Alfarraj M. Contrastive-based YOLOv7 for personal protective equipment detection, Neural Comput. Appl. 2024. Vol. 36, No. 5. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00521-023-09212-6>.
- 24 Wang Z., Wu Y., Yang L., et al. Fast personal protective equipment detection for real construction sites using deep learning approaches, Sensors. 2021. Vol. 21, No. 10. Article 3478. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21103478>.
- 25 Nguyen N.T., Tran Q., Dao C.H., et al. Automatic detection of personal protective equipment in construction sites using metaheuristic optimized YOLOv5, Arab J. Sci. Eng. 2024. Vol. 49, No. 10. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13369-023-08700-0>.
- 26 Zhang Q., Pei Z., Guo R., et al. An automated detection approach of protective equipment donning for medical staff under COVID-19 using deep learning, Comput. Model. Eng. Sci. 2022. Vol. 132, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.32604/cmescs.2022.019085>.
- 27 Alateeq M.M., Fathimathul F.R., Ali M.A.S. Construction site hazards identification using deep learning and computer vision, Sustainability. 2023. Vol. 15, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.3390/su15032358>.
- 28 Wang Z., Cai Z., Wu Y. An improved YOLOX approach for low-light and small object detection: PPE on tunnel construction sites, J. Comput. Des. Eng. 2023. Vol. 10, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.1093/jcde/qwad042>.
- 29 Ahmad H.M., Rahimi A. SH17: A dataset for human safety and personal protective equipment detection in manufacturing industry, J. Saf. Sci. Resil. 2024. Vol. 6, No. 2. P. 175–185. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnlssr.2024.09.002>.
- 30 Nath N.D., Behzadan A.H., Paal S.G. Deep learning for site safety: Real-time detection of personal protective equipment, Automation in Construction. 2020. Vol. 112. Article 103085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2020.103085>.
- 31 SH17 dataset for PPE detection [Electronic resource] / Mughees Ahmad. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/mugheesahmad/sh17-dataset-for-ppe-detection>, free. Accessed: 26.06.2025.

Авторлар туралы мәлімет:

Амангелді Нұрзада – байланыс үшін автор, PhD докторы, жасанды интеллект технологиялары кафедрасының зерттеушісі, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтбаев, 2, Астана, 010008, Қазақстан.

Барлыбаев Аликбек Бактыбаевич – PhD докторы, жасанды интеллект технологиялары кафедрасының оқытушы-зерттеушісі, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтбаев, 2, Астана, 010008, Қазақстан.

Турсынова Назира Абдижаппаровна – «8D06112- Жасанды интеллект» БББ докторанты, жасанды интеллект технологиялары кафедрасы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтбаев, 2, Астана, 010008, Қазақстан.

Nurzada Amangeldy – Corresponding author, PhD, Researcher, Department of Artificial Intelligence Technologies, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev Str. 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

Alibek Baktybayevich Barlybayev – Corresponding author, PhD, Researcher, Department of Artificial Intelligence Technologies, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev Str. 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

Nazira Abdizhapparovna Tursynova – Corresponding author, PhD student in the educational program "8D06112 – Artificial Intelligence", Department of Artificial Intelligence Technologies, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev Str. 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

Қабылданған күні: 09.06.2025. Өңдеуден кейін: 26.06.2025.

Мақұлданған күні: 27.06.2025. Онлайн қолжетімді: 30.06.2025.



Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

Статья
МРНТИ: 27.25.19

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ¹

А.Арыстангаликызы 

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, пр. А.Молдагуловой 34, Актюбе,
Казахстан
arystangalikyzya@gmail.com

Аннотация. В статье изучается дискретизация решений задачи Коши для волнового уравнения с начальными данными из классов Коробова в равномерной метрике. В исследуемой постановке задача Коши имеет явное представление решения в виде суммы абсолютно сходящегося тригонометрического ряда Фурье, в общем случае полностью определяемого бесконечным набором коэффициентов Фурье начальных данных. В связи с этим, возникает вопрос приближения решения – бесконечного объекта по конечной числовой информации заданного объема N , полученной вычислительным агрегатом, построенным по значениям коэффициентов Фурье начальных данных. Исследование проводится в рамках Компьютерного (вычислительного) перечника, смысл которого заключается в построении оптимальных вычислительных агрегатов при искаженных данных. При известных оптимальных порядках убывания погрешностей по неискаженным точным данным установлены наилучшие предельные порядки неточной информации, сохраняющие правильные порядки убывания погрешностей по точной информации с указанием оптимальных вычислительных агрегатов. Показано, что найденная предельная погрешность является наибольшей возможной для всех вычислительных агрегатов, обеспечивающих оптимальный порядок приближения по точной информации и построенных по произвольному конечному спектру тригонометрических коэффициентов Фурье.

Ключевые слова: волновое уравнение, задача Коши, оптимальный вычислительный агрегат, приближение по неточным данным, Компьютерный (вычислительный) перечень, предельная погрешность, классы Коробова.

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/2.3>

2000 Mathematics Subject Classification: 41A99; 65D99

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуется дискретизация решений задачи Коши $u(x, t; f)$ для волнового уравнения ($s = 1, 2, \dots$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} (u = u(x, t), 0 \leq t < 1, x \equiv (x_1, \dots, x_s) \in R^s), \quad (1)$$

¹Зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетімен қаржыландырылған (грант №AP23483557)

с начальными условиями

$$u(x, 0) = f(x) \in E_s^r, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 (x \in R^s). \quad (2)$$

Задача приближения рассматривается в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П), смысл которого состоит в построении оптимальных вычислительных агрегатов в условиях искажённых данных, что заключено в центральном определении (все необходимые обозначения, определения и исторические сведения см., например, в [1]-[2])

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in D_N} \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_N(\varepsilon_N) &\equiv \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y \equiv \\ &\equiv \sup_{\substack{f \in F, \\ \left\{ \gamma_N^{(\tau)} \right\}_{\tau=1}^N, \left| \gamma_N^{(\tau)} \right| \leq 1, \\ (\tau=1, \dots, N)}} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N^{(1)}; \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N^{(N)}; \cdot)\|_Y. \end{aligned} \quad (4)$$

К(В)П состоит в последовательном решении следующих трех задач:

К(В)П-1: Находится порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$, – информативная мощность набора вычислительных агрегатов $D_N \equiv D_N(F)_Y$.

Здесь изучается задача восстановления по точной информации, в зависимости от вида функционалов и алгоритмов переработки полученной от них числовой информации.

К(В)П-2: Производится построение конкретного вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ из $D_N \equiv D_N(F)_Y$, поддерживающего порядок $\delta_N(0; D_N)_Y$, для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N)}; \bar{\varphi}_N))_Y \equiv (\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, \dots, \tilde{\varepsilon}_N^{(N)})$ с неотрицательными компонентами, – К(В)П-2 – предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$), такой, что

$$\delta_N(0; D_N)_Y \asymp \sup\{\|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1(f), \dots, z_N(f); \cdot)\|_Y : f \in F, |\bar{l}_\tau(f) - z_\tau(f)| \leq \varepsilon_N^{(\tau)} (\tau = 1, \dots, N)\},$$

с одновременным выполнением

$$\begin{aligned} &\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) : \\ &\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty. \end{aligned}$$

В этой второй части задачи К(В)П в оптимальном вычислительном агрегате, как оказывается значения информационных функционалов можно заменить на близкие им значения с сохранением оптимальности, поиск наибольших таких расхождений образует самостоятельную задачу нахождения предельных погрешностей.

К(В)П-3: Устанавливается массивность предельной погрешности

$$\tilde{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y :$$

находится как можно большое множество $D_N(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ (обычно связанных со структурой исходного $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$) вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$, построенных по всевозможным (не обязательно линейным) функционалам $l_1, \dots, l_N$, таким, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) : \\ &\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty. \end{aligned}$$

Здесь исследуется вопрос о существовании другого вычислительного агрегата со структурой, аналогичной структуре полученного оптимального вычислительного агрегата, но с большей по порядку предельной погрешностью.

Записи $A_N \ll B_N$ и $A_N \asymp B_N$ соответственно означают $A_N \leq cB_N$ и одновременное выполнение $A_N \ll B_N$ и $B_N \ll A_N$, где $\{A_N\}$ и $\{B_N\}$ неотрицательные последовательности, постоянная $c > 0$ не зависит от N .

Приведем некоторые результаты, полученные в аналогичном исследуемому случаю направлении (определения классов и соответствующие обозначения даны в соответствующих статьях).

Е. Шангиреевым [3] для волнового уравнения в случае восстановления по значениям в точках получены следующие двусторонние оценки при $r > s/2$ и для $s = 1, 2, \dots$:

$$\delta_N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; P^{(N)} \times \{\varphi_N\}; M_2^r(0, 1)^s \right)_{L^{q, \infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}$$

и

$$\delta_N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x); P^{(N)} \times \{\varphi_N\}; J_q^r(0, 1)^s \right)_{L^{q, \infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}},$$

где $M_2^r(0, 1)^s$ есть любой из классов Соболева $W_2^r(0, 1)^s$, $J_q^r(0, 1)^s$ есть Никольского-Бесова $B_{q, \theta}^r(0, 1)^s$, $1 \leq \theta < \infty$ и $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}$.

В работах [4]-[5] рассматривалась задача оптимального восстановления решения волнового уравнения по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции, задающей начальную форму струны, а также были получены её обобщения на задачи восстановления операторов, определённых в весовых пространствах l_2 , по приближенным значениям координат векторов. Ш.Абикеновой и Н.Темиргалиевой [6] получил двухсторонние оценки приближения решения волнового уравнения в классе Коробова по точным данным. В статье [7] рассматривается дискретизация решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщённых классов $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s$ Соболева и оцениваются погрешности дискретизации.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Определение 1 [8]. Для положительного $R = 2^n$ ($n = 1, 2, \dots$) под $\Gamma_R \equiv \Gamma_R^{(s)}$ будем понимать множество (так называемый гиперболический крест)

$$\Gamma_R = \{m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : \overline{m} = \prod_{j=1}^s \overline{m}_j \leq R\},$$

где $\overline{m}_j = \max\{1, |m_j|\}$ и $\overline{m} = \overline{m}_1 \cdot \dots \cdot \overline{m}_s$.

Определение 2 [8]. Пусть s -целое положительное число и $r > 0$. Классом Коробова E_s^r называют множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега

$$\hat{f}(m) = \int_{[0, 1]^s} f(y) e^{-2\pi i(m, y)} dy (m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s)$$

которых удовлетворяют условию

$$|\hat{f}(m)| \leq (\overline{m}_1 \cdot \dots \cdot \overline{m}_s)^{-r} = (\overline{m})^{-r}.$$

Лемма А. [8] Пусть s целое положительное число и $r > 1$. Если функция f принадлежит E_s^r , то ее ряд Фурье абсолютно сходится.

Лемма В. [9] Пусть дано целое положительное число s . Если для 1-периодических по каждой переменной функций $f(x_1, \dots, x_s)$ ряд $\sum_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)| (\overline{m}, \overline{m})$, сходится, то задача Коши

для волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) имеет классическое решение $u(x, t; f)$ представимое в виде

$$u(x, t; f) = \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) \cos(2\pi \sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2} t) e^{2\pi i(m, x)}. \quad (5)$$

Под $(\cdot, \cdot)$ здесь и всюду ниже обозначается скалярные произведения векторов.

Определение 3. Под классом $L^{q, \infty} \equiv L^{q, \infty}((0, 1)^s \times [0, +\infty))$ будем понимать множество всех функций $g : R^s \times [0, +\infty) \rightarrow C$ таких, что для каждого $t \in [0, +\infty)$ функция $g_t(x) = g(x, t)$ как функция аргумента $x \in R^s$ является измеримой периодической с периодом 1 по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{q, \infty}} = \sup_{t \geq 0} \left(\int_{[0, 1]^s} |g(x, t)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Лемма С. [9] Пусть даны числа $s (s = 1, 2, \dots)$, $r > 3$ и $2 \leq q \leq \infty$. Тогда

$$\sup_{f \in E_s^r} \|u(\cdot; f, 0) - \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t)\|_{L^{\infty, \infty}} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}.$$

Лемма D. [3] Пусть даны числа s , $s = 1, 2, \dots$ и $R > 1$. Тогда

$$\sum_{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s \leq R} 1 \asymp R(\ln R)^{s-1}.$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть даны числа $s (s = 1, 2, \dots)$ и $r > 3$. Тогда в случае задачи (1)-(2) справедливы следующие утверждения. **К(В)П-1.**

$$\sup_{f \in E_s^r} \|u(\cdot; f, 0) - \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t)\|_{L^{\infty, \infty}} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}.$$

К(В)П-2. Для оператора восстановления $(N \asymp 2^n \cdot n^{s-1})$

$$(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) = \bar{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t) = \sum_{m \in \Gamma_n} \hat{f}(m) \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)}$$

величина $\tilde{\varepsilon}_N \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}$ является предельной погрешностью: во-первых,

$$\delta_N(0) \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{+\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; E_s^r; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N = \eta_N \ln^{r(s-1)} N / N^r)_{L^{\infty, \infty}}}{\delta_N(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; E_s^r; \tilde{\varepsilon}_N = \ln^{r(s-1)} N / N^r)_{L^{\infty, \infty}}} = +\infty.$$

К(В)П-3. Для всякого вычислительного агрегата $(l^{(N)}, \varphi_N)$ из D_N и для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{+\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; E_s^r; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N = \eta_N \ln^{r(s-1)} N / N^r)_{L^{\infty, \infty}}}{\delta_N(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; E_s^r; \tilde{\varepsilon}_N = \ln^{r(s-1)} N / N^r)_{L^{\infty, \infty}}} = +\infty.$$

Доказательство. Часть К(В)П-1 полностью решена в [9]. Перейдем к доказательству оценки сверху в К(В)П-2. И пусть функция f принадлежит классу E_s^r и даны числа $\gamma_N^{(m)}$ такое, что $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1 (m \in \Gamma_n)$.

$$\bar{l}_m(f) = \hat{f}(m), z_m = \bar{l}_m(f) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}, |\gamma_N^{(m)}| \leq 1 (m \in \Gamma_n),$$

$$\bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x, t) = \bar{\varphi}_N \left(\left\{ \bar{l}_m(f) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)} \right\}_{m \in \Gamma_n}; x, t \right) = \sum_{m \in \Gamma_n} z_m \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)} \quad (6)$$

Тогда, имеем

$$\begin{aligned} \|u - \bar{\varphi}_N\|_{L^{\infty, \infty}} &= \left\| u(x, t; f) - \bar{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)}) + \tilde{\varepsilon}_N^{(1)} \gamma_N^{(1)}, \dots, \hat{f}(m^{(N)}) + \tilde{\varepsilon}_N^{(N)} \gamma_N^{(N)}; x, t) \right\|_{L^{\infty, \infty}} = \\ &= \left\| \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)} - \sum_{m \in \Gamma_n} (\hat{f}(m) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}) \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{\infty, \infty}} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{m \in Z^s \setminus \Gamma_n} \hat{f}(m) \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{\infty, \infty}} + \tilde{\varepsilon}_N \left\| \sum_{m \in \Gamma_n} \gamma_N^{(m)} \cdot \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{\infty, \infty}} \leq \\ &\leq I_1 + \tilde{\varepsilon}_N I_2, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \left\| \sum_{m \in Z^s \setminus \Gamma_n} \hat{f}(m) \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{\infty, \infty}}$$

и

$$I_2 = \left\| \sum_{m \in \Gamma_n} \gamma_N^{(m)} \cdot \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{\infty, \infty}}.$$

Далее, в силу Лемма С

$$I_1 \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}.$$

Теперь оценим I_2

$$I_2 = \sup_{x \in [0, 1]^s} \sup_{t \geq 0} \left| \sum_{m \in \Gamma_n} \gamma_N^{(m)} \cdot \cos(2\pi \sqrt{(m, m)} t) e^{2\pi i(m, x)} \right| \leq \sup_{x \in [0, 1]^s} \sup_{t \geq 0} \sum_{m \in \Gamma_n} 1 \asymp \sum_{m \in \Gamma_n} 1 \asymp 2^n \cdot n^{s-1} \asymp N.$$

В итоге

$$I_1 + \tilde{\varepsilon}_N I_2 \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}} + \tilde{\varepsilon}_N \cdot N \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}.$$

Таким образом, в силу произвольности $f \in E_s^r$, $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1 (m \in \Gamma_n)$ и Леммы С получаем

$$\begin{aligned} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}} &\ll \delta_N(0) = \inf_{m_1, \dots, m_N; \varphi_N} \sup_{f \in E_s^r} \left\| u(x, t; f) - \bar{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}); x, t) \right\|_{L^{\infty, \infty}} \ll \\ &\ll \inf_{m_1, \dots, m_N; \varphi_N} \sup_{\substack{f \in E_s^r, \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1, \\ (\tau=1, \dots, N)}} \left\| u(x, t; f) - \bar{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)}) + \tilde{\varepsilon}_N^{(1)} \gamma_N^{(1)}, \dots, \hat{f}(m^{(N)}) + \tilde{\varepsilon}_N^{(N)} \gamma_N^{(N)}; x, t) \right\|_{L^{\infty, \infty}} \asymp \\ &\asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\delta_N(0) \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \asymp \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}.$$

К(В)П-3 и вместе с тем К(В)П-2 докажем одновременно.

Пусть дана возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность $\{\eta_N\}$ и пусть $\eta_N^* = C \min\{\eta_N, \ln N\}$, где постоянная $C = C(r, s) \in (0, 1]$ подобрана так, что для каждого $N \geq 2$ выполняется неравенство

$$0 \leq \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \leq 1.$$

Далее положим

$$g_N(x) = \sum_{m \in \Gamma_n} \tau_N^{(m)} e^{2\pi i(m,x)}. \quad (7)$$

Здесь

$$\tau_N^{(m)} = \min \left\{ \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N; \frac{1}{(\overline{m})^r} \right\} = \min \left\{ \eta_N^* \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}; \frac{1}{(\overline{m})^r} \right\}. \quad (8)$$

Сначала покажем, что для (7) выполняются следующие соотношения:

$$|\hat{g}_N(m)| \leq \frac{1}{(\overline{m})^r}, m \in Z^s \quad (9)$$

и

$$\|g_N\|_{L^\infty} \gg (\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}} \quad (10)$$

для некоторой неотрицательной последовательности η_N^* , стремящейся к $+\infty$.

С учетом Лемма D имеем

$$\begin{aligned} \|g_N\|_{L^\infty} &= \sup_{x \in [0,1]^s} \left| \sum_{m \in \Gamma_n} \tau_N^{(m)} e^{2\pi i(m,x)} \right| \geq \sum_{1 \leq \overline{m} \leq (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r}} \tau_N^{(m)} \asymp \\ &\asymp (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N) \cdot (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r} \cdot (\ln(\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r})^{(s-1)} \asymp ((\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{1/r})^{(r-1)} \cdot (\ln N)^{(s-1)} \asymp \\ &\asymp (\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}} \frac{\ln^{(s-1)(r-1)} N}{N^{r-1}} \cdot (\ln N)^{(s-1)} \asymp (\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}. \end{aligned}$$

Для произвольного множества объема N

$$B_N = \{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\} \subset Z^s$$

положим

$$l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)}).$$

Согласно (7) и (8) имеем при $k = 1, \dots, N$

$$l_k(g_N) = \hat{g}_N(m^{(k)}) = \tau_N^{(m^{(k)})} = \begin{cases} \min \{ (\overline{m})^r; \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \}, & \text{если } m^{(k)} \in \Gamma_n, \\ 0, & \text{если } m^{(k)} \notin \Gamma_n. \end{cases}$$

Тогда для $m^{(k)} \in \Gamma_n$ имеют место неравенства $|l_k(g_N)| \leq \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \leq \eta_N \tilde{\varepsilon}_N$. Отсюда, полагая для $k, k = 1, \dots, N$,

$$\bar{\gamma}_N^{(k)} = \begin{cases} -\frac{\hat{g}_N(m^{(k)})}{\eta_N \tilde{\varepsilon}_N}, & \text{если } m^{(k)} \in \Gamma_n, \\ 0, & \text{если } m^{(k)} \notin \Gamma_n, \end{cases}$$

имеем $|\bar{\gamma}_N^{(k)}| \leq 1$, $\hat{g}_N(m^{(k)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(k)} = 0$ ($k = 1, \dots, N$).

Стало быть,

$$\varphi_N(\hat{g}_N(m^{(1)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(1)}, \dots, \hat{g}_N(m^{(N)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(N)}; x) = \varphi_N(0, \dots, 0; x) = 0.$$

Поэтому в силу (8) и (10), для всякой пары $(l^{(N)} \varphi_N)$ из D_N имеем

$$\begin{aligned} &\left\| u(x, t; f) - \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N^{(1)} \gamma_N^{(1)}, \dots, \hat{f}(m^{(N)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N^{(N)} \gamma_N^{(N)}; x, t) \right\|_{L^\infty, \infty} = \\ &= \sup_{t \geq 0} \left\| u(x, t; f) - \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N^{(1)} \gamma_N^{(1)}, \dots, \hat{f}(m^{(N)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N^{(N)} \gamma_N^{(N)}; x, t) \right\|_{L^\infty} \geq \\ &\geq \left\| u(x, 0; g_N) - \varphi_N(\hat{g}_N(m^{(1)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N^{(1)} \gamma_N^{(1)}, \dots, \hat{g}_N(m^{(N)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N^{(N)} \gamma_N^{(N)}; x, t) \right\|_{L^\infty} = \\ &= \|u(x, 0; g_N) - \varphi_N(0, \dots, 0; x, 0)\|_{L^\infty} = \|u(x, 0; g_N)\|_{L^\infty} = \\ &= \|g_N\|_{L^\infty} \gg (\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}. \end{aligned}$$

Наконец, в силу произвольности $m^{(1)}, \dots, m^{(N)}$ и φ_N отсюда следует

$$\delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \right)_{L^\infty, \infty} = \inf_{(l^{(N)} \varphi_N) \in D_N} \delta_N \left((l^{(N)} \varphi_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \right)_{L^\infty, \infty} \gg \\ \gg (\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}.$$

В итоге для всякого N выполнено неравенство

$$\frac{\delta_N(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N)_{L^\infty, \infty}}{\delta_N(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; 0)_{L^\infty, \infty}} \gg \frac{(\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}} \ln^{r(s-1)} N / N^{r-1}}{\ln^{r(s-1)} N / N^{r-1}} = (\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}}.$$

Теорема доказана полностью.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована задача дискретизации решений волнового уравнения в классах Коробова по неточной информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье начального условия. На основе оптимального восстановления решения задачи Коши в $K(B)П-1$, в полном объеме исследованы задачи $K(B)П-2$ и $K(B)П-3$. Полученные результаты обеспечивают математическую основу для построения эффективных вычислительных агрегатов и могут быть применены в численных методах для волновых уравнений, а также в теории приближений и для анализа погрешностей дискретизаций.

Список литературы

- 1 Temirgaliev N., Zhubanysheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2015. -Vol. 55. -N. 9. -P. 1432-1443.
- 2 Temirgaliev N., Zhubanysheva A. Zh. Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery // Iz.Vuz. -2019. -Vol. 63. -N. 1. -P. 79-86.
- 3 Шангиреев Е.И. О восстановлении решений волнового уравнения: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Караганда. 2002.
- 4 Виск Н.Д. О решении волнового уравнения при неточно заданных коэффициентах Фурье функции, задающей начальную форму струны // Владикавказ. матем. журн., -2006. -Т. 8. -N. 4. -С. 13-18.
- 5 Виск Н.Д., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. -2007. -Т. 81. -N. 6. -С. 803-815.
- 6 Абикенова Ш.К., Темиргалиев Н. О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения // Дифф. уравн., -2010. -Т. 46. -N. 8. -С. 1201-1204.
- 7 Абикенова Ш. К., Утесов А., Темиргалиев Н. Т. О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем. Заметки. -2012. -Т. 91. -N. 3. -С. 459-463.
- 8 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. -Москва, 1963. -112 с.
- 9 Абикенова Ш.К. Дискретизация периодических решений волнового уравнения с начальными условиями из классов $W_2^r(0, 1)^s, W_2^{\omega_{r1}, \dots, \omega_{rs}}(0, 1)^s$ и E_s^r . дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Астана. 1998.

Бірқалыпты метрикада толқындық теңдеу үшін Коши есебінің шешімдерін дәл емес мәлімен бойынша жуықтау

А.Арыстанғалиқызы

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ә. Молдағұлова даңғ., 34, Ақтөбе, Қазақстан

Андатпа. Мақалада бастапқы шарттары Коробов кластарынан алынған толқындық теңдеу үшін Коши есебінің шешімдерін бірқалыпты метрикада дискретизациялау есебі зерттеледі. Қарастырылып отырған қойылымда Коши есебінің шешімі абсолютті жинақталатын тригонометриялық Фурье қатарының қосындысы түрінде айқын түрде өрнектеледі және жалпы жағдайда бастапқы мәліметтердің Фурье коэффициенттерінің шексіз жиынтығымен толық анықталады. Осыған байланысты, шешімді — шексіз объектіні бастапқы мәліметтердің

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2025, Том 151, №2
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2025, Том 151, №2

Фурье коэффициенттері бойынша құрылған есептеуіш агрегат арқылы алынатын, берілген N көлемді ақырлы сандық мәлімет негізінде жуықтау мәселесі туындайды. Зерттеу қателіктермен берілген мәліметтер жағдайында оңтайлы есептеуіш агрегаттарды құрудан тұратын Компьютерлік (есептеуіш) диаметр теориясы аясында жүргізіледі. Дәл мәлімет бойынша қателіктің кемуінің оңтайлы реттері белгілі болған жағдайда, дәл емес мәлімет үшін қателіктің жақсартылмайтын шектік реттері анықталады, әрі олар дәл мәлімет бойынша қателіктің дұрыс кему ретін сақтайтыны көрсетіледі және сәйкес оңтайлы есептеуіш агрегаттар беріледі. Алынған шектік қателіктің дәл мәлімет бойынша жуықтаудың тиімді ретін қамтамасыз ететін және тригонометриялық Фурье коэффициенттерінің кез келген шекті спектрін пайдаланып құрылған оңтайлы жуықтау ретін қамтамасыз ететін барлық есептеу агрегаттары үшін алынған шектік қателік мүмкін болатын ең үлкені екені көрсетілген.

Түйін сөздер: толқындық теңдеу, Коши есебі, тиімді есептеу агрегаты, дәл емес мәлімет бойынша жуықтау, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, шектік қателік, Коробов класстары.

Approximation of the solutions to Cauchy problem for wave equation in uniform metric by inaccurate information

А.Арыстанғалиқызы

K. Zhubanov Aktobe Regional University, ave. A.Moldagulova 34, Aktobe, Kazakhstan

Abstract. On the article is considered problem of discretization of solutions to the Cauchy problem for the wave equation with initial information from the Korobov classes in a uniform metric. In the studied formulation, the Cauchy problem has an explicit representation of the solution as the sum of an absolutely convergent trigonometric Fourier series, which is generally completely determined by an infinite set of Fourier coefficients of the initial information. This raises the problem of approximating the solution—an infinite object—using finite numerical information of a given volume N , obtained from values of the Fourier coefficients of the initial information. The study is conducted within the framework of the Computational (Numerical) Diameter problem, the purpose of which is to construct optimal computational aggregate under conditions of inaccurate information. Given previously obtained orders of limiting errors by accurate information, unimprovable orders of inaccurate information are established, preserving the orders of decreasing errors for accurate information, with the optimal computational aggregates specified. It is shown that the found limiting error is the largest possible for all computational aggregates that provide the optimal order of approximation based on precise information and constructed based on an arbitrary finite spectrum of trigonometric Fourier coefficients.

Keywords: wave equation, Cauchy problem, optimal computational aggregate, approximation by inaccurate information, Computational (numerical) diameter, limiting error, Korobov classes.

References

- 1 Temirgaliev N., Zhubanysheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol. 55. N. 9. P. 1432-1443.
- 2 Temirgaliev N., Zhubanysheva A. Zh. Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery, Iz.Vuz. 2019. Vol. 63. N. 1. P. 79-86.
- 3 Shangireev E.I. O vosstanovlenij reshenij volnovogo uravnenija. diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. Karaganda. 2002. [in Russian]
- 4 Vysk N. D. O reshenij volnovogo uravnenija pri netochno zadannykh koefficientax Furije funkciy, zadaiushei nachal'nuju formu strunij, Vladislavk. matem. j., 2006. T. 8. N. 4. C. 13-18. [in Russian]
- 5 Vysk N. D., Osipenko K. Yu., Optimal Reconstruction of the Solution of the Wave Equation from Inaccurate Initial Data, Math. Notes, 2007. Vol. 81. N.6, pp. 723-733.
- 6 Abikenova Sh. K., Temirgaliev N. On the exact order of the information power of all possible linear functionals in the discretization of solutions of the wave equation, Dif. eq., 2010. Vol. 46. N 8. p. 1201-1204.

- 7 Abikenova Sh. K., Utesov A., Temirgaliev N. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes, Math. Notes, 2012. Vol. 91. N. 3. p. 430–434.
- 8 Korobov N.M. Teoretiko – chislovye metody v priblizhenom analize [Numerical – theoretic methods in approximate analysis]. M., 1963. 112 p. [in Russian]
- 9 Abikenova Sh. K. Diskretizatsiya periodicheskikh reshenij volnovogo uravneniya s nachal'nymi uslovijami iz klassov $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0,1)^s$ i E_s^r . diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. Astana. 1998. [in Russian]

Сведения об авторе:

Акмарал Арыстанғалиқызы – PhD докторант, Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, пр. А.Молдагуловой 34, Актобе, Казахстан.

Akmaral Arystangalikyzy – PhD student, K. Zhubanov Aktobe Regional University, ave. A.Moldagulova 34, Aktobe, Kazakhstan.

Поступила: 26.03.2025. После редакции: 23.06.2025.

Одобрена: 27.06.2025. Доступна онлайн: 30.06.2025.

Бас редактор: Н. Теміргалиев

Жауапты редактор: Ғ.Е. Тауғынбаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы.
- 2025. 2(151). - Астана: ЕҰУ. 37-б. Басуға қол қойылды: 30.06.2025.

Ашық қолданыстағы электронды нұсқа: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген:
<http://bulmathmc.enu.kz/>

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды