ISSN 3007-0155
eISSN 3007-0163

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА**

№3(148)/2024

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2024
Astana, 2024

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.
№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series
Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.
Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА
Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.
Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.
Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,
тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, №3(148)/2024

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics, computer science, mechanics series, №3(148)/2024

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия
Математика, компьютерные науки, механика, №3(148)/2024

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2024, Vol. 148, №3, P. 6-17.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: 20.53.17

MACHINE LEARNING ALGORITHMS IN SIEM SYSTEMS FOR ENHANCED DETECTION AND MANAGEMENT OF SECURITY EVENTS [1]

A. Nurusheva [1], A. Abdiraman [2], D. Satybaldina [3], N. Goranin [4],
[1,3] *L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, Kazakhstan*
[2] *Astana IT University, Mangilik yel str., 55/11, Astana, Kazakhstan*
[4] *Vilnius Gediminas Technical University (VilniusTech), Sauletekio al. 11, 10223, Vilnius, Lithuania*
(E-mail: [1] asselnurusheva7@gmail.com, [2] a.s.abdiraman@gmail.com, [3] dinasaty@gmail.com,
[4] nikolaj.goranin@vgtu.lt)

Abstract. As cyber threats become increasingly sophisticated, traditional Security Information and Event Management (SIEM) systems face challenges in effectively identifying and responding to these dangers. This research presents the development of a SIEM system integrated with machine learning (ML) to enhance threat detection, anomaly identification, and automated incident response. The integration of ML allows the SIEM system to go beyond conventional rule-based approaches, enabling the detection of previously unknown threats by learning from historical data. The system employs advanced algorithms to analyze large-scale log data and network traffic, providing real-time insights and reducing false positives. Key features of this SIEM include anomaly detection, predictive analytics, and adaptive thresholds, which allow it to adjust dynamically based on contextual data. By adapting to new and evolving cyber threats, the system provides a more resilient and proactive defense against potential attacks. The results indicate that integrating machine learning into SIEM systems can offer organizations a more effective, scalable, and adaptive security solution, ensuring the protection of critical infrastructure and data in a rapidly changing digital landscape.

Keywords: cyber threats, machine learning, SIEM, information security management, incident response, critical infrastructure.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2024/3.1

2000 Mathematics Subject Classification: 68M25; 68M10; 68T01

1. Introduction

The integration of Security Information and Event Management (SIEM) systems with machine learning components can significantly enhance the effectiveness of data security. As digitalization progresses in modern society, there has been a corresponding rise in cyber threats. The development of an event management and data security system with machine learning elements is highly relevant

[1] This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19175746)

and increasingly essential, as advancements in artificial intelligence offer new ways to improve both security and defense mechanisms.

Incorporating machine learning into SIEM systems not only advances academic discourse but also provides practical solutions that enhance the sustainability and responsiveness of data security measures in an ever-evolving technological landscape. The sharp increase in modern cyber threats, including malware, ransomware, and advanced persistent threats, underscores the urgent need for improved systems. Machine learning integration allows SIEM frameworks to more effectively prevent unauthorized access, quickly identify potential security breaches, and respond proactively to cyber threats.

Conventional SIEM systems primarily rely on static rules and signature-based detection mechanisms to identify threats. However, as cyber threats become increasingly sophisticated, such systems struggle to detect new and evolving attacks. Traditional methods are limited in their ability to analyze vast amounts of data and often fail to recognize emerging, unknown threats. This highlights the necessity for advanced analytical approaches capable of identifying novel and subtle cyber threats in a timely manner.

SIEM systems are critical components within Security Operations Centers (SOCs), providing essential functions for the collection, normalization, and analysis of security events gathered from various sources. These systems play a pivotal role in addressing the growing complexity of cyber threats by enabling the efficient detection and management of security incidents through comprehensive data processing and event correlation [1].

In turn machine learning (ML) offers powerful tools for analyzing large datasets and uncovering hidden patterns and anomalies. When integrated into SIEM systems, ML significantly enhances the system's ability to anomaly detection, incident prediction, automation of analysis, adaptability.

The objective of this research is to investigate and address emerging challenges in the domain of event management and data security by developing an advanced Security Information and Event Management (SIEM) framework integrated with machine learning components. The aim is to advance the state-of-the-art in event management and data security by providing a comprehensive and innovative SIEM solution that leverages machine learning to tackle the evolving and increasingly complex cyber threat landscape. A key goal of this research is to enhance the efficiency and accuracy of incident detection, response, and resolution processes. By employing machine learning algorithms, the proposed system aspires to create a self-learning framework capable of identifying previously unknown threats and responding to them in real time.

ML models can learn the typical behavior of systems and identify deviations from the norm, which may indicate the presence of security threats [2]. This allows for more dynamic and effective detection of attacks that would otherwise go unnoticed by rule-based systems. By leveraging historical data and patterns, ML can predict potential security incidents, enabling preemptive measures to be taken before an attack occurs. This predictive capability greatly improves the proactive nature of SIEM systems [3]. ML enables the automation of data analysis processes, reducing the reliance on human intervention and significantly speeding up the detection and response to threats. This leads to a more efficient handling of large volumes of security-related data. Also, one of the key strengths of ML is its ability to adapt to new and evolving threats. Unlike static systems, machine learning models can evolve in response to changing conditions, making them more effective in detecting and mitigating novel threats over time.

Incorporating machine learning into SIEM systems thus enhances their overall efficiency, making them more capable of addressing the complexities of modern cybersecurity challenges [4].

This research focuses on the application of machine learning components to enhance the effectiveness of event management and data security systems. Traditional SIEM frameworks rely on correlation rules to identify events associated with security threats. By incorporating machine learning, the proposed system enables SIEM frameworks to autonomously learn from security event data, allowing for the detection of previously unknown and emerging threats [5, 6].

2. Methods

The research area for this project focuses on the development and evaluation of a machine learning-based alert scanning system within a SIEM framework. The primary objective is to enhance detection and incident resolution capabilities through the application of machine learning techniques. The research methodology involves several key steps: first, conducting a comprehensive literature review to understand the current implementation of SIEM systems, particularly those incorporating machine learning; second, developing and deploying an automated alert scanning system; and third, testing the system using real-world cyber-attack scenarios to analyze its performance and effectiveness in detecting and responding to threats. The results from these tests will be used to refine and optimize the system's capabilities.

The data utilized in this study was gathered from multiple sources to support the development and evaluation of the SIEM framework. First, correlation rules were employed, which enable automatic actions to be triggered based on real-time events received by the ObjectServer, thereby reducing the number of events that operators need to troubleshoot in the Event Viewer. Second, Sigma rules, an open-source format designed for easy description of significant log events, were incorporated. This format is highly adaptable and can be applied to various types of log files, facilitating clear and simple rule creation. Lastly, data from the Incident Response Platform (IRP) system was collected post-implementation, including detection cases and response times, to further analyze and enhance the system's operational performance [7].

The data analysis process began with the preprocessing stage, which involved cleaning and standardizing the collected log records to facilitate easier investigation and decision-making. This step ensured that the data was normalized, transforming various log formats into a common structure that could be efficiently processed by the SIEM framework. The system was designed to generate alerts when potential threats were detected, allowing for automated responses or recommendations for manual interventions. The results produced by the framework guided the engineers in refining the system, which included updating signatures, adjusting rules, training additional machine learning models, and modifying other aspects of the system's configuration to enhance its performance.

The tools and techniques employed in this study were critical to the successful development and evaluation of the SIEM framework. Data checking involved identifying and referencing the appropriate documentation for the programs used, ensuring the accurate downloading and configuration of correlation rules and their integration into the SIEM system. Network monitoring tools, such as the ELK stack and Splunk, were employed to track network activity and identify trends that could signal potential journal alerts. These tools were also used for network activity monitoring and pattern analysis to detect possible security anomalies. Version control systems, like the ELK stack, were utilized to manage different versions of the SIEM system, ensuring that port conflicts and other potential issues were addressed [8].

Additionally, a test environment was established by acquiring the necessary system images to ensure proper operation of the framework. Finally, testing and assessment tools were applied to evaluate the effectiveness of the SIEM system when integrated with machine learning. This evaluation included the use of software testing and performance assessment methodologies to measure the system's overall viability.

The development process begins with a foundational understanding of machine learning algorithms, encompassing various types of attacks, their behaviors, signatures, and the data embedded in log files. This knowledge is then integrated into the architecture of the scanning system, enhancing its capabilities for more effective alarm detection and incident resolution.

The next step involves training the machine learning algorithms on datasets derived from MITRE attack samples, enabling the system to analyze log files and detect anomalies. In this context, artificial intelligence (AI) functions as the decision-making component, allowing the system to predict and categorize potential threats with improved speed and accuracy [9].

A key feature of this approach is real-time scanning, which supports continuous monitoring and immediate response upon the detection of an alert. This real-time capability is crucial in reducing the workload on Level 1 (L1) engineers by automating much of the initial threat detection process.

Finally, the system generates response scenarios, providing actionable recommendations to users and alerting human supervisors for further intervention when necessary. The method is designed to offer clear, phased responses to identified threats, ensuring prompt and appropriate actions to mitigate risks. Reducing information security risks is most important for critical information and communication infrastructure systems [10, 11].

Figure 1 outlines the various phases and their corresponding descriptions in the development and implementation of the SIEM system integrated with machine learning. Each phase represents a critical step in the system's operation, from data analysis to threat detection and response.

Each phase represents a critical step in the system's operation, from data analysis to threat detection and response. These phases are integral to ensuring the system's ability to predict, detect, and respond to cyber threats effectively. Above is a detailed summary of the phases and their descriptions. Each phase in this table contributes to the overall robustness and efficiency of the SIEM system, ensuring that it can handle complex and evolving cybersecurity challenges.

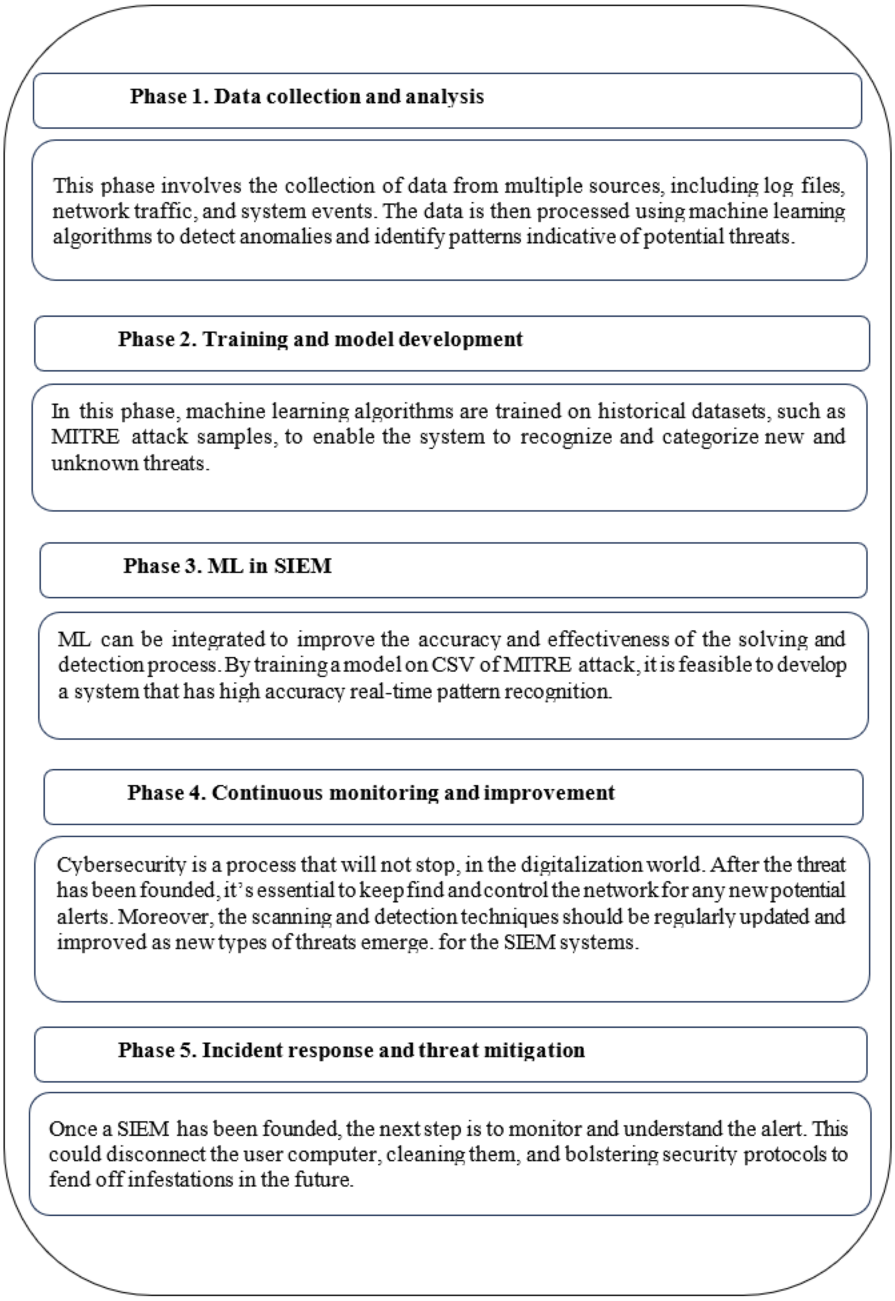


Figure 1. Phases and their corresponding descriptions of the SIEM system integrated with ML

3. Results and discussion

Figure 2 below presents the workflow of a Security Information and Event Management (SIEM) system integrated with machine learning (ML) to enhance threat detection and response.

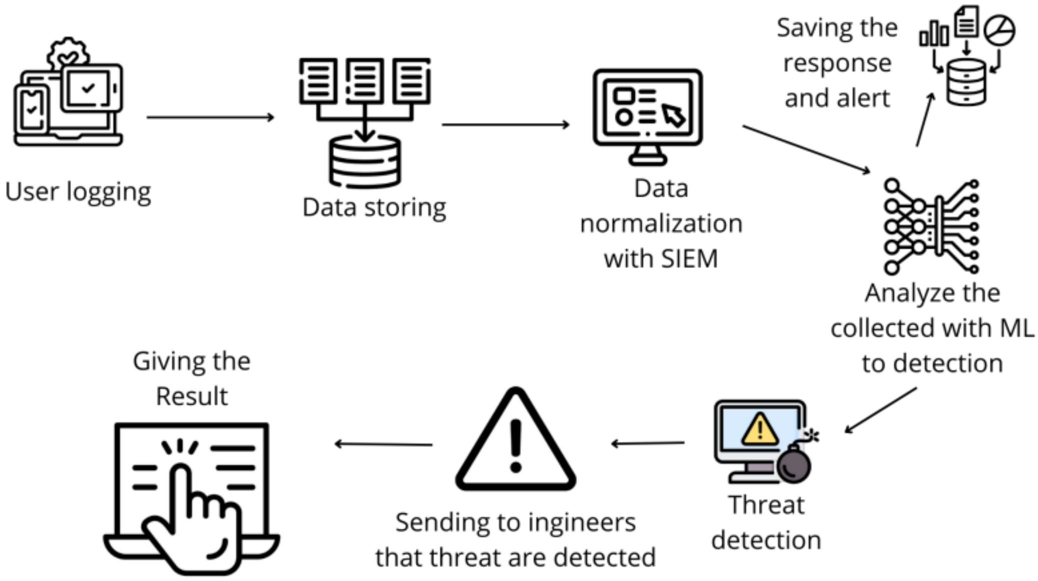


Figure 2. Workflow of SIEM System with Machine Learning for Threat Detection

According to figure 2 we can state, that the system begins by collecting user activities and logging data from various sources such as endpoints, servers, and network devices. These logs capture information about user actions and system events. The collected data is then securely stored in a centralized database for further processing. This ensures that all relevant information is accessible for analysis and threat detection. The stored data undergoes normalization, where it is standardized into a common format by the SIEM system. This step ensures that data from different sources can be analyzed uniformly and efficiently. The normalized data is analyzed using machine learning algorithms to detect anomalies or patterns indicative of potential security threats. The ML model continuously learns from historical data to improve its accuracy in identifying emerging threats. Based on the ML analysis, the system identifies potential threats and generates alerts when suspicious activity is detected. Once a threat is detected, the system sends alerts to engineers or security teams, notifying them of the potential threat for further investigation and response. The system provides recommendations and detailed information about the detected threat. The responses, alerts, and actions taken are saved for future reference and compliance reporting. This workflow ensures continuous monitoring, proactive threat detection, and timely response, improving overall cybersecurity through the integration of machine learning and SIEM technologies.

The ELK stack we used is a combination of four tools: Elasticsearch, Logstash, Kibana, and Filebeat. These tools work together to ensure the collection, processing, and analysis of large volumes of data. Filebeat is responsible for sending logs to Logstash, which processes and filters the data before indexing it in Elasticsearch. Kibana, in turn, provides real-time visualization and analysis of the data, enabling deeper understanding and monitoring of events occurring within the system.

The server was deployed with the installation of DVWA (Damn Vulnerable Web Application), a web application designed for penetration testing. This application allows users to enhance their skills in information security by offering a wide range of web vulnerabilities of varying complexity. It is equipped with a simple graphical interface, facilitating interaction and testing. Figure 3 presents the logs stored in Elasticsearch, which are visualized through the Kibana interface.

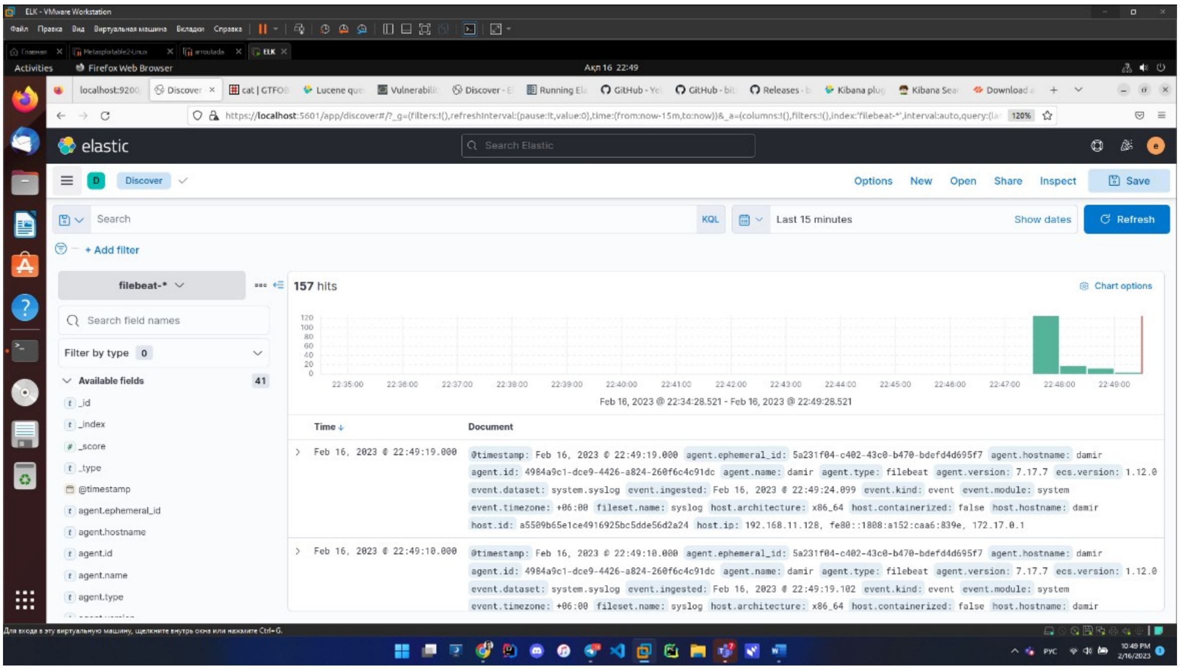


Figure 3. ELK system

As part of this study, a ML algorithm in Python was developed to automatically send alerts to the Layer 1 of SOC via a Telegram bot. The algorithm ensures timely escalation of incidents, which allows for a prompt response to potential threats and minimizes risks to information security. Consequently, Figure 4 shows an alert sent via a Telegram bot containing key information about the nature of the detected attack.

Figure 4. Telegram-bot for alerts from SIEM

This alert in Figure above was generated based on data processed by the machine learning system and included several important parameters that facilitate accurate identification of the incident and its subsequent handling. Firstly, the message specifies the IP address from which suspicious activity was detected. This parameter is a critical indicator for identifying the source of a potential threat and allows analysts to quickly take further actions, such as blocking or analyzing network traffic originating from the given address.

Second, the date and time of the incident are included in the notification, allowing precise temporal correlation of the event and determining exactly when the attack occurred. This information is crucial for log analysis and correlating with other security events within the system.

Additionally, the alert contains information about the type of attack, which is classified based on data analysis and the machine learning model. The attack type helps analysts understand the nature of the threat, whether it is an attempt at unauthorized access, a DDoS attack, or another form of cyberattack.

Thus, the alert sent via Telegram provides a detailed message that gives the second-line support all the necessary information for timely response. This automated approach significantly reduces the time spent on incident analysis and improves the overall efficiency of the security system.

After downloading the CSV file, the next step is to train the machine learning algorithm and verify its functionality as shown in Figure 5.

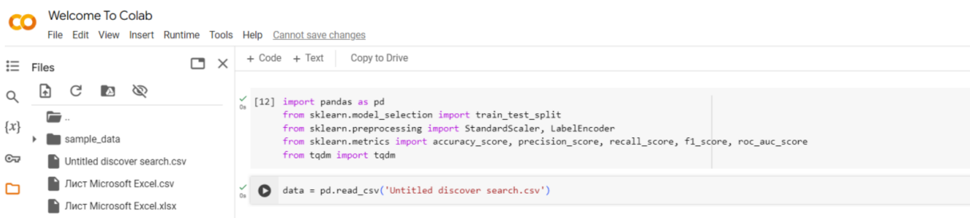


Figure 5. Code review

Additionally, the SIEM collects logs and security events from various sources like firewalls, intrusion detection systems, etc. These logs are processed and cleaned, as SIEM data tends to be raw and unstructured. Preprocessing may involve transforming categorical data, normalizing values, and handling missing data. Features such as IP addresses, ports, timestamps, and other event attributes are extracted. This is a crucial step for any ML model to detect patterns or anomalies. Machine learning models can be trained to detect security events such as anomalies, intrusion attempts, or malicious activities. Examples of models used in cybersecurity are:

- Supervised Learning Models: Decision Trees, Random Forest, SVM, etc., are used for classifying known threats (requires labeled data).
- Unsupervised Learning Models: Anomaly detection models (e.g., Isolation Forest, DBSCAN) can be used to detect unknown threats or outliers.
- Deep Learning Models: Neural networks can be used for more complex intrusion detection.

The code shown in Figure 6 is creating a **pandas DataFrame** to store the evaluation results of several machine learning models and printing it.

```
results = pd.DataFrame({
    'Model': ['SVM', 'Random Forest', 'Decision Tree', 'AdaBoost'],
    'Accuracy': [svm_results[0], rf_results[0], dt_results[0], ab_results[0]],
    'Precision': [svm_results[1], rf_results[1], dt_results[1], ab_results[1]],
    'Recall': [svm_results[2], rf_results[2], dt_results[2], ab_results[2]],
    'F1 Score': [svm_results[3], rf_results[3], dt_results[3], ab_results[3]],
    'AUC-ROC': [svm_results[4], rf_results[4], dt_results[4], ab_results[4]]
})

print(results)
```

Figure 6. Creation of the algorithms

A DataFrame named results is created using the pd.DataFrame() function. This DataFrame contains various performance metrics for four machine learning models:

- 'SVM' (Support Vector Machine)
- 'Random Forest'
- 'Decision Tree'
- 'AdaBoost'

This code is designed to compare the performance of four different machine learning models (SVM, Random Forest, Decision Tree, and AdaBoost) using multiple evaluation metrics (Accuracy, Precision, Recall, F1 Score, AUC-ROC). The results are organized in a structured DataFrame for easy comparison and analysis.

```
[ ] x_train = x_train / 255.0
    x_test = x_test / 255.0

[ ] y_train = tf.keras.utils.to_categorical(y_train, 10)
    y_test = tf.keras.utils.to_categorical(y_test, 10)

[ ] model = Sequential([
        Conv2D(32, (3, 3), activation='relu', input_shape=(28, 28, 1)),  # Convolutional layer
        MaxPooling2D((2, 2)),                                           # Pooling layer
        Flatten(),                                                       # Flatten layer
        Dense(128, activation='relu'),                                  # Dense layer
        Dense(10, activation='softmax')                                 # Output layer
    ])

[ ] model.compile(optimizer='adam',
                  loss='categorical_crossentropy',
                  metrics=['accuracy'])

[ ] model.fit(x_train, y_train, epochs=5, validation_data=(x_test, y_test))
```

Figure 7. Model training process

As shown in Figure 7, each class could represent a different type of security event or attack. This convolutional layer extracts features from input data (such as event logs or patterns). In SIEM, this could be used to detect spatial or temporal patterns in log data. This is used for multi-class classification, where each class corresponds to a potential threat or security event. the trained model would be used to predict potential security incidents or classify various types of security events based on real-time data logs or historical data. The accuracy metric will show how well the model can detect or classify security-related anomalies in these logs.

The model trained is a Convolutional Neural Network (CNN). The model is a CNN designed for multi-class classification. This architecture is typically used for image data, but in the context of SIEM, it could be adapted to classify security events or detect anomalies from event logs by treating the logs in a similar structured manner. With the integration of a CNN model, this data can be analyzed more efficiently to detect anomalies, classify threats, and provide real-time alerts.

The application of CNN in SIEM systems for enhanced detection and management of security incidents is a promising approach, but it requires careful analysis of algorithm complexity and execution time. The main task of SIEM systems is to process massive data streams in real time to promptly detect threats and anomalies. CNN, as one of the powerful machine learning tools, can be applied to identify complex patterns in data, but its computational complexity is an important factor that affects practical applicability.

CNN are designed to extract local features, making them particularly suitable for analyzing time series and logs that flow into SIEM systems. One of the key factors affecting the execution time of CNN algorithms is their high computational cost, associated with the need to process large amounts of data and train the model on a large number of parameters. CNN execution time depends on the following aspects:

- **Data volume**: In SIEM systems, data streams can be enormous (e.g., network traffic, event logs, audit logs), which requires scalable solutions. The larger the volume of data, the longer the processing will take at the level of convolutions and fully connected layers.
- **Execution optimization**: To accelerate CNN execution, specialized hardware, such as Graphics Processing Units (GPUs) or Tensor Processing Units (TPUs), is often used to enable parallel data processing. However, this requires additional resources and may increase the cost of implementing such solutions in SIEM systems.
- **Training and inference time**: In SIEM systems, both the speed of training the model and the real-time inference time is important. CNNs require considerable training time, but deployed models must quickly and efficiently process new data to detect anomalies. Optimization methods such as data preprocessing and dimensionality reduction can be applied to this end.

Despite the high complexity of Convolutional Neural Networks, they can become a key tool for improving the accuracy and efficiency of threat detection in SIEM systems. However, their successful implementation requires considering computational costs and execution time, as well as employing optimization technologies to ensure fast and effective data analysis in real time. When the CNN model detects a security incident, it triggers alerts within the SIEM system. The SIEM can:

- Generate Alerts: Immediate alerts are sent to security analysts, flagging the nature of the threat (e.g., malware, phishing attack, insider threat).

– Automated Responses: The SIEM can be configured to respond automatically to certain types of incidents as shown in Figure 8. For example, blocking a suspicious IP address or isolating a compromised device from the network.

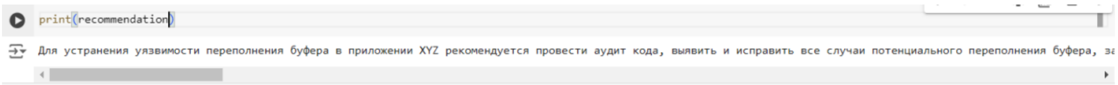


Figure 8. Results of integrating ML into SIEM

As shown above, system could automatically send recommendations in various cases, which minimize the human presence. By integrating a CNN model with a SIEM system, organizations can significantly enhance their threat detection capabilities. The ability of CNNs to recognize complex patterns and process large volumes of data makes them ideal for modern SIEM environments, where cybersecurity threats are growing increasingly sophisticated. This integration allows for more accurate classification of threats, real-time monitoring, and automated responses, helping organizations mitigate security risks more effectively.

For the setting up environment in this project we used Google Colab. This includes installing all the necessary libraries such as pandas, scikit-learn, and other essential packages for data manipulation and model evaluation. Integrate SIEM logs with this script, possibly via APIs or exporting data in CSV format.

We then upload our CSV file, ensuring the data is correctly imported. From there, we proceed to test the machine learning algorithm, splitting the data into training and test sets, and evaluating the model's performance by checking its accuracy and other relevant metrics. This process helps ensure that the code is functioning as expected and the algorithm is correctly identifying patterns in the data.

1. Train_test_split: used to split historical SIEM log data into training and test sets for model building and evaluation.
2. StandardScaler: Normalize numerical features in SIEM logs, such as the size of data transferred, or response time, to ensure ML algorithms perform better.
3. LabelEncoder: Convert categorical features like "event type" or "source type" into a numeric format for model training.
4. Metrics (accuracy_score, precision_score, etc.): These will help evaluate how well your ML model detects security incidents or anomalies from the logs. In an intrusion detection system, precision and recall are especially important for measuring false positives and true detection rates.
5. tqdm: This is useful for adding progress bars when processing large SIEM logs or during model training, which can take a long time.

Next Steps for Full Integration:

1. Data Ingestion: Integrate SIEM logs with this script, possibly via APIs or exporting data in CSV format.
2. Model Training: Choose or build a model that fits your use case (anomaly detection, classification, etc.).
3. Real-time Application: Once trained, the model could be integrated to work on real-time streams from SIEM, using Kafka, Logstash, or other log-streaming platforms.

We downloaded the CSV file, the next step is to train the machine algorithm and check whether it works correctly. We go to Google collab and start writing. First, we need to install all the necessary libraries and also upload our CSV file, and start testing and checking accuracy of the code.

This code is designed to compare the performance of four different machine learning models (SVM, Random Forest, Decision Tree, and AdaBoost) using multiple evaluation metrics (Accuracy, Precision, Recall, F1 Score, AUC-ROC). The results are organized in a structured DataFrame for easy comparison and analysis.

4. Conclusion

In conclusion, based on the information presented, an advanced solution is proposed for protecting against various attacks, such as phishing and cryptographic attacks, commonly faced by many organizations. To ensure the security of corporate data, it is essential to understand proper information storage methods, including the handling of passwords and files. Without such knowledge among employees, a company remains vulnerable to cyber threats, even when firewalls are in place. It is crucial to evaluate all possible protection strategies and implement necessary measures to secure sensitive data. Furthermore, in the event of an attack, rapid and accurate response is imperative, necessitating the development of an action plan to contain the threat and prevent its spread to other critical files.

The increasing sophistication and coordination of cyberattacks have led to the need for more advanced tools for protecting information systems, such as intrusion detection systems, antivirus software, and firewalls. Each of these security tools generates streams of events with varying levels of detail, and often, only by correlating events from multiple systems can an attack be accurately detected.

To further improve efficiency, the automation of incident response processes through the integration of SOAR systems and the development of custom scenarios for SIEM is recommended. Automation is becoming increasingly vital in the field of information security, playing a significant role across many areas. This approach enables continuous monitoring of threats specific to an organization.

The developed system has several key objectives, including data collection and normalization, data correlation, alert generation, visualization dashboard creation, data storage organization, search and analysis, and report generation. The system's advantages lie in its use of reliable open-source software, which eliminates the need for financial investment and increases the efficiency of SOC analysts.

Several significant milestones were achieved in the project, including the installation of ELK and TheHive on separate CentOS servers, the configuration of one CentOS server, and the deployment of DVWA on another.

Additionally, a Telegram bot was developed to display alerts, configured to send notifications for multiple brute-force attacks. The VirusTotal analyzer was integrated into TheHive and MISP databases to detect and immediately remove malicious files.

Overall, this system offers a comprehensive data processing solution, utilizing software and hardware tools capable of detecting and responding to critical incidents and events.

Acknowledgements

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19175746).

References

1 Bhatt S. N., Manadhata P. K., Zomlot L. The operational role of security information and event management systems, IEEE Security Privacy Magazine. 2014. № 12. P. 35–41.

2 Thakur K., Kopecky S., Nuseir M., Ali L., Qiu M. An Analysis of Information Security Event Managers, IEEE 3rd International Conference on Cyber Security and Cloud Computing (CSCloud). 2016. Vol. 6. P. 210-215. doi: 10.1109/cscloud.2016.19.

3 Holm H. Signature based intrusion detection for zero-day attacks: (Not) a closed chapter?, 47th Hawaii International Conference on System Sciences. 2014. P. 4895-4904. doi: 10.1109/hicss.2014.600.

4 Di Sarno C., Garofalo A., Matteucci I., Vallini M. A novel security information and event management system for enhancing cyber security in a hydroelectric dam, International journal of critical infrastructure protection. 2016. Vol. 13. P. 39–51.doi: 10.1016/j.ijcip.2016.03.002.

5 Jordan M., Mitchell T. M. Machine learning: Trends, perspectives, and prospects, Science. 2015. Vol. 349. P. 255–260.

6 Zhou Zh. Machine learning. Springer nature. 2021. 459 p.

7 Naqa I. E., Murphy M. J. What is machine learning? Springer eBooks. 2015.

8 Alzubi J., Nayyar A., Kumar A. Machine learning from theory to algorithms: an overview, Journal of Physics. 2018. № 1142. P. 1-15.

9 Aljawarneh S., Aldwairi M., Yassein M. B. Anomaly-based intrusion detection system through feature selection analysis and building hybrid efficient model, Journal of Computational Science. 2018. № 25. P. 152-160.

10 Aidynov T., Goranin N., Satybaldina D., Nurusheva A. A systematic literature review of current trends in electronic voting system protection using modern cryptography, Applied sciences. 2024. Vol. 14, № 7.1235
11 Abdiraman A., Goranin N., Balevicius S., Nurusheva A., Tumasonienė I. Application of multicriteria methods for improvement of information security metrics, Sustainability. 2023. Vol. 15, № 10.

Қауіпсіздік оқиғаларын тиімді анықтау мен басқарудағы SIEM жүйелеріндегі машиналық оқыту алгоритмдері

Ә. Нурушева [1], Ә. Әбдіраман [2], Д. Сатыбалдина [3], Н. Горанин [4]
[1,3] Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтбаев көш., 2, Астана, Қазақстан
[2] Astana IT University, Мәңгілік ел көш., 55/11, Астана, Қазақстан
[4] Гедиминас атындағы Вильнюс техникалық университеті (VilniusTech), Sauletekio көш., 11, 10223, Вильнюс, Литва

Аңдатпа. Киберқауіптер күрделене түскен сайын, қауіпсіздік туралы ақпаратты және оқиғаларды басқарудың (SIEM) дәстүрлі жүйелері осы қауіптерді тиімді анықтауда және оларға жауап беруде қиындықтарға тап болады. Бұл зерттеу қауіпті анықтауды, аномалияларды анықтауды және автоматтандырылған оқиғаларға жауап беруді жақсарту үшін машиналық оқытумен (ML) біріктірілген SIEM жүйесінің дамуын ұсынады. ML интеграциясы SIEM жүйесіне әдеттегі ережелерге негізделген тәсілдерден шығуға және тарихи деректерден үйрену арқылы бұрын белгісіз қауіптерді анықтауға мүмкіндік береді. Жүйе журналдар мен желілік трафиктің ауқымды деректерін талдау, нақты уақыт режимінде ақпарат беру және жалған позитивтерді азайту үшін озық алгоритмдерді қолданады. Бұл SIEM негізгі мүмкіндіктеріне аномалияны анықтау, болжамды аналитика және контекстік деректер негізінде динамикалық реттеуге мүмкіндік беретін бейімделу шектері кіреді. Жаңа және дамып келе жатқан киберқауіптерге бейімделе отырып, жүйе ықтимал шабуылдарға қарсы икемді және белсенді қорғанысты қамтамасыз етеді. Нәтижелер машиналық оқытуды SIEM жүйелеріне интеграциялау ұйымдарға жылдам өзгеретін цифрлық ландшафтта маңызды инфрақұрылым мен деректерді қорғауды қамтамасыз ететін тиімдірек, масштабталатын және бейімделген қауіпсіздік шешімін ұсына алатынын көрсетеді.

Түйін сөздер: киберқауіптер, машиналық оқыту, SIEM, ақпараттық қауіпсіздікті басқару, инциденттерге жауап беру, маңызды инфрақұрылым.

Алгоритмы машинного обучения в системах SIEM для усовершенствованного обнаружения и управления событиями безопасности

А. Нурушева [1], Ә. Әбдіраман [2], Д. Сатыбалдина [3], Н. Горанин [4]
[1,3] Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, Казахстан
[2] Astana IT University, ул. Мангилик ел, 55/11, Астана, Казахстан
[4] Вильнюсский Технический Университет им.Гедиминаса (VilniusTech), ул. Sauletekio 11, 10223, Вильнюс, Литва

Аннотация. По мере того, как киберугрозы становятся все более изощренными, традиционные системы управления информацией и событиями безопасности (SIEM) сталкиваются с трудностями в эффективном выявлении и реагировании на эти опасности. В этом исследовании представлена разработка системы SIEM, интегрированной с машинным обучением (ML) для улучшения обнаружения угроз, идентификации аномалий и автоматизированного реагирования на инциденты. Интеграция ML позволяет системе SIEM выйти за рамки традиционных подходов на основе правил, позволяя обнаруживать ранее неизвестные угрозы, обучаясь на исторических данных. Система использует передовые алгоритмы для анализа крупномасштабных данных журналов и сетевого трафика, предоставляя информацию в реальном времени и сокращая количество ложных срабатываний.

Ключевые особенности этой SIEM включают обнаружение аномалий, предиктивную аналитику и адаптивные пороговые значения, которые позволяют ей динамически подстраиваться на основе контекстных данных. Адаптируясь к новым и развивающимся киберугрозам, система обеспечивает более устойчивую и проактивную защиту от потенциальных атак. Результаты показывают, что интеграция машинного обучения в системы SIEM может предложить организациям более эффективное, масштабируемое и адаптивное решение по безопасности, обеспечивающее защиту критически важной инфраструктуры и данных в быстро меняющемся цифровом ландшафте.

Ключевые слова: киберугрозы, машинное обучение, SIEM, управление информационной безопасностью, реагирование на инциденты, критическая инфраструктура.

References

1 Bhatt S. N., Manadhata P. K., Zomlot L. The operational role of security information and event management systems, IEEE Security Privacy Magazine. 2014. № 12. P. 35–41.

2 Thakur K., Kopecky S., Nuseir M., Ali L., Qiu M. An Analysis of Information Security Event Managers, IEEE 3rd International Conference on Cyber Security and Cloud Computing (CSCloud). 2016. Vol. 6. P. 210-215. doi: 10.1109/cscloud.2016.19.

3 Holm H. Signature based intrusion detection for zero-day attacks: (Not) a closed chapter?, 47th Hawaii International Conference on System Sciences. 2014. P. 4895-4904. doi: 10.1109/hicss.2014.600.

4 Di Sarno C., Garofalo A., Matteucci I., Vallini M. A novel security information and event management system for enhancing cyber security in a hydroelectric dam, International journal of critical infrastructure protection. 2016. Vol. 13. P. 39–51.doi: 10.1016/j.ijcip.2016.03.002.

5 Jordan M., Mitchell T. M. Machine learning: Trends, perspectives, and prospects, Science. 2015. Vol. 349. P. 255–260.

6 Zhou Zh. Machine learning. Springer nature. 2021. 459 p.

7 Naqa I. E., Murphy M. J. What is machine learning? Springer eBooks. 2015.

8 Alzubi J., Nayyar A., Kumar A. Machine learning from theory to algorithms: an overview, Journal of Physics. 2018. № 1142. P. 1-15.

9 Aljawarneh S., Aldwairi M., Yassein M. B. Anomaly-based intrusion detection system through feature selection analysis and building hybrid efficient model, Journal of Computational Science. 2018. № 25. P. 152-160.

10 Aidynov T., Goranin N., Satybaldina D., Nurusheva A. A systematic literature review of current trends in electronic voting system protection using modern cryptography, Applied sciences. 2024. Vol. 14, № 7.

11 Abdiraman A., Goranin N., Balevicius S., Nurusheva A., Tumasonienė I. Application of multicriteria methods for improvement of information security metrics, Sustainability. 2023. Vol. 15, № 10.

Сведения об авторах:

Нурушева Әсел Муратқызы – PhD, ақпараттық қауіпсіздік кафедрасының доцент м.а., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтбаев к. 2, Астана, Қазақстан.

Әбдіраман Әлия Серғалиқызы - *байланыс үшін автор*, Интеллектуалды жүйелер мен киберқауіпсіздік департаментінің сеньор лекторы, Astana IT Univeristy, Мәңгілік ел көшесі, 55/11, Астана қ., Қазақстан.

Сатыбалдина Дина Жағыпарқызы - қауымдастырылған профессор, физика-математика ғылымдарының кандидаты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Ақпараттық қауіпсіздік және криптология ғылыми-зерттеу институтының директоры, Сәтбаев к. 2, Астана қаласы, Қазақстан.

Горанин Николай - профессор, PhD, Ақпараттық жүйелер кафедрасының меңгерушісі, Вильнюс Гедиминас Техникалық Университеті (VilniusTech), Sauletekio к. 11, 10223, Вильнюс, Литва.

Nurusheva Assel Muratovna – PhD, acting associate professor at the Department of Information Security, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, Kazakhstan.

Abdiraman Aliya Sergalikyzy – *Corresponding author*, senior lecturer of the Department of intelligent systems and cybersecurity, Astana IT University, Mangilik yel Street, 55/11, Astana, Kazakhstan.

Satybaldina Dina Zhagyparovna – Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Director of the Research Institute of Information Security and Cryptology at the L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev 2, Astana, Kazakhstan.

Goranin Nikolaj – Professor, Associate Professor, Professor at the Department of Information Systems and the Head of the department, Vilnius Gediminas Technical University (VilniusTech), Sauletekio al. 11, 10223, Vilnius, Lithuania.

Received: 09.09.2024. Revised: 25.09.2024.
Approved: 29.09.2024. Available online: 30.09.2024.

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2024, Vol. 148, №3, P. 18-25.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 27.17.19

ЯДРО ТРЕУГОЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ РАНГА 3 [1]

Ш.У.Абуталипова
Университет Астана IT, проспект Мангилик Ел 55/11, Бизнес-центр ЭКСПО, блок С1, Астана, 010000, Казахстан
(E-mail: abutalipova.sh@gmail.com)

Аннотация. Пусть $k[x_1, x_2, x_3]$ — алгебра многочленов от переменных x_1, x_2, x_3 над произвольным полем k характеристики 0. В настоящей работе рассматриваются треугольные дифференцирования вида $D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3$, где $\alpha, \beta, \gamma \in k$, алгебры $k[x_1, x_2, x_3]$. Хорошо известно, что треугольные дифференцирования алгебры $k[x_1, x_2, x_3]$ являются локально нильпотентными. Алгоритм А. Ван ден Эссена для вычисления ядра локально нильпотентного дифференцирования алгебры многочленов $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем k характеристики 0 использует отображение Ж. Диксмье. Теорема М. Маяниши утверждает, что ядро локально нильпотентного дифференцирования алгебры многочленов от трех переменных над полем характеристики 0 является алгеброй многочленов от двух переменных. В данной работе построен совершенно новый алгоритм для вычисления ядра треугольного дифференцирования алгебры многочленов ранга 3 над полем характеристики 0.

Ключевые слова: кольцо многочленов, алгебра, алгебраическая независимость, локально нильпотентные дифференцирования, ядро.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2024/3.2

2000 Mathematics Subject Classification: 13N15

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференцирование встречается во всех разделах математики и имеет особое значение благодаря своим приложениям в естественных науках, экономике и других сферах. Общеизвестно, что множество дифференцирований любой алгебры относительно операции коммутирования $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ образует алгебру Ли, где D_1, D_2 - произвольные дифференцирования этой алгебры. Пусть $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над произвольным полем k.

Определение 1. *Дифференцированием алгебры A назовем линейное отображение D, удовлетворяющее правилу Лейбница, т.е. для любых $a, b \in A$ выполняется следующее равенство*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

Определение 2. *Ядром дифференцирования D называется множество $KerD = \{a \in A, D(a) = 0\}$.*

[1]Работа выполнена в рамках проекта AP23487886 МНиВО

Известно, что [45] ядро дифференцирования алгебры A является подалгеброй алгебры A и порождающее множество ядра этого дифференцирования исследовано Х. Дерксеном [2]. Более того Х. Дерксен связывает эту задачу с 14-й проблемой Гильберта. М. Нагата и А. Новицкий [3] доказали, что в случае поля характеристики 0 ядро ненулевого дифференцирования кольца многочленов от двух переменных является кольцом от одной переменной.

Определение 3. *Дифференцирование D алгебры A называется локально нильпотентным, если для любого $a \in A$ существует натуральное число n такое, что $D^n(a) = 0$.*

Отметим, что в случае поля характеристики 0 ядро локально нильпотентного дифференцирования алгебры A вычисляется по алгоритму А. Ван ден Эссена [45]. Данный алгоритм использует слайс дифференцирования и отображение Ж. Диксмье [4].

Пусть D - произвольное локально нильпотентное дифференцирование алгебры A. Известно [5], что экспоненциальное отображение

$$expD(g) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(g), g \in A,$$

является автоморфизмом алгебры A. Например, известный автоморфизм М. Нагаты является экспоненциальным отображением, соответствующий локально нильпотентному дифференцированию $D = -2x_2\partial_1 + x_3\partial_2$ алгебры многочленов $k[x_1, x_2, x_3]$ над полем k характеристики 0, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, 2$ и напоминаем, что дикость этого автоморфизма была доказана У.У. Умирбаевым и И.П. Шестаковым в [6].

Определение 4. *Два многочлена f и g над полем k называются алгебраически независимыми, если не существует многочлен от двух переменных h с коэффициентами из поля k такой, что $h(f, g) = 0$.*

М. Маяниши описал ядро локально нильпотентного дифференцирования алгебры $A = k[x_1, x_2, x_3]$, точнее ими была доказана следующая

Теорема 1 (см. [7]). *Пусть D - ненулевое локально нильпотентное дифференцирование алгебры $A = k[x_1, x_2, x_3]$. Тогда $KerD = k[f, g]$ для некоторых алгебраически независимых многочленов f и g над полем k.*

Например, дифференцирование $D = \alpha x_i^l x_j^m \partial_k$, где i, j, k различные числа множества $\{1, 2, 3\}$, является локально нильпотентным и его ядро есть $k[x_i, x_j]$. По сути здесь алгебраическая независимость x_i и x_j очевидна, доказать алгебраическую независимость более сложных многочленов требует немало усилий. Обычно в таких случаях применяются различные алгоритмы, например, основанные на методе базисов Гребнера [8]. Существует широкий класс локально нильпотентных дифференцирований колец многочленов, так называемые треугольные дифференцирования, то есть дифференцирования вида

$$D = a_1(x_2, \ldots, x_n)\partial_1 + ... + a_{n-1}(x_n)\partial_{n-1} + a_n\partial_n$$

где $a_{i-1} \in k[x_i, \ldots, x_n]$ для всех $2 \leq i \leq n$, $a_n \in k$ и ∂_i - обычное частное дифференцирование по переменной x_i.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Сначала рассмотрим пример треугольного дифференцирования алгебры многочленов от трех многочленов. Пусть

$$D = x_2^2 x_3^3 \partial_1 + 4x_3^4 \partial_2 + 3\partial_3 \tag{1}$$

— дифференцирование алгебры многочленов $Q[x_1, x_2, x_3]$ над полем Q. Найдем порождающие ядра дифференцирования (1) используя обычное частное производное и интегрирование. Осуществим следующие вычисления:

$$D(x_1) = x_2^2x_3^3\partial_1(x_1) + 4x_3^4\partial_2(x_1) + 3\partial_3(x_1) = x_2^2x_3^3 = f_1,$$

$$\frac{1}{3}\int f_1 dx_3 = \frac{1}{3}\int x_2^2x_3^3 dx_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}{x_2}^2x_3^4 + C = g_1,$$

$$D(x_1 - g_1) = D(x_1) - D(g_1) = f_1 - \frac{2}{3}x_2x_3^8 - f_1 = -\frac{2}{3}x_2x_3^8 = -f_2,$$

$$\frac{1}{3}\int f_2 dx_3 = \frac{1}{3}\int \frac{2}{3}x_2x_3^8 dx_3 = \frac{2}{81}x_2x_3^9 + C = g_2,$$

$$D(x_1 - g_1 + g_2) = D(x_1 - g_1) + D(g_2) = -f_2 + f_2 + \frac{8}{81}x_3^{13} = \frac{8}{81}x_3^{13} = f_3,$$

$$\frac{1}{3}\int f_3 dx_3 = \frac{1}{3}\int \frac{8}{81}x_3^{13} dx_3 = \frac{4}{1701}x_3^{14} + C = g_3,$$

где $C \in Q$. Как видно в каждом шаге вычисления добавляется член для снижения степени x_2. Заметим, что

$$D(x_1 - g_1 + g_2 - g_3) = 0.$$

Это значит, что многочлен

$$f = x_1 - g_1 + g_2 - g_3 = x_1 - \frac{1}{12}x_2^2x_3^4 + \frac{2}{81}x_2x_3^9 - \frac{4}{1701}x_3^{14} + C$$

лежит в ядре дифференцирования (1) и он является претендентом для одного порождающего этого ядра. Теперь с помощью аналогичных вычислений находим еще один многочлен $g = x_2 - \frac{4}{15}\ x_3^5 + C,$ который тоже лежит в ядре дифференцирования (1). Используя Теорему М. Маяниши можем утверждать, что кольцо $Q[f,g]$ ядром дифференцирования (1). Заметим, что выше использованный метод можно обобщать для всех треугольных дифференцирований определенного вида кольца многочленов от трех переменных.

Пусть $A = k[x_1, x_2, x_3]$ — алгебра многочленов от переменных x_1, x_2, x_3 над полем k характеристики 0 и пусть

$$D = a_1(x_2, x_3)\partial_1 + a_2(x_3)\partial_2 + a_3\partial_3$$

— треугольное дифференцирование алгебры A, где многочлены $a_1(x_2, x_3) \in k[x_2, x_3]$, $a_2(x_3) \in k[x_3]$ и $a_3 \in k$. В этой работе мы ограничимся рассмотрением треугольных дифференцирований вида

$$D = \alpha x_2^l x_3^m\partial_1 + \beta x_3^n\partial_2 + \gamma\partial_3, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in k$ и не все равные нулю. Очевидно, что если D содержит только одно частное дифференцирование ∂_i, тогда $KerD = k[x_j, x_k]$ для различных индексов $i, j, k \in 1, 2, 3$.

Далее рассмотрим другие случаи.

Случай 1: Предположим, что все коэффициенты в (2) отличны от нуля. Тогда вычисляя образ x_1 относительно отображения (2), получим

$$D(x_1) = \alpha x_2^l x_3^m. \tag{3}$$

Далее образ $D(x_1)$ попытаемся представить через интеграл

$$\frac{1}{\gamma}\int \alpha x_2^l x_3^m dx_3 = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{1}{m+1}x_2^l x_3^{m+1} + C, \tag{4}$$

где константу C нам удобно будет рассматривать как элемент поля чтобы дополнительные элементы не появлялись. Используя (3) и (4) вычислим

$$D(x_1 - \frac{\alpha}{\gamma}\frac{1}{m+1}x_2^l x_3^{m+1} + C) = -\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+1}. \tag{5}$$

Теперь, чтобы получить $\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+1}$, нам нужно будет рассмотреть его как следующий интеграл

$$\frac{1}{\gamma}\int\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+1}dx_3=\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{\alpha\beta}{m+n+2}\cdot\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+2}+C. \tag{6}$$

Получим равенство аналогично (5)

$$D(x_1-\frac{\alpha}{\gamma}\frac{1}{m+1}x_2^lx_3^{m+1}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{\alpha\beta}{m+n+2}\cdot\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+2}+C)=$$

$$\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2}\frac{l}{m+1}\frac{l-1}{m+n+2}x_2^{l-2}x_3^{m+2n+2},$$

Таким образом можем продолжить, пока образ D не получится 0. Если обозначить правые части равенств (3) и (4) через $f_1,g_1,$ а правые части равенства (5) и (6), соответственно, через $f_2,g_2,$ то имеем

$$D(x_1)=f_1,\quad \frac{1}{\gamma}\int f_1dx_3=g_1,$$

$$D(x_1-g_1)=f_2,\quad \frac{1}{\gamma}\int f_2dx_3=g_2.$$

Более того

$$deg(f_1)=m+l,\quad deg(g_1)=deg(f_1)+1,\quad deg_{x_2}(f_1)=deg_{x_2}(g_1)=l$$

$$deg(f_2)=m+l+n,\quad deg(g_2)=deg(f_2)+1,\quad deg_{x_2}(f_2)=deg_{x_2}(g_2)=l-1.$$

Теперь, сохраняя все эти обозначения, можем определить следующее рекуррентное соотношение

$$D(x_1)=f_1,\quad \frac{1}{\gamma}\int f_idx_3=g_i, i=1,2,\ldots \tag{7}$$

где

$$deg(g_i)=m+l+(i-1)n+1, deg_{x_2}(g_i)=l-(i-1),$$

и

$$D(x_1+\sum_{r=1}^{i}(-1)^rg_r=(-1)^if_{i+1},\quad deg(f_{i+1})=m+l+in, \tag{8}$$

Отметим, что этот процесс будет продолжаться, пока не получится $deg_{x_2}(g_(l+1))=0,$ то есть

$$\frac{1}{\gamma}\int f_{l+1}dx_3=g_{l+1},\quad deg(g_{l+1})=m+l(n+1),$$

и причем $deg(g_{l+1})=deg_{x_3}(g_{l+1})$. Следующая лемма описывает свойства многочленов f_i,g_i из соотношений (7)-8).

Лемма. *Пусть D — дифференцирование вида (2) и f_i,g_i — многочлены, определенные в (7)-(8). Тогда*

$$D(x_1+\sum_{r=1}^{l+1}(-1)^rg_r)=0, \tag{9}$$

где $deg(x_1+\sum_{r=1}^{l+1}(-1)^rg_r)=m+l(n+1).$

Доказательство. Из линейного свойства дифференцирования D и соотношении (7)-8) следует справедливость равенства (9). В действительности оно означает $x_1+\sum_{r=1}^{l+1}(-1)^rg_r\in KerD$. Вдобавок можно отметить, что

$$f_{l+1}=f_{l+2}=\ldots=0,\quad g_{l+2}=g_{l+3}=\ldots=C, C\in k.$$

Лемма доказана.

Теперь вычислим образ x_2 относительно дифференцирования (2).

$$D(x_2) = \beta x_3^n = f_1, \tag{10}$$

и

$$\frac{1}{\gamma}\int f_1 dx_3 = \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{n+1}x_3^{n+1} + C = h_1, \tag{11}$$

причем $D(x_2 - h_1) = 0$, то есть $x_2 - g_1$ лежит в ядре дифференцирования (2). Таким образом, претендентами для порождающих кольца $KerD$ дифференцирования (2) являются многочлены

$$f = x_1 + \sum_{r=1}^{l+1}(-1)^r g_r, \quad g = x_2 - h_1, \tag{12}$$

где все g_i как многочлены не зависят от переменной x_1, а h_1 от переменных x_1, x_2.

Теперь нам остается показать, что полученные многочлены f и g являются алгебраически независимыми. Обычно при доказательстве алгебраической независимости используется алгоритм Б. Бухбергера [7]. Здесь нам требуются автоморфизмы колец многочленов из [5], а именно

Определение 5. *Полиномиальный автоморфизм*

$$F = (F_1, \ldots, F_n) : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]$$

называется треугольным, если его компоненты $F_i \in k[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n]$, *для любого* $1 \le i \le n$.

Также известно, что в действительности компоненты F_i имеют следующий вид

$$F_i = \lambda_i x_i + a_i,$$

где λ_i ненулевой элемент поля k и $a_i \in k[x_{i+1}, \ldots, x_n]$.

Рассмотрим отображение $\phi : k[x_1, x_2, x_3] \to k[x_1, x_2, x_3]$ такое, что

$$\phi(x_1) = f, \quad \phi(x_2) = g, \quad \phi(x_3) = x_3, \tag{13}$$

где f и g вида (12). Заметим, что ϕ является треугольным автоморфизмом кольца $k[x_1, x_2, x_3]$ и x_1, x_2, x_3 алгебраически независимые элементы, то их образы тоже являются алгебраически независимыми. Более того, любая подсистема алгебраически независимой системы является алгебраически независимой.

Теорема 2. *Пусть* $A = k[x_1, x_2, x_3]$ *–– кольцо многочленов от переменных* x_1, x_2, x_3 *над полем* k, *характеристики* 0 *и пусть* D *–– дифференцирование вида (2). Тогда* $KerD = k[f, g]$, *где* f *и* g *– многочлены вида (12).*

Доказательство. Выше Теорема 2 была доказана для двух случаев:

1) Когда только один коэффициент дифференцирования (2) не равен нулю.

2) Когда все коэффициенты дифференцирования (2) отличны от нуля.

Для полного доказательства Теоремы 2 мы рассмотрим еще несколько случаев. Отметим, что виды многочленов f и g будут отличаться от (12) в каждом отдельном случае. И каждый раз мы воспользуемся Теоремой М. Маяниши и автоморфизмами вида (13), чтобы указать порождающие ядра конкретного рассматриваемого вида дифференцирования (2).

Случай 2: Пусть в (2) $\alpha = 0$, то есть

$$D = \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3, \quad \beta, \gamma \in k. \tag{14}$$

Легко заметим, что $x_1 \in KerD$ дифференцирования (14). Далее аналогично соотношениям (10), (11) получим,

$$D(x_2 - \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{n+1}x_3^{n+1}) = 0,$$

то есть ниже следующие многочлены

$$f = x_1, \quad g = x_2 - \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{n+1}x_3^{n+1}$$

являются порождающими ядра дифференцирования (14).

Случай 3: Пусть в (2) $\beta = 0$, то есть

$$D = \alpha x_3^l \partial_1 + \gamma \partial_3, \quad \alpha, \gamma \in k. \tag{15}$$

Как в Случае 1, получим соответственно равенства (3) и (4). Но в отличие от него процесс сразу прервется, то есть мы имеем $D(x_1 - g_1) = 0$. Учитывая то, что $x_2 \in KerD$, мы можем утверждать, что многочлены

$$f = x_1 - g_1, \quad g = x_2$$

являются порождающими ядра дифференцирования (15). *Случай 4:* Пусть в (2) $\gamma = 0$, то есть

$$D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2, \quad \alpha, \beta \in k. \tag{16}$$

Снова, как в Случае 1, получим равенство (3), но вместо (4) рассмотрим

$$\frac{1}{\beta}\int \alpha x_2^l x_3^{m-n} dx_2 = \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{l+1} x_2^{l+1} x_3^{m-n} + C, \tag{17}$$

где константу C, как в предыдущих случаях, нам удобно рассматривать как элемент основного поля. Обозначая правую часть (17) через g_1 и учитывая то, что $x_3 \in KerD$, получим, что многочлены

$$f = x_1 - g_1, \quad g = x_3$$

являются порождающими ядра дифференцирования (16). Чтобы показать алгебраическую независимость этих многочленов, сперва нам надо перенумеровать переменные, а затем построить соответствующие автоморфизмы вида (13). Теорема доказана.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пусть $k[x_1, x_2, x_3]$ — алгебра многочленов от переменных x_1, x_2, x_3 над произвольным полем k характеристики 0. В настоящей работе были рассмотрены треугольные дифференцирования вида $D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3$, где $\alpha, \beta, \gamma \in k$, алгебры $k[x_1, x_2, x_3]$. Хорошо известный алгоритм А. Ван ден Эссена предназначен для вычисления ядра локально нильпотентного дифференцирования алгебры многочленов $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем k характеристики 0, где используется отображение Ж. Диксмье. В данной работе построен совершенно новый алгоритм для вычисления ядра треугольного дифференцирования алгебры многочленов ранга 3 над полем характеристики 0. Для вычисления ядра треугольного дифференцирования составлены рекуррентные соотношения, явно описывающие многочлены каждого шага алгоритма. Построенный алгоритм учитывает то, что дифференцирование треугольное и кольцо от трех переменных. Алгебраическая независимость порождающих ядра дифференцирования доказана с помощью треугольного автоморфизма, хотя обычно для этого используется метод базисов Гребнера. Стоит отметить, что алгоритм не работает, когда основное поле положительной характеристики. Его легко можно реализовать с помощью программных языков и математических пакетов.

Список литературы

1 Van den Essen A. Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows and polynomial morphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 1992. Vol.152. №10. P. 861-871.

2 Derksen H. The kernel of a derivation, J. of Pure and Applied Algebra. 1993. Vol.84. P.13-16.

3 Nagata M., Nowicki A. Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, J. Math. Kyoto Univ. 1988. Vol.28. №1. P.111-118.

4 Dixmier J. Sur les algèbres de Weyl, Bull. Soc. Math. France. 1968. Vol.96. P. 209–242.

5 Van den Essen A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Boston: Birkhauser. 2000. P. 329.

6 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, Jour. Amer. Math. Soc. 2004. Vol.17. P. 197-227.

7 Miyanishi M. Normal affine subalgebras of a polynomial ring, Algebraic and topological Theories - to the memory of Dr. Takehiko Miyata. Kinokuniya, Japan, 1985. P.37-51.

8 Adams W., Loustaunau P. An Introduction to Gröbner bases. Providence: American Mathematical Society. 1994. P. 306.

Рангісі үшке тең көпмүшелер сақинасының үшбұрышты дифференциалдауларының өзегі

Ш.У. Абуталипова
Астана IT Университеті, Мәңгілік Ел 55/11 даңғылы, ЭКСПО бизнесс орталығы, Блок С1, Астана, 010000, Қазақстан

Аңдатпа. Айталық $k[x_1, x_2, x_3]$ - нөл сипаттамалы кез келген k өрісіндегі x_1, x_2, x_3 айнымалыларына тәуелді көпмүшелер алгебрасы. Жұмыста $k[x_1, x_2, x_3]$ алгебрасының $D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3$ ($\alpha, \beta, \gamma \in k$) түріндегі үшбұрышты дифференциалдануы қарастырылады. $k[x_1, x_2, x_3]$ алгебрасының үшбұрышты дифференциалдаулары локальді нильпотент болатындығы белгілі. Нөл сипаттамалы k өрісіндегі x_1, x_2, x_3 айнымалыларына тәуелді көпмүшелердің $k[x_1, x_2, x_3]$ көпмүшелер алгебрасының локальді нильпотентті дифференциалдауының ұйтқысын табуға арналған А. Ван ден Эссен алгоритмі Ж. Диксмье бейнелеуін қолданады. М. Маянишидің теоремасы нөл сипаттамалы өрістегі үш айнымалылы көпмүшелер алгебрасының локальді нильпотент дифференциалдауының ұйтқысы екі айнымалыдан тәуелді көпмүшелер алгебрасы болады деп тұжырымдайды. Бұл жұмыста нөл сипаттамалы өрістегіі үш айнымалылы көпмүшелер алгебрасының үшбұрышты дифференциалдау ұйтқысын табудың жаңа алгоритмі ұсынылған.

Түйін сөздер: көпмүшелер сақинасы, алгебра, алгебралық тәуелсіздік, локальді нильпотент дифференциалдаулар, ұйтқы.

Kernel of triangular derivation of the ring of polynomial of rank 3

Sh.U.Abutalipova
Astana IT University, Mangilik El avenue, 55/11, Business center EXPO, block C1 Astana, 010000, Kazakhstan

Abstract. Let $k[x_1, x_2, x_3]$ be an algebra of polynomials in variables x_1, x_2, x_3 over an arbitrary field k of characteristic 0 In this paper we consider triangular derivations of the form $D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3$, where $\alpha, \beta, \gamma \in k$, of the algebra $k[x_1, x_2, x_3]$. It is well known that triangular derivations of the algebra $k[x_1, x_2, x_3]$ are locally nilpotent. The algorithm of A. van den Essen for computing the kernel of locally nilpotent derivation of the polynomial algebra $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ in variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ over a field k of characteristic 0 uses the map of J. Dixmier. M. Mayanishi's theorem states that the kernel of locally nilpotent derivation of the algebra of polynomials in three variables over the field of characteristic 0 is the algebra of polynomials in two variables. In this paper, a completely new algorithm for computing the kernel of triangular derivation of the algebra of polynomials of rank 3 over a field of characteristic 0 is constructed.

Keywords: polynomial ring, algebra, algebraic independence, locally nilpotent derivations, kernel.

References

1 Van den Essen A. Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows and polynomial morphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 1992. Vol.152. №10. P. 861-871.
2 Derksen H. The kernel of a derivation, J. of Pure and Applied Algebra. 1993. Vol.84. P.13-16.
3 Nagata M., Nowicki A. Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, J. Math. Kyoto Univ. 1988. Vol.28. №1. P.111-118.
4 Dixmier J. Sur les algèbres de Weyl, Bull. Soc. Math. France. 1968. Vol.96. P. 209–242.
5 Van den Essen A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Boston: Birkhauser. 2000. P. 329.
6 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, Jour. Amer. Math. Soc. 2004. Vol.17. P. 197-227.

7 Miyanishi M. Normal affine subalgebras of a polynomial ring, Algebraic and topological Theories - to the memory of Dr. Takehiko Miyata. Kinokuniya, Japan, 1985. P.37-51.

8 Adams W., Loustaunau P. An Introduction to Gröbner bases. Providence: American Mathematical Society. 1994. P. 306.

Сведения об авторе:

Абуталипова Шынар Узбековна – кандидат физико-математических наук, ассистент профессор департамента вычисления и науки о данных, Университет Астана IT, проспект Мангилик Ел 55/11, Бизнес-центр ЭКСПО, Блок С1, Астана, 010000, Казахстан.

Abutalipova Shynar Uzbekovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Department of Computing and Data Science, Astana IT University, Mangilik El Avenue 55/11, EXPO Business Center, Block C1, Astana, 010000, Kazakhstan.

Поступила: 10.09.2024. После редакции: 24.09.2024.

Одобрена: 28.09.2024. Доступна онлайн: 30.09.2024.

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2024, Vol. 148, №3, P. 26-99.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 14.01.11; 14.15.15

КАЗАХСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СПРАВЕДЛИВОСТЬ В ШКОЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ – ЭТО РАВНЫЕ ДЛЯ ВСЕХ УСЛОВИЯ В ОБУЧАЮЩИХ УЧЕБНИКАХ И УЧИТЕЛЯХ[1]

Н. Темиргалиев[1], К.Б. Нуртазина[2], Г.Е. Таугынбаева[3], А.Ж. Жубанышева[4]

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского науионального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан
(E-mail: [1]ntmath10@mail.ru, [2]knurtazina@mail.ru, [3]galija_1981tau@mail.ru, [4]zhubanysheva_azh@enu.kz)

Аннотация. Справедливость в школьном математическом образовании в идеале есть обеспечение возможности учащимися реализовывать свой потенциал через предоставление государственной ответственности средств достижения «Математической зрелости» в полном объеме и деталях. В мельчайших деталях, чтобы понять, о чем идет речь, достаточно вникнуть всего в одну тему математики начальной школы: при произвольно выбранном единичном отрезке построить два отрезка с длинами обыкновенных дробей с разными знаменателями и убедиться в невозможности сравнения их по протяженности в числовых показателях, после чего удивиться мощи Математики, позволяющей эту, по сути неразрешимую, задачу решить.

В учебном процессе надо различать Государство и учащегося – первое обеспечивает возможность получения знаний, но не отвечает за второго, однако должна быть моральная и материальная мотивация к получению высококачественных знаний: как предупреждал Данышпан Абай "*Білімдіден шыққан сөз, Талаптыға болсын кез. Нұрын, сырын көруге Көкірегінде болсын көз. «Айтшы-айтшылап» жалынар, Ұққыш жансып шабынар. Ұқпай жатып жалығар, ұйқылы-ояу бойкүйез*», само действо личного преобретения знаний сугубо индивидуально и подчиняется принципу *«Лошадь можно подвести к водопою, но нельзя заставить пить»*.

«Справедливость» есть многоплановая тема в Международном образовательном пространстве – это вселенского разделения «Глобальный Север» и «Глобальный Юг», где первые имеют более сильную экономику, инфраструктуру и технологии, в то время как вторые имеют менее разнообразную экономику, характеризуются бедностью и неравенством и часто имеют историю колонизации странами Глобального Севера. Это и исследования с различных точек зрения: социологической, экономической, педагогической, правовой и политической, разного рода профессиональными подходами типа «Справедливое образование с позиций качества учебников» или же «Разработка и внедрение программ, учитывающих потребности различных групп учащихся», «Оценка эффективности педагогических стратегий, направленных на устранение образовательного неравенства»,«Роль технологий в обеспечении доступа к образованию» и т.п.

Данная статья есть системно выстроенная Национальная программа РК, основанная на многолетнем опыте и разработанных идеях, результат в заметном объёме будет уже через несколько лет.

[1]Работа выполнена в рамках проекта AP14872564 Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан

Каждый час промедления делает необучающим один урок математики по всем классам и для каждого учащегося, а Государству наносит ущерб в человеко-часах в количестве всех обучающихся: *«Я, Нурлан Темиргалиев, как прямой специалист требую объявить «Чрезвычайное положение по современному состоянию математики-информатики РК!»»* от 13.04.2015 и, ранее, с 1974 года; *«Спасти будущее способного мальчика Иманбека»* от 31.01.2019; *«Одна Галия Таугынбаева за 13 календарных дней может провести неоспоримую экспертизу всех утверждённых МОН РК учебников по школьной математике»* от 12.07.2020; *«Система Образования и Науки 30-летнего независимого Казахстана превращает казаха, даже если с зачатками мышления Рамануджана, в Математического Маугли»* от 4.11.2021; *«Завершившийся 2023-2024 учебный год для 5-ти миллионов обучающих и обучающихся был необучающим по всей Школьной математике, в Высшей школе по всем специальностям, основанным на Математике, и это при наличии Национальной программы ИТМиНВ по возвышению в Математике, Компьютерных науках и AI-ML на Мировые передовые позиции, чего нельзя с исполнением заказать даже за 10 годовых бюджетов РК»* от 1.07.2024; «*Допуск к преподаванию «Сначала полная теоретическая подготовка по предмету, только затем методика, включая понимание доступности или недоступности к усвоению учащимися и никак не наоборот»* на примере всего одной проблемной темы «Сравнение обыкновенных дробей с разными знаменателями» Начальной школы». Принять в виде Закона *«Допустившие демонстративные научные и методологические ошибки в учебниках и научных изданиях, официальных рецензиях заносятся в «Черный список профильного учреждения» с пожизненным отлучением от сферы деятельности этого ведомства, – от этого никаких потерь не будет, произойдет только оздоровление, кезiнде үйренбеген ешқашан да үйренбейдi, өзi бiлiмсiз бiлiм бере алмайды»* от 30.10.2024, многочисленное такое же и более ранних, и поздних сроков.

Ключевые слова: Математическая справедливость, Математика – системная наука, школьное математическое образование, неоспоримая экспертиза, методика прямого применения на уроке, возрастные способности школьников, математическая зрелость, понимание математики, синопсис-оглавление.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2024/3.3

2000 Mathematics Subject Classification: 97Bxx

ВВЕДЕНИЕ

Проблема Школьного математического образования – вечная тема на каждом этапе развития Человечества, Интернациональная по содержанию, Национальная по организации.

На рубеже веков состоялись государственные признания Всеобщей математической недостаточности:

Россия. Образование, которое мы можем потерять [1]. Выдающиеся ученые и педагоги Российской Федерации (РФ), имеющие неоспоримый и высочайший авторитет в стране и за его рубежами, представили свои суждения на тему образования, каким оно должно быть в РФ и каким быть не должно: **Выступление Президента Российской Федерации В.В. Путина** на заседании Государственного Совета Российской Федерации; **Ж.И. Алферов, В.А. Садовничий.** Образование для России XXI века; **Д.В. Аносов.** Реформа школы: за и против; **В.И. Арнольд.** Что ждет школу в России? Подготовка новой культурной революции; **Л.Д. Кудрявцев.** О реформах образования в России; **И.И. Мельников**. Рычаг и опора; **С.М. Никольский.** О математике в общеобразовательных школах; **В.А. Садовничий.** Пока не поздно – уже опаздываем; **А.И. Солженицын.** Школьников учат по неправильным учебникам. Интервью телевизионной программе «Вести недели»; **Решение Ученого Совета Математического**

института имени В.А. Стеклова РАН по итогам обсуждения современного школьного образования на расширенном заседании Ученого Совета МИАН.

США. Пока еще не слишком поздно. Доклад Национальной комиссии Соединенных Штатов Америки по преподаванию математики и естественных наук в 21-м веке [2]. Равные возможности для всех детей. Проект программы реформ в области образования Президента Соединенных Штатов Америки Джорджа Буша [3]: В 1999 году, в 30-ю годовщину первой высадки на Луну, Президент США Джордж Буш объявил о создании Национальной комиссии, состоящей из 25 членов, во главе с астронавтом Джоном Гленном по преподаванию математики и естественных наук в XXI веке и поручил исследовать качество преподавания математики и естественных наук в США, обратив особое внимание на пути улучшения подбора кадров, подготовки, сохранения и профессионального роста преподавателей математики и естественных наук в средней школе в масштабах всей страны, создать основы для улучшения преподавания математики и естественных наук на последующие тридцать лет, завершившийся Проектом программы реформ в области образования «Равные возможности для всех детей» **Президента Соединенных Штатов Америки Джорджа Буша.**

Качественное школьное и вузовское математическое образование приобретает статус возвышения государства:

Узбекистан. «Математика в крови узбеков» заявил Президент Шавкат Миромонович Мирзиёев при открытии 12.06.2020 нового здания Института математики имени В.И. Романовского Академии наук в Ташкенте [4]. Президент поставил новые задачи по преподаванию математики в стране: «За последние 20 лет уровень знаний в этой науке снизился. Последствия этого сейчас ощущаются во многих сферах. Методология должна быть такой, чтобы она пробуждала у детей любовь к математике. Учащиеся должны понимать, что эта наука нужна в жизни в каждой сфере».

Спустя четверть века по современной результативности первых двух стран можно еще раз сделать рабочий вывод *«Самые правильные слова и идеи в Образовании и Науке (и не только) недейственны, все реальное происходит только в условиях конкретного методологического текста прямого обучения в согласованных сотнях и тысячах страниц и в прорывных научных результатах Международного плана, стимулирующих и активизирующих новые содержательные исследования (коих в Казахстане через Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) 23 тем и направлений с интенсивным построением 24-ого казахского подхода в AI-ML), когда каждый абзац требует многократного прочтения с осмыслением на уровне подсознания»*.

Именно такой подход к школьному образованию и науке реализован Старшим из авторов начиная с 1974 года с последующим привлечением своих учеников. Это и научные статьи с Фундаментальными и Значимыми результатами, это и научно-методические статьи прямого применения в учебном процессе, это и подготовленные учебники с методическими новшевствами не менее одного на 10 страниц текста, это и пропаганда математического образования в общественной печати и в 7-тысячном "Особенности национальной науки и образования, или Казахстан в условиях массовой остепенизации и дипломизации" [5].

Тем самым, определена политика Казахстана в создании Полного комплекта учебников по школьной математике с одновременной подготовкой по ним Учителей Математики в количестве не менее пяти в каждом из 165 районов через привлечение к сотрудничеству по заданиям ИТМиНВ и порождением условий для каждого Учителя в самовозвышении до высокой компетенции посредством усвоения порядка тысячи страниц подробного авторского учебника «Математикалық анализ» (второе издание, 2 тысячи страниц текста с Синопсис-Оглавлением).

Данная статья посвящена Единой схеме организации высококачественного Школьного математического обучения в Казахстане с 2024-2025 учебного года в виде Комплексного изложения всех действий – и ранее нами же предложенного, и здесь разработанного.

Само содержание статьи в кратком изложении заключается в следующем.

В §1 собраны различные наблюдения и выводы от собственного научного опыта, полученного от 24 тем и направлений прорывного характера и спроецированного на школьную математику, в §2 – полная программа создания школьных учебников и программ. Следующие два параграфа – это §3, посвящённый заключительным двум школьным классам с полной методологической разработкой, к которому должны подведены первые девять классов и §4, в котором обсуждаются требующие больших, чем обычно делается, пояснений школьных понятий типа формулы, величины и переменных, независимой и зависимой.

Учебник «Математикалық анализ» (второе издание) охватывает и Школьную математику, методическому обсуждению чего посвящен § 5. По-видимому, новым в Школьной математике является развернутый анализ возрастных способностей учащихся для распределения учебного материала по классам – это §6.

Все проблемы Школьного Математического образования возникают из-за теоретической неподготовленности – невозможно другому объяснить непонятное самому. Качество преподавания нельзя определить тестированием – здесь только открытые уроки, в которых и собственное понимание предмета, и умение донести тему до подсознания учащегося, и вся неуловимая, но вполне ощутимая атмосфера с вдохновляющим на всю жизнь "*жадымда тұрар жаңғырып*" весь класс Учителем под оценочным контролем подготовленных районных инспекторов. Отдельное недопустимое – это научные ошибки в учебниках как массовые распространение неправильных знаний в противоположность их получению: *Білімсіздік кең жол алып кетті, оган көну өз-өзіңді таптау деген – надандықта тұрақтылық жоқ, басқаны айта салады, ал көнгіш біреудің мінін өзіне алып, "никогда не отмыться" дәрежесінде қала береді.* И еще одна не для подражания сложившая вселенская реальность – *какое-то избегание от базовой математической подготовки соответствующего обеспечению возможности наращивания интеллектуальной состоятельности с уводом от закаляющих трудностей, понятно, во вред будущему самого обучающегося*, что вообще не означает "*Казахстан должен быть "көппен бірге"*". Решению этих проблем посвящен §7. Предпоследний §8 посвящен демонстрации как теоретическая подготовка расцвечивает во всех красках процесс познания на примере всего одной темы Начальной школы, делает разнообразно глубоко обучающим взамен непонятной никому констатации. И, наконец, §9 показывает видение темы «Математическая справедливость» в Международном учебном пространстве.

§1. **МЕТОДОЛОГИЯ ИТМиНВ В ШКОЛЬНОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ**

Математика – наука системная. Поверхностно, как говорят, по-касательной, не вникая в саму учебную программу, войти в какую-то отдельную тему, например, в «Степени» проходя мимо $2^{\sqrt{2}}$ или «Дроби» без понимания удивительности возможности сравнения и сложения обыкновенных дробей с разными знаменателями и только заученного восприятия без какого-либо обоснования правила умножения дробей $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$, или ещё какую–нибудь тему, конечно, можно, но пользы ощутимой в индивидуальном математическом образовании не будет. Математика как наука системная на этих и всех других темах солидарно воспитывает и на протяжении всех школьных лет подводит к целевому итоговому состоянию «Математическая зрелость». У растущего организма есть всякого рода зрелости, одна из них зрелость Математическая.

Когда говорится, что Математика наука системная, то это означает, что с первого по последний класс должно быть последовательное восхождение по мелким методологическим ступенькам вверх. Каждая мелкая ступенька должна быть составляющей одного комплекса, в совокупности прокладывающих путь к достижению центральной цели Школьной математики – Математической зрелости. Каждая составляющая локальная цель со своим названием из Оглавления учебника соответствующего класса должна быть доступной и понятной.

ИТМиНВ имеет подробную методическую разработку по каждой стандартной теме школьной математики, посредством которой на уровне каждого района предполагается проведение экспериментов для установления возрастных возможностей их усвоения с последующей обработкой в Едином Центре для составления полной школьной программы по математике, которая должна вызывать радость познания и быть стимулирующей для перехода к следующей локальной цели наращивания знаний. И тем необходимо учащемуся создать непрерывный переход к следующему комплексу мелких ступенек, с теми же вполне доступными удовольствиями достижения умственных приобретений и побед.

Все это старший из авторов ощущал в своем детстве, еще в начальной школе от своей первой учительницы – ссыльной из Ленинграда, немкой по национальности. Там надо было все действия по решению задач описывать, что есть самостоятельный развивающий процесс. Тогда в школе надо было решение задачи разбить на вопросы, каждый из которых требовалось в полном объеме письменно сформулировать и по нему выполнить все заложенные арифметические действия. Совпадения с ответами в конце учебника – высшее достижение дня, для чего надо было понять содержание задачи, создать в уме схему решения задачи и ее письменно реализовать. В последующие годы «новаторы» придумали краткое оформление решения задачи. Это заведомо деструктивная идея: во-первых, теряется весь обучающий процесс решения задачи, во-вторых, само оформление краткого решения для самих учителей не было в логическом совершенстве оформлено.

Наука – это новые знания, получение которых есть явление надчеловеческое – можно запланировать сроки построения курятника и авианосца, но никак не решение научной задачи. Труднейшим является выбор научной задачи **«Имею возможность, но не имею желания» и наоборот** с успехом в виде совпадения желания и возможности – при Старшем авторе С.Б. Стечкин говорил «*Я не дурак, чтобы браться за задачу, которую заведомо не решу*» С.М. Воронину, который последние полтора десятка лет своей жизни посвятил Бинарной проблеме Гольдбаха "Каждое четное число от четырех и больше представимо в виде суммы двух простых чисел". Разумеется в идеале от задачи должна требоваться претензия на Фундаментальность, по крайней мере на Значимость, от решения – полное закрытие темы или же ее остроты, но никак не Мелкотемье, когда уже полученное раскачивается без новизны с сохранением разработанного метода доказательства, – и которое наверняка уйдет в небытье. В ряде монографий ставятся задачи по дальнейшему обобщению или уточнению изложенных результатов, что чаще всего годится разве лишь для временной паузы – опубликованию дежурных статей и тезисов докладов на конференциях. Есть и творческий вариант, так П.Л. Ульянов имел толстую папку, в которой каждый лист был посвящен отдельным новым постановкам задач, навеянных рефератами статей в соответствующих специализированных журналах (Старший из авторов получил от него очередную задачу именно оттуда, когда перед окончанием трехлетнего срока аспирантуры его Научный руководитель П.Л. Ульянов сказал "*Ваша кандидатская диссертация завершена, но отзыв может быть кисло-сладким, у Вас есть воможность быть в аспирантуре Стекловского Института еще полгода с шансом наращения новыми результатами*", что тогда так и случилось (много позже я узнал, что такое предоставлялось всем окончившим Республиканские вузы)).

Далее, пусть задача выбрана, за которой следует трудный поиск решения – сначала абсолютная безнадежность и бессилие, затем, быть может, возникнет какая-то идея, влекущая ее проверку, чаще всего ведущую в тупик и бесполезную трату времени, как говорил П.Л. Ульянов «*Наука занятие нервное. Сидишь день, неделю, месяц, годы – ничего не получается*».

И всеобщий вывод: только тот, кто сам побывал в такой унижающей самоуважение отчаянной ситуации, когда визит сантехника, исполнившего свою востребованную обычную работу вызывает приступ собственной никчемности (как оказалось, это раздел Современной психологии), поймет, что исполнение известного с постоянным продвижением вперед к ясно видной конечной цели, включая учебный процесс или на основе приобретенных знаний вхождение в научную тему – занятие совсем нетрудное при всей своей многотрудности, что вынесено в Девиз ИТМиНВ от Ницше "*Когда имеешь многое вложить, у дня находятся сотни карманов*". И тем ИТМиНВ в рамках всего государства предлагает Науку оценивать в Прорывах Международного уровня, ведя счет от 23 реализованных и 24-ого исполняемого ИТМиНВ в номерах 25 и выше.

В уже добытых Наукой знаниях и разработанных Методологиях не бывает слова «трудно», – если усвоил, то легко и если нет, то трудно. В связи с чем возникает отдельный принципиальный вопрос, следует ли в массовом учебном процессе давать обучающимся задачи без объяснения метода решения, что фактически означает изобретение способа решения, недостижение которого может привести к развитию комплекса неполноценности, мол, Математика мне недоступна.

В действительности все школьные задачи, как, впрочем, и олимпиадные тоже, рассчитаны на применение вполне определенных методов, которые могут быть разбиты еще на различные самостоятельные. Как сказал Геннадий Архипов, – победитель Международной математической олимпиады 1964 года [6, стр.12], который тогда же был без вступительных экзаменов принят на Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова,*«Олимпиады – это порядка тридцати приемов с вариантами и комбинациями»* (что подтверждается Artificial intelligence - Искусственный интеллект).

Поэтому считаем целесообразным в учебном процессе применять только задачи, которые снабжены подробными объяснениями методов решения, обволакиваемых ненавязчивым воспитанием понимания Природы математики.

Метод решения иллюстрируется на ряде конкретных примеров, а сам учебный процесс состоит в развитии способностей по задаче усвоения и последующего узнавания метода решения и по нему получения полного решения задачи. При этом необходимо очертить место данного метода со своим набором задач.

Учебный процесс в Учебниках и Учителях должен постоянно держать в мотивированной активности учащегося: приучить к осмыслению в четком понимании понятий-терминов **Постановка задачи** "*О чем идет речь, к чему должны прийти*", **Ход решения задачи** "*Что делается*" и **После решения** "*Как это получилось*", **Что дальше** в сравнительном анализе с ранее усвоенным с целью выявления достигнутой на этом этапе новизны. И опять все такое на следующей теме.

Все, что должны вынести учащиеся средней школы по математике для успешного продолжения обучения в любом университете мира, системно изложено и должно быть усвоено в итоговых 10-11 классах по учебнику [7]-[8].

Здесь, кстати, на школьном уровне разработаны Элементы математического анализа – дифференциального и интегрального исчислений. Там же совершенно по-новому посредством всем понятной вспомогательной модели «Маркет», заменяющей теоретически недоступное для учащихся Вероятностное пространство, изложена Теория вероятностей. По-новому изложены функции, через которые можно пояснить уравнение, относящееся к основным темам школьной математики, но в должной глубине не определяемых. И тем решается труднейшая проблема составления программы школьной математики I-IX классов, которая должна обеспечить безболезненный переход к уже готовой заключительной части, а экспериментальная методика распределения учебного материала по классам подробно описана ниже в §6. Само вхождение в итоговые темы предполагает разработку различных вопросов, среди которых и безусловно разработанные, и требующие новых подходов, таких как понимание явной неразрешимости ясной формулировки отдельных задач с последующей демонстрацией мощи Математики в ее удивительных решениях, и это все должно быть доступно учащемуся, начиная с начальной школы, как еще один шаг к достижению Математической зрелости.

Такова концепция ИТМиНВ в кратком изложении. Тогда как сухое сообщение о неравенствах между целыми числами, приводящими к неравенствам между обыкновенными дробями, оцениваемое при тестировании как успешное овладение знаниями, никаких математических знаний не приносит, – эта ситуация со схемой методического решения показательно разработана здесь в §8.

Отметим, что в учебнике для начальных классов в примерах будет проведено просвещение быта, обычаев, игр, народной кухни, географического устройства, словом, всего национального.

Теперь об обеспечении высокой математической квалификацией школьных учителей в экономном режиме. Сразу же подчеркнем, что в подготовке школьных учителей любой дисциплины сначала должна идти полная теоретическая подготовка по всей ширине и глубине соответствующей науки и только потом всяческие методики. И никак не наоборот, профессиональная недостаточность в ошибочных и бессмысленных текстах часто выносится в учебники, а у действующих учителей не хватает квалификации для критического анализа и публичного опровержения в коренных жизненных интересах своих учащихся.

Типовая программа по всему предмету Школьной математики сразу же обнаруживает уровень квалификации составителей и рецензентов, – составленные по такой программе учебники либо в идеале являются последовательным доступным для понимания развитием идей, либо при отсутствии квалифицированной экспертизы набором несвязанных между собой разрозненных фактов.

В Учебной Математике наибольший урон обучаемому наносят излагаемые без какой-либо мотивации, можно сказать явочным порядком, основные понятия и натаскивание на решение типовых задач без усвоения самой природы Математики, тогда как каждая тема и подтема урока должны быть снабжены теоретическими обоснованиями на уровне правдоподобия и понимания «Что делается» на уровне подсознания. Так, например, возникновение и подробное описание выражений, числовых и буквенных, должно быть объяснено такой записью решения задач, когда все шаги решения без промежуточных вычислений собираются в один набор арифметических действий, при этом скобки, круглые, квадратные, фигурные, используются для обособления или сбора отдельных шагов.

В Математике необходимое для школьных учителей «Понимание структуры и идей Школьной математики» обеспечат специально подобранные пункты с Синопсис–Оглавлением порядка одной тысячи страниц Учебника МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ (переработанное и дополненное в 2000 страниц второе издание с Синопсис-Оглавлением) - это [9] с первым изданием [10]-[12].

Школьная математика есть облегченный Математический анализ, по причине чего будет сформирован теоретически подготовленный и тем успешный Учитель. Методика возможна только на основе понимания предмета, но никак не наоборот – смутно представляющий себе объект обучения не способен понять тонкости его изложения, более того – создать новые.

Учитель должен понимать, что есть определение, теорема, формула, функция, координатная прямая, график, уравнение и так по всей Программе. Учитель должен владеть культурой математического доказательства, что в предлагаемом учебнике дано на теме решения задачи измерения длин отрезков при заданном единичном длины один, имеющем результатом построение множества всех действительных чисел и обоснование арифметических действий над ними.

Это только фрагменты учительского просвещения, весь список названий выделенных пунктов из второго издания МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ Старшего из авторов вынесены здесь в §7. Для стимулирования этого надежного вида создания высококвалифицированных учителей вводится Государственная аттестация с большим материальным обеспечением, моральный авторитет принесет само качественное обучение, – наличие в школе даже одного высших знаний Учителя математики обеспечивает дальнейший успех выпускников во всех сферах деятельности.

На основе собственного опыта в 24-х научных прорывах в Математике на Международном уровне можем утверждать, что достижение наивысших результатов влечет новые аспекты понимания основ и природы самой Математики. Такое требование должно быть предъявлено к потенциальным авторам и рецензентам учебников, с обязательным предъявлением каких-то новых методических разработок прямого применения на школьных уроках.

При всем научном опыте с 1969 года по сегодня продолжающаяся корректировка «Математикалық анализ» (Второе издание в 2000 страницах текста и Синопсис-Оглавлением 155 параграфов и 891 пунктов) всего в одном пункте заняла сутки от 22:26 часов 17.08.2024 до 22:40 часов 18.08.2024 (см. Рисунок 1), в котором надо было объяснить, и тем интриговать школьников – именно такими средствами с легкими для восприятия правдоподобными рассуждениями достигается «Математическая зрелость», что в общем восприятии для всех, в их числе и школьных учителей, выглядит так:

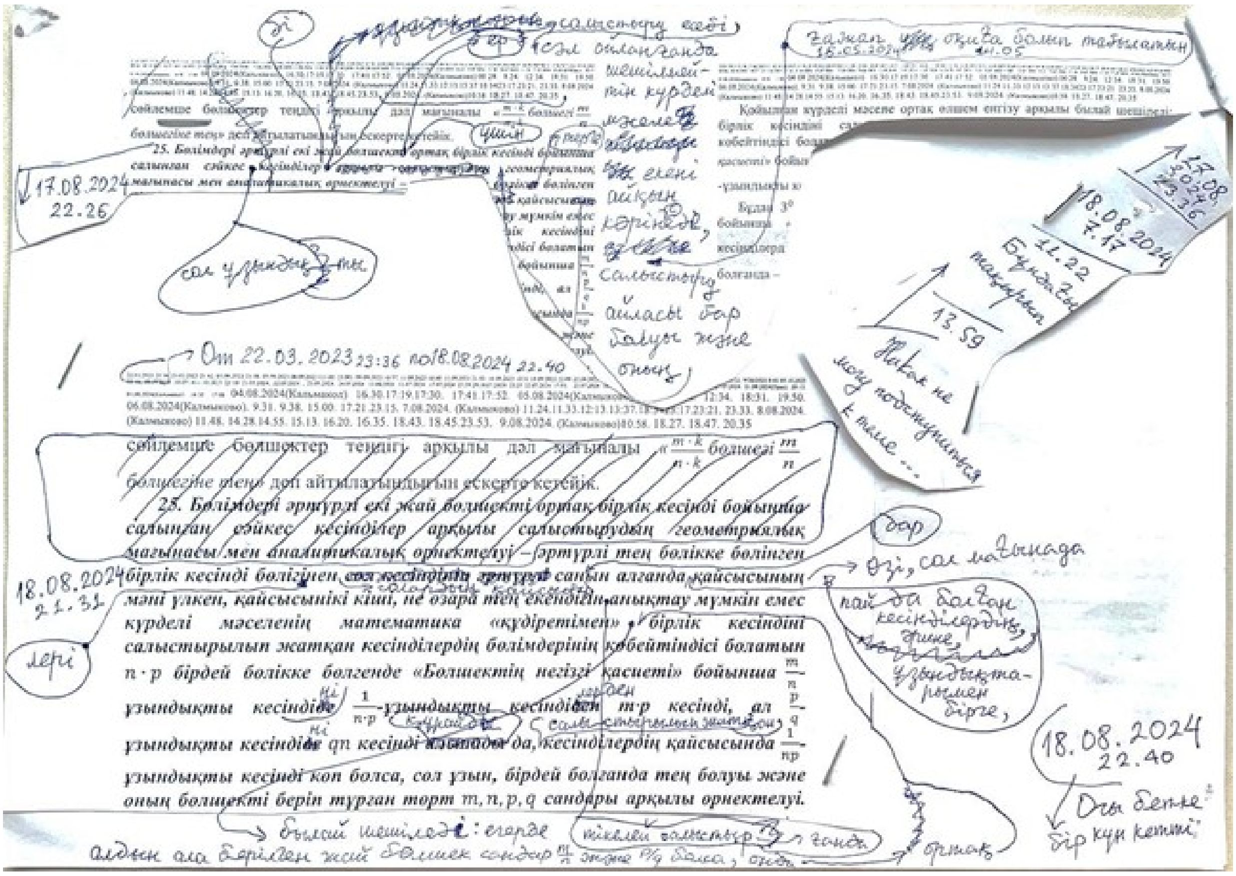


Рисунок 1 – Рукопись учебника

СИСТЕМНОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Математическая зрелость – достигается в средней школе. Определен авторский ИТМиНВ-путь исполнения научной политики: в полном объеме в виде *"Вопрос-Ответ"* оформляется Заключительная программа Школьной математики, усвоение которой обеспечит *"Математическую зрелость"*, и предоставляет возможность успешно обучаться в любом университете мира. С переходом к усвоению *"Математикалық анализ"* и последующим постижением опять же авторских *"Мера и интеграл Лебега"* и *"Теория вероятностей"*, что в совокупности определит готовность к научной работе по 24-ем авторским направлениям и темам ИТМиНВ с 70-процентной и выше форой, гарантированно выводящей на самые передовые позиции в Международной Математике, Компьютерных науках и AI-ML.

Математика наука систематическая, поэтому учебный материал для её усвоения по Полной школьной программе с первого по последний классы должен составлять единое взаимосвязанное течение по принципу *"Каждая мысль является основанием следующей"*, с переходом в программный материал школы высшей. В целом школьная и вузовская программы должны обеспечить формирование "Понимание математики", в котором, решение задач, обычно возводимое в самое главное, занимает свою специфическую сферу, когда задачный материал поддерживает осмысленное вхождение в своеобразный мир Математики в форме различных специальных приемов и методов, с последующим их распознаванием и реализацией в предложенных заданиях. И все эти требования полностью обеспечивают авторские учебники [7-12] ИТМиНВ, – это школьный учебник, созданный в ранге победителей Конкурса МОН РК 2000 года под названием *"Алгебра и начала анализа для X-XI классов"* в формате *"Авторский коллектив - Издательство"* и фундаментальный курс *"Математикалық анализ"* в 70 печатных листов, созданный по решению Научно-методического совета по математике Министерства высшего образования Каз ССР 1979 года, со вторым изданием в 2024 году уже в 2000 страниц.

Фундаментальная математическая подготовка в школе высшей по математическим специальностям. Здесь, по-видимому, нелишне обратить внимание на малую эффективность преподавания одной формирующей понимание отдельной области науки одновременным применением нескольких учебников с различными методическими установками (типа учебников "Геометрии" А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна). Дело в том, что если это учебник автора (коллектива авторов) с целостным пониманием и видением науки, то смешение разных подходов к освещению дисциплины вызовет хаос в сознании обучающегося. Тогда как полное прохождение курса по одному фундаментальному учебнику с последующим беглым ознакомлением с другими учебниками принесет несомненную пользу в смысле *"Оказывается эту тему можно излагать и так"*. Вообще, всегда надо иметь ввиду *Принцип сохранения трудностей*, когда на большом пространстве изложения дисциплины *"Выигрыш в одной теме влечет проигрыш в другой"*.

Таким видится развитие Математики, Компьютерных наук и AI-ML в современном Казахстане без каких-либо претензий на экспорт – каждая страна со своей наукой и образованием разберётся сама.

§2. ОБЩАЯ СХЕМА СОЗДАНИЯ ПОЛНОГО КОМПЛЕКТА ШКОЛЬНЫХ УЧЕБНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ С СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ПРОГРАММОЙ

В статье [13] разработаны предложения ИТМиНВ по распространению логически последовательной идеологии и методологии, созданной в заключительном учебнике для X-XI классов на соответствующие учебники для предыдущих I-IX классов.

Первый этап, Казахстан делится на пять регионов, – С, В, З, Ю и Центр, в каждом из которых на конкурсной основе осуществляется отбор учителей для формирования групп по проведению экспериментов с учениками из 5-10 школ каждого района с целью выявления степени усвоения школьного авторского материала по различным возрастным уровням.

Эксперимент состоит в 45-минутных лекциях по каждой из школьных тем, исполненных по методикам прямого применения от ИТМиНВ, для соответствующих возрастных групп учащихся с последующей проверкой усвоения в процентных соотношениях (и в иных показателях).

Второй этап – вся информация со всех пяти регионов на уровне всех районов каждого региона собирается в ИТМиНВ и осуществляется статистическая обработка полученного материала специально разработанными в ИТМиНВ методами, на основе результатов исследований формируется единая Программа по всем классам.

Третий этап – формируются Команды авторов и для исполнения их технических и поисковых заданий Группы поддержки для написания школьных учебников по математике. При этом учебники пишутся под постоянным контролем ИТМиНВ. Затем по мере готовности фрагменты учебников опять передаются учителям всех регионов, ранее участвовавшим в эксперименте для апробации. С учетом замечаний осуществляется завершающий этап по написанию учебников, которые в виде сигнальных экземпляров передаются в профильное Министерство (не позднее декабря 2020 года).

В самом ИТМиНВ формируются специальные тематические команды по осуществлению следующих этапов работы:

1) разработка методических материалов для проведения экспериментов по всем темам школьной программы на основе материалов прямого применения ИТМиНВ,

2) разработка статистических методов обработки результатов экспериментов, проводимых в 5-10 школах каждого из 165 районов РК, в зависимости от общего количества школ в районе,

3) разработка школьного математического казахского языка и соответствующей терминологии,

4) сравнительный анализ с зарубежными аналогами школьных учебников,

5) методические разработки для учителей по авторским учебникам, с составлением Единого поурочного плана всем классам.

6) разработка внутренних документов контроля и проверки общего состояния овладения учащимися программным материалом на уровне каждого из четвертей и итогового годового отдельно по классам с учетом Международного опыта (типа PISA и др.)

ПРИНЦИПЫ ФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЕДИНИЦЫ «ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ АВТОРЫ, ПРОГРАММА, УЧЕБНИК, ШКОЛА»

Национальной академии образования имени Ы. Алтынсарина профильного Министерства и по математике «Лаборатория по школьной математике» Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева как выпустившим по Конкурсу МОН РК учебники

1. Теміргалиев Н. Әубакір Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X-XI кластар, «Жазушы», 2002, 382 б.

2. Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, для X-XI классов,«Жазушы», 2002, 423 стр.

поручить продолжающийся выпуск общей серии «**Педагогическая наука Казахстана в методических решениях прямого применения по конкретным темам школьной программы**» по дисциплинам из трудов докторов и кандидатов педагогических наук, преподавателей вузов и учителей школ, и, вообще, всех желающих, как допуска к включению в список потенциальных авторов учебников

и результат широко обнародовать от Президента РК до Республиканских информационных средств.

Полный отказ от состояния "Бытового мышления непрофессионализм и неоправданное преклонение перед Зарубежьем" в контексте [5].

§3. **МЕТОДОЛОГИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ШКОЛЬНЫХ ПРОГРАММНЫХ ТЕМ В ФОРМУЛИРОВКАХ С ПОСЛЕДУЮЩЕЙ КОНКРЕТИЗАЦИЕЙ «ВОПРОС-ОТВЕТ», В КОТОРОМ «ВОПРОС» КОНЦЕНТРИРУЕТ ОТВЕТСТВЕННЫЙ МОМЕНТ ПРОЦЕССА ИЗЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛА, «ОТВЕТ» ПРОЧИТЫВАЕТСЯ В УЧЕБНИКЕ**

Концепция учебного комплекса [7-8] "Алгебра и начала анализа" для X-XI классов в кратком изложении заключается в следующем:

1. Выделить наименьший объем материала, необходимого для завершающего этапа обучения в средней школе с конечной целью достижения "Математической зрелости", и тем являющегося основой для последующего обучения в высших и средних специальных учебных заведениях, в целом обеспечивающий качество жизни в той степени, в которой это зависит от качественной и количественной математической логики мышления.

2. Материал предыдущих I-IX классов должен обеспечить непрерывное продолжение на завершающий этап обучения.

3. Изложение теоретической части должно быть простым, ясным, кратким и точным. Каждая новая тема, каждое новое определение должны быть мотивированными, по крайней мере на уровне правдоподобия.

4. Материал задач должен сочетать идейное содержание с развитием навыков, от простого к сложному, с пониманием "О чем задача и каким методом решается" с дальнейшим узнаванием их типов.

5. Теоретический материал в необходимом объеме должен быть представлен в учебнике для учащихся с возможностью доступного возврастного усвоения и повторений для осмысления на новом этапе обучения.

6. Намечается выпуск полного комплекса по математике [14]:

6.1. Школьная математика в программных поисках: сначала X-XI классы, затем I–IX классы.

6.2. Университетская математика – Комплекс на казахском, русском и английском языках, объединенный единой идеей изложения:

Анализ математический – второе издание учебника на казахском языке в объеме 2000 страниц со 100-страничным Синопсис-Оглавлением [12], учебное пособие по Теории пределов [15-16]

$$\left.\begin{array}{c}\text{Анализ действительный –}\\ \text{Мера и интеграл Лебега}\\ \text{Анализ функциональный}\\ \text{Анализ комплексный}\\ \text{Теория вероятностей [17-20]}\\ \text{Математическая статистика}\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{изданы детализированные программы,}\\ \text{– продолжающийся процесс издания учебников}\\ \text{и учебных пособий}\end{array}$$

Аналитический Обзор Конценции учебника в разрезе каждой темы изложен в обращении "К Учителю и учащимся" в [7-8] – в чем состоит замысел, какие моменты считаются важными для усвоения. В этом Обзоре в расширеном формате выделены принципы формирования итогового школьного материала в рамках общепринятой программы, но со строгим отбором минимально необходимого в заключительные два года обучения, призванного к творческому усвоению материала, привитию на уровне подсознания логического мышления и развитию технических навыков в решении различных задач, в совокупности направленных на достижение конечной цели школьного математического образования – Математической зрелости.

В Учебнике особое внимание уделено снабжению всех утверждений полными возможными в рамках школьного математического пространства обоснованиями – доказательствами или провдоподобными рассуждениями, вопреки распространенным установкам, что доказательства в учебнике не обязательны, их на уроке расскажет Учитель по другой, предназначенной для него книге.

Учебник гарантирует отсутствие научных ошибок и содержит все необходимые теоретические материалы в сопровождении иллюстративных задач с эффективными методологиями прямого применения.

Также отметим, что текст Учебника содержит все требования к теоретической подготовке Учителя, которыми для успешного выполнения своей работы обязан владеть в расширенном варианте, что обеспечено специальной программой здесь в §7, – только тогда Учитель будет понимать серии методик, позволяющих приспособиться к каждому учащемуся со своими Индивидуальными особенностями.

§4. ОБРАЗЦЫ ПРОБЛЕМНЫХ ВОПРОСОВ ИЗЛОЖЕНИЯ СТАНДАРТНОГО ШКОЛЬНОГО МАТЕРИАЛА ПО МАТЕМАТИКЕ: "ПОНЯТНЫЕ" ПОНЯТИЯ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Как известно, в математике все используемые понятия и термины должны быть вынесены в строгие определения, что в основном и делается в школьной математике, разумеется, с учетом возрастного фактора учащихся.

Тем не менее, на наш взгляд, ряд важнейших понятий в школьной математике применяется без каких-либо объяснений как само собой разумеющиеся, что не может не вносить свою долю в трудностях усвоения этой, отнюдь не относящейся к легкодоступным, дисциплины [21-22].

Для иллюстрации "понятных" понятий остановимся на некоторых из них. Наше обсуждение начнем с книги Игоря Владимировича Проскурякова "Числа и многочлены" [23, стр.3], целью которой "*…является строгое определение чисел, …уже известных из школы, а не ознакомление читателя с новыми свойствами. Поэтому читатель не найдет новых для него фактов, …но знает, как доказываются вещи, хорошо ему известные, начиная с дважды два четыре…*". Книга рассчитана на преподавателей математики старших классов средней школы, "*…а также школьникам старших классов, интересующихся обоснованием понятия числа*".

Если учесть, что при работе над книгой автор [23], сам продуктивный математик, как он пишет "*…использовал ряд ценных указаний А.Н. Колмогорова, П.С. Александрова, А.Я. Хинчина, И.Р. Шафаревича*", то ясно, что содержание и выводы этой книги заслуживают самого пристального внимания, изучения и применения как синтез идей выдающихся математиков, можно понимать как полученные в процессе высшей деятельности.

Ниже цитирование [21-22] с сохранением нумерации понятий.

1. Множество. "*Множество – это совокупность объектов, рассматриваемых как один объект. Эти слова не стоит принимать за определение, ибо чем слово "совокупность" лучше слова "множество". Понятие множества примем за основное, т.е. не сводимое к другим понятиям*" читаем в [24, стр. 5-6]. Это есть общепринятая в математике точка зрения – если каждое определение опирается на предыдущие, то обязательно должно быть и начальное неопределяемое понятие, коим и является "*множество*".

В школьной математике, как нам представляется, здесь какой-либо проблемы нет: смысл понятия "*множество*" можно пояснить на примерах, так же, как, например, под " *жилищем*" можно понимать дом, шалаш, коттедж, особняк, квартиру, или, как под *"письменными принадлежностями"* понимают ручку, карандаш, ластик, тетрадь, бумагу.

И здесь самое главное, как говорят,"*вовремя остановиться*". Проблемы возникают, если к понятию множества относиться как к объекту изучения по правилам профессиональной математики.

В связи с чем отметим, что это не единственный источник неоправданного следования канонам профессиональной математики в математике школьной – нет мотивированных причин многочасовых проверок выполнения очевидных с точки зрения "*здравого смысла*" аксиом теории колец (см. об этом [25-26]).

2. Величина. Как-то в одну из своих поездок в Казахстан, это где-то в начале двухтысячных годов, в Алма-Ате академик АН СССР и России Сергей Михайлович Никольский (30.04.1905-09.11.2012) поставил вопрос: "*Что такое величина?*", что созвучно булгаковскому "*Что есть истина?*". Такие же сомнения, по сути дела, высказаны и И.В. Проскуряковым [23, стр. 10]: *"Далее, под* ***величинами*** *принято понимать такие объекты, которые можно сравнивать между собой, т.е. такие, между которыми существуют отношения* ***больше*** *и* ***меньше****. Между тем, в математике рассматриваются функции, для которых эти отношения не установлены, как в случае комплексных чисел или вообще элементов некоторого множества"*.

По-видимому, слово "*величина*" можно еще использовать в каких-то самых общих рассуждениях, но никак не в конкретных случаях типа определений, теорем и т.п.

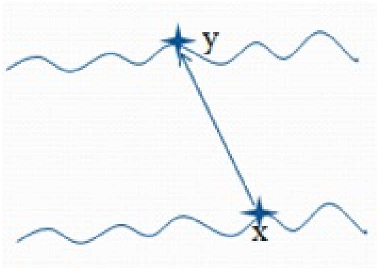
Тем самым, на наш взгляд, все же лучше избегать употребления понятия "*величина*", поскольку любое определение можно дать без употребления этого термина.

3. Переменная, зависимая переменная, функция как зависимая переменная. Опять обратимся к книге [23, стр.10]:" *Такую же существенную роль, как понятие множества, играет в математике понятие функции. Что такое функция? Часто говорят, что* **функция есть п е р е м е н н а я величина**, *зависящая от другой переменной величины (аргумента). В применении к обычным функциям, изучаемым в школе, как* $y = sinx$ *это определение вполне подходит и может применяться в преподавании".*

Как ни странно, здесь автор [23], который предлагает слово "соответствие", не относящееся к главным в школьной математике, зачислить в разряд "*неопределяемых*", слово "*переменная*", да еще вкупе со словом "*величина*", применяет без каких-либо объяснений. Более того, автор считает, что определение "*функция есть переменная величина, зависящая от другой переменной величины (аргумента), вполне подходит и может применяться в преподавании*".

В отношении понятия "*переменной*" позиции применения как само собой "*понятной*" придерживаются авторы всех известных нам учебников, исключая разве лишь учебник А. Башмакова [27, стр.11], где даются следующие пояснения (если не определение):

"*Переменная – это общий термин для обозначения различных меняющихся величин. ... Для нас в дальнейшем термин переменная будет означать просто букву, причем будет указано множество значений, которое она может принимать.",* и, далее,



"Пусть даны две переменные x и y. ***Говорят, что переменная y является функцией от переменной x, если задана такая зависимость между этими переменными, которая позволяет для каждого значения x однозначно определить значение*** *y* ".

Тут вводятся две переменные, значения которых меняются каким-то образом. Но при таком обозначении не видно связи между ними, и каждая из них как бы рассматривается сама по себе. Образно это представлено на рисунке 2.

Заметим, что в [27] часть определения "*переменной*" относится к слову "*величина*", смысл которого там так же не поясняется. С тем же встречаемся в классическом учебнике [28, стр.25]: "*Те величины, которые сохраняют неизменным свое значение, называются* ***постоянными.*** *Величины, могущие принимать различные значения, называются* ***переменными***".

Таким образом, в школьных учебниках без достаточных объяснений используются слова "*переменная*", "*постоянная величина*" и "*переменная величина*", функция определяется как "*зависимая переменная величина*", причем все это считается вполне приемлемым.

Все это, на наш взгляд, можно понимать как пример распространенного заблуждения, когда для большей "*понятности*" даются такие определения и названия, что в них даже специалист запутается или не поймет.

Здесь наша позиция такая [7-8]:"*переменная*" как синоним слов " *независимая переменная*" и "*аргумент*" есть знак или символ (обычно в виде буквы латинского алфавита) для обозначения "*элемента (общего элемента) множества определения*", а от понятия "*зависимая переменная*" отказываемся полностью.

8. Формула. А что же такое формула?

"*Формула – выражение формализованного языка, предназначенное для записи суждения. ...В математической практике формулой называют так же осмысленные комбинации символов, несущие разнообразную смысловую нагрузку*" читаем в [29, стр. 637].

Но такое определение слишком сложно для понимания учащихся. Попытки пояснить, что же означает термин "*формула*" мы не встречаем в учебниках, действующих в РК.

Определение понятия формулы дано в [30, стр. 107]:

"*Запишем правило нахождения пути по скорости и времени движения в буквенном виде. Обозначим путь буквой* s, *скорость – буквой* v *и время – буквой* t. *Получим равенство* $s = vt$. *Это равенство называют* ***формулой пути.*** *Запись какого-нибудь правила с помощью букв называют* ***формулой*** ".

Другая формулировка встречается в [24, стр.8]: "*Всякое равенство или неравенство, выражающее посредством букв и знаков действий какое-нибудь соотношение между числами, называется формулой*".

В [8, стр.211] формула первоначально поясняется как *запись элементарной функции.*

Вполне приемлемо, на наш взгляд, и такое общее определение [31, стр. 610]: "*Формула (от лат.* formula *– форма, правило, предписание) – комбинация математических знаков, выражающая какое-либо предложение; напр., нижеследующие выражения суть формулы:* $x^2 + y^2 < z$, $2 \times 2 = 4$, $\Delta ABC \sim \Delta EFG$, $2 \times 2 = 5$ ".

Как нам представляется, определение или, точнее, объяснения формулы в разных случаях могут быть различными, – от пояснений на конкретном примере до самых общих, но на школьном уровне.

Здесь постоянно одно – какие-то объяснения должны присутствовать.

Более подробно об остальных понятиях можно найти в [21-22].

10. Общие выводы. Есть вещи, которые надо оставить без присущей профессиональной математике (школьную математику понимаем как отсвет той математики со своими целями и подчиненными им своим содержанием, правилами) формализации через определения.

Мы выделили ряд математических понятий, которые на школьном уровне требуют пояснений. В отношении одних из них, таких как *множество*, *соответствие, зависимость* можно ограничиться лишь объяснением на примерах, без какой-либо формализации.

Другие, типа *величины* и *переменной*, надлежит употреблять с большой осторожностью, лишь бы "*не навредить*". И совсем отказаться от *зависимой переменной*, а *независимой переменной* или *аргументом функции* назвать символ, которым обозначается произвольный элемент множества определения функции. Третьи, типа *формулы* – в развитии по конкретной ситуации. Четвертые – типа "*области определения*" заменить на "*множество определения*". Пятые – типа "*прямой пропорциональности*" применять только после четких определений. И так можно продолжить.

И, наконец, мы должны признаться, что не совсем понимаем вездесущий в математике термин "*понятие*", которому, по-видимому, надо посвятить отдельное исследование.

§5. ТРЕБОВАНИЯ К ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

"Математикалық анализ (Второе издание на 2000 страницах текста со 100 страничным Синопсис-Оглавлением)" не предполагает владения школьной математической программой, не требует нахождения в высокопрофессиональной математической среде, поэтому охватывает школьную математику, разумеется, с руководством для постижения, что и извлечено из общего текста Введения.

Данный раздел основан на авторских публикациях [13] и [32] (нумерации разделов сохранены).

"Математикалық жетілу" деңгейін қамтамасыз ету бұл "Оқулықтың" бірінші "*Математиканың логикалық құрылысы мен талқыланған терминдер сөздігі. Сандардың геометриялық-алгебралық және салдарымен бірге аксиомалық*

***құрылымы негізіндегі математикалық дәлелдеу мәдениеті*" атты тарауынан басталады.** Мазмұны аталуында көрсетілген тарау оқырман оны толық көлемде игереді деген мақсатпен жазылған. Онда математиканың кәсіби сөздігі мен символдық белгілеу, теорема, жиын, анықтама, функция, сан сынды қолданыс құралдары түсіндіріледі, талқыланады және дәлелдеу мәдениеті тәрбиеленеді.

Арнайы айта кететін жәйт – ол нақты сандардың аксиомалары негізінде әрқашанда қолданыста болатын сандар қасиеттерін дәлелдеу болып табылады. Осында үйреншікті $0 < 1$ теңсіздігі де, "*нөлге бөлуге болмайды*" деген жаттанды ереже де, сол "*Математикалық мәдениет*"-ті тәрбиелеудің бір тармағы болып табылады. Сондай-ақ, әдетте еш ойланбай (сәл ойланғанда бұл күрделі мәселе екенін түсінуге болады) қолдана беретін екі жай бөлшектің алымдары мен бөлімдері өз-өзімен көбейтіліп, көбейтінді бөлшектің сәйкес алымы мен бөлімі болатыны дәлелденіп, және де геометриялық тұрғыдан қарағанда неге солай болатыны талқыланады.

Жалпылап айтқанда математикада бәрі де дәлелдеуді қажет ететіндігі көрсетіледі, көбіне жаттанды түрдегі қолданыстағы, іс жүзінде геометриялық есептерге математикалық анализдің жоғары дамыған техникасын қолдануын мүмкін ететін "*координаттық түзу*" тақырыбын ұзындықты өлшеу мәселесімен байланыстырып, соны шешу үстінде рационал және иррационал (рационал емес) сандарды геометриялық мағынасымен бірге анықтап, сол жолдағы ежелгі математиктерді таң қалдырған "*өлшемдес емес*" кесінділер арқылы жасалатын қорытындылар (бұл жөнінде соны тым ерте білгені гректерге есептеу амалдарын дамытуға кедергі болды деген де пікір бар), – түсініп оқылуы терең мағыналы қазақ күйлерін тыңдаудан да, қызықты романды оқудан да кем түспейді.

Ұзындықты өлшеу бірте-бірте оң бүтін, оң рационал және оң иррацинал сандарға әкеледі. Математика қолданысы көбіне теңдеулер арқылы жүргізіледі. Сондағы бірінші дәрежелі алгебралық теңдеу толық шешілуі үшін бар оң мәнді сандарға теріс мәнді нақты сандарды қосуды мәжбүр етеді.

Сан дәрежесі мен логарифмінің, математиканы былай қойғанда, бүкіл табиғаттануда әрдайым қолданыста болатын қасиеттерінің дәлелдемелері негізінде анықтама тілінде соларды қалай жүргізу керек екендігі баяндалады.

Жалпы математикада, соның ішінде сан дәрежесінің анықтамасында да, арифметикалық түбір мен логарифмнің бар болуы туралы теоремалар да, дәлелдеменің өзі не қайсыбір бөлігі қаншама түсінікті болса да, қаншама өзінен-өзі анық болып көрінсе де, олар толық дәлелдеуден өтуі керек және де соны орындағанда тек аксиомалар мен оған дейін дәлелденген тұжырымдарды қолдануға рұқсат етіледі. Бұның бәрінің ең ұтымды жері – дәлелденетін қасиеттер де, қолданылатын құралдар да әрдайым қолданыста болғандықтан бұрыннан белгілі және сол себептен түсінікті.

Бұл жеткілікті көлемде Бірінші тарауда орындалған.

Осының бәрі, қайталайық, мақсатымыз болатын "Математикалық жетілу" ісінің бірінші сатысы десе де болады. Сонан кейін, осы "Оқулықтан" бастап, әрі қарай шексіз деңгейде математикадағы белгіліні игеруді де, жаңа білім-жетістіктерге жету де көп жеңіл түрде қамтамасыз етіледі.

12. Дәлелдемелерге талап. Бұл "Оқулық" мынадай тұрғыдан орындалған: "Математикалық анализ" оқулығының басқа ғылыми кітаптардан – оқулық болсын, монография болсын, өзгешілігі ғылыми жетістікті көрсетуде емес, басқада. "Оқулық" мақсаты әуелі математиканың негізгі ұғымдарын енгізіп, оларды бар мүмкін тереңдікпен талқылап (мәселен, шек анықтамасының оншақты сыр-қыры ашылады), өзге ұғымдармен ара қатынастарын анықтау болып табылады. Сонан соң, игерілген анықтамалар тілінде ілім құрайтын мәселелер қойылады да, солардың шешімдері дәлелдеме арқылы беріледі. Бұнда қабылданған анықтамалар мен қандай әдістемелер қалай қолданылатынын әбден түсініп алып, бірте-бірте "*Дәлелдеме деген не*?", "*Дәлелдеме қалай жүргізіледі?*" және де т. с. с. сұрақтарды біліп (қойылған сұрақты түсінудің өзі көп білім мен дайындықты қажет етеді), оқырман олардың жауаптарын ой-жүйесіне қабылдап алу керек. Дәл осы жәйтті "Математикалық жетілгендік" деп түсінуге болады.

Сондықтан, дәлелдеулер толық, ұқсас жағдайларда ұғу өрісін кеңейту мақсатымен басқа әдістер, басқа сөздер арқылы да беріледі.

Анықтамалардың, мүмкіншілігіне қарай, қабылдану себептері кеңінен көрсетіледі, талқыланады.

"Теорема – қойылған мәселенің шешімі" деген қағида ұсталынады. Демек, әр жағдайда, арнайы айтылса да, айтылмаса да, теорема қандай сұраққа және қалай жауап беріп отырғанын әрдайым түсініп алып, осы жәйтті естен шығармау керек.

Математикалық анализдің жаралу және жетілу тарихына үңілсек, ондағы әр ой мен түсінік өте күрделі жетістік болып табылады да, сол себептен толық дәлелдеме мен түсіндіру орнына пайдаланылатын *"оңай", "айқын", "өзінен өзі көрініп тұр", "түсінікті"* деген сөз бен сөз тіркестері бұл "Оқулықта" сақтануды талап ететін "езбелеу" қауіпі болатын бірнеше ерекше жағдай болмаса, қолданылмайды.

Біздің ұстанымымыз – білім саласында оңай не қиын деген сөздер мағынасыз деп білеміз: білсең - "*оңай*", білмесең -"*қиын*".

13. ***Оқырман методология жағынан шыңдалған, қатесіз анықтамалар мен дәлелдемелерге ғана сенуі тиіс – "Бәріне күмәнді болу керек!".*** Кейде бір оқулықтан екіншісіне көшіп, толық түсінік бермейтін "бір (не бірнеше) қайнауы ішіндегі" методикалық шешімдер оқырманды "білмейтінін білмейді" жағдайына түсіріп, оқу өрісінде сақтала береді.

Мәселен, $f(x) = x^2$ функциясының $x = 5$ нүктесіндегі дифференциалы $l(x) = 10 \cdot x$ сызықты функциясы болатынын "дифференциал деп функцияның өсімшесінің сызықты бөлігі аталады" дегеннен шығарып алу "екі талай". Сондай-ақ, "анықталмаған функция" деген аталуының өзі жаңылыстыратын жәйтке дұрыс емес $F(x, f(x)) \equiv 0$ анықтамасы қосылғанда түсіну мүмкін бе?

Ой салатын бір-ақ сөйлем "Ақырсыз қосынды деген ұғым жоқ" және де сонан туындайтын 1821 жылғы Кошидің "Қатар деген шек" қағидасы бүкіл қатарлар теориясын түсінікті етіп, жарқыратып жібермей ме?

Математикалық анализдегі "Сильвестер критерийінің" дұрыс оқылуын осы "Оқулықта" кездестіресіңдер.

Осындай көптеген жәйттер бұл "Оқулықта" кеңінен орын алған.

Бұған автордың математика-информатикада әртүрлі мәселелермен айналысқаны және солардың кейбіреулерін шешкені де себеп болса керек, - методика мен методология ғылыми ізденіс кезінде шыңдалады.

14. "Оқулықта" жаттығу есептер берілмейді, өйткені "Үзіліссіз математика" ғылымының дәлелдемелері математикалық анализге жататын есептерінің дәл өзі. Бұл "Оқулық" көлемі өте үлкен, өйткені әр тақырып өзіне тән болып, және де бір қарағанда байқала бермейтін, сондықтан тереңде жатқан қасиеттерін, тіпті құпиясын десе де болады, көрсету мақсатында баяндалған. Олардың әрқайсысы адамзаттың ғасырлар бойы дамуының жетістіктеріне жатады. Егер де оқырман жеткілікті тереңдікте тақырыпты игерген болса, онда ежіктеп түсіндірілген беттерге "*көз қиығын салып*" қана әрі қарай оңай жүре береді.

Және де, жалпы білім-ғылым жағдайында сияқты, математикада да, іштей біліп тұрғаныңды қандай сөздермен өзгеге жинақы, дәл және түсінікті етіп жеткізу керек мәселесі де бар. Ол әдетте қалыптасқан сөз тіркестері мен сөйлемдер арқылы орындалады. Осыған орай, бұл "Оқулықта" математиканың негізі баяндалып талқыланғандықтан, солардың кезіндегі әдеби көркемдеуіне де аса көңіл бөлінген, оған қоса кейде бір нәрсе екі-үш өзара бөлек түрде түсіндіріледі.

Тағы бір айтатын жәйт, – "Оқулықта" әр түрлі ерекшеліктерді көрсететін, сол себепті шығарылған, көптеген мысал-есептер келтірілген болса да, оқырманның өзіне шығаруға есептер ұсынылмайды. Өйткені, математикалық анализді игергеннен кейін бүкіл математиканы құрайтын ғылым (әрине, оның өзін де қоса) – математикалық анализ жалғасы, демек, есептері.

"Оқулық" құрылысы әр параграфтың басын ғана оқып, әрі қарай, түсіну жолын жоғалтпай, басқа параграфтарға көшіп, ығыса беруді қамтамасыз етеді. Ал параграф ішіне тереңдей беріп, қосымша мәліметтер алуға болады. Қорытындылап айтқанда, әбден санаға сіңгеннен кейін, жазылғанды "Көзбен жүгіріп өтуге болады". Тоқетері – "Үйрен, үйрен де жирен".

15. "Оқулықтағы" "методологиялық шешім табу" мен "есеп шығару" орны. Математикалық анализде ой-санаға сіңіруді қажет ететін ұғымдар бар, соның негізгілері тереңде жатқан – сан, функция, шек, үзіліссіздік, туынды, интеграл, қатар болып табылады. "Оқулықта" солардың бет жағын өзінше әшекейлеу арқылы ойланбай-ақ тек жаттығу түрінде баяндалатын методологиялық шешімдерге ерекше көңіл бөлінген.

Айтқанымызды негізгі ұғым – шек мысалында жандандырайық. Наполеон айтқан екен: *"Бір мамлюк тіке қақтығыста менің бес гренадерімді жайратады, бірақ ұйымдастыру күшімен бір полкім барлық мамлюктің күлін көкке ұшырады"*.

Сол сияқты, тақырыпты ашудағы методика жағынан "ұтымды ұйымдастыру" арқасында (осында және көптеген басқа жағдайларда да) "Оқулықта" сандық функция шегінің 36 жағдайында $\varepsilon - \delta$ - тіліндегі анықтамаларын жазып шығу мәселесі аналитикалық өрнектелуі мен оның геометриялық бейнесі көрнекі түрде екі кестеде бейнеленіп, соларды шектің түріне сәйкес әр кестеден бір-бір жолдан көшіру ережесіне айналған.

Бірақ, шек анықтамасын еш ойланбай, жаттанды түрде ғана дұрыс жаза алудан кейін, көптеген (үзіліссіздік, туынды, интеграл, қатар сынды) мазмұнды қолданыстар негізінде оның өте терең болмысын бірте-бірте сол негізгі ұғымдармен бірге санаға сіңіру кезегі келеді.

Сонымен, осында да, жалпы жағдайда да математика білім-ғылымында тіпті дұрыс болса да айтып беру мен өз аузынан шыққанын жетік түсіну әрқашанда беттесе бермейді.

Дәл осы қағида бүкіл оқулық бойы сақталады: әріптермен белгіленген "*анықталмағандықты ашу*" әдістемелері, дифференциалданатын элементар функциялардың туындыларын есептеу, алғашқы функциялары элементар функция болатын функцияларды "*тану және интегралдау*", басқа да көптеген "*есеп шығару мен жаттығу*" мағыналы тапсырмалар алгоритмдік, яғни бірінен кейін бірі орындалатын қарапайым амалдар түрінде берілген. Және де, бұл есептердің сәйкес шек, туынды және интеграл ұғымдарын білмей-ақ, солар атты өте терең теорияны игермей-ақ, дұрыс жауаптарын жазып беруге болады.

Бұнымен, бір жағынан, пәнді, соның ішінде математикалық анализді де, саналы игеру мен, екінші жағынан, сондағы ежелгі заманнан бері оқулықтар мен есептер жинақтарының бірінен-біріне көшіріліп, "*тозығы жеткен*" деп атауға болатын жаттығуларды аса ойланбай шығару – салыстыруға келмейтін дүниелер деп айтқымыз келеді.

16. Орта мектеп өрісіндегі математикалық анализ. Математикалық анализдің білімдегі (және де ғылымдағы) ерекше орны – ең алдымен ғасырлар бойы іріктеп қалыптасқан мектеп математикасы негізінен математикалық анализдің жеңілдетілген түрі екендігінде.

Осыған ыңғайлап айта кетейік, мектеп геометриясының маңыздылығы баланың ойлау жүйесін дамытуда десе де болады. Геометрияда әуелі ұстанымдар тізімі (оларды "*аксиомалар жүйесі*" деп атайды да, қаншама сондай жүйе болса, соншама әртүрлі "*Геометрия*" болады) тағайындалады, сонан соң осы мәліметтерді және солардың негізінде дәлелденген тұжырымдарды ғана қолданылып, теория құрылады. Бұндағы ең маңыздысы – ол дәлелдеулер кезінде қабылданған ұстанымдар мен солардың салдарын ғана қолдануға болатындығында. Дәл осы жәйт логиканы дамытады деп есептеледі.

Геометриядағы аксиомалар көзге көрінетін нүкте, кесінді, түзу, жазықтық және кеңістік туралы болуы сондағы логикалық ізденістерді көрнекі түрде жандандыра түседі. Және де бұл геометриямен ғана шектелмейді, – механика, ықтималдықтар теориясы, физика бөлімдері де осылай қабылданған аксиомалар негізінде зерттеледі.

Оған қоса, мектеп математикасының негізгі жүгі "*есеп шығару*" емес, әр адамға қажетті "Математикалық жетілу" деңгейіне жетудің бар мүмкіндіктерімен қамтамасыз ету. Және де, сол "Математикалық жетілу" болашақ мамандығына қатыссыз – гуманитарлық па, не математика тәрізді "дәл мағыналы" ғылымдар ма, не олардың арасындағылар ма, – бәрі бір!

17. Негізгі ұстам: орта мектеп "есеп шығарумен" шектелмей "математикалық жетілуге" әкелу керек. Маңыздылығына сай қайталайық – мектеп математикасы тек қана "*есеп шығарумен*" шектеледі деген өте қате. Соның салдары болса керек мектеп математикасын *"Мектепте математиканы жақсы көретінмін, кез келген есепті тез шығаратын едім"* деңгейінде түсіну кең тарап кеткен. Тіпті студенттерге анықтама, есеп қойылуының және оған жауап беретін теореманың оқылуын, оның төңірегіндегі қосымша сұрақтарға, әрине, дәлелдеудің әр сөзі мен ойын қандай тереңдікте игеру талап етілсе, сондай деңгейде жауап бере алуыңыз керек деп қаншама айтылса да, *"Бұны мен білмеймін, маған есеп беріңізші"* дейді.

Әрине, бұл есеп шығармау керек деген емес. Дұрыс қойылған методология жағдайында әдеттегі мектеп есептері математикада қиын деп саналмайтын алгоритмдік, яғни бірінен кейін бірі орындалатын қарапайым амалдар түрінде жазылады да, солай оқытылады.

Бар мәселе – оқушы санасына "*Математикалық әлемге*" енгізетін бірінші тараудың мазмұнын оның жас ерекшеліктеріне сай лайықтап жеткізуде.

18. "Оқулықтың" мектеп мұғалімін дайындау мүмкіндігі. Бұнда мектеп бағдарламасының негізгі бөлігі де қамтылған.

Бірінші тараудың мазмұнын әдетте "*Математикалық анализге кіріспе*" деп атайды. Бұл жағдайда "*Кіріспе*" деген сөз, көмекші мәлімет деп көрінуі мүмкін болғандықтан, кесіп айтайық – "Бірінші тарауды" толық көлемде әбден түсінбей, "Математикалық анализді" игеру мүмкін емес.

Ал "Математикалық анализдің" өзін әрі қарай жалғастырғанда бүкіл интеллектуалды дүниенің кілті, сонымен бірге, ешкім тартып ала алмайтын әрқашан да қолданысқа дайын өмірлік "суық қару" деп те түсінуге болады.

Сонымен, бірінші тарауда мектеп оқытушысы негізгі элементар функциялардың бес түрінің үшеуін: – *дәрежелік* x^a , *көрсеткіштік* a^x және *логарифмдік* $log_a x$ функцияларды, ал үшінші тарауда қалған екеуін: - тригонометриялық пен кері тригонометриялықты қажетті және жеткілікті деңгейде игеріп шығатын болады.

Оған қоса, тригонометриялық және кері тригонометриялық функциялар "*шек*" және "*функциялық қатар*" зерттеу құралдарын игеруді талап етеді. Дәл айтқанда, әдеттегі $sinx, cosx, tgx, ctgx$ функцияларының геометриялық анықтамаларымен қатар аналитикалық анықтамалары да бұл "Оқулықта" беріледі. Және де, бұл осы тақырыптың өзекті жері: негізгі тригонометриялық функциялардың дәрежелік қатар түріндегі аналитикалық анықтаманың геометриялық бейнесі геометриялық анықтаманың дәл өзі болып шығатыны көрсетіледі.

Кері тригонометриялық функцияның бар болуы және де әр негізгі элементар функцияның Тейлор формуласы арқылы кез келген дәлдікпен жуықтап есептеу мүмкіндігі осы "Оқулықтағы" дифференциалдық және интегралдық есептеудің үлесі.

Осының бәрін "Оқулықтан" игеріп алу үшін бірінші тараудағы математиканың негізгі түсініктерін – символдық белгілеулерді, қолданатын терминдік сөздер мағынасын, дәлелдеме затын, бір сөзбен айтқанда, бәрін сана деңгейінде игеру керек.

Әсіресе сан ұғымы егжей-тегжейлі берілген. Соның ішінде нақты сандарды анықтайтын 17 аксиома салдары болып табылатын қолданыстағы негізгі қасиеттердің дәлелдемелеріне ерекше көңіл аудару керек. Бұндағы сандардың қасиеттері бастауыш мектептен белгілі, сондықтан не туралы сөз болып тұрғанын түсінуде қиыншылық болмайды. Ал дәлелдеме жүргізу жолдары нағыз "*Математикалық тәрбие*" сабақтары болып, "*Математикалық жетілуге*" әкеледі.

Геометрия пәнінің орны бөлек болса да, нақты сандардың саны 17 болатын аксиомалардан оның қолданыстағы барлық негізгі қасиеттерін шығарып алу геометрияның методологиялық міндетін атқарады.

Бұны былай да түсінуге болады: көп жағдайда, өмір болсын, басқасы болсын, әдетте "*не өгіз өледі, не арба сынады*" жағдайда әрине, мүмкіндігінше ең ұтымды шешім қабылдау керек болады. Міне осыны геометрияға ұқсатуға болады — кездескен жағдайды "*аксиомалар* *жүйесі*" ретінде қабылдай отырып, әрі қарай үйренген логикалық таразылау арқылы тиісті қорытындыға келу керек.

Мектеп тақырыбын жалғастыра отырып, кейбір осы күнге дейін орын алып келген оқулықтардың олқылықтарының бірін атап өтейік: мектеп бағарламасының түрінен табылатын "теңдеу" ("теңдеме" деп те атайды) ұғымының анықтамасы түгіл, қандай да болсын түсіндірмесі берілмейді. Әрине, Бірінші тарауда ол да табылады. Бұндай теориялық білімнің бәрін мектеп мұғалімі сабақта оқушыға айтпайды, айту да керек емес. Бірақ оның пәнін қажетті деңгейде толық және терең түсінгені өзіне жалпы рухани тірек пен кәсіби еркіндік беріп, әр оқушының өзіндік әртүрлі талабына сай жоғары методикалық және методологиялық биіктікте түсіндірулер бере алады.

Және де, келешекте математика оқу пәні ретінде кездеспейтіндерді оқыту қосымша қиындық тудырады да, мұғалімнің жоғары сапалы дайындығы ол жағдайда да математика "затымен" қажетті көлемде кәсіби деңгейде түсіндіруге мүмкіндік береді.

Сонымен, айтылғанның бәрін осы "Оқулықтан" игерген математика пәнінің мектеп мұғалімін өзін "*таптырмайтын*" деп айтатындай өте жоғары сапалы маманға айналдырады. Және де сол адам барлық материалдық және моралдық талаптарға сай болып, мемлекеттің негізін құрайды: өз елінің күрделі кезеңінде Отто фон Бисмарк (1815-1898) айтқандай "*Мектеп мұғалімі соғысты жеңдірді*", сондай баға А.П. Киселевтің (1852-1940, орыс педагогі) мектеп математикасының белгілі оқулығына да берілген.

19. Алдымен – математикалық анализ, соның ғана негізінде – методика мен методология. Сонымен, мектеп математикасының мұғалімі алдымен математикалық анализді керекті деңгейде (ол жоғарыда бөлек сөз болған) игеруі қажет, сонан соң ғана әртүрлі методика мен методология орын алады, және де қазақ шәйіндегі сүт пен шәй тәрізді бұлардың орындарын алмастыруға болмайды.

Жинақтап айтқанда, әр мемлекет математикалық анализден арыла алмайды, өйткені "*Ұяңда не көрсең, ұшқанда соны ілесің*" дегендей, балабақшалар мен мектептерсіз болмайды. Мектепте бірінші кластан соңғысына дейін математика өтіледі, ал мектеп математикасы, жоғарыда бірнеше рет айтылғандай, "*жеңілдетілген*" математикалық анализдің дәл өзі. Балабақша тәрбиешісі "$2+2=4$" қалай болатынын, әрине өз деңгейінде, үйрету керек, бұл да математикалық анализ.

Бірақ, мәселе басқада – математиканы жетік түсінуде! Себебі бұл негізгі талап орындалған жағдайда мектеп мұғалімі болсын, кез келген дәрежедегі ғылыми атақты жоғары мектеп оқытушы болсын, сабақ үстінде қаншама терминдер және символдармен бөленген сөз ағымын төгілтіп, класс пен аудиторияны жаңғыртып жатса да, пән мағынасымен жұғыспай, тіпті қайшы келуі де мүмкін.

Қысқасы, өзі пәнді жетік түсінбеген, оқыту кеңістігін ғылыми терминдермен жүйесіз шулатқан ұстаз шәкіртін үйретуі мүмкін емес. Мектеп оқулығындағы әр олқылық халыққа оқтай тиеді. Мәселен, екі жай бөлшекті қосу амалын үшін олардың білімдерінің ең кіші ортақ еселігін табу есебіне тіреп қойғаны сол қосу амалын еш пайдасыз шексіз қиындатып, жаппай білімсіздікке әкеледі.

Қолданыстағы жоғары ғылыми дәрежелі авторлық ұйымның мектеп оқулығында "$3^x = 80$ *теңдеуін шешу үшін логарифм ұғымы енгізіледі*" делінген. Бұл болса, мүлдем қате – ондай теңдеу шешу үшін жаңа функция енгізілмейді, мәселен, дәл бір оң мәнді шешімі бар сол тәрізді $x \cdot 3^x = 80$ теңдеуін шешу үшін тағы жаңа функция енгізу керек пе?

Логарифм керек, бірақ басқа себептермен – оған "Оқулықтың" бірінші тарауының арнайы параграфы арналған.

20. Мектеп математикалық оқулығына талаптар. Мектеп оқулығы жайлы А.Н. Колмогоров "*Оқулықтың күрделілігі ұшақтың жаңа түрін құрастырудан кем емес*" деген баға берген. Халықаралык деңгейдегі математика мен информатиканың кең спектріндегі барлық ізденістер мен нәтижелер орта мектеп пен Жоғары оқу орындарын барлық бағдарламалық сұрақтар бойынша тереңірек түсінуге және тікелей қолданыс табатын әдістемелік шешімдір шығаруға мүмкіндік береді.

Кеңестік дәуірде мектеп математикасының айнасы "*Математика в школе*" журналы болатын. Белгілі математиктер сонда мақалалар басып, әр оқулықты аяусыз талқыға салған. Оқулыққа берілген рецензиялары жарияланып отырылған.

Оқуға түсу емтихандарының сараптамалары да сонда жарияланды. Сол уақыттағы оқуға тапсырушылар математикалық индукция әдісі мен иррационалдықты нашар түсінеді делінген, авторлардың үлкені: "Есімде, мектеп жылдарында өзімде де солай болған" - деп еске алады. Осы түсінуге қиынырақ тақырыптар, негізінде мүлдем басқаша, мүмкін нақтырақ мазмұнда 2000 жылғы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің "авторлық ұжым – баспа" форматында өткізген Конкурсының жеңімпазы ретінде қазақ және орыс тілдерінде жазылған "Алгебра және анализ бастамалары" оқулығында берілген.

Физика-математикалық бағытта мамандырылған мектептің басты көрсеткіші – ол мектеп бітіргеннен кейін университет қабырғасында математикалық анализді терең игеруге жеткілікті білім беру. Әрі қарай, талаптарды азайта келе – техникалық және экономикалық мамандықтарда жоғары математика курсын меңгеру үшін дайындықтың болуы. Жалпы орта мектепте математика бойынша стандартты мектеп бағдарламасы "Математикалық жетілуге" бағытталуы тиіс. Бірақ есепті шешуге ғана бағытталмай, математиканы оқытудың өзіндік негізгі мақсаты болатын нақты ғаламды сандық және сапалық тұрғыда қабылдай алуға жетуі керек (мысалы, журналист үшін квадраттық және логарифмдік теңдеулер шешімі мүлдем керексіз болғанымен, математикалық тәрбие баяндалып отырған оқиғаларды басты және екінші кезектегілігін сәйкес таразылап, оны өз мақаласында барынша мәліметті және логикалық тұрғыдан мінсіз құру қажет).

Мектеп мұғалімі "елес" деңгейінде математика құрылымы мен осы мақаланың §.7 берілген ең ұтымды көлемдегі математикалық анализ курсын түсінуі қажет.

21. Мектеп математикасы – жалпы ұстанымдар.

1^0. Амалдарды орындау мен теңдеулерді шешуді "затын" түсінбей, жаттанды түрде ғана қаншама орындаса да (он немесе жүз рет), тақырыпты еркін меңгеруге алып келмейді.

2^0. Жалпы өмірде, соның ішінде, кез келген тестік тапсырмалар кезінде есептеу амалдарын дағдылы түрде орындай алу қажет, – бұл бірінші этап.

3^0. Екінші этап. Оқушыға берілетін математикалық тәрбиенің бастысы, орындайтын не енгізілетін амалды түсіндіруден тұрады – ұғымының өзін "*Бұл не және не үшін қажет?*" деген сұрақ бойынша есептеулерде аналитикалық және суреттер арқылы көрнекі геометриялық талқылаулардан тұрады (бір рет түсініп, одан кейін ұмытуға да болады).

4^0. Амалдардың мағынасының түсіндірмесін және жазу түріндегі өрнектелуін кейін ұмытуға болады, бірақ оларды "түйсік түбіне" орнататын түсіну сәті болуы қажет, бұрында айтылғандай "*Ой түбінде жатқан сөз шер толқытса шығады*".

5^0. Мұғалім мектеп математикасының математикалық анализ түрінде жазылған барлық теориялық негіздерін жалпы да, егжей-тегжейлі де түсінуі қажет, – өйткені өзің жетік түсінбейтінді біреуге жететіндей түсіндіру мүмкін емес.

6^0. Математикалық анализді барлық тереңдікте игерген мұғалім кез келген деңгейдегі оқушыға бейімделе алады – методикалық вариативтілік дегеннің өзі де осы.

7^0. Көптеген мектеп тақырыптары бойынша өзіндік "қолтаңбасымен" тікелей қолданысты әдістемелік шешімдерді көп мөлшерде жинақтаған мұғалім, анықтама бойынша, "*Тәжірибелі ұстаз*".

8^0. Тәжірибелі ұстаздардың ең мықтысы ғана әдістемелік мақала жаза алады, ал мықтылардың мықтысы ғана мектеп оқулықтарының авторлары бола алады.

9^0. Жалпы теориялық ғылыми-әдістемелік зерттеулер нақты оқыту барысында бала психологиясына, жас ерекшеліктеріне және сол сияқты кездесетін жәйттерге сәйкестендіріледі.

10^0. Мектеп математикасында ғылым ретіндегі математиканың қатаң құрылымын ұстанымға алудын (бүтін, рационал және иррационал сандардың коммутативтілік, ассоциативтілік топтық қасиеттерін дәлелдеу сияқты) қажеті жоқ.

11^0. Мектеп математикасында дәлелдеулерді "шындық тәрізді талқылаулармен" алмастыруға болады.

12^0. Түсінуге қиын ұғымды, одан да түсініксіз ететін сөздермен беретін, тіпті не жайлы сөз болып жатқанын маманның өзі де түсіне алмайтындай, "*түсінікті*" түсіндірмесін болғызбау (Мысал: кеңес оқулықтарында функцияны тәуелді және тәуелсіз айнымалылар арқылы бергені).

13^0. "Формула", "өрнек", "шама", "тура және кері пропорционалдық" тәрізді қолданылатын барлық атаулар мен терминдер "*өз-өзінен түсінікті*" дегенге сүйенбей қажетті көлемде түсіндірілуі керек. Ол, әрине, оңай емес және бала психологиясымен сәйкестірілген, мұқият ой елегінен өткен сөздермен берілуі міндет. Математика қабылдауға жеңілденіп, оқуға қызықты болып, нәтиже бірден білінеді.

14^0. Барлық мүмкін жерлерде білім алушы неге, немен және не үшін айналысып жатқанын соны жетік түсіндіретін арнайы әдістемелік ізденістер арқылы білуі қажет (мысалы, бөлімдері әртүрлі бөлшектерді қосу – оның күрделі қиыншылығы неде және сол қалай шешіледі, сонда біріншісі таң қалдырса, екіншісі – адам ақыл ойының күші нәтижесіндегі математиканың құдіретіне сүйсіндіреді).

15^0. Мектеп математикасы кең адами өлшемде өнімділігі аз есептерді тікелей формула қолдану деңгейінде шығарумен шектелмеуі қажет, ол – физика, химия, биология, астрономия, география және барлық гуманитарлық ғылымдардан алынған энциклопедиялық білімді сандық және сапалық логикалы ойлауға мүмкіндік беретін "Математикалық жетілуге" (кеңес дәуірінде орта білім құжаты "Жетілу аттестаты" деп аталағандай) әкелуі керек.

16^0. Мектеп тақырыптарын дамытқанда қандай да бір қолданыста мағыналы есепке немесе қандай да бір бақылауға ұстанған жөн. Мәселен, бөлшектерді кесінді ұзындығын өлшеу есебін шешу арқылы беруге болады және солай беру керек.

22. Бірінші тарау қалың халыққа "Математикалық жетілуге" тура жол. Бірінші тарау өз "Математикалық жетілуін" және де шектер теориясы мен дифференциалдық-интегралдық есептеусіз, қалыптастырғысы келетін оқудағы студенттерге де, дипломды математик, информатик, физик, химик, биолог, сондай-ақ техникалық мамандықтардан бастап қаржы-экономикалыққа дейінгілерге де мүмкіндік береді. Математика мұғалімдері бұл I-тарауды міндетті түрде, оған "Функцияның шегі" атты III тараудағы бірінші параграфты қосып, бір айнымалы жағдайындағы II-VII және X-XI тараулармен жалғастырып, кәдімгідей игергенде, толық көлемді математикалық тәрбие алады.

23. Ұлт–мемлекет деңгейіндегі керек математикалық анализ өмір жолын ғылым не болмағанда қолданбалы информатикамен байланыстыруды жоспарлаған адамға да керек. Интернет деңгейіндегі бірнеше жол мәліметті адам 4-ші индустриялық революция заманына жат болып келеді, бірақ күңгірт болашаққа бейімделу мүмкіндігін игерілген математикалық анализ береді.

24. Ғылыми нәтиженің әдемілігіне сүйсінген Борель мен Мейнардус 1885 жылғы Карл Вейерштрасстың "Кесіндідегі кез келген үзіліссіз функцияны алгебралық көпмүшеліктермен кез келген дәлдікте жуықтауға болады" деген теоремасының ([12] оқулығының 2(§7, IX тарау)-пунктте екі түрде және де 4 (§5, XIX тарау)-пунктте периодтық жағдайдағы тағы бір түрде дәлелденеді) басқа дәлелдемелерінің тізімін жасапты. Осы сияқты, математикалық анализді терең игерген адам математиканың көптеген ғажайып жетістіктерін түсінетіндей болып, талай әдемілікке бөленеді.

25. Ғылымда былай да болған. Математиканың жүйелі түрде дамуы Александрия қаласында шоғырланған грек өркениеті болып табылады. Сол қала үш кезеңде қазіргі дәуірге дейінгі 47 жылы римдіктермен, 392 жылы христиандармен және, соңында, 640 жылы мұсылмандармен тоналған.

Алла Мұхаммед Пайғамбар (22. IV. 571-8. VI. 632) арқылы жеткізген ислам діні шашыраған араб тайпаларын біріктіріп, олар Инд өзенінен Гибралтар бұғазына дейінгі орасан жерде жайылған Араб халифатын құрды. Жаңа дінді дүниежүзіне тарату мақсатында жоғары мәдениетті елдерден Құран кітабын өрнектеуге қажетті дарынды шеберлерді жинақтады.

Сол кездегі Халифат басшыларының көрегендігі соншалық, Құран қызыметтерімен байланысты араб тілі мен жазуын әрі қарай дамытқан, сонымен бірге жалпы деңгейі өскен мамандарды таратып жібермей сақтап қалады. Қолдарына тиген гректердің еңбектерінің сақталған үзінділерін осы мамандар арқылы араб тіліне аударып, оның қатарына Үнді ғылыми жетістіктерін қосып, жаңа өзіндік зерттеулерді бастап, нәтижесінде дүниежүзіндегі математика, астрономия, медицина, философия, жалпы гуманитарлық ғылымдарда алда болған. Солардың арасынан Екінші Аристотель аталған қазақ әл-Фараби де табылады.

Бұл өркениеттің көтерілуі мен өшуін әйгілі француз ғалымы Эрнест Ренан (28.02.1823-12.10.1892) былай суреттеген: ". . . *жер бетінде екі деңгейдегі ұлттар бар: біреулерінің ғалымдары бар болса, екіншілерінікі жоқ. Бұл екіншілері қаншалықты интеллектуалды құлдырауда болса, соншалық саяси құлдырауда да болады. Мұсылмандық Шығыс еуропалық Батыспен бәсекеде болып, тіпті XVI ғасырға, яғни қазіргі ғылымның пайда болуына дейінгі аралықта олардан басым болды. Мұсылмандық әлем XIII ғасырда құрсағындағы ғылым ұрығын тұншықтырып, өзінің құлдырауына келді*".

"Болмасаң да ұқсап бақ" дегендей қазақ математикалық анализ игеру негізінде ғылым-білімде шексіз көтерілуі керек.

§6. ОПЫТ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЯ ПО УСТАНОВЛЕНИЮ ВОЗРАСТНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ УСВОЕНИЯ УЧАЩИМИСЯ КОНКРЕТНОЙ ПОДТЕМЫ ШКОЛЬНОГО ПРОГРАМНОГО МАТЕРИАЛА

Методология проведения экспериментов по возрастным способнотям разработана в [33], опыт описан в [34].

МЕКТЕП ОҚУШЫЛАРЫНЫҢ ЖАС ЕРЕКШЕЛІКТЕРІНЕ БАЙЛАНЫСТЫ МЕКТЕП БАҒДАРЛАМАСЫНДАҒЫ ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫН ИГЕРУДІҢ ЭМПИРИКАЛЫҚ ӘДІСІН ЖҮЗЕГЕ АСЫРУ (Астана, 2015)

[34] мақаласында оқушылардың жас ерекшеліктеріне сәйкес мектеп бағдарламасының материалын игерудің сегіз қадамнан тұратын эмпирикалық тексерулер жүргізілген:

1. Бағдарламалық материалдар оқушылардың жас ерекшеліктеріне байланысты әрқайсысы 15-30 минуттан тұратын тақырыптарға бөлінеді. Әрбір тақырып бойынша әрі қарай сараптамадан өтетін әдістемелік ұсыныстар беріледі.

2. Оқушылардың жастарына қарай топтар құрылады.

3. Жастарына қарай құрылған топтардың әрқайсысымен құрастырылған әдістеме бойынша 15-30 минуттық сабақтар жүргізіледі.

4. Тақырыпты меңгеру деңгейін тексеру үшін уақытқа байланысты екі түрдегі бақылау формасы жүргізіледі: а) Тура сабақтан кейін, б) Жазбаша материалдарды меңгергеннен кейін.

5. Бақылау ауызша сұрау, жазбаша жұмыс және тестілеуді қамтиды.

6. Тақырыпты меңгеру дәрежесі бақылау нәтижелерін статистикалық өңдеу негізінде анықталады.

7. Тақырыптар мен жас ерекшеліктеріне байланысты құрылған топтар бойынша қорытындылар мен ұсыныстар жасалады.

8. Эксперимент нәтижелерін әлеуметтік топтар, өңірлер, елдер т.б. бойынша салыстыруға болады.

Бұл мақалада оқушылардың жас ерекшеліктеріне сәйкес мектеп бағдарламасының *«Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары»* тақырыбын меңгерудің жоғарыда келтірілген әдістеме бойынша жүргізілген эксперимент нәтижелері ұсынылады.

1-ҚАДАМ таңдалған тақырып бойынша әдістемелік құралдар дайындаудан тұрады. «Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары» тақырыбы бойынша [7-8] оқулықтарының әдістемесі негізінде сабақ жоспары құрастырылды:

Сабақтың тақырыбы: Ықтималдықтар теорисының негізгі ұғымдары: тәжірибе, тәжірибе нәтижесі – элементар оқиға, элементар оқиғаның ықтималдығы, оқиға, оқиға ықтималдығы, элементар оқиғалар кеңістігі. «Тәжірибе нәтижесінде берілген оқиға орындалды және орындалған жоқ» дегеніміз не?

Сабақ барысы:

Мұғалім: Оқушылар! Сіздер күнделікті өмірде «болуы мүмкін», «оның орындалуы екіталай», «міндетті түрде орындалады» және т.б. құбылыстарды болжайтын сөз тіркестерін қолданасыздар. Математикада кездейсоқ құбылыстардың орындалу ықтималдықтарын сандық сипаттайтын арнайы бөлім бар. Ол ықтималдықтар теориясы деп аталады. Біздер бүгін ықтималдықтар теориясының алғашқы ұғымдарымен танысамыз. Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдарын беру үшін «Киоск» көмекші моделін қарастырайық.

Мұғалім: Оқушылар, киоск нелерден тұрады?

Оқушылар: Киоск тауарлардан тұрады.

Мұғалім: Ал әрбір тауарға не сәйкес қойылады?

Оқушылар: Әрбір тауарға оның бағасы сәйкес қойылады.

Мұғалім: Айталық сіз киоскіге кірдіңіз, одан шыққанда пакетіңіздегі заттардың саны қандай болуы мүмкін?

Оқушылар: Егер маған қажет зат болмаса, бос болуы мүмкін немесе бір, екі, т.с.с. барлық тауарлардан тұруы мүмкін.

Мұғалім: Ал пакетіңіздің бағасын қалай анықтайсыз?

Оқушылар: Оның ішіндегі тауар бағаларын қосамыз.

Мұғалім: Оқушылар, ықтималдықтар теориясы кездейсоқтықтың математикалық анализы болып табылады. Бұнда тәжірибе, тәжірибені жүзеге асыру және оның барлық мүмкін нәтижелері қарастырылады. Біздер тәжірибе нәтижелері ақырлы жиын болған жағдаймен шектелеміз. Математикада тәжірибе нәтижелерін ω белгілеу қалыптасқан. Оқушылар! Біз әрқашан келесі ретпен жүреміз:

Мұғалім тақтада, оқушылар дәптерлерінде келесі кестені толтырады.

Рисунок 2

Енді осы үштікке мысалдар келтірейік.

Мысал 1. Тәжірибе теңгені бір рет лақтырудан тұрсын. Онда тәжірибені жүзеге асыру – теңгені бір рет лақтыру. Нәтижесінде теңге елтаңба (оны «T» арқылы белгілейік) немесе сан (оны «S» арқылы белгілейік) жағымен түседі. Сонда, біздің жағдайда екі нәтиже бар: $\omega_1 = T$ (елтаңба жағы түсті) немесе $\omega_2 = S$ (сан жағы түсті) – бұлар тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелері. Демек

Тәжірибе	Теңгені бір рет лақтыру
Тәжірибені жүзеге асыру	Теңгені бір рет лақтырудан тұрады
Тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелері	$\omega_1 = T$ (елтаңба жағы түсті), $\omega_2 = S$(сан жағы түсті)

Мысал 2. Бірінші тиын, кейін ойын сүйегі лақтырылсын. Онда жоғарыдағы кестені толтырайық.

Тәжірибе	Бірінші тиын, кейін ойын сүйегін лақтыру
Тәжірибені жүзеге асыру	Бірінші тиын, кейін ойын сүйегін лақтырудан тұрады
Тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелері	$\omega_1=(T,1),\omega_2=(T,2),\omega_3=(T,3),\omega_4=(T,4),$ $\omega_5=(T,5),\omega_6=(T,6),\omega_7=(S,1),\omega_8=(S,2),$ $\omega_9=(S,3),\omega_10=(S,4),\omega_{11}=(S,5),\omega_{12}=(S,6)$

Демек, бұл тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелер саны он екі.

Осы сұрақтар мен көмекші модель негізінде мұғалім ықтималдықтың негізгі ұғымдарын береді. Ол түсінікті болу үшін көмекші модель мен ықтималдық моделді қатар бір кестеге өзі тақтада, оқушылар орындарында толтырады.

Кесте 1 – Ықтималдық модель және көмекші «Киоск» моделі

Ықтималдық моделі	Көмекші "Киоск" моделі
Элементар оқиға	Тауар
$\omega_1,\omega_2,...,\omega_n$	
Элементар оқиғаның ықтималдығы	Тауардың бағасы
$P(\omega_1)=p_1,P(\omega_2)=p_2,...,P(\omega_n)=p_n,p_1+p_2+...+p_n=1$	
Элементар оқиғалардан құралған A оқиғасы	Қандай да бір тауардан құралған пакет
$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_k}\}\,(k=1,2,...,n;1\le i_1<...<i_k\le n)$ немесе бос пакет $A=\emptyset$	
A оқиғасының ықтималдығы - $P(A)$	$P(A)$ - A пакетінің бағасы
$P(A)=P\left(\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_k}\}\right)=P\left(\{\omega_{i_1}\}\right)+P\left(\{\omega_{i_2}\}\right)...+P\left(\{\omega_{i_k}\}\right)=p_{i_1}+p_{i_2}+...+p_{i_k},P(\emptyset)=0$	
Элементар оқиғалар жиына	Киоск
$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$	

Ықтималдық модель мен көмекші «Киоск» моделін құруға мысалдар келтірейік.

Мысал 3. Теңгені бір рет лақтырудың көмекші «Киоск» моделін құрайық.

ТАУАР: Тәжірибенің барлық мүмкін нәтижелері T және S. Демек киоск $\{T;S\}$ тауарларынан тұрады.

ТАУАР БАҒАЛАРЫ: Тауарлар бағаларын қалауымызша анықтаймыз. T тауарының бағасы p–ге, S тауарының бағасы q–ге тең болсын. Бұл сандарға келесі шарттар қойылады – олар теріс емес болу қажет және $p+q=1$ бірлік.

ПАКЕТТЕР: Барлық мүмкін пакеттерді құрайық: бос пакет – $\emptyset$; бір тауардан тұратын пакеттер - $\{T\}$, $\{S\}$; екі тауардан тұратын пакет - $\{T;S\}$.

ПАКЕТ БАҒАЛАРЫ: бос пакеттің бағасы нөлге тең, бір Т тауардан тұратын пакетінің бағасы р санына тең, бір S тауардан тұратын пакетінің бағасы q санына тең, Т мен S тауарларынан тұратын пакеттің бағасы, яғни бүкіл киоскінің бағасы $p+q=1$ тең.

Енді осы тәжірибенің ықтималдық моделін құрайық:

ЭЛЕМЕНТАР ОҚИҒАЛАРДЫҢ ЫҚТИМАЛДЫҚТАРЫ: Элементар оқиғалардың ықтималдықтары $P(\{\omega_1\})=P(\{T\})=p$ және $P(\{\omega_2\})=P(\{S\})=q$.

ОҚИҒАЛАР: Барлық мүмкін болатын оқиғалар: $A_0=\emptyset,A_1=\{\omega_1\},A_2=\{\omega_2\},A_3=\{\omega_1,\omega_2\}=\Omega$.

ОҚИҒАЛАРДЫҢ ЫҚТИМАЛДЫҚТАРЫ: $P(A_0)=0,P(A_1)=p,P(A_2)=q,P(A_3)=p+q=1$.

ЭЛЕМЕНТАР ОҚИҒАЛАР ЖИЫНЫ: $\Omega=\{\omega_1=T,\omega_2=S\}$.

Мұғалім: Сонымен ықтималдықтар теориясында тәжірибе нәтижелері *элементар оқиғалар* деп аталады. Барлық элементар оқиғалардан құралған жиын *элементар оқиғалар жиыны* деп аталады.

Элементар оқиғалар кеңістігінің бос жиыннан бастап, бүкіл кеңістікке дейінгі кез келген жиыншасы, яғни, қарастырылып отырған тәжірибе нәтижелерінен тұратын кез келген жиынды *оқиға* деп атайды. Сонымен

Анықтама 1. Элементар оқиғалар жиынының кез келген жиыншасы ***оқиға*** деп аталады.

Тағы бір ескертейік, бұл оқиға анықтамасы тек барлық мүмкін элементар оқиғалар жиыны ақырлы болған жағдайда беріліп отыр.

Оқиғаларға мысалдар келтірейік.

Мысал 4. Тәжірибе алдымен тиынды, кейін ойын сүйегін лақтырудан тұрсын. A оқиғасын құрыңыз. Мұндағы A – 3-тен артық емес санның түсуі болсын.

Шешуі. Элементар оқиғалар жиыны

$$\Omega = \{\omega_1 = (T,1), \omega_2 = (T,2), \omega_3 = (T,3), \omega_4 = (T,4), \omega_5 = (T,5), \omega_6 = (T,6), \omega_7 = (S,1),$$

$$\omega_8 = (S,2), \omega_9 = (S,3), \omega_{10} = (S,4), \omega_{11} = (S,5), \omega_{12} = (S,6)\}$$

және

$$A = \{\omega_1 = (T,1), \omega_2 = (T,2), \omega_3 = (T,3), \omega_7 = (S,1), \omega_8 = (S,2), \omega_9 = (S,3)\}.$$

Сонымен, оқиға элементар оқиғалардан тұрады.

Мұғалім: Оқушылар, маңызды сұрақтардың біріне көшейік. Эксперимент жүргізіліп, оның нәтижесі белгілі болсын. "Эксперимент нәтижесінде берілген оқиға орындалды" және "Эксперимент нәтижесінде берілген оқиға орындалған жоқ" дегендер нені білдіреді? Бұл сұрақтың жауабы келесідей: жүргізілген эксперимент нәтижесі элементар оқиға ретінде берілген оқиғаның элементі болса, онда барлық оқиға орындалды деп аталады және бұл жағдайда берілген оқиғаның басқа элементар оқиғаларының орындалуы мүмкін емес. Эксперимент нәтижесі бір ғана элементар оқиға болады. Әрбір элементар оқиға, оқиғаның орындалу мүмкіндігін арттырады. Егер эксперимент нәтижесі берілген оқиғаның элементі болмаса, онда барлық оқиға орындалған жоқ деп аталады.

Айталық жоғарыдағы мысалда тәжірибе нәтижесінде $\omega_3 = (T,3)$ элементар оқиғасы түссе, онда A оқиасы орындалды, ал тәжірибе нәтижесінде $\omega_{11} = (S,5)$ элементар оқиғасы түссе A оқиғасы орындалмайды.

Негізгі ұғымдар берілгеннен кейін, мұғалімнің оқушылармен талдайтын сұрақтары:

Сұрақтар (Мұғалім)	Жауаптар (Оқушы)
Элементар оқиғалар дегеніміз не?	Ықтималдықтар теориясында тәжірибе нәтижелерін элементар оқиғалар деп айтамыз.
Оқиға дегеніміз не?	Элементар оқиғалар жиынының кез келген жиыншасы оқиға деп аталады
Тәжірибе орындалды, нәтижесі белгілі. Оқиға орындалмады дегеніміз не?	Егер тәжірибе нәтижесі (элементар оқиға) берілген оқиғаның элементі болмаса, онда оқиға орындалған жоқ дейміз.

2-ҚАДАМ. Оқушылардың жастарына қарай топтар құрылды. Эксперимент Астана қаласының № 66 мектеп-лицейінде, № 25 орта мектебінде, №11 Негізігі Семеновка мектебінің 6, 7, 8 сынып оқушыларына жүргізілді. Барлығы 6-сынып бойынша экспериментке 30 оқушы, 7-сынып бойынша 25 оқушы, ал 8-сынып бойынша 52 оқушы қатысты (Эксперимент барысын Сурет 4 қараңыз).

3-ҚАДАМ. Аталған топтармен 2015 жылдың 22 ақпан мен 6 наурызы аралығында дайындалған әдістеме бойынша 30 минуттық эксперименталды сабақтар жүргізілді.

4-ҚАДАМ. Оқушылардың сабақты меңгеру деңгейін тексеру дәл сабақ аяқталысымен ұйымдастырылды, «сол сәтте» тексеру формасы таңдалды. Бақылау формасы тест түрінде жүргізілді. Бақылау формасының 4 нұсқасы дайындалды, солардың біреуін келтірейік:

ТЕСТ ТАПСЫРМАЛАРЫ

1) Тәжірибе нәтижесі –

a) элементар оқиға; b) оқиға; c) функция; d) ақиқат оқиға.

2) Элементар оқиғалар жиынының кез келген жиыншасы ... деп аталады?

a) оқиға; b) элементар оқиға; c) ақиқат оқиға; d) ықтималдық.

3) Тәжірибе тиынды 3 рет лақтырудан тұрсын, Ω элементар оқиғалар жиынын құрыңыз.

a) $\Omega = \{\omega_1 = (T,T,T), \omega_2 = (T,T,S), \omega_3 = (T,S,S), \omega_4 = (T,S,T), \omega_5 = (S,S,T), \omega_6 = (S,T,S), \omega_7 = (S,T,T), \omega_8 = (S,S,S)\}$;

b) $\Omega = \{\omega_1 = TT, \omega_2 = TS, \omega_3 = ST\}$;

c) $\Omega = \{\ \omega_1 = (T,T,T),\ \omega_2 = (T,T,S),\ \omega_3 = (T,S,S),\ \omega_4 = (T,S,T),\ \omega_5 = (S,S,T)\}$;

Астана қаласының № 25 орта мектебінің 6 сынып оқушыларына жүргізілген экспериментадды сабақ барысы

№11 Негізігі Семеновка мектебінің 7 сынып оқушыларына жүргізілген экспериментадды сабақ барысы

Астана қаласының № 66 мектеп-лицейінің 8 сынып оқушыларына жүргізілген экспериментадды сабақ барысы

Астана қаласының № 66 мектеп-лицейінің 6 сынып оқушыларына жүргізілген экспериментадды сабақ барысы

Рисунок 3 – Оқушылармен тәжірибе барысы

d) $\Omega=\{\ \omega_1=(T,T,T),\ \omega_2=(T,T,S),\ \omega_3=(T,S,S)\}$.

4) Тәжірибе жүргіздік, нәтижесі белгілі оқиға орындалды дегеніміз не?

a) жүргізілген эксперимент нәтижесі элементар оқиға ретінде берілген оқиғаның элементі болса, онда барлық оқиға орындалды деп аталады;

b) жүргізілген эксперимент нәтижесі элементар оқиға ретінде берілген оқиғаның элементі болмаса, онда барлық оқиға орындалды деп аталады;

c) жүргізілген эксперимент нәтижесінде оқиғада жататын барлық элементар оқиғалар орындалса, онда барлық оқиға орындалды деп аталады;

d) жүргізілген эксперимент нәтижесінде оқиғада жататын ең болмағанда екі элементар оқиға орындалса, онда барлық оқиға орындалды деп аталады.

5) Бірінші тиын, кейін ойын сүйегі лақтырудың элементар оқиғалар жиынын жазыңыз.

a) $\Omega=\{\omega_1=(T,1),\omega_2=(T,2),\omega_3=(T,3),\omega_4=(T,4),\omega_5=(T,5),\omega_6=(T,6),\omega_7=(S,1),\omega_8=(S,2),\omega_9=(S,3),\omega_{10}=(S,4),\omega_{11}=(S,5),\omega_{12}=(S,6)\}$;

b) $\Omega=\{\omega_1=(T,1),\omega_2=(T,2),\omega_3=(T,3),\omega_4=(T,4),\omega_5=(T,5),\omega_6=(T,6)\}$;

c) $\Omega=\{\omega_1=(T,S),\omega_2=(T,T),\omega_3=(T,1),\omega_4=(T,2),\omega_5=(T,3),\omega_6=(T,4)\}$;

d) $\Omega=\omega_1=1,\omega_2=2,\omega_3=3,\omega_4=4,\omega_5=5,\omega_6=6$.

5-ҚАДАМ – 7-ҚАДАМ. 4-қадамда әзірленген білім деңгейін тексеру құралдар бойынша тақырыпты меңгеру дәрежесін бақылау нәтижелері статистикалық өңдеуден өтті. Бақылау нәтижелері кесте түрінде толтырылды. Кесте 3 бағаннан тұрады. 1-ші бағанда сұрақтар саны, 2-ші бағанда осы сұрақтарға дұрыс жауап берген топтағы оқушылар саны, 3-ші бағанда сұрақтарға жауап берген оқушылар санының пайыздық көрсеткіші жазылған:

Кесте 2 - 6 сынып оқушыларына «Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары» тақырыбы бойынша өткізілген экспериментадды сабақ нәтижесі (барлығы 30 оқушы)

Тест сұрақтары	Сұрақтарға дұрыс жауап берген оқушылар саны	Сәйкес сұрақтарға дұрыс жауап берген оқушылар санының пайыздық көрсеткіші
5 сұраққа дұрыс жауап берген	7	23%
4 сұраққа дұрыс жауап берген	6	20%
3 сұраққа дұрыс жауап берген	10	33%
2 сұраққа дұрыс жауап берген	3	10%
1 сұраққа дұрыс жауап берген	2	7%
Дұрыс жауабы жоқ	2	7%

Кесте 3 - 7сынып оқушыларына «Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары» тақырыбы бойынша өткізілген эксперименталды сабақ нәтижесі (барлығы 25 оқушы)

Тест сұрақтары	Сұрақтарға дұрыс жауап берген оқушылар саны	Сәйкес сұрақтарға дұрыс жауап берген оқушылар санының пайыздық көрсеткіші
5 сұраққа дұрыс жауап берген	8	32%
4 сұраққа дұрыс жауап берген	7	28%
3 сұраққа дұрыс жауап берген	4	16%
2 сұраққа дұрыс жауап берген	2	8%
1 сұраққа дұрыс жауап берген	2	87%
Дұрыс жауабы жоқ	2	8%

Кесте 4 - 8 сынып оқушыларына «Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары» тақырыбы бойынша өткізілген эксперименталды сабақ нәтижесі (барлығы 52 оқушы)

Тест сұрақтары	Сұрақтарға дұрыс жауап берген оқушылар саны	Сәйкес сұрақтарға дұрыс жауап берген оқушылар санының пайыздық көрсеткіші
5 сұраққа дұрыс жауап берген	15	29%
4 сұраққа дұрыс жауап берген	15	29%
3 сұраққа дұрыс жауап берген	11	21%
2 сұраққа дұрыс жауап берген	6	12%
1 сұраққа дұрыс жауап берген	3	6%
Дұрыс жауабы жоқ	2	3%

Сонымен «Ықтималдықтар теорисының негізгі ұғымдары» тақырыбын меңгеруде 6 сынып оқушыларының жақсы деңгейде (5 және 4 сұраққа жауап берген) жауап берген оқушылар санының пайыздық көрсеткіші - 43%, 7 сыныпта - 60%, 8 сыныпта - 58%.

Қорытынды: «Ықтималдықтар теориясының негізгі ұғымдары» тақырыбын меңгеруге 7 сынып оқушылары жас ерекшелігі жағынан 6 және 8 сынып оқушыларына қарағанда бейім.

§7. СИНОПСИС-СПИСОК БАЗОВОЙ ПОДГОТОВКИ ПО МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНЫХ УЧИТЕЛЕЙ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ОБЯЗАТЕЛЬНОГО ПРИНЦИПА «СНАЧАЛА МОЩНАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА ПО ПРЕДМЕТУ, ТОЛЬКО ЗАТЕМ ДОПУСК К ПРЕПОДАВАНИЮ С УСВОЕНИЕМ ИЗВЕСТНЫХ И СОЗДАНИЕМ НОВЫХ МЕТОДИК ПРЯМОГО ПРИМЕНЕНИЯ»

При этом, разумеется, учащемуся Учитель не будет сообщать постигнутые им тонкости теории, но во всеоружии будет подготовлен к процессу обучения обучающихся со всеми разными способностями и мотивировками к получению знаний.

I ТАРАУ. МАТЕМАТИКАНЫҢ ЛОГИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫСЫ МЕН ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ. САНДАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ-АЛГЕБРАЛЫҚ ЖӘНЕ САЛДАРЫМЕН БІРГЕ АКСИОМАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫ НЕГІЗІНДЕГІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ДӘЛЕЛДЕУ МӘДЕНИЕТІ

§1. МАТЕМАТИКА ҚҰРЫЛЫМЫНЫҢ ЖАЛПЫ ТҮСІНІКТЕРІ ЖӘНЕ ОНЫ СУРЕТТЕЙТІН ӨЗІНДІК ТІЛІНІҢ ЖАН-ЖАҚТЫ ТАЛҚЫЛАУЛАРЫ

1. Өзара бөлек заттарды (нәрселерді) біріктіріп, бүтін бір заттай (нәрседей) қарастырғандағы жаңа зат (нәрсе) жиын, ал оның құрамындағы заттардың (нәрселердің) әрқайсысы сол жиынның элементі және солардың ішінде сандық жиын атты элементтері тек қана нақты сандар болатын математикалық анализ пәніндегі ерекше жиын.

2. Жиын анықталмайтын алғашқы ұғым ретінде – математиканың ғылым ретіндегі ұғымдық аппаратында жетекші идеялар тек алдыңғыларына сүйенетін анықтамалар түрінде қабылданады, әрине, осы тізбеде жиын деп аталатын ең алғашқысының бар болуы.

3. Математикалық таңбалар мен шартты белгілер – таңбалау жалпы өнер, не белгілеу өнері ғажайып құрал десе де болады, өйткені ол елес қызметін өзіне алады да ой жұмысын үдетеді. Белгілеулер жаңалықтар ашу үшін ыңғайлы болуы керек. Бұл көбінесе белгілеулер тереңде жатқан дүние құпияларын қысқа түрде бейнелегенде болады. Сонда ой-ізденіс қызметі таңғаларлық түрде қысқарады (Готфрид Лейбниц).

4. Символдық белгілеулер (символдар) және солар арқылы математикалық сөйлемдердің жазылуы – математикада ғасырлар бойы дами отырып қалыптасқан, символ деп аталатын арнайы құрылыстағы шартты белгілеулер арқылы тілдегі сөздерден сөйлем құрағандай толық математикалық сөйлемдердің символдық жазылулары.

5. Квантор деп жиі кездесетін сөз бен сөйлемшелердің (сөз тіркестерінің) символдармен белгілеулері аталады – үлгі ретінде қарама-қарсы мағынадағы кез келген мен табылады сөздері сәйкес $\forall$ (ағылшын тіліндегі All сөзінің бірінші әрпінің төңкеріліп жазылуы) және $\exists$ ағылшын тіліндегі Exist сөзінің бірінші әрпінің кері бағытта жазылуы) кванторларымен белгіленуі.

6. Индекстермен жабдықталған әріптерді пайдалану қажеттілігі – математикада белгілеулерді қажет ететін объектілер саны шексіз көп, ал белгілеудің негізгі құралы болатын латын және грек, сиректеу готикалық алфавиттердегі әріптердің жалпы саны жүзден аспауында.

7. Математикалық мағынада қолданылатын кей сөздердің түпнұсқасы – белгі, қасиет, ұғым не түсінік, өрнек, формула, тұжырым, шама тәрізді сөздердің лексикалық мағынасынан ерекшелендіретін математикалық кәсіби түсіндірмесі.

8. «Анықтама» және оның математикадағы өзіндік ерекше орны – сөз деген белгі, ал ол нені белгілеп тұрғаны түсіндірме сөздікте берілгеніндей математикадағы негізгі қасиеттердің қабылданатын, бірақ ешқашан да дәлелденбейтін анықтама арқылы ерекшеленуі, аталуы, белгіленуі.

9. Анықтаманың символдық жазылуы – сөзбен айтылған анықтаманы математикада дәл түсіну мен барлық мазмұнын аша және қажетті белгілеулерді енгізе отырып, нәтижелі қолдануды қамтамасыз ететін бірмәнді түрде жазылуы.

10. Теңдік таңбасының әртүрлі мағыналары – тепе-теңдік, орындалатын не орындалмайтын тұжырым ретінде, теңдеуді анықтайтын шартты теңдік, анықтама ретінде, жаңа символды енгізу қызметінде.

11. Теорема және оған кері теорема – шарт деп аталатын қасиеттен қорытынды деп аталатын қасиет шығатын құрылымдағы, қойылған сұраққа жауап беретін тұжырым және де ондағы шарт пен қорытындының орнын ауыстырғанда орындалатын теорема.

12. «Үшінші мүмкіншілік ешқашан да қарастырылмайды» заңы мен соның негізіндегі «кері жору» атты дәлелдеу әдісі – әрқашанда A тұжырымы мен $\overline{A}$ арқылы белгіленетін оған қарама-қарсы тұжырымның біреуі және олардың тек қана біреуі орындалауы деп қабылданған логикалық қағида және оның негізінде дәлелдеу керек қорытындыға қарама-қарсы тұжырым орындалады деп ұйғарудан теорема шартына немесе бұрын дәлелденген тұжырымға қайшы келу арқылы дәлелдеу әдістемесі.

13. $A \to B \leftrightarrow \overline{B} \to \overline{A}$ теоремасы – шарт деп аталатын қасиеттен қорытынды деп аталатын қасиеттің шығуы мен қорытындының орындалмауынан шарттың орындалмауының шығуының пара-парлығы.

14. Әр теореманың «Қажетті» және «Жеткілікті» сөздерінің әрқайсысы арқылы оқылуы - $A \to B$ теоремасының « B орындалуы үшін A тұжырымының орындалуының жеткіліктілігі» мен « A тұжырымының орындалуы үшін B тұжырымының орындалуының қажеттілігі» түріндегі өзара пара-пар екі оқылуы және де оқылудағы «жеткілікті» деген сөздің әдеттегі мағынасына сәйкес болып, талқылауды қажет етпеуі мен «қажетті» деген сөздің $A \to B \leftrightarrow \overline{B} \to \overline{A}$ теоремасының тікелей салдары болуы.

15. «Критерий» атты теорема – тура және кері теоремалардың бір уақытта орындалуы және де оның құндылығының шарттарының бірінен-бірі алыс болуымен теорема тақырыбы болатын *анықтаманың басқаша оқылуы болатын* техникалық түрден ары қарай өсе беруі.

16. Математикалық сөйлемнің жазылу түрлері – тек қана тілдік сөзбен, тек қана символдық түрде және сол екеуінің аралас түрінде жазылуы.

17. Қарама-қарсы (кері) тұжырымдау ережесі – тұжырымды символдық түрде жазып, шарттағы сөйлемшелерді өзгертпей, бірақ $\forall$ және $\exists$ кванторларын өзара ауыстырып, қорытынды тұжырымды оған қарама-қарсы тұжырымға ауыстыру.

18. Кері анықтама – қарама-қарсы тұжырым құру ережесі арқылы алынады да, жалпы қолданыста тікелей анықтамамен қатар жүріп, математиканың негізгі түйіндері жүйеленген анықтаманың өзін толық және терең түсінуді қамтамасыз етеді.

19. Анықтаманың «атынан затына» және «затынан атына» бағыттарда қолданылуы – математикада орындалды деп қабылданған ұғымның аты аталғанда затындағы қасиеттерінің қолданысқа түсуі мен керісінше, атын дәлелдеу керек болған жағдайда затының әрбір қадамының орындалуын қамтамасыз етіп, мазмұнынан атына көшу.

20. Математикалық білім алу кезеңінде саналы түсінуге жол салатын формалды және интуитивті екі құраушы – анықтама кері анықтамамен бірге, теорема қатаң түрде оқулықты толық оқу арқылы формалды игеріледі де, артынша сезім деңгейінде түпсанаға ұялайды.

21. Математикалық ұғымдар мен терминдердің атауында ұлт тілінің жалпы мағыналы сөздерді қолданудың оң және теріс жақтары, оқулықтарда кездесетін «тірі» тілден алынған терминдердің әртүрлі тілдік ықпалдары – «*үзіліссіздік*» ұғымы бірмәнді математикадағы мағынаны берсе, «тізбек» сөзі математикадағы ұғымның кескінін бір қарағанда дұрыс бергендей болғанымен, бірінен кейін бірі тізбектейді мағынасында дұрыс функция ұғымынан ауытқып кетеді, ал енді *«ақырсыз аз шама», «мейілінше кішкене оң ε саны», «ақырсыз қосынды», «айқындалмаған функция»* сияқты сөз тіркестері мүлдем басқа мағынаға бұрады.

§2. ЖИЫН БЕРІЛУЛЕРІ МЕН БЕЛГІЛЕУЛЕРІ ЖӘНЕ ДЕ ОЛАРҒА ҚОЛДАНЫЛАТЫН АМАЛДАР

1. Жиын құру әдістемелері – қайсібір қасиет не қасиеттерді қанағаттандыратын барлық нәрселерді (заттарды) бөліп алу мен берілген жиындарға амалдар қолдану арқылы.

2. Жиын берілген қасиетті элементтердің жинағы ретінде және сол пайда болған жиынның, оны құрайтын элементтер мен элементтерді анықтайтын қасиеттердің символдық белгілеулері.

3. Жиындарға қолданылатын амалдар – жиындардың бірігуі, қиылысуы, айырымы амалдарын сәйкес логиканың «кемінде бірінде – не», «әрқайсысында – және», «біріншісінде жатып, екіншісінде жатпаса» тәртіптері арқылы анықталуы.

4. Жиын элементтерінің нүкте деп те аталу себептері.

§3.ФУНКЦИЯ АНЫҚТАМАСЫ МЕН ОНЫҢ ТАЛҚЫЛАУЛАРЫ

1. Функцияның жалпы анықтамасы – анықталу және мәндер қабылданатын жиын деп аталатын берілген екі жиын арасындағы сәйкестік, тәуелділік, анықталу жиынының әр элементіне қолданылатын ереже, тәртіп, заң, амал, алгоритм ретінде.

2. Функция анықтамасындағы үш элементтің бірі – функция аргументі немесе тәуелсіз айнымалысы деп аталатын анықталу жиынының кез келген элементін бейнелейтін символ.

3. Функция анықтамасындағы үш элементтің келесісі – аргумент не тәуелсіз айнымалыға қолданылатын ереже, тәртіп, заң, амал, алгоритм және оның белгілеулері, нәтижесінде анықталу және мәндер қабылданатын жиындарының арасында орнатылған тәуелділік, сәйкестік.

4. Функция анықтамасындағы үш элементтің соңғысы – функцияның мәні деп аталатын аргументтің әрбір мәніне ереже қолдану нәтижесінде мәндер қабылданатын жиыннан сәйкес қойылатын 0 де емес, 2 де емес, т.с.с. басқа да емес тек 1 ғана – жалғыз(!) мән.

5. Функциялар теңдігі – анықталу жиындары ортақ екі функцияның аргументтің әрбір мәнінде сәйкес осы екі функциялар мәндерінің өзара тең болуы, яғни теңдік таңбасының бір қолданысы болатын тепе-теңдікті сақтауы.

6. Табиғаты кез келген ортақ анықталу жиынды, мәндері қабылданатын жиын сандық жиын болатын нақты мәнді функцияларға арифметикалық амалдар қолдану арқылы жаңа функцияларды анықтау – анықталу жиынының әр нүктесінде сол нүктедегі функция мәндеріне аталмыш арифметикалық амалдар орындалады да, оның нәтижесі мақсатты функцияның мәні ретінде қабылданады.

7. Ішкі және сыртқы деп аталатын, екіншісі біріншісінің мәндер жиынын қамтитын жиында берілген екі функция арқылы анықталатын күрделі функция не сол функциялар суперпозициясы – сыртқы функцияның аргументін ішкі функцияға ауысту, нәтижесінде ішкі функцияның анықталу жиынының әр нүктесінде бірінен кейін бірін, әуелі ішкі, сонан соң ол функцияның мәніне сыртқы ережені қолдану.

8. Функция анықтамасындағы алгоритм түрінде берілетін ереже – айнымалыларға қолданылатын ережені бірінен соң бірі кезекпен орындалатын амалдар тізбесіне жіктеу.

9. Тағы да формула туралы және функцияның формула арқылы берілуі – формуланың ереже ретінде оқылуы, ол орындалатын барлық нүктелер функцияның анықталу жиынын құрауы.

10. Негізгі элементар және элементар функциялар – негізгі эдементар деп аталатын дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық және кері тригонометриялық 5 түрлі функцияларға төрт арифметикалық амал мен күрделі функция құрудан тұратын 5 түрлі амалдарды ақырлы рет қолдану қорытындысындағы элементар деп аталатын функция.

11. Функцияның берілген жиынынан оның жиыншасына тарылуы – жиынның әр элементіне қолданылған ереженің қолдану өрісін оның жиыншасына тарылтып, берілген жиында анықталған функцияның тарылуы болатын жиыншадағы жаңа функцияның анықталуы.

12. Тізбек деген функцияның жалпы анықтамасының анықталу жиыны барлық оң бүтін сандар болғандандағы әр оң бүтін санға бір объектіні сәйкес қоятын дербес жағдайы – объекттер айтылым болғанда айтылымдар тізбегі, сан болғанда сандық тізбек, сегмент болғанда сегменттер тізбегі және де объект анықталу жиындары бірдей функциялар жиынынан алынғанда функциялар тізбегі.

13. Функцияннның анықталу жиынының бейнесі мен мәндер қабылданатын жиынының жиыншасының алғашқы бейнесі – сәйкес функцияның барлық мәндерінің жиыны мен мәндері мәндер қабылданатын жиынның алдын ала алынған жиыншасында жататын аргумент мәндерінен құрылған жиын.

14. Функциялардың түрлері: сюрьективті – функция анықтамасындағы мәндер қабылданатын жиынның әрбір элементі функция мәні болуы, яғни анықтамадағы мәндер қабылданатын жиынның функция бейнесімен беттесуі; иньективті – аргументтің әртүрлі мәндеріне функцияның әртүрлі мәндерінің сәйкес келуі немесе функция анықтамасындағы мәндер қабылданатын жиынның кез келген бір элементті жиыншасының алғашқы бейнесінің бір элементті жиын не бос жиын болуы; биективті –аргументтің әртүрлі мәніне функцияның әртүрлі мәндері сәйкес келумен қатар функция анықтамасындағы мәндер қабылданатын жиынның әрбір элементі функция мәні болуы, яғни функцияның сюрьективті әрі иньективті болуы.

15. Берілген (тура) функцияға кері функция тура функцияның мәнін тәуелсіз айнымалы етіп, аргументін оған сәйкес келетін мән етіп орын ауыстыратын сәйкестік – тура функцияның мәндерінен құрылған жиында анықталған және оның әр нүктесіне тура функция үшін осы нүкте жалғыз ғана нүктеде мән болғанда аргументтің сол мәнін сәйкес қоятын ереже, бұл тек қана инъективті функция үшін ғана орындалады.

16. Функцияның екі жиын арасында өзара бірмәнді сәйкестікті орнатуы – биективті функцияның өзінің анықтамасындағы анықталу жиыны мен барлық мәндер жиыны арасында орын алатын сәйкестік.

17. Екі жиынның эквиваленттілігі теоретика-жиындық қасиет ретінде – екі жиынның қандай да бір биетивтік қатынаста болуы.

18. Екі жиын эквиваленттілігінің қолданысы: ақырлы жиындар және ақырсыз жиындар – сәйкес жиынмен эквивалентті болатын алғашқы n оң бүтін саннан тұратын жиынның табылуы және ондай жиынның табылмауы, яғни қандай n оң бүтін сан алсақ та өзара бөлек n+1 элементтің табылуы.

19. Екі жиын эквиваленттілігінің тағы бір қолданысы: саналымды жиындар – жиынның барлық оң бүтін сандар жиынына эквиваленттілігі, яғни қайсыбір иньективті тізбектің барлық мәндер жиыны ретінде бейнеленуі.

20. Теңдеу атты берілген сандық функция мен берілген сан арасындағы шартты теңдік – теңдеуді шешу (зерттеу) есебі берілген сан берілген функцияның теңдеу шешімі деп аталатын осы мәнге тең аргумент барлық мәнін табудан не функцияның анықталу жиынының барлық нүктесінде функцияның мәні осы саннан өзге болып, теңдеу шешімсіз болуын көрсетуден тұруы.

21. Формула термині – сөздерді қолданбай шартты белгілер мен әріптер арқылы ғана математикалық мағынадағы (жалпы жағдайда – ғылыми) сөйлемдерді қысқартып жазу түрі.

§4. АҚЫРЛЫ САН ДЕП ТЕ АТАЛАТЫН НАҚТЫ САНДАРДАН ҚҰРЫЛҒАН САНДЫҚ ЖИЫНДАР МЕН ОНЫҢ ЕКІ АҚЫРСЫЗ САНМЕН ТОЛЫҚТЫРЫЛУЫ

1. Кеңейтілген нақты сандар жиыны атты $+\infty$ және $-\infty$ символдарынмен толықтырылған нақты сандар жиыны – нақты-ақырлы сандар жиынына меншіксіз сандар деп те аталатын $+\infty$ және $-\infty$ символдарымен белгіленген ақырсыз сандарды енгізу және математиканың ішкі құрылымы бойынша осы үш түрлі сандардың арифметикалық арақатынастары анықталу міндетінде $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ сияқты арифметикалық амалдар енбейтін «шағын» арифметикасын құру.

2. Сандық жиын мен оның жоғарғы және төменгі шені атты нақты сандар – сәйкесінше, берілген сандық жиынның әрбір элементі одан аспайтын және кем емес болатын нақты сандар, осы орайда $+\infty$ кез келген сандық жиынның жоғарғы шені және $-\infty$ кез келген сандық жиынның төменгі шені болуы.

3. Жоғарыдан шенелген, төменнен шенелген және шенелген сандық жиын – сандық жиынның сәйкесінше нақты мәнде жоғарғы, төменгі шендерінің және екеуінің де бар болуы.

4. Сандық жиынның ең үлкен және ең кіші элементтері – сәйкесінше сандық жиынның өзінде жататын жоғарғы, төменгі шендерінің, яғни берілген сандық жиынның өзінде жататын және оның әрбір элементінен аспайтын және кем емес болатын нақты сандардың бар болуы.

5. Аралық атты ерекше сандық жиындар – тоғыз түрлі екі жақты теңсіздіктермен берілген шенелген, біржақты шенелген не екі жақты шенелмеген сандық жиынның өзін беретін, сегмент, интервал, жартылай сегмент, жартылай интервал деп аталатын сандық жиындар, соның ішінде алдын ала берілген аралықтың шекаралары деп екі санның кішісінен артық және үлкенінен кіші барлық нақты сандардан тұратын интервал мен кішісінен кем емес және үлкенінен аспайтын барлық нақты сандардан тұратын сегмент.

§5. НАҚТЫ САНДАР ЖИЫНЫНЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ БАСТАУЛАРЫ МЕН АЛГЕБРАЛЫҚ НЕГІЗДЕМЕЛЕРІ

1.Күнделікті қолданыстағы және онсыз өркениет болмайтын нақты сандар әлемін ұзындықты өлшеу мәселесі арқылы құру – өлшеушінің өз еркінде тағайындалған ұзындығы «бір» атты және 1 белгілеуіндегі сан деген затқа (ұғымға) тең «бірлік кесінді» деп аталатын эталондық кесіндімен кез келген кесіндінің ұзындығын өлшеу рәсімінде оның өлшеуіші деп аталып, өлшеуі болатын нақты сандардың туындауы.

2. Цифр атты таңбалар сандық әлемнің бастапқы әрі негізгі жазу белгісі ретінде және олар арқылы сандар жазылуының позициялық жүйесі – сөздерді жазу үшін әліпбидегі әріптер қолданылатыныңдай сандарды жазу үшін де цифр деп аталатын арнаулы таңбалардан тұратын жинақтың қолданылуы және сан жазылуындағы цифрлардың атқаратын міндетінің әріптерден айырмашылығы оның мәнімен қоса, өзінің орнымен (позициясымен) анықталуы.

3. Алғашқы геометриялық келісімдер – кесінді, оның ішкі және шекаралық нүктелері, түзу, сәуле.

4. Алдын ала таңдап алынған кесіндіні циркуль атты құрал көмегімен қалауымызша қайталап (керекті сәуле бойында) сала алу мүмкіндігі, циркульдің бекітілген ашасымен салынған кез келген екі кесінді өзара тең деп қабылдау – циркуль ашасымен бекітілген кесіндіні өлшеп алып, бір ұшын сәуле басына қойып, басқа ұшын сәуле бойына салғанда осы екі нүкте арасы шеткі нүктелері сәуле басы мен белгіленген нүкте болатын ізделінді кесіндіні беруі және келесі қадамда осы әрекетті қайталай отырып, белгіленген кесіндіні қалауымызша рет салу.

5.Ретімен берілген кесінділерді қосу амалы – реттелген қос кесіндіні нәтижесі де кесінді болатындай геометриялық тұрғыдағы қосу.

6. Бірлік кесінділерден $1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 11, \ldots$ оң бүтін сандарға көшу жолы: ұзындықты өлшеу есебі 0 таңбасымен белгіленетін ерекше «нөл» саны, 1 таңбасымен белгіленетін ерекше «бір» саны және кезекті $2, 3, \ldots$ таңбаларымен белгіленетін оң бүтін сандар көзі ретінде – сәйкес кесіндінің ұштары бір нүктеде беттескендегі сол нүктеден ғана тұратын «кесінді ұзындығын» белгілейтін «нөл» атты сан, эталон түрінде алынатын кесіндінің ұзындығы ретінде тағайындалған «бір» саны және алдын ала келісіліп алынған қос бірлік кесіндіні қосу амалының нәтижесі болатын кесінді ұзындығы ретіндегі «екі» атты $2 := 1+1$ санын, анықталған екі санына сәйкес келетін кесіндіге бірлік кесіндіні қосу нәтижесінің ұзындығына сәйкес «үш» атты $3 := 2+1 = 1+1+1$ санын анықтағандай барлық оң бүтін сандарды беру, анықталу негізінде $2 := 1+1, 3 := 2+1 = 1+1+1, \ldots,$ қорытындысында ізделінді $0, 1, 2, ..., 9$, ары қарай позициялық жүйеде жазылған $10, 11, ...$ нөл мен оң бүтін сандар тізбесіне келу.

7. Ұзындықтары a және b оң бүтін сандарға тең болатын ретімен алынған екі кесіндіні қосу амалы негізінде олардың ұзындықтары болатын оң бүтін сандарды қосу амалын анықтау, дәл символдық түрде айтқанда, кез келген оң бүтін a және b сандары үшін ұзындықтары осы оң бүтін сандарға тең екі кесінді алынып, олардың қосындысының ұзындығы берілген сандардың қосындысы деп аталуы және $a+b$ түрінде символдық белгіленуі және оң бүтін сандарды қосу кестесін есептеу – сәйкесінше ұзындықтары берілген екі санға тең кесіндінің ұзындығы a санына тең болатын біріншісін сәуле басынан бастап салып, ұзындығы b санына тең болатын екіншісінің бастапқы нүктесін бірінші кесіндінің соңғы нүктесіне беттестіргеннен кейін сәуле бойындағы бірінші кесіндінің бастапқы нүктесінен бастап, екінші кесіндінің соңғы нүктесі арасындағы жаңа кесінді ұзындығын өлшеу нәтижесі бастапқы екі кесінді ұзындықтары болатын оң бүтін сандардың $a+b$ қосындысын анықтауы, соның ішінде $a = 2, b = 2$ болғандағы $a + b = 2 + 2$ қосу амалы және одан бөлек екі санды қосу амалын орындау нәтижесінен құралған қосу кестесі, $2 + 2 = 4$ теоремасы.

8. Кесінділерді қосу амалының коммутативтік немесе, сол мағынадағы, орынауыстырымдылық қасиеті және соның негізінде кесінділердің ұзындықтарына тең екі санды қосу амалының коммутативтілігі – берілген қос кесіндінің қайсысы бұрын, қайсысы кейін алынатындығының қосынды нәтижесіне әсерсіздігі: $+CD = CD+$ және соның негізінде екі оң бүтін a және b сандарын қосу амалы нәтижесінің қосылғыштардың қайсысын бірінші, қайсысы екінші алатындығына тәуелсіздігі, басқаша айтқанда, ретінің маңызсыздығы: $a + b = b + a$.

9. Нөл атты «0» санының қосу амалы өрісіндегі «нейтралдық (бейтараптық)» ерекше қасиеті: кез келген a санына нөл санын қосқанда нәтижесі өзгеріссіз a санының өзіне тең болуы, формула түрінде $a + 0 = a = 0 + a$ екі санды қосу амалына негіз болған кесінділерді қосу кезінде ұзындығы кез келген теріс емес a санына тең кесіндіге тек бір нүктеден тұратын ұзындығы нөлге тең кесіндіні жалғағанда бірінші кесінді соңымен беттесіп, қосынды нәтижесінің бастапқы кесіндінің өзі болуы.

10. Үш реттелген кесіндіні қосу ережесі – екі реттелген кесіндіні қосу амалы арнайы анықтаманы қажет етсе, үш реттелген кесіндіні қосу амалының анықталған екі реттелген кесіндіні қосу амалын екі мәрте орындау ережесі ретінде және соның негізінде сол кесінділердің ұзындықтарына тең үш реттелген санды қосу амалының ережесі ретінде қабылдануы.

11. Екі реттелген кесіндіні қосу амалы арқылы реттелген үш кесіндіні қосу әдістемесін реттелген төрт, соның жалғасы болатын кесінділердің кез келген реттелген оң бүтін санын қосу амалының ережесін қабылдау және соның негізінде сол кесінділердің ұзындықтары оң бүтін сандар болғанда реттелген $4, 5, 6, 7...$ оң бүтін сандарды қосу ережесінің сол түріндегі көшірмесі.

12. Үш AB, CD және EF ретінде берілген кесінділерді қосу амалының кесінділер ретіне тәуелсіздігін білдіретін ассоциативтілік (терімділік) заңы $(AB + CD) + EF = AB + (CD + EF)$ – екі кесіндіні қосу амалын екі рет орындау арқылы анықталған үш кесіндіні қосу амалы нәтижесінің жазылу тәртібіндегі ретке сәйкес алғашқы екеуінің қосындысына үшіншісін қосу мен біріншісіне соңғы екеуінің қосындысын қосу нәтижелерінің тең болуы. Және де ауыстырымдылық пен терімділік заңдары бойынша кесінділердің ретін, таңдау мүмкіндігін әртүрлі етіп алып, басқа да ретпен қосқанда да қосынды нәтижесі өзгермеуі. Анықталған ереженің кесіндіден тікелей сандар қосындысының ассоциативтік қасиетіне, онымен қоса, қосынды нәтижесін өзгертпей кез келген ретпен кез келгенін топтау мүмкідігіне әкелуі.

13. Оң бүтін санды оң бүтін санға көбейту амалы: оң бүтін сандар үшін анықталған қосу амалы негізінде алдын ала алынған бір оң бүтін санды өз-өзіне қайталай қоса беретін ерекше амалдың көбейту атты жаңа амалды анықтауы және сол арқылы қысқаша жазылуы, оның сандық мәнін кесінділерді қосу амалымен есептеу жолы, соның негізінде мектептегі «Жаттап ал!» деп ұсынылатын көбейту кестесін оқырманның өзі құру әдістемесі – ұзындығы оң бүтін m санына тең n кесіндіні өз-өзіне қосу амалы оң бүтін n санын m санына көбейту амалы ретінде және сол амал нәтижесінде пайда болған жаңа кесіндінің $\underbrace{m + m + \cdots + m}_{n}$ санына тең ұзындығы $n \times m$ түрінде белгіленетін анықталған көбейту амалының мәні болуы, «Математикалық жетілу» деңгейіне келудің алғашқы қадамы ретіндегі « 3×4 амалы дегеніміз не?» және екі санды көбейту амалын орындау нәтижесі болатын « 3×4 неге тең?» сұрақтарын ажырата білу, соның негізінде алғашқы ғылыми нәтиже болып табылатын баған-баған бойынша көбейту кестесін өзі есептеп құруы.

14. Оң бүтін сандарды көбейту амалының коммутативтік $n \times m = m \times n$ қасиеті, соның негізінде « n жердегі m » делінген $n \times m$ жазылуымен қатар $m \times n$ түрінде пара-пар бейнеленуі – көбейту амалының геометриялық көрінісі: жазықтықтағы жақтарының ұзындығы n және m оң бүтін сандар болатын бір тіктөртбұрыш бір ретпен санағанда жақтары бірлік кесінді болатын бірлік квадрат атты $n \times m$ тіктөртбұрыштарға, оған қарсы ретпен санағанда сондай $m \times n$ бірлік квадраттарға жіктеліп, сол себепті ізденісті $n \times m = m \times n$ теңдігінің орындалуы.

15. Кесінділерді салыстыру – екі кесіндінің әрқайсысының шекаралық нүктелерінің бірін сәуле басында, екіншілерін сол сәуле бойында салғанда, олардың сәуле бойында орналасуына қарай геометриялық тұрғыдан ұзын, қысқа және тең мағынасында салыстыру.

16. Кесінділерді салыстыру негізіндегі сандарды салыстыру – екі кесіндіні салыстырғандағы бірінен бірі ұзын, қысқа және тең қатынастары олардың ұзындықтары болатын нөл мен оң бүтін сандар арасында үлкен, кіші және тең қатынастарын орнатуы, соның ішінде 0 санының кез келген оң бүтін саннан кіші болуы және де $0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots$ қатынастарының орындалуы.

17. Кесінді ұзындығын өлшеу және оның сандық сипатталуы – бірлік кесінді немесе оны тең бөліктерге ақырлы не ақырсыз рет бөлгендегі оның тең бөлігі берілген кесіндіде дәл неше рет орналасатындығын анықтау рәсімі мен нәтижесінің сан жазылуы арқылы таңбалануы.

18. Кесіндінің ішкі, соның арасында ерекше орын алатын өзара тең кесінділерге жіктелуі – алдын ала берілген кесіндіні қосындылары сол кесіндіге тең болатын өзара тек қана шеткі нүктелері бойынша қиылысатын кесінділер арқылы өрнектеу.

19. Оң бүтін сандардың кесінді ұзындықтарын өлшеуде жеткіліксіздігі, сол себепті олардың жәй бөлшектермен толықтырылуы – бірлік кесіндіні саны қалауымызша болатын өзара тең ішкі кесінділерге жіктеу негізінде өлшеу эталоны ретінде қабылданатын шексіз ұсақ кесінділер арқылы өлшенуі.

20. Алдын ала қабылданған бірлік кесінді арқылы құрылған оң бүтін сандар тілінде кез келген кесіндіні циркуль мен сызғыштың көмегімен кез келген алдын ала берілген тең бөліктерге бөлінуі.

21. Жай бөлшектің « n -нен m » оқылуындағы және $\frac{m}{n}$ жазылуында Ахмет Байтұрсынов енгізген n -«бөлімі» және m -«алымы» атты сөйлеп тұрған атаулар – бірлік кесінді ретінде қабылданған кесіндіні бөлімі деген атына сай дәл n санына тең бөлікке бірдей етіп бөліп, алымы деген атау өзі айтып тұрғандай ұзындығы $\frac{1}{n}$ деп белгіленген кесінділердің m данасын алу

1^0. $\underbrace{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + ... + \dfrac{1}{n}}_{m} = m \times \frac{1}{n} \equiv m \cdot \frac{1}{n} =: \frac{m}{n} (n = 1, 2, \ldots; m = 0, 1; \ldots).$

22. Кесінді ұзындығын өлшеу кезінде пайда болған жай бөлшектер атты сандардан құрылған жаңа жиын элементтері арасындағы салыстыру қатынастарын сондай ұзындықты кесінділер арқылы негіздеу – алдын ала берілген оң мәнді екі жай бөлшекті салыстыру мақсатында ұзындықтары соларға тең кесінділердің бір шеткі нүктелерін бір сәуле басымен беттестіре сол сәуле бойында салғанда келесі ұштарының біріншісі екіншісінің оң жағында, сол жағында және беттесіп орналасуына сәйкес бірінші бөлшектің екіншісіне қарағанда үлкен, кіші және тең болуы.

23. Бірлік кесіндіні тең $n(n = 1, 2, \dots)$ бөлікке бөліп, сондай бөліктерді n рет алғанда қайтадан бастапқы бірлік кесіндіге келу $2^0. \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n} = n \times 1/n \equiv n \cdot 1/n = 1.$

24. Бөлімдері бірдей бөлшектерді ортақ бірлік кесінді бойынша салынған сәйкес кесінділер арқылы салыстырудың геометриялық мағынасы және оларды салыстырудың бөлшек алымдарын салыстырумен пара-парлығы – бөлімдері өзара тең екі $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m} = m \times \frac{1}{n} \equiv m \cdot \frac{1}{n} =: \frac{m}{n}$ және $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{p} = p \times \frac{1}{n} \equiv p \cdot \frac{1}{n} =: \frac{p}{n}$ жай бөлшекке сәйкес келетін кесінділердегі бірлік кесіндінің тең n бөлікке бөлінгендегі $\frac{1}{n}$ ұзындықты бөлігінің әр кесіндідегі m және p сандары үшін бүтін сандарды салыстыру бойынша $m < p, m > p$ және $m = p$ болуына сәйкес бірінші кесіндінің екіншісінен қысқа, ұзын және тең болуы және сол арқылы осы кесінді ұзындықтары $\frac{m}{n}$ мен $\frac{p}{n}$ сандары арасында $3^0. \frac{m}{n} < \frac{p}{n} \Leftrightarrow m < p, 4^0. \frac{m}{n} > \frac{p}{n} \Leftrightarrow m > p, 5^0. \frac{m}{n} = \frac{p}{n} \Leftrightarrow m = p$ қатынастарының қабылдануы.

25. «Бөлшектің негізгі қасиеті» атты кез келген оң бүтін m, k, n сандары үшін $\frac{m}{n}$ бөлшегінің алымын да, бөлімін де k санына көбейткенде бөлшектің жазылуы өзгергенімен сандық мәнінің өзгермеуін беретін $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ теңдігі – кез келген кесіндіні тең k бөлікке бөліп, сондай бөліктерді k қосылғыш ретінде алғанда пайда болған қосынды бастапқы кесінді болуынан осы жолмен ұзындығы $\frac{1}{n}$ кесіндісін тең k бөлікке бөлгенде $\frac{1}{n \cdot k}$ ұзындықты кесінділер шығады да, олардың k данасын қосылғыш ретінде жинап алғанда қайтадан $\frac{1}{n}$ ұзындықты кесінді, ал $\frac{1}{n}$ ұзындықты кесінділердің m данасынан құралған $\frac{m}{n}$ ұзындықты кесінді $\frac{1}{n \cdot k}$ -ұзындықты кесінділермен есептегенде олардың саны mk болатындығының көрнекі геометриялық түсіндірмесі.

26. Бөлімдері әртүрлі екі жай бөлшектер үшін ортақ бірлік кесінді бойынша салынған сәйкес сол ұзындықты кесінділерді салыстыру есебі геометриялық тұрғыдан мүмкін болса да оны берілген бөлшектердің мәндері арқылы өрнектеу сәл ойланғанда шешілмейтін күрделі мәселе екендігінің айқын көрінуі мен оларды салыстыру әрекетінің табылу кереметтілігінен тұратын ғажап оқиға және оның геометриялық мағынасы мен аналитикалық өрнектелуі – әртүрлі тең бөлікке бөлінген бірлік кесінді бөліктерінен солардың қайсыбір сандарын алғанда пайда болған кесінділердің, әрине, ұзындықтарымен бірге, қайсысының өзі, сол мағынада мәні үлкен, қайсысынікі кіші, не өзара тең екендігін тікелей салыстырғанда анықтау мүмкін емес күрделі мәселенің Математика «құдіретімен» шешілуі: егер де алдын ала берілген жай бөлшек сандар $\frac{m}{n}$ және $\frac{p}{q}$ болса, онда ортақ бірлік кесіндіні салыстырылып жатқан кесінділердің бөлімдерінің көбейтіндісі болатын $n \cdot p$ бірдей бөлікке бөлгенде «Бөлшектің негізгі қасиеті» бойынша $\frac{m}{n}$ -ұзындықты кесіндіні $\frac{1}{n \cdot p}$ -ұзындықты кесінділерден $m \cdot p$ кесінді, ал $\frac{p}{q}$ -ұзындықты кесіндіні qn кесінді құрайды да, салыстырылып жатқан кесінділердің қайсысында $\frac{1}{n \cdot p}$ -ұзындықты кесінді көп болса, сол ұзын, бірдей болғанда тең болуы және оның бөлшекті беріп тұрған төрт m, n, p, q сандары арқылы өрнектелуі.

27. «Бөлшекті қысқарту» атты кез келген оң бүтін m, k, n, p, q сандары үшін $\frac{m}{n}$ бөлшегінің алымы мен бөлімі сәйкес $m = kp$ мен $n = kq$ түрінде жазылатын k санына еселі болғанда (бүтін бөлінгеде) бөлшектің жазылуы өзгергенімен сандық мәнінің өзгермеуін беретін $10^0 : \frac{m}{n} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q} = \frac{p}{q}$ (соның ішінде $\frac{12}{18} = \frac{6 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ теңдігінің кесінді ұзындығын өлшеу тұрғысынан геометриялық түсіндірмесі – бірлік кесінді тәрізді кез келген кесіндіні тең k бөлікке бөліп, осылай ұсатылған бөліктерді қайтадан k рет алғанда бастапқы кесіндіге келетінімізді тағы да қолдана отырып, бірлік кесіндіні өзара тең kq бөлікке бөліп, ұзындығы $\frac{1}{k \cdot q}$ кесінділерден kp рет алынған кесінділерді k данадан топтастырғанда әр топта $\frac{1}{q}$ ұзындықты кесінділердің шығуы мен олардың санының p болуы негізінде кесінді ұзындығы мәнінің $\frac{p}{q}$ санына тең болуы және сол себепті $10^0. \frac{m}{n} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q}$ мен $\frac{p}{q}$ бөлшектерінің өзара теңдігі.

28. Бөлімдері өзара тең жай бөлшектерді $11^0. \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n}$ қосу ережесінің геометриялық мағынасы мен «алым-бөлім» атауларындағы оқылуы – тең n бөлікке бөлінген бірлік кесіндінің бөлігінен алдымен m_1, сонан соң m_2 кесінді алып, қосқанда дәл сондай $m_1 + m_2$ кесінді шығуы және де бұл амалдың «Бөлімдері өзара тең екі жай бөлшектердің қосындысы бөлімі бастапқы бөлшектердің бөліміне, ал алымы берілген бөлшектердің алымдарының қосындысына тең болатын бөлшек» ережесі түрінде өрнектелуі.

29. Бөлімдері өзара тең жай бөлшектерді қосу амалының $12^0. \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_2}{n} + \frac{m_1}{n}$ коммутативтік заңы – бөлімдері өзара тең жай бөлшектерді қосуда қайсысын бірінші, қайсысын екінші алатындығы қосынды нәтижесіне әсер етпеуін көрсететін оң бүтін сандарды қосу амалының коммутативтік қасиетінің тікелей салдары.

30. Бөлімдері өзара тең емес екі жай бөлшекті қосу ережесінің «Бөлшектің негізгі қасиеті» мен бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу ережесінің тікелей салдары болатын $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} + \frac{p \cdot n}{n \cdot q} = \frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$ жолымен аналитикалық дәлелдемесі – бөлімдері әртүрлі жай бөлшектерге сәйкес келетін кесінділер салып, оларды бір-біріне жалғау арқылы қосындысы болатын кесінді табу қиын емес болғанымен сол кесіндінің ұзындығын осы жай бөлшектерді анықтайтын төрт m, n, p, q сандары арқылы өрнектеп жазу дәл осындай бөлімдері әртүрлі бөлшектерді салыстырудағы қиындықтарды сақтайды да (дәл осыны оқырман санасына әбден енгізу қажет), «Бөлшектің негізгі қасиеті» арқылы бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу амалына әкелу негізінде бұл күрделі мәселе математиканың «құдіретімен» $\frac{m}{n}$ -ұзындықты кесіндідегі әрбір $\frac{1}{n}$ ұзындықты бөлікті тағы q бөлікке бөліп, $\frac{1}{n \cdot q}$ -ұзындықты кесіндіден $m \cdot q$ кесінді, ал $\frac{p}{q}$ -ұзындықты кесіндінің $\frac{1}{q}$ -ұзындықты әр бөлігін тең n бөлікке бөліп, одан $\frac{1}{qn}$ -ұзындықты кесіндіден $p \cdot n$ кесінді алынған соң, ұзындықтары оң бүтін сандарды көбейту амалының $n \cdot q = q \cdot n$ қасиеті бойынша бірдей ортақ бөлім атты өзара тең $\frac{1}{n \cdot q} = \frac{1}{q \cdot n}$ кесіндіні әуелі $m \cdot q$, сонан соң $p \cdot n$ рет алып, қосқанда алымы $m \cdot q + p \cdot n$ және бөлімі $n \cdot q = q \cdot n$ болатын жай бөлшектің шығуы. Және де, әдетте, бұл амалды орындауда бөліміндегі мәнді азайтып, кесінді бөлігін барынша ірілету мақсатында ұсынылған ең кіші ортақ еселігін алу геометриялық тұрғыдан кейде тиімді болса да, аналитикалық тұрғыдан есептеу математикасында күрделі, тіпті криптографияда қолданылатын екі бөлімнің әрқайсысын жай немесе құрама сан тұрғысынан тексеру, құрама болғанда жай көбейткіштерге жіктеу бөлшектерді қосу амалын «қажетсіз» қиындатқандықтан, бөлімді тікелей nq деп алумен мақсатты ұзындық өрнегін 4 санмен өрнектеу және қалай болса да шешілген, бар маңыздылығы осы шешім табылғанында болатын есеп нәтижесін қажеттіне қарай «Бөлшектің негізгі қасиетінің» салдары бойынша ықшамдау мүмкіндігін ескере отырып, жай бөлшектерді қосу $13^0. \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$ ережесіне келуі.

31. Екі оң бүтін санды көбейту амалы көбейткіштердің бірін екіншісіне тең қосылғыш рет қосу арқылы түсінікті анықтамамен берілсе, екі жай бөлшектің көбейтіндісі жай бөлшек болады да, оны толық анықтайтын алымы мен бөлімі көбейткіш бөлшектердің сәйкес алымдарының және бөлімдерінің көбейтіндісіне тең болатын $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} (n \cdot q \neq 0)$ түріндегі ереженің геометриялық түсіндірмесі – жай бөлшектерді көбейту ережесін қабырғалары a және b оң сандары болатын тіктөртбұрыш атты геометриялық фигураның ауданы $a \cdot b$ көбейтіндісіне теңдігіне негіздеп, алдымен $m = p = 1$ дербес жағдайы үшін бірлік квадрат деп аталатын қабырғасы бірге тең квадраттың әр қабырғасын сәйкес тең n және q бөліктерге бөлгенде пайда болған кіші тіктөртбұрыштардың ауданы біріншіден қабырғаларының $\frac{1}{n}$ және $\frac{1}{q}$ ұзындықтарының $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{q}$ көбейтіндісіне, екінші жағынан ауданы $a \cdot b = 1 \cdot 1 = 1$ санына тең квадратты тең nq бөлікке бөлгенде пайда болған тіктөртбұрыштың ауданы $\frac{1}{nq}$ болғандықтан $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{nq}$ теңдігі орындалады, дәл осылай қабырғаларының ұзындықтары $a = \frac{m}{n}$ және $b = \frac{p}{q}$ болатын тіктөртбұрыш ауданы $\frac{1}{nq}$ болатын $m \cdot p$ тіктөртбұрышқа жіктелгендіктен $a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$ санына тең аудан $\frac{mp}{nq}$ санына тең болып, ереже мазмұнын беруі. «Жай

бөлшектерді көбейту» ережесі «Екі жай бөлшектің көбейтіндісі де жай бөлшек болады да, оның алымы мен бөлімі көбейткіш бөлшектердің сәйкес алымдарының және бөлімдерінің көбейтіндісі болады» деп оқылып, формула түрінде былай жазылады: $14^0 : \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} n \cdot q \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 0, q \neq 0)$.

32. Ерекше 0 (нөл) мен 1 (бір) сандары сәйкес қосу және көбейту амалдарының нейтрал элементтері, яғни қосқанда $0 + a = a$ және көбейткенде $1 \cdot a = a$ амалдарында оларға екінші санға ешқандай әсер етпей, орнына қалдыратын сан ретінде – қосу амалына қатысты кез келген санды «орнында қалдыратын» және геометриялық тұрғыдан бастапқы және соңғы нүктелері беттесетін кесіндінің ұзындығын бергендіктен, кесінділерді қосу амалына сәйкес кесінділерді біріне-бірін жалғағанда кез келген кесінді ұзындығы өзгеріссіз қалатын нөл атты сан мен кез келген санды көбейткенде бүтін санға көбейту амалы негізінде сол санды өз-өзіне қосқандағы қосылғыштар саны бір ғана сан болып, «орнында қалдыратын» көбейту амалына қатысты бір атты нейтрал элемент.

33. Қосу амалы $a+b$ анықталған a және b сандары үшін осы қосу амалына кері деп қабылданатын b санын қандай санмен толықтырғанда a саны алынады деген сұрақтан тұратын «алу» немесе «айырма» амалының туындауы – реттелген a және b сандары үшін қосу амалы бойынша анықталған $b+c = a$ теңдігін қанағаттандыратын c санын анықтау амалының «алу» немесе «айырма» амалы деп, ал c санының a және b айырымы немесе айырма мәні деп аталуы және оның символдық түрде $a - b$ деп жазылуы.

34. Кез келген m, n, p және q оң бүтін сандары үшін $a = \frac{m}{n}$ және $b = \frac{p}{q}$ жай бөлшектері үшін $a = \frac{m}{n} > \frac{p}{q} = b$ теңсіздігі орындалғанда $\frac{m}{n}$ және $\frac{p}{q}$ бөлшектердің айырымы деп аталып, $\frac{m}{n} - \frac{p}{q}$ түрінде белгіленетін, $\frac{p}{q}$ санымен қосындысы $\frac{m}{n}$ санына тең болатын $\frac{m \cdot q - p \cdot n}{n \cdot q} (mq > np)$ саны туралы ереженің геометриялық мағынасы – $\frac{m}{n}$ жай бөлшек ұзындықты кесіндінің mq>np теңсіздігімен өрнектелетін $\frac{p}{q}$ ұзындықты кесіндісінен қаншаға ұзын және сол кесіндісінің ұзындығын жай бөлшектерді анықтайтын 4 сан арқылы қалай жазу керек деген сұрақтың жауабын $\frac{m}{n}$ -ұзындықты кесіндідегі әрбір $\frac{1}{n}$ -ұзындықты бөлікті тағы q бөлікке бөліп, $\frac{1}{nq}$ -ұзындықты кесіндіден mq кесінді, ал $\frac{p}{q}$ -ұзындықты кесіндінің $\frac{1}{q}$ -ұзындықты әр бөлігін тең n бөлікке бөліп, одан $\frac{1}{qn} = \frac{1}{nq}$ -ұзындықты кесіндіден $pn = np$ кесінді алынған соң, айырымы $\frac{1}{qn}$ кесіндінің $mq - np > 0$ рет қайталаған кесінді болып шығуы $19^0 : \frac{m}{n} - \frac{p}{q} \frac{m \cdot q - p \cdot n}{n \cdot q} (mq > np)$.

35. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p} (n \cdot p \cdot q \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 0, p \neq 0, q \neq 0)$ түріндегі жай бөлшектерді бөлу ережесі – реттелген a және b сандары үшін $b \cdot c = a$ болатындай жалғыз ғана c санын табудан тұратын бөлу амалының анықтамасы мен геометриялық тұрғыда негізделген жай бөлшектерді көбейту амалының тікелей салдары ретінде $20^0 . \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p} (n \cdot p \cdot q \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 0, p \neq 0, q \neq 0)$.

36. Сандар жиынын «жаңа» сандармен толықтыру арқылы кеңейтудің алгебралық мұқтаждығы – күрделі мәселелерді шешуге арналған математиканың сан түріндегі құралы қосу мен көбейту амалдары арқылы анықталған алғашқы теңдеулер қатарындағы сызықты және квадраттық атты теңдеулерді шешуге жарамсыз болғандықтан осыған дейін белгілі оң бөлшек және нөл сандар жиынына қосымша «жаңа» сандар енгізу.

37. m мен n оң бүтін сандар болғанда $\frac{m}{n} + x = 0$ теңдеуінің шешімі ретіндегі теріс мәнді жай бөлшек – геометриялық тұрғыдан ұзындығы алдын ала берілген $\frac{m}{n}$ оң мәнді жай бөлшек болатын кесіндісін ұзындығы x оң мәнді жай бөлшек болатын кесіндісімен қалай жалғасақ та ұзындығы 0 саны болатын кесінді ешқашан алынбайтындықтан оң мәнді жай бөлшектен өзге «жаңа», « $\frac{m}{n}$ санына қарама-қарсы сан» деп аталып, $\frac{m}{n}$ санынан қандай да бір таңбамен ажыратылатын, атап айтқанда алдына «минус» атты «-» таңбасын салу арқылы $-\frac{m}{n}$ түрінде жазылатын, «минус $\frac{m}{n}$ » деп оқылатын теріс мәнді рационал санның енгізілуі, сонымен $\frac{m}{n} + x = 0$ теңдеу шешімінің табылуы, қорытындысында $\frac{m}{n} + (-\frac{m}{n}) = 0$ теңдігінің дұрыстығы.

38. Барлық бүтін сандар жиыны Z және барлық рационал сандар жиыны Q – бірлік кесіндіні сәуле бойында бастапқы нүктесінен біртіндеп жалғастырып отырғанда қосу амалы арқылы анықталатын Z_+ барлық мүмкін оң бүтін сандар жиыны, оның ұштары беттескенде нүктеге айналатын кесінді ұзындығын беретін ерекше $+0 = -0 = 0$ санымен және барлық оң бүтін сандарға қарама-қарсы сандармен толықтыруы болатын барлық бүтін сандардың Z жиыны; бірлік кесіндіні дәл оң бүтін n бөлікке бөліп, пайда болған өзара тең бөліктердің бірін оң бүтін рет алынғандағы кесіндінің ұзындығын өрнектейтін жай бөлшек, соның негізінде әртүрлі жазылудағы өзара тең жай бөлшектер жиынының мәні сол жай бөлшектердің әйтеу біреуіне тең рационал сан атты санды беруі, осылайша анықталған әрбір рационал санға қарама-қарсы, теріс рационал санмен толықтырылған және де 0 саны қосылған Q барлық мүмкін рационал сандар жиыны. Сонымен, Q_+ жиынын құрайтын барлық оң мәнді $\frac{m}{n} (m \in N, n \in N)$ рационал сандар (оң мәнді жай бөлшектер) қатарына теріс мәнді $-\frac{m}{n}$ рационал сандары (теріс мәнді жай бөлшектер) қосылды.

39. Теріс емес рационал сандардың әрқайсысына координаталық түзу атты түзу бойынан бір нүкте сәйкес қою арқылы рационал сандарды көзбен көру мақсатында геометриялық бейнелеу және сол бойынша оларды салыстыру – алдын ала берілген түзу бойында бірлік кесіндісі салынып, бірлік кесіндісінің бастапқы нүктесіне санақ басы деп аталатын 0 (нөл) санын, соңғы нүктесіне 1 (бір) санын сәйкес қойып, түзуде 0 санына сәйкес келетін нүктеден 1 санына сәйкес келетін нүктеге қарай оң деп аталатын бағыт белгіленеді де, әр $\frac{m}{n}$ оң мәнді рационал саны үшін 0 санына сәйкес нүктеден басталып, ұзындығы дәл $\frac{m}{n}$ санына тең болатын кесіндінің соңғы нүктесіне сол $\frac{m}{n}$ санын сәйкес қою және нүктедердің санақ басынан алыс немесе жақын жатуына байланысты салыстырулары.

40. Теріс мәнді рационал сандарды координаталық түзуді қарама-қарсы екі сәулеге бөліп, оң мәнді рационал сандардан бос тұрған теріс бағытына енгізу арқылы геометриялық бейнелеу – координаталық түзу бойынан алынған 0 нүктесіне сәйкес келетін санақ басы түзуді екі сәулеге бөліп, оң бағытталған сәуленің әрбір нүктесі бір оң рационал санға сәйкес қойылған соң теріс мәнді рационал санын дәл бір нүктемен сәйкестендіру үшін сандық мәні соған тең оң рационал санына сәйкес нүктеге санақ басына қарағанда симметриялы екінші сәуле нүктесін сәйкес қою.

41. Барлық рационал сандарды координата түзуінде орналасуына байланысты өзара салыстыру ережелері – екі оң мәнді рационал сандарға сәйкес келетін нүктелердің қайсысы санақ басынан алысырақ жатса, сол нүктеге сәйкес қойылған сан үлкені болады, ал теріс мәнді рационал сандарда керісінше, оларға сәйкес келетін нүктелердің қайсысы санақ басына жақын сол нүктеге сәйкес келетін сан үлкені болады және осы қатынасты нүктелері оларға симметриялы орналасатын таңбасыз сандық мәні тең оң мәнді рационал сандар арқылы $-\frac{p}{q} < -\frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{p}{q} > \frac{m}{n}$ түрінде жазылуы және кез келген оң рационал санның 0 саны мен кез келген теріс рационал сандардан артық болуы.

42. Әр рационал оң және теріс мәнді және нөлге тең санды оған сәйкес өзара тең жай бөлшектердің жиыны ретінде анықтау – рационал сан біреу, оны координаттық түзуде бейнелейтін нүкте де біреу, сол бір рационал санның кез келген бір жазылуынан «Бөлшектің негізгі қасиеті» атты теңдік бойынша алымын да, бөлімін де бір бүтін санға көбейту, бүтін бөлінген жағдайда бөлу арқылы табылатын оны құрайтын жай бөлшектердің көптігі (саналымды) мен барлығын жазу мүмкіндігі.

43. Екі өлшемдес кесінділер ұғымының солардың әрқайсысында оң бүтін рет орналасатын үшінші ортақ бірлік кесінді бар болуына негізделуі – екі кесіндінің біреуін не оның қандай да бір бірдей бүтін бөліктеуінің екінші кесіндіге бүтін сан рет орналасуы, немесе, басқаша айтқанда, екі кесіндінің біреуін бірлік кесінді ретінде алғанда екіншісінің ұзындығының рационал сан арқылы өрнектелуі немесе екі кесіндінің әрқайсысының бойына бүтін сан рет орналастыру мүмкін болатын үшінші кесіндінің бар болуы, жай бөлшектер тілінде суреттегенде берілген бірлік кесінді бойынша бірінші кесіндінің ұзындығы $\frac{m}{n}$, екінші кесіндінің ұзындығы $\frac{p}{q}$ сандарына тең болғанда, бірлік кесіндінің $\frac{1}{nq}$ ұзындықты бөлігінің біріншіде дәл mq рет, екіншіде дәл np рет орналасуы.

44. Кез келген кесіндіні рационал сандар көмегімен өлшейтін бірлік кесінінің табылуы мағынасындағы «Кесінділер ұзындығын өлшеу үшін рационал сандар жиыны жеткілікті» және бірлік кесінді ретінде қандай кесіндіні алсақ та ұзындығы рационал санмен бейнеленбейтін кесінді құра алу мағынасындағы «... жеткіліксіз...» деген сөйлем – сәйкес «жеткілікті» деген алдын ала бірлік кесінді деп қабылданған қайсыбір кесіндімен кез келген кесіндіні рационал сан мәнді ұзындығын өлшеуге болады, басқаша айтқанда не бірлік кесіндінің өзін, не оның әр кесіндіге өзінше анықталатын қандай да бір бүтін санға тең бөлгендегі бөлігін сол

кесіндіге бүтін рет салу мүмкіндігі және де «жеткіліксіз» деген бірлік кесіндіні қандай етіп алсақ та, оны тең бөліктерге қалай бөлсек те сол бөліктердің бүтін санын өлшеніп жатқан кесіндіге бір шетінен бастап салғанда соңғы нүктесіне жетпей қалып, ал тағы бір бөлігін қосқанда асып кетіп, ешқашан соңғы нүктесімен беттеспейтіндігінен бүтін рет орналастыру мүмкін болмайтындай ең болмағанда бір кесіндінің құрылуы, сол себепті, берілген кесіндіні өлшейтін рационал сан жоқ мағынасында.

45. Жалпы дүниетанымға күмән келтірген ұзындық өлшенбейді қағидасын тудырушы Пифагор ғылыми мектебінің ұлы ашылымы – алынған әр бірлік кесіндіні қалауымызша өзара тең ұсақ бөліктерге бөліп, екінші кесіндіге бүтін рет орналастыру әрқашан мүмкін сияқты болып көрінетін жаңсақ пікірді теріске шығаратын қандай болсын бірлік кесіндімен өлшемдес емес кесінді салу мүмкіндігі.

46 Әр квадраттың диагоналі оның жағымен өлшемдес емес – кез келген кесіндіні бірлік кесінді деп қабылдап, қабырғасы сол бірлік кесінді болатын квадрат салғанда квадраттың қабырғасын қандай тең бөліктерге бөлсек те, оның диагоналі болатын кесіндіге бүтін рет салынбауынан алдын ала алынған бірлік кесіндімен өлшемдес еместігі.

47. Кесіндінің ұзындығын өлшеу есебінің толық шешімі оң ондық бөлшектердің бастауы болуының жалпылама суреттемесі – барлық рационал сандар жиыны кесінді өлшеу есебін толық шешпейтіндігін көрсететін Пифагор ашылымынан кейін қойылған есепті ақырына дейін шешу мақсатында алдын ала бірлік кесінді ретінде тағайындалған кесінді әрбір қадамда алдыңғысында толық жататын кезекті кесіндіні 0 -ден 9 -ға дейінгі 10 цифрмен нөмірленген тең 10 бөлікке біртіндеп шексіз бөле отырып, әр қадамда ұзындығы ізденісті кесіндінің бастапқы нүктесінен бастап соңғы нүктесі жататын кесіндіні белгілейтін цифрды анықтап, солар арқылы ізденісті ұзындықты бейнелейтін цифрдің сандық мәнімен қоса орнымен маңызды ақырсыз ондық бөлшек атты бүтін бөлігі мен бөлшегі үтірмен ажыратылған цифрлар тізбесі түріндегі жазу құралы.

48. Алдын ала әр кесінді үшін алынған бірлік кесінді бойынша оның ұзындығы болып табылатын ондық бөлшекті құру кесінді өлшеу мәселесінің толық шешімі ретінде – алдын ала алынған бірлік кесінді мен өлшеу қажет кесіндінің бастапқы нүктелерін берілген сәуле бас нүктесімен беттестіріп, бірлік кесіндіні біртіндеп орналастыра отырып, солардың ішінен өлшенетін кесіндінің соңғы нүктесін қамтитын кесіндісін тауып, соған дейін орналастырылған бірлік кесінділердің саны арқылы кесінді ұзындығының бүтін бөлігі анықталады да, бүтін бөліктен үтір арқылы бөлініп тұратын бөлшек бөлігін анықтау үшін осы соңғы нүкте жатқан бірлік кесінді 10 цифрмен нөмірленген ұзындығы $\frac{1}{10}$ болатын тең 10 бөлікке бөлініп, соңғы нүкте жатқан кесінді нөмірі белгіленіп алынады да, сол цифр сандар тізбесінің үтірден кейінгі біріншісі болады, сонан соң әр қадамда алдыңғы нөмірі анықталған кесіндіні 10 есе кішірейтіп, бірінің ішіне бірі орналасытындай дәл 10 бірдей бөлікке бөліп, сандар тізбесінің цифрларын анықтау ары қарай ақырсыз жалғасады.

49. Өлшемі ізделінді кесіндінің соңғы нүктесі жатқан кесіндіні бөлшектей отырып, ұзындығын сандар тізбесі арқылы өрнектеу барысында бөлшектеу бөлігінің соңғы нүктесі өлшенетін кесінді соңымен беттесетін ерекше жағдайдың жазылуын беретін $\frac{k}{10^n}$ түрінде жазылатын ондық-рационал сандар – өлшемі ізделінді кесіндінің соңғы нүктесі бөліктелген кесінділердің бірінің соңымен беттескен сәтте кесінді ұзындығы цифрлердің ақырлы санымен жазылып, мәселе шешіледі, бұл жағдайда ізделінді кесіндінің соңғы бөліктеудегі екі кесіндінің бірінің соңғы, келесісінің бастапқы нүктелерінде жатқандықтан ары қарай сол нүктені қамтитын тек оң жақ бөліктерді таңдап, осы үрдісті ары қарай жалғастырсақ, ұзындық жазылуында 0 цифрлері, ал сол жақ бөліктерін таңдап отырсақ 9 цифрлері ақырсыз жалғасып отырады, мәселен $13,01 = 13,010000\ldots = 13,0099$.

50. Бірлік кесінді ретінде алынған кесінді бойынша кез келген кесінді өлшемді және өлшемсіз болып екіге бөлініп, әр өлшемдінің ұзындығы рационал санмен өрнектелген болса, екінші жағынан кез келген кесіндіге оның ұзындығының сандық мәнін беретін ондық бөлшектер сәйкес қойылған, осындай жағдайда өлшемді және өлшемді емес кесінділерге сәйкес келетін ондық бөлшектердің бір-бірінен ерекшелігі бар ма, жоқ па деген сұрақтың туындауы және осы ерекшелікті қанағаттандырмайтындарының рационал сандардан өзге жаңа санды беруі – рационал сандарды, не солардың жазылуы болатын жай бөлшектерді бір цифрдан бастап, период деп аталатын қайсыбір ақырлы цифралар тобын арасына ештеңе салмай бірінен соң бірі ақырсыз қайталанатындары ғана және де тек қана солар ғана бейнелеуі, сонымен периодты ондық бөлшек аталымды санның өлшемдес рационал мәнді кесіндінің ұзындық өлшемі болуы және де, керісінше, әр рационал санның периодты ондық бөлшек түрінде жазылуы, ал периодты емес ондық бөлшектердің өлшемдес емес кесінді ұзындық мәнін беретін иррационал атты рационал емес санды анықтауы.

51. Бірлік кесіндімен жабдықталған бастапқы нүктесі O болатын γ^+ сәулесінде әр X нүктесі үшін OX кесіндісінің ондық бөлшекпен бейнеленуі $x = m, b_1...b_n...$ ұзындығының бар болуы мен сондағы әр цифрді табу жолы және де оның геометриялық мағынасы – алдын ала сәуле беріліп, онда сәуле басынан бастап салынған бірлік кесіндінің соңғы нүктесіне 1 саны сәйкес қойылады да, сәуле бойынан ешқандай шектеусіз кез келген нүкте алынып, ол әрпімен белгіленген соң, соңы осы нүктеде болатын сәуле басынан басталған OX кесіндісі үшін кез келген кесінді ұзындығын өлшеу мәселесін ондық бөлшек құрылымы арқылы толық шешуі, дәл айтқанда, берілген бірлік кесіндіге сәйкес ондық бөлшекпен өлшенетін OX кесінді ұзындығы $x = a_l \ldots a_0, b_1 b_2 \ldots$ саны болады да, сондағы әр цифрі келесі алгоритммен анықталады: жазудағы $a_l \ldots a_0 = m$ бүтін бөлігі бірлік кесінді сәуле басынан бастап, сәуле бағытына қарай $m = a_l 10^l + \ldots + a_1 10^1 + a_0$ рет салынғанда X нүктесі $A_m A_{m+1}$ бірлік кесіндісінде $X \neq A_{m+1}$ болып жатады, одан кейін $A_m A_{m+1}$ бірлік кесіндіні тең 10 бөлікке бөліп, b_1 цифры «ұзындығы ізденісті» кесіндінің соңғы X нүктесін қамтитын, ұзындығы $\frac{1}{10}$ болатын кесіндінің нөмірін көрсетеді, келесі b_2 цифрі b_1 цифрімен белгіленген кесіндіні тағы тең 10 бөлікке бөліп, солардың ішінде соңғы X нүктесі жатқан, ұзындығы $\frac{1}{10^2}$ кесіндінің нөмірін береді, ары қарай осы үрдісті ақырсыз жалғастыра отырып, бір разрядтан келесісіне өткенде тең 10 бөлікке бөлінген әрбір кесінді алдыңғысының жиыншасы болып, ұзындықтары әр адымда алдыңғысына қарағанда 10 есе азайып, нүктесін ақырсыз қамтиды да, сонымен берілген OX кесіндісінің ұзындығының дәл мәнін береді.

52. Вейерштрасс барлық нақты сандар деп атаған жиын нөл, оң және теріс мәнді сандар барлық мүмкін ақырсыз ондық бөлшек ретінде – басы мен соңы беттеспейтін кез келген кесінді ұзындығын өлшеу есебінің шешімін берген ондық бөлшектердің оң мәнді деп аталуы, «-» минус таңбаларымен жабдықталған теріс мәнді деп аталатын ондық бөлшек және таңбасыз, ерекше, соңы мен басы беттесетін кесінді ұзындығын беретін $0 = 0,000\ldots$ ондық бөлшек саны.

53. Нақты сандар жиыны екілік, үштік және т.с.с. ақырсыз бөлшектер ретінде – ондық бөлшектер әр қадамдағы кесіндіні тең 10 бөлікке бөлгеннен шыққан болса, сол тәртіппен бөлшектеуді $2, 3$ және кез келген, бірақ бекітілген, тең бөліктер саны үшін өткізу.

54. Координаталық түзу деп аталатын әр екі нүктемен бірге соларды жалғастыратын кесіндінің бар нүктелерін қамтитын геометриялық түзудің әрбір нүктесін бекітілген бірлік кесінді деңгейінде кесінді ұзындығын өлшеу есебіне сүйеніп құрылған ондық бөлшек түрінде жазылған тек ойда ғана тұратын нақты сандар жиынындағы нүкте координатасы атты санмен өрнектеу арқылы арифметикаландыру – түзу алынып, оның бағыты анықталған соң бойын екі нүкте белгіленіп, координат басы атты бағыттан алыс жатқан нүктеге 0, жақын жатқан нүктеге 1 саны сәйкес қойылады да, осы екі нүкте арқылы бірлік масштаб енгізіліп, 0 нүктесінен оң жақта жатқан әрбір нүктеге алынған бірлік кесінді бойынша координат басынан басталып, соңы сол нүкте болатын кесінді ұзындығына тең оң санның, сол жағында жатқан нүктеге минус таңбамен жабдықталған кесінді ұзындығына тең теріс мәнді санның сәйкес қойылуы және нүктеге сәйкес қойылған санның нүкте координатасы деп, ал әр нүктесі координатамен жабдықталған түзудің координаталық түзу деп аталуы.

55. Алдын ала берілген әр нақты санға координаталық түзу бойынан кесінді ұзындығын сақтап координатасы сол сан болатын нүкте салу тәртібі – теріс сандарға сәйкес қоятын нүкте координат басына қарағанда оң санға сәйкес қоятын нүктеге симметриялы салынатын болғандықтан тек оң ондық бөлшектерге сәйкес келетін нүктелерді салумен шектелу: координаталар түзуінде нөл мен бірге сәйкес қоятын нүктені анықтап алғаннан кейін оң бүтін санға сәйкес қоятын нүкте бүтін санның анықтамасынан 0 нүктесінен бастап, таңдап алынған бағытпен бірлік кесіндіні бір-біріне жалғай отырып, бүтін санда бар бірліктер санына тең рет салу арқылы алынса, периодты ондық бөлшекке тең оң жай бөлшекке сәйкес нүкте бірлік кесіндінің бөлшек санның бөліміне тең бірдей бөлікке бөлгендегі бір бөлігін алымына тең рет бір-біріне жалғай отырып салу арқылы алынады, периодсыз ондық бөлшек болатын оң иррационал санға сәйкес келетін нүктені алуда алдымен бүтін бөлігін салып аламыз да, келесі бірлік кесіндіні бір разрядтан келесісіне өткенде тең 10 бөлікке бөлінген әрбір кесінді алдыңғысының жиыншасы болып, ұзындықтары әр қадамда алдыңғысына қарағанда 10 есе азайып, осы ақырсыз үрдіс нәтижесінде барлығында жататын жалғыз нүктенің ізденісті нүкте

болуы, осының бәрін қорытындылағанда қосымша кез келген нақты санға координаталық түзу бойынан міндетті түрде өзіндік нүкте сәйкес келетіндігі көрсетілді.

56. Координаталық түзу бойында рационал және иррационал сандардың орналасуының «тығыздығы» туралы – координаттық түзуде тек рационал сандарға сәйкес келетін нүктелерді салу түзуді толық жаппай «тесіктер» қалдыратындығын көрсететін қабырғасы бірлік кесінді болатын квадрат диагоналін сол координата басынан бастап салғанда ұзындығы иррационал сан болуына байланысты соңына рационал сан сәйкес қойылмай бос қалатын бір нүктенің мысалы геометриялық тұрғыдан құрылды, әйткенмен кез келген екі нақты санның арасында кемінде бір рационал сан, ал Кантор айтқандай олардан да көп иррационал сан бар болуынан нақты сандар жиынында олардың тығыздығы алынады.

§6. НАҚТЫ САНДАРДЫҢ МАҒЫНАЛЫ ТҮСІНДІРМЕЛЕРІМЕН ЖАБДЫҚТАЛҒАН АКСИОМАЛАР ЖҮЙЕСІ

1. Сандар әлемін аксиомалық көзқарасқа бағыттаған қысқаша шолу – бастаулары мыңжылдықтар тұңғиығында жатқан нақты сандар жайлы ғасырлар бойы бөлек-бөлек жинақталған қасиеттерден аксиома деп аталатын дәлелденбей қабылданатын санды анықтайтын құраушы қасиеттер тізбесін бөліп алу және мектептен белгілі сандар жайлы тұжырымдарды аксиомалар негізінде шығару арқылы дәлелдеу мәдениетін тәрбиелеу.

2. Аксиомалар арқылы барлық нақты сандар жиыны мен әр нақты санның анықталуы – әр жеке сан өзі анықталмай тек қасиеттерімен беріліп, сол аксиомалар жүйесіне жинақталған қасиеттерді қанағаттандыратын нақты сандар жиыны деп аталатын әрбір жиынның элементі ретінде анықталуы.

I. Қосу амалының аксиомалары – қосылғыштар деп аталатын реттелген екі санға олардың қосындысы атты үшінші санды сәйкес қою тәртібі бойынша қосу деп аталатын амалын енгізу, ширатып айтқанда, қосу амалының анықтамасындағы реттен туындайтын «қосылғыштардың орын ауыстырғанмен қосындының мәні өзгермейді» деген жаттанды заңның мағынасын кеңінен талқылау, тек екі қосылғыш үшін анықталған қосу амалы негізінде 3,4,... кез келген ақырлы қосылғыштардан тұратын сандар үшін қосу амалын математикалық тұрғыдан кіршіксіз дұрыс анықтау, әр элементті осы амалға қатысты орнында қалдыратын нейтраль-нөл элементін анықтау және де сол арқылы әр санға оған қарама-қарсы санды анықтау аксиомалары.

II. Көбейту амалының аксиомалары – қосу деп аталған амалды қабылдағаннан кейін одан басқа және одан нейтрал элементпен ғана ерекшеленетін көбейту амалын енгізу: көбейткіштер деп аталатын реттелген екі санға олардың көбейтіндісі атты үшінші санды сәйкес қою тәртібі бойынша көбейту деп аталатын амалды енгізу, көбейту амалының анықтамасындағы реттен туындайтын «көбейткіштердің орын ауыстырғанмен көбейтіндінің мәні өзгермейді» деген жаттанды заңның мағынасын кеңінен талқылау, тек екі көбейткіш үшін анықталған көбейту амалы негізінде 3,4,... кез келген ақырлы көбейткіштерден тұратын сандар үшін көбейту амалын математикалық тұрғыдан кіршіксіз дұрыс анықтау, қосу амалының нейтрал элементінен өзге болуымен көбейтуді қосудан ажыратытын және әр элементті көбейту амалына қатысты орнында қалдыру қызметін атқаратын бір атты нейтрал элементті анықтау және де сол арқылы әр нөлден өзгеше санға оған кері санды анықтау аксиомалары.

III. Өзара бөлек деп анықталған қосу және көбейту амалдарының арасындағы байланыс аксиомасы – бір санды екі санның қосындысы түрінде жіктеп, олардың қосындысы болатын санды үшінші санға көбейту мен қосындыдағы әр қосылғышты үшінші санға көбейтіп, кейін оларды қосқанның бірдей болуын беретін қосу-көбейту амалдарының арасындағы үлестірімділік атты заң.

IV. Рет деп аталатын екі сан арасындағы үлкен, кіші және тең қатынастарының арасындағы табиғы талаптарды жүйелеу аксиомалары – екі сан арасындағы үлкен, кіші және тең қатынастарының «біреуі және тек қана біреуі» деп жинақы түрде айтылатын, яғни әрқашанда кемінде бірі орындалғанына қоса екеу не үшеу болып, қатар орындалуы мүмкін еместігі, бір бағыттағы екі қатынас тізбесі ретінде жазылған бір санның екінші саннан кіші, ол сан үшіншіден кіші болғанда бірінші санның үшіншіден кіші болуын беретін тразитивтілік аксиомасы, рет қатынасы мен қосу амалының және көбейту амалдарының арақатынасы, ширатып айтқанда сәйкес сандар арасындағы берілген рет қатынасы кез келген санды екі жағына да қосқанда және оң санға көбейткенде рет тәртібінің сақталуы.

V. Архимед аксиомасы атты барлық нақты сандар жиынын өзара қиылыспайтын жартылай интервалдарға жіктеу мүмкіндігі – барлық нақты сандар жиынын ұзындықтары алдын ала берілген оң нақты санға тең, шеттері беттесіп, бірақ қиылыспайтын тізбелей орналасқан жартылай интервалдарға бөлгенде кез келген нақты санның осы жартылай интервалдардың біреуінде және тек қана біреуінде жатуы.

VI. Кез келген шенелген сандық жиынның ең кіші жоғарғы және ең үлкен төменгі шендерінің бар болуы туралы аксиома – жоғарыдан шенелген жиынның барлық жоғарғы шендерінен құрылған жиынының ең кіші элементінің әрқашанда бар болуы, яғни қайсыбір нақты сан аталмыш жиынның жоғарғы шені болып, одан кіші кез келген санның ондай қасиетте болмауы, ең үлкен төменгі шеннің сондай ұқсастығы, төменнен шенелген жиынның барлық төменгі шендерінен құралған жиынының ең үлкен элементінің бар болуы, дәл айтқанда қайсыбір нақты сан аталмыш жиынның төменгі шені болып, одан үлкен кез келген санның ондай қасиетте болмауы.

3. Жиі қолданыстағы бір уақытта орындалу не орындалмауына байланысты эквивалентті болатын сандар арасындағы тұжырымдар – екі санның теңдігінің екі жағына кез келген сан болсын, белгілі бір сан болсын қосқанда теңдіктің сақталуы тәрізді көбейту, бөлу амалдарымен рет қатынастарының сақталуы.

§7. ҚОЛДАНЫСТАҒЫ ЖАТТАНДЫ АРИФМЕТИКАЛЫҚ АМАЛДАР ЕРЕЖЕЛЕРІНІҢ ҚОСУ, КӨБЕЙТУ АКСИОМАЛАРЫНЫҢ САЛДАРЫ РЕТІНДЕГІ ДӘЛЕЛДЕНУЛЕРІ

1. Реттелген екі санның айырымы мен бөліндісінің анықтамалары – математикадағы «түсініктерді керексізбен көбейтпе» ұстанымына сай арифметикалық төрт амалдың екеуі ғана анықталады да, сол анықталған қосу мен көбейту амалдарына кері амал ретінде сәйкес алу және бөлу атты амалдарының енгізілуі.

2. Сандарға қолданылатын төрт арифметикалық амалдардың қасиеттері – математика затындағы табиғаттық жалғыздық қасиетін ерекше нейтрал элементтердің, ол арқылы анықталған қарама-қарсы сан мен кері сандардың қанағаттандыруы және сол жағында амал оң жағында нәтижелі қорытындыдан тұратын арифметикалық амалдардың орындалу ережелерінің оқылуы.

3. Қосу және көбейту аксиомаларының салдарының дәлелдеулері – математика затындағы табиғаттық жалғыздық қасиетін ерекше нейтрал элементтердің, ол арқылы анықталған қарама-қарсы сан мен кері сандардың қанағаттандыруының және сол жағында амал оң жағында нәтижелі қорытындыдан тұратын арифметикалық амалдардың орындалу ережелерінің дәлелдемелері.

4. « $2+2=4$ » теоремасы және оның дәлелдеуі – сандар аксиомалары деңгейінде екі санды қосу амалы енгізіліп, 1 атты саны анықталған, солар бойынша $2, 3, 4\ldots$ белгілеуде натурал сандар тізбесі алдыңғысына анықталған 1 санын енгізілген қосу амалы арқылы $1+1=: 2, 2+1=: 3, 3+1=: 4, \ldots$ түрінде жазылып, солардың негізінде $2+2$ амалы анықталғанымен нәтижесі белгісіз болғандықтан бұл математикадық сұрақ болады да, оның $2+2=4$ түріндегі жауабы теорема болып, дәлелдеуді қажет етеді.

5. Жаттанды «Нөлге бөлуге болмайды» ережесі және оның дәлелдеуі – бөлу амалының анықтамасы бойынша жалғыз сан табылу талабына қарсы ондай санның мүлдем болмауы мен ондай сандардың шексіз көп болуын кез келген санды нөлге көбейткенде нөлге тең болуы негізінде шығатын «не шөл, не көл» мәтеліндегідей дәлелдемесі.

§8. ҚОЛДАНЫСТАҒЫ ЖАТТАНДЫ САНДАР АРАСЫНДАҒЫ РЕТТІК ҚАТЫНАСТАРДЫҢ РЕТТЕУ АКСИОМАЛАРЫНЫҢ САЛДАРЫ РЕТІНДЕГІ ДӘЛЕЛДЕНУЛЕРІ

1. Қолданыстағы үйреншікті рет мағыналы ережелердің реттеу аксиомаларының салдары ретіндегі оқылуы – екі санның арасындағы кейбір реттік қатынастардың орындалмауынан жалғыз біреуінің орындалуының әртүрлі жағдайлары, үш санның реттік қатынастарының орындалуынан транзитивтілік және қосу амалының қатынасты сақтау қасиеттерінен шығатын қорытынды қатынастар, екі санның арасындағы төрт мүмкін эквивалентті реттік қатынастар және де солардың дербес жағдайы болатын сан таңбасы бойынша оған қарама-қарсы санның таңбасын білу, теңсіздікті оң санға көбейткендегі теңсіздік сақталатын аксиомалық ереженің жалғасы ретіндегі теріс санға көбейтудің теңдік таңбасын сақтап, теңсіздік таңбасын қарама-қарсыға ауыстыруы, таңбалары белгілі екі санға көбейту және бөлу амалын қолданғандағы нәтиже таңбасын білу, бөлімі мен алымындағы сандардың реттік қатынасының бөлшектер арасындағы реттік қатынастары, бірнеше санды қосу және оң сандарды көбейту амалдарының реттік қатынастарды сақтауы.

2. Қолданыстағы үйреншікті рет мағыналы ережелердің реттеу аксиомаларының салдары ретіндегі дәлелдеулері – екі санның арасындағы кейбір реттік қатынастардың орындалмауынан жалғыз біреуінің орындалуының әртүрлі жағдайларының, үш санның реттік қатынастарының орындалуынан транзитивтілік және қосу амалының қатынасты сақтау қасиеттерінен шығатын қорытынды қатынастардың, екі санның арасындағы төрт мүмкін эквивалентті реттік қатынастар және де солардың дербес жағдайы болатын сан таңбасы бойынша оған қарама-қарсы санның таңбасын білудің, теңсіздікті оң санға көбейткендегі теңсіздік сақталатын аксиомалық ереженің жалғасы ретіндегі теріс санға көбейтудің теңдік таңбасын сақтап, теңсіздік таңбасын қарама-қарсыға ауыстыруыдың, таңбалары белгілі екі санға көбейту және бөлу амалын қолданғандағы нәтиже таңбасын білудің, бөлімі мен алымындағы сандардың реттік қатынасының бөлшектер арасындағы реттік қатынастарының, бірнеше санды қосу және оң сандарды көбейту амалдарының реттік қатынастарды сақтауының дәлелдемесі.

3. Кез келген санның оң бүтін дәрежелерінің реттік қасиеттері – бір санды өзіне-өзін оң бүтін сан рет қосу арқылы қосындының мәнін қосылғыштар санын беретін оң бүтін санды берілген сан алдына қойып, көбейту түрінде жазу арқылы көбейту амалын анықтағандай санды өз-өзіне оң бүтін сан рет көбейту нәтижесі санның оң бүтін дәрежесі деп аталады да, негізі атты көбейткіштің оң жақ төбесіне дәреже атты көбейткіштердің санын жазу арқылы белгіленеді және ол келесідей қасиеттерде болады: кез келген нөлден өзгеше санның квадратының оң болуының дәлелдеуі, барлық нақты сандар арасындағы ерекше нөл мен бір сандарының 0<1 теңсіздігінде болуының дәлелдеуі, бүкіл бүтін сандардың ...<-2<-1<0<1<2<... өсу ретімен тізбелей жазылуының дәлелдеуі, бір дәрежелі әртүрлі негіздердің және оң мәнді бірдей негіздің әртүрлі дәрежелерінің өзара арақатынастары, 1 және 0 сандарының кез келген оң бүтін дәрежесінің өзіне тең болуының дәлелдеуі, жай бөлшектің оң бүтін дәрежесінің алымы мен бөлімінің оң бүтін дәрежелерінің қатынасына тең болуының дәлелдеуі, -1 санының оң бүтін дәрежелерісінің тақ не жұп болуына қарай сәйкес өзіне не оған қарама-қарсы санына тең болуы.

4. Архимед аксиомасының салдары – әр саннан үлкен санның әрқашан табылуы.

§9. АҚЫРСЫЗ АЙТЫЛЫМДАР ТІЗБЕГІНІҢ ӘР МҮШЕСІНІҢ ДҰРЫСТЫҒЫН АҚЫРЛЫ ҚАДАММЕН РАСТАЙТЫН МАТЕМАТИКАЛЫҚ ИНДУКЦИЯ ӘДІСІ

1. Математикалық индукция әдісі – не жалған, не дұрыс деген екі мәнді қабылдайтын айтылым атты тұжырымдардан айтылымдар тізбегі құрылып, бірінші нөмірлі T_1 айтылымының дұрыстығын жеке дәлелдеу мен $k=1$ нөмірінен бастап, кез келген k нөмірі үшін расында да дұрыстығы немесе жалғандығы жайлы ешқандай да сұрақ қозғалмастан T_k дұрыс айтылым деп қабылдануынан келесі $k+1$ нөмірлі T_{k+1} айтылымының дұрыстығын дәлелдеуден тұратын 2 қадаммен саны шексіз барлық оң бүтін нөмірлі айтылымдар дұрыстығын дәлелдейтін әдіс, қорытындысында бірінші қадам бойынша дәлелденген T_1 айтылымының дұрыстығынан дәлелденген екінші қадам бойынша T_2 айтылымының дұрыстығы шығады да, қалғандарының дұрыстығы екінші қадам бойынша бірінен бірі жалғасып, алдын-ала қай нөмірді алсақ та, дұрыстық сол нөмірлі айтылымға жетіп, ары қарай жалғасады және де бұл әдістің қолданысы өз оқылуына дәлме-дәл болып, теңдік пе, теңсіздік пе не мағыналы тұжырым ба әйтеуір әр айтылым өз нөмірімен жекеленуі керек.

2. Ньютонның бином формуласы – екі қосылғыштан тұратан бином атты қосмүшелік, оның оң бүтін дәрежесі және оның қосынды түрінде Ньютон жазған жіктеуі.

§10. БҮТІН, РАЦИОНАЛ ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ САНДАРДЫҢ НАҚТЫ САНДАР АКСИОМАЛАРЫНЫҢ ЖҮЙЕСІ НЕГІЗІНДЕ ҚҰРЫЛУЫ

1. Аксиомалық жүйедегі арифметикалық амалдар мен олар арқылы натурал және бүтін сандар туралы жинақталған қорытынды мәлімет.

2. Аксиомалар аясында өзара тең жай бөлшектер жиыны мағынасында анықталған рационал сандар – көбейту амалы және кері санның бар болуы аксиомалары бойынша анықталған алымы кез келген сан, бөлімі кез келген нөлден өзгеше сан ретінде бөлу амалымен алгебралық бөлшектер анықталады да, соның ішінде алымы кез келген бүтін, бөлімі нөлден өзгеше бүтін сандар болғандағы жай бөлшек атты дербес жағдайы болатын бөлшектің мәні рационал сан деп аталады, жай бөлшек өзінің алымы мен бөлімі арқылы анықталып, сол жәй бөлшекке мәні тең жазылуы өзге жай бөлшектің бәрі сол рационал санға тең болады да, рационал сан деп мәндері өзара тең барлық жай бөлшектер жиыны аталады. Қорытындысында, рационал сан деп қайсыбір жай бөлшек мәні болатын сан аталады.

3. Оң және теріс мәнді жай бөлшектердің жазылулары – жай бөлшектің «+» және «–» таңбаларымен жабдықталған натурал сандардың қатынасы арқылы жазылғанда алымы мен бөлімі бірдей таңбалы және әртүрлі таңбалы болуына байланысты сәйкес оң және теріс рационал сандарды өрнектеуі.

4. Қолданыстағы жаттанды жай бөлшектерді көбейту ережесі және оның дәлелдемесіне сілтеме – аксиомалар салдарында дәлелденген алымын аламына, бөлімін бөліміне көбейтетін алгебралық бөлшектерді көбейту ережесінің дербес жағдайы ретінде.

5. Әр санды ондық бөлшек түрінде Архимед аксиомасы негізінде бейнелеу әдістемесі – Архимед аксиомасы бойынша теріс емес сандар жиынын ұзындықтары $1, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$ болатын өзара қиылыспайтын жартылай интервалдарға алдыңғысын 10 есе кеміте отырып, бірінен кейін бірін бөлгенде алынған сан сол жартылай интервалдардың қайсысына жататындығын 0-ден 9-ға дейінгі цифрмен белгілей отырып, санның ондық бөлшек деп аталатын алдымен ұзындығы 1 болғанда үтірге дейінгі бөлігін, артынша бөлшек бөліктерін үтірден кейін беретін жазылу.

6. Нақты сандар деп аталған тек аксиомалық жүйені қанағаттандыратын элементтері айқындалмаған жиынның элементі ретінде ғана анықталған объектілерді ондық бөлшектер түрінде нақтылау – тек қана қасиеттермен берілген сандардың «қаламға түсетін» 10 цифрмен позициялық жүйеде жазылуы.

7. Жай бөлшектерді салыстыру қатынастарының оларға пара-пар бүтін сандардың өзара қатынастары арқылы бейнеленуі – аксиомалар салдарында дәлелденген алгебралық бөлшектерді салыстыру сол оқылымды ережесінің дербес жағдайы ретінде.

8. Жай бөлшектерді қосудың қолданыстағы үйреншікті ережесі – аксиомалар салдарында дәлелденген алгебралық бөлшектерді қосу ережесінің дербес жағдайы ретінде және алым және бөлім мағынасында қабылданған санның тең бөліктері неше рет алынып тұруын санап қосу арқылы бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу ережесінің тікелей дәлелдемесі, бөлімдері әртүрлі бөлшектердің мәнін сақтай отырып, бөлімі бірдей бөлшекке келтіру арқылы дәлелденген жағдайға әкелу.

9. Жай бөлшек жазуындағы « $\div$ » сызықша таңбасының мағынасы – m бірлік көлемдегі объектіні тең n бөлікке бөліп, олардың біреуінің алынуы не оған пара-пар өлшемі бірлік ретінде алынған объектіні тең n бөлікке бөліп, олардан m бөліктің алынуы.

10. Оң мәнді ондық бөлшектерді барлық нақты сандарды жазу мақсатында қолдану – оң мәнді ондық бөлшектерді «+» және «-» таңбасымен жабдықтау арқылы сәйкес оң және оған қарама-қарсы сандар атты теріс сандарды таңбалау, ерекше $0=0,0\ldots0$ және $1=1,0\ldots0\ldots=0,9\ldots9\ldots$ сандарының ондық бөлшек түрінде пара-пар жазылулары.

11. Санның ақырлы не ақырсыз ондық бөлшек түрінде жазылуы – санның рационал не рационал емес болуына сәйкес ондық бөлшектің белгілі бір жерден бастап қандай да бір цифрлардың ақырлы тобының тізбектей қайталануына не ешқандай цифрлардың жүйелі қайталанбауына байланысты периодты және периодсыз деп аталып, екі топқа бөлінетін ондық бөлшек түрінде жазылулары, рационал сандағы кез келген орында тұрған цифр мәнін анықтау мүмкін болғандықтан санның өзі де айқын түрде жазылады, ал периодсыз ондық бөлшек жазылуында цифрлар саны ақырсыз және орналасуы жүйесіз болуына байланысты жазылудағы әрбір цифр әрқашан нақты анықтала бермегендіктен рационал емес сан ондық бөлшек арқылы толық көлемде жазылмайды, сол себепті олардың анықтама мағынасына сәйкес $\sqrt{2}, e, \pi,$ тәрізді ықшам белгіленулері енгізіледі.

12. Периодтық ондық бөлшекті мәні соған тең жай бөлшек түрінде жазу ережесі – ізденісті жай бөлшектің алымы мен бөлімін берілген ондық бөлшектегі периодсыз, периодты бөліктері арқылы есептеу алгоритмі.

13. Периодсыз ондық бөлшектер басқа-рационал емес, яғни иррационал сандардың жиынын құруы және оның бос емес жиын екеніндігін көрсететін мысалдар.

§11. САНДЫҚ ЖИЫННЫҢ СУПРЕМУМЫ МЕН ИНФИМУМЫ

1. Жоғарыдан шенелген сандық жиынның супремум атты нақты мәнді ең кіші жоғарғы шені әрқашанда бар болуының аксиомасы және оның екі сөйлеммен сипатталуы – біріншіден, супремум саны жиынның жоғарғы шені болуы, екіншіден,

супремум санынан кіші кез келген нақты сан осы жиында одан үлкен сан әрқашан табылғандықтан бұл жиынның жоғарғы шені бола алмауы, яғни барлық мүмкін жоғарғы шендердің ең кішісі болуы. Төменнен шенелген сандық жиынның инфимум атты нақты мәнді ең үлкен төменгі шені әрқашанда бар болуының аксиомасы және оның екі сөйлеммен сипатталуы – біріншіден, инфимум саны жиынның төменгі шені болуы, екіншіден, инфимум санынан үлкен кез келген нақты сан осы жиында одан кіші сан әрқашан табылғандықтан бұл жиынның төменгі шені бола алмауы, яғни барлық мүмкін төменгі шендердің ең үлкені болуы.

2. Ең үлкен (ең кіші) элементі бар сандық жиынның супремумы (инфимумы) сол ең үлкен (ең кіші) элементтің дәл өзі болуы – біріншіден, жиынның ең үлкен (ең кіші) элементі сол жиынның жоғарғы (төменгі) шені болуы, екіншіден, одан кіші (үлкен) кез келген санның жиында жатқан ең үлкен (ең кіші) элемент үлкен (кіші) болғандықтан кіші (үлкен) сан жоғарғы (төменгі) шен бола алмағандықтан, ең үлкен (кіші) элемент жоғарғы (төменгі) шендердің ең кішісі (үлкені), яғни жиын супремумы (инфимумы) болуы.

3. Сандық жиынның супремумын бейнелейтін сөйлемдердің сәл жеңілдетілген түрі - екінші шарттағы зерттелінді жоғарғы шеннен кіші санның кез келген емес кез келген жақындықта жатқан санмен шектелу мүмкіндігі.

4. Сандық жиындардың супремумы мен инфимумының сол сандық жиындардың өзінде жатуының да, жатпауының да мүмкіндігі – сәйкес сегмент пен интервал мысалдары.

5. Кез келген сандық жиынның супремумы мен инфимумының әрқашан да бар болуы – жиын әрқашанда жоғарыдан (төменнен) шенелмеген не шенелген болады да, жоғарыдан (төменнен) шенелмеген жиынның $+\infty(-\infty)$ тең ақырсыз жоғарғы (төменгі) шені бар болып, одан үлкен (кіші) сан болмағандықтан сол жоғарғы (төменгі) шен жалғыз болып, жалғыздығынан барлық жоғарғы шендер арасындағы ең үлкені де, ең кішісі де соның өзі, жинақтап айтқанда $+\infty(-\infty)$ жоғарыдан (төменнен) шенелменген жиынның ең кіші жоғарғы шені ретінде супремумы (инфимумы) болады, ал жоғарыдан шенелген жиынның супремумының (инфимумының) бар болуы супремумының (инфимумның) ең кіші (үлкен) жоғарғы (төменгі) шен деген анықтамасынмен беттесетін дәл оқылудағы 17 аксиома.

6. Сандық жиыннның супремум, инфимум және элементтері арақатынастары – сандық жиынның жоғарғы (төменгі) шені қасиетті әр сан осы жиынның супремумымен (инфимумымен) артық (кіші) не тең қатынаста болуы, неғұрлым жиын кең болса, соғұрлым оның супремумы үлкен, ал инфимумы кіші болуы, берілген екі сандық жиынның бірінің әр элементі екіншісінің әр элементінен аспағанда нақты сандар болатын бірінші жиынының супремумы екінші жиынның инфимумінен аспауы, берілген сандық жиынының элементеріне қарама-қарсы элементтерден тұратын жиынның супремумы (инфимумы) бастапқы жиынның инфимумына (супремумына) қарама-қарсы санға тең болуы, берілген екі сандық жиындардың біріншісінің кез келген элементі екіншісінің бір ғана элементінен аспағанда нақты сандар болатын бірінші жиынының супремумы екінші жиынның инфимумінен аспауы, берілген сандық жиынының әр элементі оның супремумы мен инфимумынан арасында, дәл айтқанда, инфимумнан кіші емес, супремумнан артық емес болуы.

§12. ОҢ САННЫҢ АРИФМЕТИКАЛЫҚ (ОҢ БҮТІН РЕТТІ) ТҮБІРІ ЖӘНЕ ОНЫҢ БАР БОЛУЫ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА

1. Сан дәрежесі тақырыбындағы терминдік атаулар мен қалыптасқан белгілеулердің тарихи деректері – дәреже негізі, дәреже көрсеткіші.

2. Санның оң мәнді дәрежесіне «кері» мағынадағы нақты санның оң бүтін мәнді және арифметикалық түбірлері – екіден кем емес оң бүтін дәрежесі берілген а санына тең болатын әрбір сан сол санның оң бүтін түбірі деп, солардың арасындағы оң мәндісі арифметикалық түбір деп аталуы және $\sqrt[n]{a}$ арқылы белгіленуі, соның ішінде $n=2$ болғанда $\sqrt[2]{4}=\sqrt{4}$ арифметикалық түбірінің ± 2 емес, тек қана жалғыз $+2$ санына тең болуы, сонымен $\sqrt{4}=+2$ (бірақ ± 2 емес).

3. Арифметикалық түбірдің «бар болуы» туралы теорема мен одан туындайтын «арифметикалық түбірді жуықтап есептеу» мәселесі математикалық анализ дамуының бірден-бір себебі ретінде.

4. Кез келген оң санның кез келген оң бүтін дәрежелі арифметикалық түбірі бар және ол жалғыз болуы туралы теорема мен оның дәлелдемесі – теорема орындалу себебінің геометриялық тұрғыдан көрнекі түсіндірмесі мен соған негізделген 9 қадамдық аналитикалық дәлелдемесі.

5. Арифметикалық түбірдің бар болуы туралы теореманың сандар құрылысында рационал санмен қатар рационал сан емес иррационал сан бар болуын нақтылауға негізделген салдары – рационал емес санның бар болуының кез келген периодсыз ондық бөлшектің мәні болуымен қатар басқа түрғыдағы қасиетпен берілуі: квадраты 2 санына тең $\sqrt{2}$ – иррационал сан теоремасы.

6. Әр интервалда рационал және иррационал сандардың бар болуы – Архимед аксиомасы мен арифметикалық түбірдің бар болу теоремасының жеке рационал және жеке иррационал сандардың нақты сандар жиынындағы тығыздығын сипаттайтын салдары ретінде.

13. НАҚТЫ САННЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ ДӘРЕЖЕСІНІҢ a^x ДӘРЕЖЕ (САН ДӘРЕЖЕСІ), x ДӘРЕЖЕ КӨРСЕТКІШІ, a НЕГІЗІ – ТЕРМИНДЕРІМЕН ТҮСІНДІРМЕЛІ (ДӘЛЕЛДЕМЕЛІ) АНЫҚТАМАСЫ

1. Санды дәрежеге шығару мәселесінің туындануы мен шешімдер тізбесі – бір санды қайталап қосу амалы арқылы анықталған санды оң бүтін санға көбейту амалындағы оң бүтін санды кез келген нақты санға ауыстыру арқылы көбейту аксиомасының тобымен бекітілген кез келген екі санды көбейту амалы алынғандай бір санды қайталап көбейту амалы арқылы сол санды дәрежелеу амалында оң негіз үшін оң бүтін дәрежеден кезекпен теріс бүтін дәрежеге, нөл дәрежесіне, рационал дәрежесіне, иррационал дәрежесіне және теріс мәнді негіз үшін кейбір жай бөлшекті дәрежеге шығару амалын мағыналау үрдісі.

2. Нақты санның оң бүтін дәрежесіне амалдар орындау ережелері мен реттік қатынастар – бірдей негізді оң бүтін дәреже түріндегі екі санды көбейту амалында олардың негіздері сақталып, бар мәселе нәтиже көрсеткішін анықтауға түседі де және оның бастапқы сандардың көрсеткіштерін қосу арқылы орындалуы, санның оң бүтін дәрежесінің оң бүтін дәрежесі осы негізді сол сандар көрсеткіштерінің көбейтіндісіне тең көрсеткішті дәреже болуы, екі санның көбейтіндісі мен бөліндісінің оң бүтін дәрежелері осы сандардың берілген оң бүтін көрсеткішті дәрежелерінің сәйкес көбейтіндісі мен бөліндісі, көрсеткіштері бірдей, оң мәнді әртүрлі негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздер үлкен болған сайын санның оң бүтін дәрежесенің де үлкен болуы, көрсеткіштері әртүрлі, оң мәнді бірдей негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздің бірден үлкен не кіші болуына сәйкес дәреженің көрсеткіштер арасындағы реттік қатынасты сақтауы немесе қарама-қарсы қатынаста болуы.

3. «Сан дәрежесі» тақырыбындағы мәселесінің жалпы қойылуы – оң бүтін дәреже үшін дәлелденген алты қасиеттердің жалпылығымен кең қолданысты қамтамасыз ететін кез келген нақты мәнді көрсеткіш жағдайына тараталатындай сан дәрежесін анықтау.

4. Оң нақты санның бүтін, рационал және иррационал дәрежелерінің анықтамалары – кез келген нөлден өзгеше негіздің нөлге тең көрсеткішті дәрежесі бірге тең болып, $a^0=1 (a\in R, a\neq 0)$, нөлден өзгеше негіздің теріс бүтін мәнді дәрежесін анықталған оң бүтін көрсеткішті дәрежеге кері сан ретінде $a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\in R, a\neq 0, n\in N)$ анықтау арқылы оң бүтін мәнді дәрежемен бірге кез келген бүтін сан дәрежелі санды анықтау; теріс емес санның n – оң , m – кез келген бүтін сан болғанда $\frac{m}{n}$ оң жай бөлшек (рационал сан) дәрежесінің теріс емес санның n -ші дәрежелі арифметикалық түбірінің m -ші дәрежесі түрінде анықталуы $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}(a\in R, a\geq 0, n\in N, m\in Z)$; бірден кіші емес нақты санның оң иррационал дәрежесінің сол саннан аспайтын оң рационал мәнді көрсеткішті дәрежелердің супремумы ретінде анықталуы $a^x := sup\{a^r : 0<r<x\}(a\in R, a\geq 1, x\in Q, x>0)$, осындай негіздің теріс иррационал дәрежесінің анықталған оң иррационал дәрежеге кері сан түрінде анықталуы $a^{-x}=\frac{1}{a^{-x}}(a\in R, a>1, x\in R, x<0)$, бірден кіші оң санның иррационал дәрежесі негізге кері сан болатын бірден үлкен санның анықталған иррационал дәрежесі арқылы анықталуы $a^x=(\frac{1}{a})^x(a\in R, 0<a<1, x\in R)$.

5. Нөлден өзгеше нақты санның нөл дәрежесі туралы $a^0 := 1$ келісімін сан дәрежесіне алдын ала қойылған алты қасиеттердің мәжбүр етуі – қарама-қарсы санның анықтамасын бойынша нөлге тең көрсеткішті онымен алмастырып, бірдей негізді дәреже түріндегі сандардың көбейтіндісін дәреже көрсеткіштерін қосу арқылы есептегендіктен, ары қарай кері санның анықтамасы бойынша бірге тең екендігіне келу қадамдары.

6. Ерекше $a=1$ және $a=0$ сандарының кез келген нақты мәнді дәрежелері жөнінде келісімдер – 1 санның кез келген нақты сан мәнді дәрежесінің бірге тең болуы, 0 санының оң нақты дәрежесінің нөлге тең болуы, ал оң емес мәнді, соның ішінде 0^0 дәрежесінің анықталмауы.

7. Нақты санның бүтін дәрежесі және оң бүтін мәнді көрсеткіш үшін дәлелденген дәреженің алты қасиеттінің бүтін мәнді көрсеткішті дәреже жағдайына таратылу дәлелдемелері.

8. Сан дәрежесі төңірегіндегі мәліметтер.

§14. САН ДӘРЕЖЕСІНІҢ РАЦИОНАЛ КӨРСЕТКІШТЕРІ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ҚАСИЕТТЕРІНІҢ ОҚЫЛУЛАРЫ МЕН ДӘЛЕЛДЕУЛЕРІ ЖӘНЕ ӨЗАРА ЭКВИВАЛЕНТТІ ӘРТҮРЛІ ҚҰРЫЛЫМДЫ АНЫҚТАМАЛАРЫ

1. Оң негізді рационал мәнді көрсеткішті дәреже қасиеттерінің дәлелдемелері – бірдей негізді рационал мәнді дәреже түріндегі екі санды көбейту амалында олардың негіздері сақталып, бар мәселе нәтиже көрсеткішін анықтауға түседі де және оның бастапқы сандардың көрсеткіштерін қосу арқылы орындалуы, санның рационал мәнді дәрежесінің рационал мәнді дәрежесі осы негізді сол сандар көрсеткіштерінің көбейтіндісіне тең көрсеткішті дәреже болуы, екі санның көбейтіндісі мен бөліндісінің рационал мәнді дәрежелері осы сандардың берілген рационал мәнді көрсеткішті дәрежелерінің сәйкес көбейтіндісі мен бөліндісі, көрсеткіштері бірдей, оң мәнді әртүрлі негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздер үлкен болған сайын санның оң рационал мәнді дәрежесенің де үлкен болуы, көрсеткіштері әртүрлі, оң мәнді бірдей негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздің бірден үлкен не кіші болуына сәйкес дәреженің көрсеткіштер арасындағы реттік қатынасты сақтауы немесе қарама-қарсы қатынаста болуы.

2. Теріс санның дәреже көрсеткіші қысқартылмайтын жай бөлшек болғандағы дәрежесі – бөлшек бөлімі тақ сан болғанда негіздегі теріс санға қарама-қарсы санның бөлімдегі тақ сан дәрежелі арифметикалық түбірі анықтағаннан кейін оған қарама-қарсы санның алымға тең дәрежесін алу.

3. Сан дәрежесінің көрсеткіші оң бүтін N , бүтін Z және рационал Q жиындар жағдайларында бірте-бірте келесі анықтама соның алдыңғысы арқылы кеңейе бергенде анықталған сан дәрежесінің анықтамасына эквивалентті бірыңғай супремум арқылы берілген өрнектеуі – иррационал мәнді көрсеткішті дәреженің супремум арқылы берілген анықтамасының рационал санға жарамдылығы және барлық жағдайды қамтитын бірден үлкен негіз үшін енгізілген анықтама мен тізбеленген анықтаманың пара-парлығы.

§15. САН ДӘРЕЖЕСІНІҢ НАҚТЫ МӘНДІ КӨРСЕТКІШТЕР ЖАҒДАЙЫНАҒЫ ҚАСИЕТТЕРІНІҢ ОҚЫЛУЛАРЫ МЕН ДӘЛЕЛДЕУЛЕРІ

1. Дәреже көрсеткіші рационал және иррационал болғандағы сан дәрежелерінің өзара бөлек анықтамаларының жалпы нақты мәнді көрсеткіш үшін біріктірілген супремум негізіндегі бірыңғай анықтамасы.

2. Оң негізді нақты мәнді көрсеткішті дәреже қасиеттерінің дәлелдамелері – бірдей негізді нақты мәнді дәреже түріндегі екі санды көбейту амалында олардың негіздері сақталып, бар мәселе нәтиже көрсеткішін анықтауға түседі де және оның бастапқы сандардың көрсеткіштерін қосу арқылы орындалуы, санның нақты мәнді дәрежесінің нақты мәнді дәрежесі осы негізді сол сандар көрсеткіштерінің көбейтіндісіне тең көрсеткішті дәреже болуы, екі санның көбейтіндісі мен бөліндісінің нақты мәнді дәрежелері осы сандардың берілген нақты мәнді көрсеткішті дәрежелерінің сәйкес көбейтіндісі мен бөліндісі, көрсеткіштері бірдей, оң мәнді әртүрлі негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздер үлкен болған сайын санның оң нақты мәнді дәрежесенің де үлкен болуы, көрсеткіштері әртүрлі, оң мәнді бірдей негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздің бірден үлкен не кіші болуына сәйкес дәреженің көрсеткіштер арасындағы реттік қатынасты сақтауы немесе қарама-қарсы қатынаста болуы.

§16. ОҢ САННЫҢ ЛОГАРИФМІ – АНЫҚТАМАСЫ, БАР БОЛУЫ, НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ ӨРІСІ

1. Логарифм анықтамасына әкелетін есептің қойылымы –нақты санды берілген мәнді негіздегі дәреже түрінде жазу мәселесі, соның ішінде бір көбейту амалын бір қосу амалына ауыстыруға мүмкіндігі.

3. Логарифмнің бар болуы туралы теорема – қабылданған анықтамадағы талаптардың дәлме-дәл және бірмәнді орындалуын беретін тұжырым.

4. Логарифм анықтамасына эквивалентті тепе-теңдік пен дербес жағдайлары – дәреже көрсеткіші логарифмге тең болғанда санға тең болуы, жеке бірге және негізге тең сандардың логарифмдерінің сәйкес нөлге және бірге тең болуы.

5. Сан логарифмінің негізгі қасиеттері – көбейтіндінің, бөліндінің, дәреженің логарифмі сәйкес логарифмдерінің қосындысы, айырмасы, дәреже көрсеткішінің логарифмге көбейтіндісіне тең болуы, логарифмде бір негізден екінші негізге көшу, негізі бірден үлкен және бірден кіші оң сан болуына сәйкес логарифм сандар арасындағы қатынастарды сақтауы немесе қарама-қарсы реттік қатынасқа алмастыру.

6. Сан логарифмінің негізгі қасиеттерінің дәлелдемелері – көбейтіндінің, бөліндінің, дәреженің логарифмі сәйкес логарифмдерінің қосындысы, айырмасы, дәреже көрсеткішінің логарифмге көбейтіндісіне тең болуы, логарифмде бір негізден екінші негізге көшу, негізі бірден үлкен және бірден кіші оң сан болуына сәйкес логарифм негіз арасындағы қатынастарды сақтауы немесе қарама-қарсы таңбаға алмастыруы қасиеттерінің дәлелдеуі.

7. Логарифмнің сандарды көбейтудің бір амалын қосудың бір амалына ауыстыру қасиетінің қолданбалық маңызы.

II ТАРАУ. САНДЫҚ ТІЗБЕК ШЕКТЕРІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

§1. ТІЗБЕК АТТЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІ

1.Тізбектің анықтамасы, белгілеулері және берілу тәсілдері – тізбек табиғаты функция және ол мүмкін барлық функциялар арасында барлық оң бүтін сандар жиыны анықталу жиыны болуымен ерекшеленеді, ықшамды жазу мақсатында әдеттегі $f(n)$ түріндегі функция белгілеуінің орнына аргументті мәннің төменгі интексіне жіберу арқылы екі жақшаға ықшамдалған жинақы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ белгіленуіне алмастыру, ереже тікелей сөйлеммен не сөйлемнің символдық жазылуы формуламен, тізбектің бір нөмірінен бастап келесі мүшесі тура алдындағы бірнеше мүшелері арқылы толық бейнелейтін рекуррентті формуламен, бастапқы бірнеше мүшенің жазылуынан жалпы ережесін тану арқылы берілуі.

2. Тізбектің нақты мәнді шегінің анықтамасы – «Тізбектің нақты мәнді шегі» атауы тікелей оқылуында тізбек нөмірі өскен сайын тізбектің мүшелері тізбек шегі деп аталатын нақты санға жақындай түсуі деген логикалық түйінге керісінше алдымен нөмірге бағынышты тізбек мәндерінің тізбек шегіне ε жақындығы тағайындалып, артынша сол теңсіздікті қанағаттандыратын мәндердің нөмірлеріне нақтылы бір нөмірден бастап, бір де бір нөмір қалдырмай барлық нөмірлер сол жақындықты сақтайтындығы жайлы шарт қойылып, осы реттегі екі теңсіздік " $\varepsilon - K(\varepsilon)$ " тіліндегі шек анықтамасын құрауы.

3. Тізбек шегі анықтамасының қалыпты түсініктерге сәйкес келе бермеуі – шек анықтамасындағы оң болуынан басқа ешқандай шарт қойылмаған ε саны бір уақытта «бекітілген» және «кез келген» болуы және осы сөздерінің мағынасы қарама-қарсы болғанымен, бұл жағдайда үйлесімділігі, әрбір оң сан туралы алдын ала ол үлкен немесе кішкентай деп жеке өзін, басқа санмен салыстырусыз айтуға болмауы – «Берушіге бесеу көп, алушыға алтау аз», белгілі бір нөмірден бастап барлық нөмірлерге орындалатын қасиетті сақтай отырып, сол басталатын нөмірді көтере алу мүмкіндігі, тізбек шегіне кері анықтаманы нық тұжырымдауда сөздің көп мағынасымен жаңылмау үшін бірмәнді жазуға мүмкіндік беретін тізбек шегі анықтамасының символдық түрде жазылуы, символдық жазылу мен оқылуының ретінің кейбір тілдерде сақталып, кейбірінде сақталмауы, әрбір мүшесімен анықталатын тізбектің шегі болуына да, болмауына да және болған жағдайда оның мәніне де әр жеке алынған мүшесінің ешқандай да әсері болмауы.

4. Тізбектің шегіне ұмтылудың түрлері – тізбек мүшелері өз шегіне «жабысып», жоғарыдан не төменнен біржақты ақырсыз жақындай түсіп, ақырсыз екіжақты жақындай түсіп, кезекпен біржақты қашықтап не шегімен беттесе отырып жақындай түсіп, біресе жақындап, біресе алыстап ырғалып ұмтылуы.

§2. НАҚТЫ МӘНДІ ШЕК АНЫҚТАМАСЫНДАҒЫ ШЕНЕЛГЕН ЖӘНЕ ШЕНЕЛМЕГЕН МАҢАЙЛАР ТҮСІНІКТЕРІН ТОЛЫҚ ЛОГИКАЛЫҚ ЖАЛҒАСТЫРУ АРҚЫЛЫ ТІЗБЕК ШЕГІНІҢ АЛТЫ ТҮРІН ҚАМТИТЫН ЖАЛПЫ АНЫҚТАМАСЫНА КЕЛУ

1. «Маңай» ұғымына әкелетін шек анықтамасындағы қорытындылар – шек анықтамасы теңсіздігіндегі абсолют шаманың анықтамасы бойынша сол тізбек шегін қамтитын интервалға келу арқылы тілдегі мағынасымен дәлме-дәл келмейтін нақты сан үшін ақырлы «маңай» ұғымын және берілген нөмірден үлкен нөмірлерді интервал түрінде жазып, $+\infty$ «маңай» ұғымын анықтау.

2. Шенелген және шенелмеген маңайлар құрылымдарының логикалық жалғастыруында пайда болатын жүйе – нақты санның (нүктенің) маңайы, сол маңайдың нүкте арқылы қақ бөлінген оң және сол жақты атты жартылай интервал түріндегі маңайлары,

ақырсыз $+\infty$ санының маңайы және оған симметриялы ақырсыз $-\infty$ санының маңайы, осы $+\infty$ пен $-\infty$ маңайларының бірігуі арқылы алынған жаңадан енгізілген ∞ символының маңайы.

3. «Маңай» ұғымы төңірегіндегі талқылаулар – ақырлы және ақырсыз нүктелердің бір-бірінен өзгеше маңайларын геометриялық тұрғыдан сан өсін ию арқылы ұқсас сипатта екендігін көрсету, қолданыстағы «маңай» ұғымы тілдегі лексикадағы «жақындық» мағынасын қандай кіші болса да әрқайсысы жеке бермегенімен, жинақталып жүйелі түрде беруі.

4. Сандық тізбектің ақырлы және ақырсыз алты түрлі шегі – алдын ала берілген кез келген және бекітілген тізбек шегі маңайына жатқан тізбек мәндерінің нөмірлері $+\infty$ маңайында жату талабымен берілген анықтамалар және оның символдық түрде жазылулары.

5. Тізбек мүшелерінің шегіне жай, жоғарыдан және төменнен ұмтылуыларының арақатынасы – тізбек өзінің ақырлы немесе ақырсыз шегіне жоғарыдан не төменнен ұмтылуынан жай да ұмтылуы, бірақ тізбек мәндері екі жағынан да ұмтылу мүмкін болғандығынан керісінше жағдайдың әрқашан орындала бермеуі.

6. Шек анықтамасындағы алдын ала берілген ε маңайы үшін $K(\varepsilon)$ нөмірін табу үлгісі ретінде барлық оң бүтін сандар жиынында анықталатын элементар функциялар мәндерінен құрылған тізбек шектерін есептеу мысалдары.

§3. САНДЫҚ ТІЗБЕКТІҢ ШЕГІ ЖОҚ ДЕГЕН НЕ?

1. Сандық тізбектің нақты мәнді шегінің анықтамасын қарама-қарсы тұжырымдау – нақты мәнді (ақырлы) шектің кері анықтамасы.

2. Сандық тізбек шегінің жалпы анықтамасын қарама - қарсы тұжырымдау – алты түрлі шекті қамтитын жалпы анықтамаға кері анықтама жасау арқылы алты жағдайдың әрқайсысы тізбек шегі болмайтындығын жеке-жеке тұжырымдау және оны кесте түрінде көрнекі өрнектеу.

3. Сандық тізбектің ешқандай (ақырлы да, ақырсыз да) шегі жоқ болуы – сандық тізбек шегінің жалпы анықтамасына қарама-қарсы тұжырым алты жағдайдың бәрінде де орындалуы, соның арасында $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ тізбегінің ешқандай шегі жоқ болуы.

§4. АҚЫРЛЫ НЕ АҚЫРСЫЗ ШЕГІ БАР САНДЫҚ ТІЗБЕКТЕРДІҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Орындалуы өз-өзінен анық сияқты болса да, математикада жиі қолданыста болатын екі тұжырымның дәлелдемесі – абсолют шамасы бойынша кез келген оң саннан кіші санның нөлге ғана тең болуы, сан барлық оң нақты сандар жиында өзгергенде, әрбір бекітілген оң сан үшін олардың көбейтіндісі түріндегі сандар да барлық оң нақты сандар жиында өзгеруі.

2. Шенелген және шенелмеген сандық тізбектер – сандық тізбектің заты функция болғандықтан оның мүшелері деп аталатын мәндерінен құрылған жиын шенелуіне не шенелмеуіне сәйкес тізбектің де шенелген не шенелмеген болуы, дәл айтқанда, тізбектің әрбір мүшесінің абсолют шамасы аспайтындай сан табылуы мен керісінше, қандай сан алынса да, абсолют шамасы одан үлкен тізбек мәнінің бар болуы, сандық тізбектің шенелгендігі мен шегі бар болуының арақатынастары.

3. Жинақталатын деп те аталатын ақырлы шегі бар тізбектердің қасиеттері – тізбектің нақты мәнді шегінің жалғыздығы, жинақталатын тізбектен алдыңғы мүшелерінің ақырлы санын алып тастағанда шыққан жаңа тізбектің бастапқы тізбек шегіне жинақталуы, жинақталатын тізбек мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған жаңа тізбектің берілген тізбек шегінің абсолют шамасына жинақталуы, шегі нөл емес нақты сан болатын тізбектің мүшелері белгілі бір нөмірден бастап шегінің таңбасын сақтауы, екі жинақталатын тізбек шектерінің белгілі бір нөмірінен бастап орындалатын мүшелерінің $x_n \le y_n \le z_n$ арасындағы реттік қатынасты сақтауы, үш тізбек беріліп, мүшелері қатынасты сақтап, екі шеткі тізбектің шектерінің тең болуынан ортаңғы тізбектің де шегі сол тізбектер шегіне тең болуы.

4. Тізбектерге қолданылатын арифметикалық амалдар – нөмірлері бірдей жинақталатын тізбектер мүшелері үшін арифметикалық амалдар орындалып, нәтижесінде мәні тізбек мүшелеріне сол амал орындалған сол нөмірлі жаңа тізбек құрылады да, оның шегі бастапқы шектерге дәл сол арифметикалық амалдарды қолдану нәтижесіне тең болады.

§5. ШЕКТЕРІ БАР ЕКІ ТІЗБЕККЕ АМАЛДАР ҚОЛДАНУ НӘТИЖЕСІНДЕ ПАЙДА БОЛҒАН АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТАР, ОНЫҢ ТҮРЛЕРІ ЖӘНЕ АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТЫ АШУ ЕСЕПТЕРІ

1. Нақты сандарға ұмтылатын екі тізбектің қатынасы болатын сандық тізбекті шек тұрғысынан толық зерттеу – алымындағы тізбектің шегі нөлге тең, бөліміндегінікі нөлден өзгеше болғанда қатынас түрінде анықталған тізбек шегі нөлге тең болуы, алымындағы тізбектің шегі нөлден өзгеше бөліміндегінікі нөлге тең болғанда қатынас түрінде анықталған тізбек шегі шексіздікке тең болуы, алымындағы тізбектің де, бөліміндегі тізбектің де шегі нөлге тең болғанда қатынас түрінде анықталған тізбек шегі жайлы алдыңғы екі жағдайдағыдай нақтылы нәтижелі мәлімет бере алмау.

2. $\frac{0}{0}$ түрінде анықталмағандық және "Анықталмағандықты ашу" есептері – алымындағы тізбектің де, бөліміндегі тізбектің де шегі нөлге тең болғанда қатынас түрінде анықталған тізбек шегі барлық мүмкін алдын ала берілген ақырлы не ақырсыз сан, не ешқандай шегі жоқ болу жағдайларының әрқайсысының орындалуы мысал арқылы көрсетіледі де, нақты алынған қатынас үшін солардың қайсысы екендігін анықтау "анықталмағандықты ашу" атты мәселені құрады.

3. Анықталмағандықтардың түрлері және "Анықталмағандықты ашу" жалпы мәселелері – $\frac{0}{0}$ анықталмағандығы тәрізді нәтиже алдын ала белгісіз болатын $(+\infty)-(+\infty)$, $0\cdot(+\infty)$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$, 1^{∞} түріндегі анықталмағандықтар және осы шек бар ма әлде жоқ па, бар болса мәні қандай дегенді анықтау "анықталмағандықты ашу".

§6. ӘРҚАШАНДА БІРЖАҚТЫ, АҚЫРЛЫ НЕ АҚЫРСЫЗ ШЕГІ БАР МОНОТОНДЫ ТІЗБЕКТЕР

1. Монотонды тізбектер – тізбек нөмірлерінің үлкеніне үлкен мәні не біріңғай кіші мәні сәйкес келуіне қарай қатаң өспелі не қатаң кемілелі болу қасиеттері және де осы реттік қатынастармен қоса мәндері тең де болуы мүмкін кемімейтін және өспейтін деп аталатын сандық тізбектер.

2. Монотонды тізбектің шегінің бар болуы туралы теорема – кемімейтін (өспейтін) тізбектің шегі бар және ол тізбек мәндерінен құрылған жиынның супремумына (инфимумына) теңдігі, сондықтан жоғарыдан (төменнен) шенелген және шенелмеген болуына қарай нақты санға не ақырсыз $+\infty(-\infty)$ санына тең болуы.

3. Жинақталатын монотонды тізбектердің ерекше мысалдары – дөңгелек ауданының іштей сызылған дұрыс көпбұрыштар аудандарының нақты мәнді шегі арқылы бейнеленуі, факториал тізбектің өсуі көрсеткіштік тізбегінің өсу жылдамдығынан "шаңына да ілестірмей" ақырсыз жылдам болуы, оң санның квадраттық түбіріне кеми көрсеткіштік жылдамдықпен ұмтылатын тізбек.

4. Сегменттер ұясы туралы теорема монотонды тізбектердің шектерінің геометриялық бейнесі ретінде – бірінің ішіне бірі орналасқан сегменттердің сол жақ шектік нүктелері кемімейтін, ал оң жақ шектік нүктелері өспейтін тізбектер құрады да, әрқайсысының нақты мәнді шектері бар болады және сегмент ұзындықтарынан құралған тізбектің шегі нөл болғандықтан олардың шектері өзара тең болып, дәл сол шек мәні нүкте ретінде осы сегменттердің әрқайсысында жатуы.

5. Нақты санның ондық бөлшек түрінде жазылуын сегменттер ұясы арқылы сипатталуы – ондық бөлшек түрінде жазылған санның әр разряды бойынша сегмент құрылып, сол сегменттер ұясы жазылған санды қамтуы.

§7. МАТЕМАТИКАНЫҢ ЖӘНЕ ЖАРАТЫЛЫСТАНУДЫҢ НЕГІЗІН ҚҰРАЙТЫН БЕС САННЫҢ БІРІ – e САНЫНЫҢ АНЫҚТАМАСЫ, РАЦИОНАЛ ЕМЕС САН БОЛУЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ КЕЗ КЕЛГЕН ДӘЛДІКПЕН РАЦИОНАЛ САНМЕН ЖУЫҚТАУ ФОРМУЛАСЫ

1. e санының анықтамасы – алдын ала өзгеру тәртібі көрінбейтін, жалпы мүшесі $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ өспелі, шенелген тізбектің нақты мәнді шегі ретінде.

2. Өзгеру тәртібі түсініксіз $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ тізбек шегі ретінде анықталған e санына көрнекі ақырлы қосындының төменнен ақырсыз жақындауы және сол екі санның бір-бірінен ауытқуының жоғарыдан айқын түрде бағалануы – жалпы мүшесі факториалдарға кері сандардың ақырлы $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ қосындысының e санына кіші болып ұмтылуы және әр n қосылғышты қосындының ерекше e санынан жақындығының $\frac{1}{n!n}\,(n=1,2,\ldots)$ санынан кіші болуы.

3. Жай бөлшек түрінде жазылмайтын рационал емес сан әріппен белгіледі, соның ішінде теория мен ғылыми есептеуде өз орны бар санның Эйлердің (Euler) құрметіне e әрпімен белгіленуі және оны кез келген дәлдікпен жуықтайтын рационал санның табылуы – $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\cdot n} = r_n + \frac{\theta_n}{n!\cdot n}\,(0<\theta_m<1)$ теңдігінен кері жору тәсілімен e саны иррационал сан екендігі

көрсетіледі де, осы формуланың өз сипатынан-ақ кез келген дәлдікпен e санына жақын $r_n = \frac{n!+(n-1)!+...+1!}{n!}$ түріндегі рационал санды беруі.

4. Негізі $e > 1$ саны болатын натурал логарифм – ондық жүйемен байланысты $lgx := \log_{10} x$ тәрізді ерекше e негізді $lnx := \log_e x$ логарифмі.

5. Жаратылыстанудың ерекше сандарының бірі e саны төңірегіндегі зерттерлер мен олардың түрлері – 1^∞ түріндегі $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ анықталмағандықтың монотонды тізбектің шегі бар болуы туралы теоремамен ашылуы және бар болу деңгейінде анықталған иррационал e санын кез келген дәлдікпен $e-(1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!})\leq\frac{1}{n!\cdot n}$ арқылы қолданысқа жарамды рационал санмен жуықтау.

§8. САНДЫҚ ТІЗБЕКТЕРДІҢ ТІЗБЕКШЕЛЕР МЕН ДЕРБЕС ШЕКТЕР

1. Сандық тізбектің жалпы алты түрдегі шегі бар болуының не ешқандай да шегі болмауы мәселесінің негізгі зерттеу құралы болып табылатын оның тізбекшесі деп аталатын тізбегі және де дербес шегі атты шегі – алдын -ала берілген сандық тізбектің қайсібір өспелі оң бүтін мәндерінен түсірілген өспелі нөмерлерге сәйкес мәндерінің өздері тізбекше деп аталатын жаңа тізбек құрады да, сол тізбектің шегі бар болған жағдайда оның ақырлы не ақырсыз мәні бастапқы сандық тізбектің дербес шегі деп аталады.

2. "Тізбекше-дербес шек" түсініктері "Сандық тізбек шегі" теориясына ешқандай жаңалық әкелмейтін дербес шектер мәндері алдын-ала белгілі сандық тізбектер – Шегі бар сандық тізбектің әр тізбекшесінің сол ақырлы не ақырсыз санға тең шегі бар болуымен жоғарыдан (төменнен) шенелмеген тізбектің әрқашанда ақырсыз $+\infty(-\infty)$ дербес шегі бар болуы.

3. Сандық тізбектің барлық дербес шектерінен құрылған жиынының мүмкін құрылымдары – алдын-ала берілген шектің мүмкін алты түрі де және олардың әрбір жиыншасы дербес шектері дәл сол жиындар болатын сандық тізбектердің бар болуы, сондай-ақ барлық дербес шектер жиыны сегмент болатын сандық тізбегі мысалы мен әр интервалдың ондай қасиетте бола алмайтыны туралы мәлімет.

§9. ӘР САНДЫҚ ТІЗБЕКТІҢ ЕҢ ҮЛКЕН ЖӘНЕ ЕҢ КІШІ ДЕРБЕС ШЕГІ БАР БОЛУЫ ТУРАЛЫ БОЛЬЦАНО-ВЕЙЕРШТРАСС ТЕОРЕМАСЫ ЖӘНЕ СОЛАРДЫҢ ТІЗБЕК МҮШЕЛЕРІ АРҚЫЛЫ СИПАТЫ

1. Сандық тізбегі зерттеудегі "тізбекше-дербес шек" әдісін мазмұнды ететін әр шенелген сандық тізбектің нақты сан болатын кемінде бір дербес шегінің бар болуын беретін Больцано-Вейерштрасс теоремасы – шенелген сандық тізбектің дербес шектерінің ішінде ең үлкен және ең кіші дербес шегі бар болуын, демек екеуі тең болғанда бір, өзара тең емес болғанда кемінде екі дербес шектің бар болуын қамтамасыз ететін сегменттер ұясы туралы теореманы тізбек мүшелерін қамтитын сегментті тең бөле отырып, сегменттер ұясын құру барысында тізбектің ақырсыз мүшелері тек біреуінде жатса, мүшелердің ақырсыз саны жатқан бөлігін, ал екі бөлігінде де жатса, тек оң (сол) жақ бөлігін ала отырып қолданғанда, жоғарғы (төменгі) шек деп аталатын ең үлкен (кіші) дербес шекке келуі.

2. Қайсыбір нақты сан берілген сандық тізбектің (шенелген не шенелмеген) ең үлкен (ең кіші) дербес шегі болуы үшін сол тізбекке және санға қойылатын шарттар – нақты сан берілген тізбектің дербес шегі болуымен қатар, одан үлкен (кіші) дербес шек болмайтындығын қамтамасыз ететін алдын ала берілген одан үлкен (кіші) кез келген сан үшін белгілі бір нөмірінен бастап тізбек мүшелерінің барлығы сол саннан кіші (үлкен) болуы.

3. Сандық тізбектің нақты мәнді жоғарғы (төменгі) шектерінің толық сипаттамасы – нақты мәнді тізбек шегі анықтамасындағы жоғарғы (төменгі) жақ теңсіздігі белгілі бір нөмірден бастап бүкіл тізбек мүшелері үшін орындалса, төменгі (жоғарғы) теңсіздік нөмірлері жоғарыдан шенелмеген мүшелер үшін орындалуы.

4. Шенелген тізбектердің ең үлкен (ең кіші) дербес шектерінің тізбек мүшелерінің inf-sup (sup-inf) бойынша тікелей бейнеленуі – әр оң бүтін санды нөмір үшін нөмірлері одан кем емес барлық тізбек мәндерінен құрылған жиынның супремумдары (инфимумдары) нақты мәнді өспейтін (кемімейтін) тізбек құрып, шегі сол сандардың инфимумына (супремума) тең жоғарғы (төменгі) шектің дәл өзі болуы.

5. Жоғарғы шектің $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n = \inf\sup x_n$ және төменгі шектің $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} inf x_n = \sup\inf x_n$ белгілеулерінің мағыналары.

6. Больцано-Вейерштрасс теоремасының жалпы түрдегі қорытынды оқылуы – кез келген шенелген де, шенелмеген де сандық тізбектің ең үлкен және ең кіші дербес шектерінің бар болуы.

§10. КОШИ КРИТЕРИЙІ – САНДЫҚ ТІЗБЕКТІҢ НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІ БАР БОЛУЫН ОНЫҢ ІШКІ ҚҰРЫЛЫСЫ АРҚЫЛЫ БЕЙНЕЛЕНГЕН ҚАЖЕТТІ ЖӘНЕ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ САПАЛЫҚ ТАЛҚЫЛАУЛАРЫ

1. Коши шарты мен Коши тізбегі – нақты мәнді шегі бар тізбектің анықтамасынан шығатын тізбек ішкі құрылымын белгілі бір нөмірінен бастап кез келген екі мүшесінің бір-біріне жақын болуымен сипаттайтын шарт пен сондай қасиетті тізбек аталымы.

2. Сандық тізбектің шек мәнін қатыстырмай, тек қана тізбек мүшелерінің ішкі құрылысы арқылы нақты мәнді шегі бар болуының қажетті және жеткілікті шартын беретін Коши критерийінің оқылуы және дәлелдемесі – барлық сандық тізбектерден мүшелерінің бір-біріне Коши шарты атты ақырсыз жақындық қасиетімен ерекшеленетін нақты мәнді шегі бар тізбектерді бөліп алу.

3. Коши критерийінің жинақталатын тізбектер теориясындағы орны – нақты мәнді шегі бар тізбек анықтамасындағы шарттардың барлығы тікелей сол нақты мәнді шек төңірегінде болғанда, Коши критерийінде нақты мәнді шек бар екендігі мәні көрсетілмей, оның мүшелерінің құрылымы арқылы берілуі; Коши критерийінің құндылығы кез келген нақты мәнді шегі бар тізбекке арналған жалпылығы болады да және құндылығымен қатар жүретін кемшілігі Коши шартының орындалуының техникалық тұрғыдан тексеруі қиындығында, ал монотонды тізбек үшін нақты мәнді шек бар болуының кемшілігі мен құндылығы оның қолдану аясы тек монотонды тізбектерге арналған тар болуы мен тексеруі жеңіл болуында; Коши шартының орындалмауы тізбектің нақты мәнді шегі болмауын беріп, қалған екі – шегі бар және ол ақырсыз болуы не мүлдем шегі болмауы жағдайларының біріне әкелуі.

4. Объектінің таза "Бар болу теоремасы" мен "Құрылымдық теоремасы" сипатындағы тұжырым түрлері – Коши критерийі тек тізбектің нақты мәнді шегі бар болуын берсе, монотонды тізбектің шегі туралы теоремада шектің дәл мәні тікелей тізбек мүшелері арқылы sup-inf бойынша құрылады.

§11. ЖОҒАРҒЫ ШЕК ДЕП АТАЛАТЫН ЕҢ ҮЛКЕН ЖӘНЕ ТӨМЕНГІ ШЕК ДЕП АТАЛЫН ЕҢ КІШІ ДЕРБЕС ШЕКТЕРДІҢ ЖИНАҚТАЛАТЫН ДА, ЖИНАҚТАЛМАЙТЫН ДА БАРЛЫҚ САНДЫҚ ТІЗБЕКТЕРДІҢ ҚҰРЫЛЫСЫ МЕН ҚАСИЕТТЕРІН СИПАТТАУЫ

1. Тізбектің "Жай", жоғарғы және төменгі нақты мәнді шектерінің өзара байланысты $\varepsilon - K(\varepsilon)$ тіліндегі анықтамаларының жинақталған арақатынастары.

2. Жоғарғы және төменгі шектерді $0,1,0,1,...$ тізбек мысалында есептеу үлгісі – аталмыш тізбектің 0 мен 1 сандарына тең екі дербес шектері бар екендігін және одан басқа сан дербес шек бола алмайтындығын көрсетіп, яғни $\{0,1\}$ сандық жиыны барлық мүмкін дербес шектер жиыны болып, 0 саны ең кіші, 1 саны ең үлкен дербес шек екендігін алу.

3. Тізбектің нақты мәнді шегі бар болуының және болмауының дербес шектер тіліндегі критерийлері – сандық тізбектің нақты мәнді шегі бар болуына оның төменгі және жоғарғы шектері нақты мәнді, өзара тең болуының және тізбектің нақты мәнді шегі болмауына өзара бөлек екі дербес шектің бар болуының қажеттілігі мен жеткіліктігі, сонымен қатар шенелген тізбектің ақырлы да, ақырсыз да, бір сөзбен айтқанда ешқандай шегінің болмауы үшін төменгі шектің жоғарғы шектен кіші болуының қажеттілігі мен жеткіліктігі.

4. Тізбек шегі бар және $+\infty,-\infty$ не ∞ ақырсыз сандардың біріне тең болуының және ақырлы да, ақырсыз да, бір сөзбен айтқанда ешқандай шегі болмауының дербес шектер тіліндегі критерийлері – сандық тізбектің шегі ақырсыз болуы үшін оның әр дербес шегі $+\infty,-\infty,\infty$ ақырсыз сандарының біріне тең болуының және тізбектің ешқандай шегі болмауы үшін кемінде біреі ақырлы екі әртүрлі дербес шектерінің бар болуының қажеттілігі мен жеткіліктігі.

5. Коши критерийінің дербес шектер тіліндегі тағы бір дәлелдеуі – Коши шарты орындалатын тізбектен Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша жоғарғы және төменгі шектерге ұмтылатын тізбекшелер табылып, шектің тікелей

анықтамасынан шыққан нақты мәнді жоғарғы және төменгі шектер теңдігінен нақты мәнді шегі бар болуының дербес шектер тіліндегі критерийлеріне келуі.

6. Теңсіздікте жоғарғы және төменгі шектерге көшу туралы теорема – сандық тізбектің жоғарғы және төменгі шектерінің өзара жеке тізбек мүшелері арасындағы реттік қатынасты сақтауы.

7. Жоғарғы және төменгі шектер арқылы тізбектің шенелгендік қасиеттерінің пара-пар бейнелеулері – тізбектің мәндер жиынының жоғарыдан, төменнен және жалпы шенелгендігінің не шенелмегендігінің сәйкес жоғарғы, төменгі және абсолют шамаларынан құрылған тізбектің жоғарғы шектерінің ақырлы болуы немесе $+\infty, -\infty, \infty$ ақырсыз сандарына тең болуы арқылы жазылуы.

8. Шенелген сандық тізбектің оның жоғарғы және төменгі шектері негізіндегі өзгеру заңдылығының аналитикалық құрылысы мен геометриялық сипаттамасы – тізбектің жоғарғы және төменгі шектерінен жасалған жолақты сәл кеңейткенде белгілі бір нөмірден бастап, мүшелерінің барлығы осы кеңейтілген жолақта жатады да, оны сәл тарылтқанда қандай оң сан алсақ та, одан үлкен нөмірлі мүшелердің міндетті түрде жолақ астына да, үстіне де шығып кетуі.

§12. ТІЗБЕК ДЕРБЕС ШЕГІНІҢ МАЗМҰНЫН АШАТЫН МАҢАЙЛАР ТІЛІНДЕГІ ЭКВИВАЛЕНТТІ АНЫҚТАМАЛАРЫ ЖӘНЕ СОНЫҢ НЕГІЗІНДЕГІ БОЛЬЦАНО-ВЕЙЕРШТРАСС ТЕОРЕМАСЫНЫҢ ТАҒЫ БІР ДӘЛЕЛДЕУІ

1. Сандық тізбектің нақты мәнді дербес шегінің тағы екі анықтамасы – тізбектің берілген санға ұмтылатын тізбекшесі бар болуымен қатар нақты санның алдын ала алынған кез келген маңайында қалауымызша үлкен нөмірлі тізбек мүшесі жатуы не оған пара-пар тізбектің ақырсыз көп мүшелерінің жатуы.

2. Дербес шектің қабылданған үш анықтамаларының эквиваленттілігі – нақты сан тізбектің қандай да бір анықтама бойынша дербес шегі болғанда, онда қалған екеуі бойынша да дербес шегі болуы.

3. Бір ұғымның бірнеше эквивалентті анықтамаларының пайдалылығы – шенелген тізбектер үшін ең үлкен және ең кіші дербес шегі бар болуы жайлы Больцано-Вейерштрасс теоремасының дербес шектер қасиеттерін бойына сіңірілген эквивалентті анықтамалар арқылы мәселе мағынасын ашатын тағы бір дәлелдемесі.

III ТАРАУ. САНДЫҚ ФУНКЦИЯ ШЕКТЕРІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

§1. НАҚТЫ МӘНДІ АЙНЫМАЛЫНЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ НЕГІЗГІ АНЫҚТАМАЛАРЫ МЕН ҚАСИЕТТЕРІ

1. Нақты мәнді айнымалының нақты мәнді функциясы-аргументі де, мәні де нақты сан болатын функция.

2. Координаталық жазықтық атты жазықтықтағы тік бұрышты координаталық жүйе – жазықтықтағы әр геометриялық нүктенің координаталары деп аталатын реттелген екі нақты санмен өрнектеу арқылы жазықты арифметикаландыру.

3. Функция графигінің жиын түріндегі аналитикалық анықтамасы мен функция графигі деп аталатын жазықтықтағы фигура ретіндегі геометриялық бейнесі түрінде берілген өзара бөлек екі сипаттамасы – сәйкес x аргументі функция анықталу жиынында өзгергендегі $(x, f(x))$ реттелген нақты сандардан құрылған барлық жұптар жиыны және координаталық жүйедегі барлық $(x, f(x))$ геометриялық нүктелерден салынған сызық сурет.

4. Квадраттық функциялар мысалындағы функциялар графиктерінің түрлендіру үлгілері – Ox өсінің бойымен оңға не солға жылжыту, Oy өсінің бойымен жоғары не төмен жылжыту, Ox және Oy өстерінің бойымен созу не сығу.

5. Функция графиктерінің түрлендірулері – Ox өсінің бойымен оңға не солға жылжыту, Oy өсінің бойымен жоғары не төмен жылжыту, Ox және Oy өстерінің бойымен созу не сығу, функция модулінің графигі.

6. Функция графигінің математикадағы орны – математикалық теорияны графиксіз де құруға болуы және графигі салынбайтын функциялар.

7. Функция графигінен көрінетін геометриялық қасиеттердің аналитикалық оқылулары – сандық функцияның монотондылығы, дөңестілігі, иілу нүктесі, жұп және тақтылығы, периодтылығы, шенелгендігі, кері функция.

8. Сандық функцияның супремумы және инфимумы – функция ұғымының табиғаты ереже, ал супремум мен инфимум ұғымдары тек сандық жиын үшін ғана анықталғандықтан бір қарағанда "функцияның супремумы мен инфимумы" сөз тіркесі іштей қайшылыққа келетіндей болғанымен, олар, ширатып айтқанда, функцияның барлық мәндерінен құрылған сандық жиынның сәйкес супремумы мен инфимумы болады.

9. Тригонометриялық функциялардың координаталық жазықтықтағы бірлік шеңбер арқылы анықталу ережелері – радиусы бірге тең центрі координаталар басында жатқан бірлік шеңбердің бойынан әрбір нақты санға бір нүктені сәйкес қою үрдісі, сол нүкте-векторы мен Ox өсінің арасындағы бұрыштың радиандық және градустық өлшемдер жүйесін енгізіліп, сол өлшеу жүйесінің бірінен екіншісіне көшу формулары, бірлік шеңбер бойындағы ұзындығы x санына тең доғаның ұшындағы нүктенің абциссасы бойынша $cosx$, ординатасы бойынша $sinx$ мәндерін, сол анықталған $cosx$ пен $sinx$ мәндерінің қатынасы арқылы tgx және $ctgx$ мәндерін анықтау және оны беретін геометриялық құрылымды суреттеу.

10. Бірлік шеңбер негізінде тригонометриялық функциялар периодтылығының геометриялық түсіндірмесі – нақты сандарды бірлік шеңбер бойына орналастыру барысында бір-бірімен 2π еселі айырмашылықты сандар бір нүктеде беттесуінен.

11. Тригонометриялық функциялардың бірлік шеңбер негізінде берілген анықтамаларының тікбұрышты үшбұрыш арқылы берілген анықтамалармен пара-парлығы.

12. Тригонометриялық функциялардың геометриялқы сипаттағы анықталу ережесінен тікелей оқылатын негізгі қасиеттері және графиктерінің эскиздері – $cosx$ функциясының жұп, қалғандарының тақтылығы, $cosx$ пен $sinx$ функцияларының шенелгендігі, тригонометриялық функциялардың периодтылығы, монотондылық аралықтары және осы қасиеттердің барлығын функция графиктерінің эскиздерінде жинақтау.

13. Кері тригонометриялық функциялар – тригонометриялық функциялардың қатаң монотондылық аралықтарының бейнесінде анықталған тригонометриялық кері функцияларды анықтау және әрқайсысының алдына "арк" қосымшасын қосу арқылы кері функцияларына сәйкес атау беру.

14. Негізгі тригонометриялық теңбе-теңдіктер мен формулалар – Пифагор теоремасы мен бірлік шеңбер бойынша анықталған тригонометриялық функциялардың анықтамалары бойынша $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ негізгі тригонометриялық тепе-теңдігін дәлелдегендей аргументі $x+y$ не $x-y$ болатын қосу формулалары деп аталатын өрнекті аргументтері x және y болатын тригонометриялық функциялар арқылы бейнелеу, қосымша бұрыштар үшін формулалар, қос және жарты бұрыштар формулалар, косинустар мен синустардың қосындысы мен айырымы, аргументтері бірдей тригонометриялық функциялар арасындағы байланыстардан тұратын 50-ден аса формулалардың бірінен кейін бірін тізбелей дәлелдеу.

15. Негізгі элементар функциялар атты топқа жинақталған дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық және кері тригонометриялық функциялар – сан ретінде анықталған дәреже, логарифм ұғымдары арқылы әрқайсысы мағыналы болатын жиындарда сәйкес элементтерін айнымалы ретінде алып, сол ережелермен жаратылыстанудың әртүрлі өзгеру жылдамдықтарын сипаттайтын алғашқы үш функциямен бірге бірден функция ретінде анықталған тригонометриялық және кері тригонометриялық функциялар.

16. Элементар функциялар – бес түрлі негізгі элементар функцияларға бес түрлі жаңа функция құру ережелер ақырлы рет қолданысы.

17. Элементар функцияның әрқаншанда формула түрінде жазылуы және сол формуладан функцияны анықтайтын ереженің оқылуы – ережені қадам-қадаммен алгоритм түрінде жіктеу.

18. Элементар функцияның жазылуынан оның анықталу жиынының табылу – формуладағы алгоритмнің барлық қадамдары орындалатындай аргументтің мәндерінен құрылған жиынның жазылуы.

19. Элементар функцияның төңірегіндегі қосымша мәліметтер – элементар функция берілгенде оның ережесі мен анықталу жиыны туралы ештеңе айтылмайды, элементар функция әрқашан формула түрінде жазылғанымен, әр формуланың функция бола бермеуі, $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ – элементар функция, функция жазылуында оның ережесі мен анықталу жиыны бар болғандықтан дәлме-дәл оқылу тиістілігі.

20. Анықталу жиындары қиылыспайтын функциялардан құрылған анықталу жиыны берілген функциялардың анықталу жиындарының бірігуі болатын жаңа функция құру әдісі – құрылған функцияның элементар да, элементар емес те болуы, қолданыста функцияның анықталу жиыны бір элементті де болу мүмкіндігі.

21. Элементар функциялардың негізгі топтары – алгебралық көпмүшелік пен олардың қатынасынан тұратын рационал функциялар, рационал функциялар мен көрсеткіші рационал болатын дәрежелік функцияларға төрт арифметикалық және күрделі функция құру амалдарын ақырлы рет қолданудың нәтижесі болатын алгебралық функциялар және алгебралық емес, функцияның x аргументіне тек қана төрт арифметикалық және кері функция құру амалдарын қолдану арқылы беруге болмайтынын білдіретін трансцендентті функциялар.

§2. САНДЫҚ (НАҚТЫ МӘНДІ) ФУНКЦИЯНЫҢ ТӘУЕЛСІЗ АЙНЫМАЛЫСЫ (АРГУМЕНТІ) НАҚТЫ САНҒА ҰМТЫЛҒАНДАҒЫ АҚЫРЛЫ (НАҚТЫ МӘНДІ) ШЕГІНІҢ АНЫҚТАМАСЫ

Сандық функцияның ақырлы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\,(a\in R, b\in R)$ шегінің " $\varepsilon - \delta(\varepsilon)$ " маңайлар тіліндегі анықтамасы – тәуелсіз айнымалы функцияның анықталу жиынындағы мәндердің бәрін қабылдап, a санына бірте-бірте ақырсыз жақындаған сайын, оған тәуелді сәйкес мәні b санына ақырсыз жақындай түседі деген айтылуынан өз-өзінен туындайтын дұрыс елеске формалді математикалық өрнектегенде керісінше алдымен аргументке тәуелді мәндерінің функция шегіне ε жақындығы тағайындалып, артынша сол маңайда жататын мәндердің аргументтің a нүктесінің ойылған маңайында жататындығы жайлы шарт қойылып, осы реттегі екі теңсіздік " $\varepsilon - \delta(\varepsilon)$ " тіліндегі шек анықтамасын құрауы.

2. Сандық функция шегінің анықтамасын сөзбе-сөз тікелей қолдану үлгісі ретіндегі алғашқы мысалдар – тұрақты, дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік функциялардың нақты мәнді нүктедегі шегін табу.

3. Сандық функцияның нақты мәнді шегінің нақты мәнді нүктедегі " $\varepsilon-\delta$ " тіліндегі анықтамасының бастапқы талқылаулары. Ойылған маңай. Шектік нүкте – функция шегін анықтау кезінде функция сол нүктеде анықталған ба, жоқ па, анықталса мәні функция шегіне қалай әсер етеді деген өзінен-өзі туындайтын сұрақтарға шек анықтамасындағы ойылған маңай функциясының сол нүктедегі шегі мен функция жағдайының байланыссыздығын беруі; шек анықтамасы мағыналы болу талабында кез келген ойылған маңайда анықталу жиынының ең болмағанда бір нүктесі жатуы үшін шек ұғымының анықталу жиынының шектік нүктелері үшін ғана анықталуы; функцияның нақты мәнді нүктеде шегі бар болуы, бар болса оның мәні әр ойылған маңайымен берілген сол нүктесінің "қасындағы" функцияның құрлысына тәуелді болатын "ұжымдық" қасиетті және де сонымен бірге әр жеке алынған нүктелерге тәуелді еместігі; шектің анықтамасында тек функция мәндері шегіне жақын болуын қамтамасыз ететін аргумент ұмтылатын нүкте маңайын табу талап етілсе, кейін ол маңайды қалауымызша кішірейту мүмкіндігі және сол табылатын маңайдың алдын ала берілген оң санмен қоса, функция мен шек ұмтылатын нүктеге де тәуелділігі.

§3. НАҚТЫ МӘНДІ ФУНКЦИЯНЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІНІҢ НАҚТЫ МӘНДІ НҮКТЕДЕГІ ТІЗБЕКТЕР ТІЛІНДЕГІ АНЫҚТАМАСЫ. ЕКІ АНЫҚТАМАНЫҢ ЭКВИВАЛЕНТТІЛІГІ. ЕКІ ТАМАША ШЕК

1. Сандық функцияның ақырлы шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасы – тізбек шегі теориясын функция шегін анықтауға қолдану мүмкіндігі.

2. Сандық функцияның ақырлы шегінің маңайлар және тізбектер тіліндегі анықтамаларының эквиваленттілігі – бір ұғымның өзара пара-пар әртүрлі анықтамалармен бейнеленуі.

3. Анықтамадағы шарттарды оның мазмұнын жоғалтпай азайту – функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасындағы тізбектерге қойылатын шартты жеңілдетіп, анықтама мазмұнын сақтап, монотонды тізбектермен шектелу.

4. Екі тамаша шек – бірінші тамаша шек атты $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық болатын $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1-0$ шегін функция шегінің маңайлар тіліндегі анықтамасымен және екінші тамаша шек деп аталатын 1^{∞} анықталмағандығы болатын $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ шегін тізбектер тіліндегі анықтамамен дәлелдеу.

§4. НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІ БАР НАҚТЫ МӘНДІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ШЕК ТӨҢІРЕГІНДЕГІ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Сандық функцияның локалді шенелгендігі және функцияның нақты мәнді шегі бар нүктесінің сол қасиетті нүкте болуы – функцияның жиында шенелу қасиеті орындалатындай нүктенің маңайының не ойылған маңайының табылуы және функцияның нүктеде локалді шенелген болуы сол нүктеде нақты мәнді шегінің бар болу анықтамасының салдары ретінде.

2. Нөлден өзгеше нақты мәнді шегі бар функцияның шек алынып тұрған нүктенің қайсыбір ойылған маңайында шек таңбасы сақтауы – шектің таңбасы оң (теріс) болса, сол нүктенің қайсыбір ойылған маңайынында жататын анықталу жиынының нүктелеріндегі мәні оң (теріс) болуы, сонымен бірге функцияның дәл сол нүктедегі мәні бар болғанда оның бұл заңдылыққа бағынбай, өз берілуі бойынша таңбасы шек таңбасымен бірдей болуы да, болмауы да мүмкіндігі.

3. Анықталу жиындары бірдей функцияларға төрт арифметикалық амалды қолданғанда шектің сол арифметикалық амалдарды сақтауы – анықталу жиынының шектік нүктесі болатын нүктеде нақты мәнді шегі бар саны ақырлы функцияларға арифметикалық амалдар орындағанда шыққан функцияның шегі бар және оның бастапқы функция шектеріне дәл сол арифметикалық амалдарды қолдану нәтижесіне тең болуы.

3. Күрделі функцияның шегі – ішкі функция шегінің мәніне тең нүктеде сыртқы функцияның шегі сол нүктедегі мәніне тең болғанда олардан құрылған күрделі функцияның ішкі функция ұмтылатын нүктедегі шегінің сол мәнге тең болуы және де осы тұжырым сақталуы үшін сыртқы функцияға қойылған шарттың міндеттілігі.

4. Функцияның бір ғана нақты мәнді шегі болуы туралы теорема – сандық функцияның нүктеде екі не одан да көп нақты мәнді шегі бола алмауы.

5. Сандық функцияның нақты мәнді шегінің жалпы анықтамасы және дәлелденген қасиеттердің жалпы жағдайға таралуы – аргументі нақты мәнді нүктеге жай ұмтылумен қатар, сол жағынан, оң жағынан, $+\infty, -\infty$ ақырсыз сандарына және ∞ ұмтылылғандағы функцияның нақты мәнді шегінің 6 түрлі анықтамалары.

§5. МОНОТОНДЫ ФУНКЦИЯНЫҢ АНЫҚТАЛУ АРАЛЫҒЫНЫҢ ӘР ШЕКТІК НҮКТЕСІНДЕ БІРЖАҚТЫ ШЕГІНІҢ ӘРҚАШАНДА БАР БОЛУЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ФУНКЦИЯ МӘНДЕРІ АРҚЫЛЫ БЕЙНЕЛЕНУІ

1. Шенелген монотонды функцияның анықталу аралығының әр шектік нүктесінде нақты мәнді шегінің әрқашанда бар және оның тек қана біржақты болуы – алты мүмкін жағдайдан $+\infty, \infty$ пен нақты мәнді санға ұмтылғанда оң және сол жақты шектердің бірі ғана болып, ∞ пен жай шектің болмауы және сол біржақты шектердің дәл мәнінің функция өспейтін және кемімейтін болуына байланысты геометриялық түрде көрнекі функция мәндерінің инфимумы мен супремумы арқылы бейнеленуі.

§6. НАҚТЫ МӘНДІ ФУНКЦИЯНЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ НҮКТЕДЕ НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІ БАР БОЛУЫН ОНЫҢ ІШКІ ҚАСИЕТТЕРІ АРҚЫЛЫ БЕРЕТІН КОШИ КРИТЕРИЙІ

1. Коши критерийі – сандық функцияның шек мәнін қатыстырмай, тек қана функция мүшелерінің ішкі құрылысы арқылы нақты мәнді шегі бар болуының қажетті және жеткілікті шарты.

2. Қажеттілігі мен жеткіліктілігі бірдей салмақтағы Коши критерийінің дәлелдеуі – критерий қажеттілігінің нақты мәнді функция шек анықтамасынан ғана тікелей шығуы және оның терең дамытылған тізбектер теориясын толық көлемде қажет ететін жеткіліктілігінің дәлелдеуімен толығуы.

§7. САНДЫҚ ФУНКЦИЯ ШЕГІНІҢ " $\varepsilon - \delta$ " МАҢАЙЛАР ТІЛІНДЕГІ ЖАЛПЫ $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ АНЫҚТАМАСЫ ЖӘНЕ ДЕ ОНЫҢ 36 ТҮРЛІ НАҚТЫЛАУЛАРЫ: НАҚТЫ МӘНДІ НҮКТЕДЕГІ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = q$, ШЕКСІЗДІКТЕГІ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q$ ЕКІЖАҚТЫ (ЖАЙ), БІРЖАҚТЫ $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = q$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = q$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = q$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = q$ ШЕКТЕРІ

1. Функция аргументі ұмтылатын 6 жағдайдың "Ойылған маңайлар" кестесі – нақты мәнді нүктеде нүкте маңайынан сол нүктенің өзін алып тастағанда шыққан жиындар: нүктенің жай ойылған маңайы сол нүктені қамтитын интервалдан сол нүктені алып тастағанда, оң және сол жақтағы интервалдардың бірігуі және олардың сәйкес оң және сол жақты ойылған маңайларды құрауы; маңай тек нақты сандардан құрылғандықтан ақырсыз нүктеде ойып алып тастайтын ешнарсе болмай ойылған маңай маңайдың дәл өзі болуы.

2. Сандық жиынның a (a - нақты сан), $a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty$ символдарымен берілген алты түрлі шектік нүктелері – ақырлы немесе ақырсыз нүктенің кез келген ойылған маңайында сол жиынның ең болмағанда бір не оған пара-пар шексіз көп нүктелерінің бар болуы және тізбектер тіліндегі оған пара-пар тұжырым.

3. Функция шегінің жалпы анықтамасы және оның 6 түрлі ойылған маңайыдағы аргументі мен 6 түрлі маңайдағы мәндерінің кестелері арқылы сипатталған 36 нақтылаулары – функция мәндері жататын кез келген алдын ала берілген маңайдағы аргументтердің барлығы жататын аргумент ұмтылатын нүктенің ойылған маңайының табылуы.

4. Функция шегінің барлық 36 түрінің бір-бірімен мүлдем байланыссыз еместігі – функция аргументі нүктеге жай ұмтылғанда табылған шекке тең оң және сол жақтан ұмтылғандағы шектің бар болуы, бірақ керісінше жағдайдың әрқашан орындала бермеуі, сонымен қатар функция мәнінің шегіне ұмтылуының нақтылауы болатын жоғарыдан және төменнен ұмтылатын шектің бар болуынан оған тең екі жақты шектің бар болуы және керісінше жағдайдың бұнда да әрқашан орындала бермеуі.

5. *Біріншісі маңайлар кестесі арқылы жазылып, екіншісі сол жазу негізінде математикалық анализді құру үстінде "атынан-затына", "затынан-атына" түрінде қолдану тәжірибесінен түсінетін, екі сатыдан тұратын* функция шегін толық түйсік деңгейінде игерудің нұсқамасы – функция шегінің жалпы анықтамасындағы аргумент ұмтылатын нүктенің 6 ойылған маңайы мен функция шегінің 6 түрлі маңайын сәйкес кестелерінен қою арқылы жасалған құраушылары бір-біріне тәуелсіз әртүрлі жұптардан 36 түрлі шек анықтамасының кванторлар тіліндегі жазылулары және солардың қарапайым тілмен оқылулары; осы нұсқамамен формалді жазылған шек анықтамасының тереңде жасырын жатқан мазмұнын шек игерудің бірінші сатысындағы жазылуларды дифференциалдық және интегралдық есептеулер теориясын құруда атауынан мазмұнына және керісінші, мазмұнынан атына бағытта қолданыс барысында бойға сіңіру.

6. Функцияның нақты мәнді шегінің " $\varepsilon-\delta$ " тіліндегі 6 түрлі анықтамалары – функция аргументі нақты мәнді нүктеге және жалпыланған шексіздікке жәй, оң, сол жақты ұмтылғанда функция шегінің бар және нақты мәнді болуы.

7. Функция аргументі нақты санға жай және біржақты ұмтылғандағы сандық функция шегінің " $\varepsilon-\delta$ " тіліндегі анықтамаларының барлық 18 түрі – функция аргументі нақты мәнді нүктеге оң жақты және сол жақты ұмтылғанда функция шегінің бар және нақты мәнді нүкте мен жалпы шексіздікке жәй ұмтылуы, сонымен қатар қалай ұмтылатындығын көрсететін төменнен, жоғарыдан ерекше ұмтылуы.

8. Үш түрлі ақырсыз нүктедегі шектің " $\varepsilon-\delta$ " тіліндегі анықтамаларының барлық 18 түрі – функция аргументі жалпыланған шексіздікке және оған оң жақты, сол жақты ұмтылғанда функция шегінің бар және нақты мәнді нүкте мен жалпы шексіздікке жәй ұмтылуы, сонымен қатар қалай ұмтылатындығын көрсететін төменнен, жоғарыдан ерекше ұмтылуы.

9. Функция шегінің " $\varepsilon-\delta$ " тіліндегі жалпы анықтамасы төңірегіндегі жағдайындағы қорытынды түйіндер.

10. Шектің " $\varepsilon-\delta$ " тіліндегі жалпы анықтамасының тікелей ішкі байланыстары – функция нүктеде жинақталуының біржақты шектер арқылы берілген қажетті және жеткілікті шарттары, аргумент ұмтылатын нүкте мен шек мәні 0 немесе шексіздік болғандағы функция шегінің арақатынастары.

11. Бұл оқулықта қолданылмайтын "ақырсыз аз" және "ақырсыз үлкен" шамаларға түсініктеме – нүктедегі шегі сәйкес нөл және шексіздік болғандағы атаулар және де функцияның бұл локалді қасиетін бүкіл функцияға таратқанда жаңылыс түсінік беру қаупі.

§8. САНДЫҚ ФУНКЦИЯ ШЕГІНІҢ ТІЗБЕКТЕР ТІЛІНДЕГІ ЖАЛПЫ АНЫҚТАМАСЫ, ОНЫҢ МАҢАЙЛАР ТІЛІНДЕГІ АНЫҚТАМАМЕН ЭКВИВАЛЕНТТІЛІГІ ЖӘНЕ ОСЫ ЕКІ ТІЛДЕГІ КЕРІ АНЫҚТАМАЛАРЫ

1. Функция шегінің тізбектер тіліндегі 36 түрді қамтитын жалпы анықтамасы – тізбек шегі теориясын функцияның ақырлы нүктедегі нақты мәнді шегін анықтауға қолдану мүмкіндігін қалған 35 жағдайға тарату.

2. Функция шегінің маңайлар " $\varepsilon-\delta$ " $\lim\limits_{x\to p} f(x)=q$ және тізбектер тіліндегі (т.т.) жалпы анықтамаларының эквиваленттілігі – функцияның ақырлы нүктедегі нақты мәнді шегі түсінігінің екі анықтамасының өзара пара-парлығын қалған 35 жағдайға тарату.

3. Функция шегінің " $\varepsilon-\delta$ " тіліндегі анықтамасына кері тұжырым – функция шегін игерудің бірінші қадамы болып табылатын кванторлар тіліндегі жазбаны ыңғайландырылған ойылған маңайда жату мен маңайға жатпау кестелері арқылы функцияның сол нүктеде шегі сол мәнге тең емес мағынасында кері анықтамасын жазу.

4. Функция шегінің $\lim\limits_{x\to p} f(x)=q$ тізбектер тіліндегі кері анықтамасы – a (a - нақты сан), $a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty$ мәніне мүшелері тең болмай ұмтылатын және оларға сәйкес функция мәндерінен құрылған тізбектің сондай алты мәннің біріне тең іздегілде шек мәніне ұмтылмайтындай аргументтер тізбегінің табылуы.

5. Функцияның ешқандай шегі болмауы – оның өзара бөлек кемінде бірі ақырлы болатын екі дербес шегі болуына эквиваленттілігі.

6. Функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасының монотонды тізбектер арқылы жеңітілген түрі – функция шегінің тізбектер тіліндегі жалпы анықтамасының мазмұнын сақтай отырып, анықтама талабын азайтып, тек монотонды тізбектермен шектелу.

§9. "АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТЫ АШУДЫҢ" ІШКІ МӘСЕЛЕЛЕРІ МЕН НЕГІЗГІ ТӘСІЛДЕР

1. Шектері белгілі функциялардан құрылған жаңа функцияның шегінің сол белгілі шектер арқылы өрнектелетін және «анықталмағандық» деп аталатын өрнектелмейтін жағдайлары – екі функция шегі ақырлы және ақырсыз болғанда функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижесінің шегі осы шектер арқылы дәл анықталатын шағын арифметика және оған енбейтін жағдайлардың анықталмағандықты ашу тақырыбының мазмұнын құрауы.

2. Функция шегі жағдайындағы анықталмағандықтар және "Екі тамаша шек" – екі функция шегі ақырлы және ақырсыз болғанда функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижесінің шегі бар ма, жоқ па, бар болса неге тең екендігінің «анықталмағандық» деп атала тын алдын ала белгісіздігі және $\frac{0}{0}$ мен 1^{∞} түріндегі анықталмағандықтарды ашу нәтижесі болатын $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ түріндегі бірінші және $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ түріндегі екінші "тамаша шектер" атты теңдіктер.

3. "Анықталмағандықтарды ашу" есептерін шешудің A - жіктеу, B - иррационалдықты жою, C - айнымалыны алмастыру, T - тепе-тең түрлендіру, E - e санынның анықтамасын пайдалану, L - логарифмнің $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$ қасиетін пайдаланудан тұратын негізгі тәсілдері – анықталмаған өрнек шегінің дәл мәнін табуда осы тәсілдердің бірін не бірнешеуін қолдану.

4. Ашылуы күрделі дәрежелік анықталмағандықтарды оған пара-пар ашылу тәсілдері айқын анықталмағандықтарға алмастыру – $0^0, \infty^0$ және 1^{∞} анықталмағандықтарына эквивалентті $0\cdot\infty$ анықталмағандығы мысалында.

5. "Анықталмағандықтарды ашу" тақырыбы бойынша тапсырма – A, B, C, T, E, L тәсілдерін қолдануға арналған есептерді құрастыру.

§10. САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ӘР НҮКТЕДЕГІ ЖОҒАРҒЫ ЖӘНЕ ТӨМЕНГІ ШЕКТЕРІ

1. Функцияның дербес шегі және оның эквивалентті анықтамалары – анықтамалардың әртүрін қолданатын дәлелдеу жолының бірінен-біріне көшетін бөлігін өзіне алатын функция дербес шегінің тізбектер және маңайлар тіліндегі пара-пар анықтамалары.

2. Сандық функцияның барлық дербес шектерінен құрылған жиын және оның мүмкін құрылымдары – барлық мүмкін дербес шектер жиыны сегмент, ақырлы жиын, ақырсыз сандар мен жалпы шексіздіктен құрылған жиын болатын функция мысалдары, сонымен қатар, интервал, жалпылап айтқанда, ең үлкен және ең кіші элементтері жоқ жиындардың барлық дербес шектер жиыны бола алмауы.

3. Кез келген сандық функцияның кез келген нүктеде кемінде бір дербес шегінің бар болуы, сол себепті дербес шектер жиынының әрқашанда бос еместігі – функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасын қанағаттандыратын аргумент тізбегіне сәйкес функция мәндерінен құрылған тізбектен Больцано-Вейерштресс теоремасының дербес шектің бар болуын қамтамасыз етуі.

4. Локалды шенелген функцияның нақты мәнді жоғарғы және төменгі шектерінің бар болуы – локалды шенелген функцияның барлық мүмкін дербес шектерінен құрылған әрқашанда бос емес жиынның жоғарғы шек деп аталатын ең үлкен элементінің, төменгі шек деп аталатын ең кіші элементінің міндетті түрде бар болуы.

5. Локалды шенелмеген функцияның ақырсыз не жоғарғы, не төменгі шектерінің, не екеуінің де бар болуы – нүктеде жоғарыдан шенелмеген функцияның $+\infty$-ке тең жоғарғы шегінің, төменнен шенелмеген функцияның $-\infty$-ке тең төменгі шегінің және жоғарыдан да, төменнен де шенелмеген функция үшін осы екеуінің қатар бар болуы.

§11. НАҚТЫ МӘНДІ ШЕНЕЛГЕН ФУНКЦИЯ ҰҒЫМЫ ҚАНШАЛЫҚТЫ ЖАЛПЫ БОЛСА ДА, ӨЗ АНЫҚТАЛУ ЖИЫНЫНЫҢ АҚЫРЛЫ ШЕКТІК НҮКТЕСІНІҢ МАҢАЙЫНДАҒЫ ҚҰРЫЛЫСЫ ЖОҒАРҒЫ ЖӘНЕ ТӨМЕНГІ ШЕКТЕРМЕН СУРЕТТЕЛЕТІН НАҚТЫЛЫ ТӘРТІПКЕ БАҒЫНУЫ

1. Анықталу жиының шектік нүктесінде локалді шенелген сандық функцияның сондағы жоғарғы және төменгі шектері негізіндегі өзгеру заңдылығының сол нүкте маңайындағы аналитикалық құрылысы мен геометриялық сипаттамасы – функцияның нүктедегі жоғарғы және төменгі шектерінен жасалған жолақты сәл кеңейткенде функция мәндерінің барлығы осы кеңейтілген жолақта жататын нүктенің ойылған маңайы табылуы және оны сәл тарылтқанда әр ойылған маңайдағы функцияның қайсыбір мәндерінің міндетті түрде жолақ астына да, үстіне де шығып кетуі, жинақтап айтқанда, айнымалы нүктеге жақындаған сайын функция жоғарғы шек пен төменгі шекке ақырсыз жақындай отырып, солардың арасында тербелуі.

2. Нүктеде локалді шенелген функцияның тербелісі деп аталатын сол нүктедегі жоғарғы және төменгі шектерінің айырымы – функция аргументі нүктеге жақындаған сайын функция мәндерінің бір-бірінен алшақтылығын сипаттайтын нақты сан.

§12. САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ЛОКАЛДЫ САЛЫСТЫРУЛАРЫ

1. Ландау символдары деп аталатын шектік нүктедегі "O үлкен" - $\underline{\underline{O}}$ және "o кішкене" - $\overline{\overline{O}}$ белгілері – $|f(x)| \leq \gamma |g(x)|$ теңсіздігі орындалатындай сәйкес γ оң сан мен ойылған маңайдың және кез келген γ оң сан үшін ойылған маңайдың табылуы арқылы сандар арасындағы реттік қатынастардай шектік нүктеде екі функция арасында да қатынастар енгізу.

2. Виноградов таңбасы – жиында $|f(x)| \leq \gamma |g(x)|$ теңсіздігі орындалатындай γ оң санының табылуы.

3. Лаңдау символдарының шек арқылы берілген эквивалентті анықтамалары мен қасиеттері – Ландау символдарына қолданылған арифметикалық амалдар нәтижелері.

4. Локалді эквивалентті функциялар – берілген нүктенің ойылған маңайында нөлден өзгеше екі функция қатынасының шегі бар және 1 санына тең болуы түріндегі анықтама және сол эквиваленттіліктің функциялар айырымы арқылы берілген қажеттілігі мен жеткіліктілігі.

5. Нүктедегі салыстыру шкаласы мен салыстыру эталондары атты локалді құралдар – нүктеде әрбір мүшесі нөлге ұмтылып, алдыңғысына қарағанда *о кішкене* болатын функциялар тізбесі салыстыру шкаласы болады да, оның әрбір мүшесі салыстыру эталонын береді.

6. Тізбектерді салыстыру – функция жағдайында қабылданған салыстыру қатынастарын оның дербес жағдайы болатын тізбекке көшіру.

IV ТАРАУ. ҮЗІЛІССІЗ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

§1. КӨРНЕКІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ КЕСКІННЕН АНАЛИТИКАЛЫҚ КҮРДЕЛІЛІККЕ ДЕЙІНГІ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ АҚЫРЛЫ НҮКТЕДЕГІ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

1. Қағаздан үшкір қаламды көтермей үзбей салынған график пен график сызу барысында қаламды бір көтеріп, басқа жерден жалғастырғандағы графиктерді, соның ішінде, модуль мен таңба функцияларының екі графиктерін тек функцияның ереже түріндегі анықтамасын қолданып, аналитикалық түрде ажырату мәселесі – "жасанды интеллекттегі" ит пен мысық кескіндерін компьютерлік ажыратқандай үзіліссіз және үзілісті салынған графиктерді дәл анықтамалармен ажырату.

2. Үзіліссіздіктің геометриялық талқылауларынан шек арқылы берілетін аналитикалық анықтамасына дейін өту жолы адамзат деңгейіндегі ұлы интеллектуалды жетістік ретінде – функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің аналитикалық жазбасының шек арқылы бейнеленуі: функцияның үзіліссіздік нүктесінде шегі бар және ол міндетті түрде сол нүктедегі функция мәніне тең болуы, дамытылған шектер теориясы бойынша ширатып айтқанда, үзіліссіздік нүктесіндегі функция мәні оның ойылған маңайындағы оған тең емес нүктелердегі функция мәндерінің ағымы болып, сонымен бірге, әр жеке нүктедегі функция мәніне тәуелсіздігі.

3. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің әртүрлі символдық жазылулары – "$\lim$" мен "$\to$" таңбалары арқылы белгіленген біржақты, жай шек және өсімше арқылы жазылулары.

4. Нүктедегі оң жақты және сол жақты, жалпылап айтқанда, біржақты үзіліссіздігі – функцияның нүктедегі мәні сол нүктеге аргумент біржақты ұмтылғандағы шек мәніне тең болуы.

5. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің "$\varepsilon - \delta$" маңайлар және тізбектер тілдеріндегі анықтамалары және олардың эквиваленттілігі – функция шегінің әртүрлі анықтамаларының эквиваленттілігі жайлы дәлелденген теоремалар мен функцияның үзіліссіздігі анықтамасының тікелей салдары ретінде.

6. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің талқылаулары – жалпы жағдайдағы дамытылған функция шегі теориясындағы талқылаулардың оның жеке жағдайы болатын функция үзіліссіздігіне қайталануы.

§2. НҮКТЕДЕ ҮЗІЛІССІЗ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ МЕН НЕГІЗГІ ЭЛЕМЕНТАР ЖӘНЕ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

1. Нүктеде үзіліссіз функциялардың шектер теориясының тікелей салдары болатын қасиеттері – үзіліссіздік нүктесінде функцияның локалді шенелуі, үзіліссіздік нүктесінің қайсыбір маңайында функцияның нөлден өзгеше мәнінің таңбасын сақтауы, үзіліссіз функцияларға қолданылған арифметикалық амалдардың нәтижесі сол нүктеде функцияның үзіліссіздік қасиетін сақтауы, үзіліссіз функциялардан құрылған күрделі функцияның үзіліссіздігі.

2. Негізгі элементар функциялардың өзінің әрбір анықталу нүктесіндегі үзіліссіздігі – дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық функциялардың өз анықталу жиынының әр нүктесіндегі шегі функцияның сол нүктедегі мәніне тең екендігінің маңайлар тіліндегі дәлелдемесі, кері тригонометриялық функция үзіліссіздігі тереңдетілген теорияның салдары болуы.

3. Элементар функциялардың өзінің әрбір анықталу нүктесіндегі үзіліссіздігі – элементар функция анықтамасы, негізгі элеменар функциялардың әр анықталу нүктесіндегі үзіліссіздігі және үзіліссіз функциялар қасиеттерінің салдары ретінде.

§3. САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕ ЖАЙ ЖӘНЕ КҮРДЕЛІ ҮЗІЛУІ ЖӘНЕ СОЛАРДЫҢ 81 ТҮРІ

1. Функцияның нүктеде үзілуі – нүктедегі үзіліссіздіктің маңайлар және тізбектер тіліндегі анықтамаларына кері тұжырымдар

2. Функцияның нүктедегі үзілістігінің себебіне қарай жағдайларға жіктеу – функция үзіліссіздігі анықтамасының құраушы бөліктері болатын функцияның нақты мәнді оң және сол жақты шектерінің бар болуынан, олардың өзара тең болуы мен функция мәніне тең болуынан құралған 5 талаптың ең болмағанда біреуінің орындалмауынан шығатын жіктеулер.

3. Функцияның жай және күрделі үзіліс нүктелері – сәйкес функцияның нақты мәнді оң және сол жақты шектерінің бар болуы және ең болмағанда бір нақты мәнді біржақты шегінің болмауы.

4. Функцияның нүктедегі үзілуінің 81 түрі – функцияның нақты мәнді оң және сол жақты шектері бар 4 түрлі жай үзілуі және 77 түрлі ең болмағанда бір нақты мәнді біржақты шегі жоқ күрделі үзілуі.

§4. САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ АНЫҚТАЛУ ЖИЫНЫНДА ҮЗІЛІССІЗДІГІ ЖӘНЕ ҮЗІЛІСТІЛІГІ

1. Функцияның анықталу жиынындағы үзіліссіздігі – жиындағы үзіліссіздіктің оның әрбір нүктесіндегі үзіліссіздік арқылы анықталуы, соның ішінде, сегменттегі үзіліссіздіктің оның әрбір ішкі нүктесінде екіжақты жай, шеткі нүктелерінде біржақты үзіліссіз болуы және де жиынның оңашаланған нүктесі шектік нүкте болмағандықтан шегі анықталмайды да, функцияның сол нүктеде анықтама бойынша үзіліссіз деп қабылдануы.

2. Функцияның анықталу жиындағы үзілістілігі – функцияның сол жиынның кемінде бір нүктесінде үзілісті болуы.

§5. АРАЛЫҚТА ҮЗІЛІСІЗ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Әр екі элементінің арасындағы кез келген санды да қамтитын ерекше қасиетті байланысты сандық жиындар – аралықтардың байланысты жиын ұғымы арқылы анықтамасына пара-пар тағы бір толық сипаттамасы.

2. Больцано-Коши теоремасы – аралықтың үзіліссіз бейнесінің байланыстылығы.

3. Вейерштрасс теоремалары – сегменттің үзіліссіз бейнесінің де сегмент болуы, соның ішінде, мәндер жиынының функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері болатын элементтерінің бар болуы.

4. Сандық функция үзіліссіздіктігінің бірқалыптылығы – математикада "бірқалыпты" деген сөз белгілі бір шарттың басқа бір не бірнеше шарттарға қарағанда бірдей орындалуын, яғни, басқаша айтқанда, оларға тәуелсіз болуын білдіредиреді де, сол орайда, функция үзіліссіздігінің маңайлар тіліндегі анықтамасындағы аргумент маңайы әр нүктеге байланысты жеке табылса, үзіліссіздіктің бірқалыптылығында ол маңай жиынның барлық нүктелеріне тәуелсіз болуы.

5. Үзіліссіздік пен бірқалыпты үзіліссіздіктің арақатынасы – жиында бірқалыпты үзіліссіз функцияның сол жиында үзіліссіз де болуы және керісінше жағдайдың әрқашан орындала бермеуі.

6. Кантор теоремасы – сегментте үзіліссіз функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі.

§6. МОНОТОНДЫ ФУНКЦИЯЛАР ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ФУНКЦИЯНЫҢ АРАЛЫҚТАҒЫ ҮЗІЛІССІЗДІГІ МЕН ОНЫҢ МӘНДЕР ЖИЫНЫ БАЙЛАНЫСТЫЛЫҒЫНЫҢ ПАРА-ПАРЛЫҒЫ

1. Аралықта анықталған монотоны функцияның үзіліссіздігіне пара-пар мәндер жиынының байланыстылығы – монотонды функция жағдайында күрделі шек ұғымымен анықталған үзіліссіздікті табиғаты мүлдем өзге санның реттік қатынасы және элементтің жиында жату, жатпауымен ғана берілетін жиынның байланыстылық ұғымымен сипатталуы.

2. Тағы да негізгі элементар функциялардың үзіліссіздігі туралы – негізгі элементар функциялардың үзік-үзік монотондылығынан мәндер жиынының байланыстылығы арқылы үзіліссіздігіне келу, солардың ішінде, осы оқулықта алғаш рет дәлелденетін кері тригонометриялық функциялардың үзіліссіздігі.

V ТАРАУ. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНУЛАРЫ

§1. САНДЫҚ ФУНКЦИЯ ТУЫНДЫСЫНЫҢ НҮКТЕДЕГІ АНЫҚТАМАСЫ

1. Функция графигінің қиюшы түзуінің шектік жағдайы болатын жанама түзудің сызықтық теңдеуіндегі бұрыштық коэффициентті анықтау формуласы – жанама жүргізілетін нүктедегі функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасы түріндегі өрнек шегі ретінде.

2. Лездік жылдамдық деп аталатын қозғалып келе жатқан дененің уақыт мезетіндегі жылдамдық формуласы –анықтама бойынша мүмкін емес бір сәттегі жылдамдықты функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасы түрінде өрнектелген оң уақыт аралығындағы жолдың уақытқа қатынасының шегі ретінде анықтау.

3. Сандық функция туындысының нүктедегі анықтамасы, дифференциалдау амалы мен функцияның нүктеде дифференциалдануы – әртүрлі салалардың жанама жүргізу мен лездік жылдамдық атты өзара бөлек екі мәселелерінің функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының нақты мәнді шегі түріндегі бірдей математикалық моделін анықтама ретінде қабылдау, функцияны нүктеде дифференциалдау атты сол шекті табу амалы, нүктеде функцияның дифференциалдануы атты нақты мәнді туындының бар болуы.

4. Сандық функцияның нүктедегі туынды анықтамасының жазылу түрлері, туындының белгіленулері және туынды анықтамасының қолданысы – әртүрлі жазылған өсімшелер арқылы берілген туындының қалыптасқан әртүрлі белгілеулері, соның ішінде, кейде қолданылатын $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасының туынды алынып тұрған нүктені жоғалтып, туынды ұғымының локалділігін көрсетпеуін ескеру және әдеттегідей туынды анықтамасын "атынан затына", "затынан атына" бағытында қолдану.

5. Сандық функцияның нүктедегі біржақты туындылары – туынды анықтамасындағы шекті біржақты шекпен алмастыру.

6. Сандық функцияның нүктедегі екіжақты, біржақты ақырсыз туындылары – туынды анықтамасындағы сәйкес жәй және біржақты шек мәндерінің ақырсыз сандар мен жалпыланған шексіздікке тең болуы.

7. Сандық функцияның жиында дифференциалдануы – жиында дифференциалданудың оның әрбір нүктесіндегі ақырлы туындысының бар болуы арқылы анықталуы, соның ішінде, сегменттегі дифференциалданудың оның әрбір ішкі нүктесінде екіжақты жай, шеткі нүктелерінде біржақты нақты мәнді туындысының бар болуы.

8. Сандық функцияның нүктедегі дифференциалдану мен үзіліссіздік арасындағы өзарабайланыс – нүктеде ақырлы жай не біржақты туындысы бар функцияның сол нүктедегі дәл сондай үзіліссіздігі және керісінше жағдайдың әрқашан орындала бермеуі.

9. Туынды анықтамасындағы шектің бар немесе жоқ, бар болса мәніне қарай әртүрлі қорытындыға әкелетін мысалдар – анықталу жиынының бір де бір нүктесінде нақты мәнді туынды болмауы; біржақты туындылары бар, бірақ олар өзара тең еместігінен жай туындының болмауы; үзіліссіз нүктедегі туындысының ақырсыз болуы.

§2. АРИФМЕТИКАЛЫҚ АМАЛДАР НӘТИЖЕЛЕРІН, КҮРДЕЛІ ЖӘНЕ КЕРІ ФУНКЦИЯЛАРДЫ НҮКТЕДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

1. Нүктеде туындысы бар сандық функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижелерінің сол нүктеде туындысы бар болуы мен нүктелердің жалпы жағдайында жазылған туынды есептеу формулалары – қосу, алу, көбейту, бөлу амалдарын қолдану нәтижесіндегі функциялардың туындыларының бар болуының дәлелдемелері және бастапқы функциялар мен олардың туындылары арқылы өрнектелген ережелері.

2. Сандық күрделі функцияның нүктедегі туындысын "сырттан ішке" тәртібімен есептеу формуласы – ішкі функцияның анықталу жиынында берілген нүктедегі күрделі функцияның туындысын сол нүктедегі ішкі функция мәніндегі оны құрайтын сыртқы функцияның туындысын ішкі функцияның сол нүктедегі туындысына көбейтіндісі.

3. Кері функцияның туындысын бастапқы функция мәні болатын нүктеде есептеу формуласы – бастапқы функцияның анықталу жиынынан алынған нүктеде нөлден өзгеше туындысының бар болуынан оған кері функцияның бастапқы нүкте бейнесінде туындысының бар болуы және оның бастапқы функцияның берілген нүктедегі туынды мәніне кері санға тең болуы.

§3. НЕГІЗГІ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ТУЫНДЫЛАРЫН НҮКТЕДЕ ЕСЕПТЕУ ЖӘНЕ СОЛАРДЫҢ КЕСТЕСІ

1. Негізгі элементар функциялардың туынды анықтамасын тікелей қолдана отырып, кездескен анықталмағандықтарды ашу және бөліндінің туындысы, кері функцияның туындысын табу ережелерін қолдану арқылы анықтау – тұрақты функция туындысын шек арқылы тікелей анықтамамен; дәрежелік, көрсеткіштік және логарифмдік функциялар туындыларын екінші тамаша шектің салдары болатын e санынның анықтамасын, логарифмнің $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ қасиетін пайдалану арқылы; $\sin x$ функциясының туындысын бірінші тамаша шек арқылы, ал $\cos x$ функциясының туындысын туындысы белгілі $\sin x$ функциясына келтіру формуласын қолдану арқылы күрделі функция туындысының мәні ретінде; $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ функцияларының туындыларын туындылары белгілі $\sin x, \cos x$ функцияларының қатынасының туындысын есептеу формуласы арқылы; $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$ функцияларының туындысын нүктеде нөлден өзгеше туындылары бар $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ функцияларына кері сан ретінде туынды мәнін табу.

2. Алдымен теориялық тұрғыдан зерттелген туынды ұғымы анықтамасын негізгі элементар функциялар туындыларын есептеуде практикалық қолдану барысында құрылған кесте – көбейту амалы бойынша қосылғыштар саны бірдей қосылғыштарды қосуды таяқшалар арқылы есептей отырып құрылған көбейту кестесін әр қадамда таяқшалармен санап отырмас үшін жаттап алғандай туынды табу жолын қайтадан жүргізіп отырмай негізгі элементар функциялардың туындылар кестесін де жаттап алу қажеттігі.

§4. ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ НҮКТЕДЕГІ ТУЫНДЫСЫН ЕСЕПТЕУ ТЕХНИКАСЫН ИГЕРУДЕГІ ҚАТАҢ ТӘРТІПТЕ

1. Сыртқы функция негізгі элементар, ішкі – кез келген дифференциалданатын функциялардан тұратын күрделі функциядың туындылар кестесі – арифметикалық амалсыз тек күрделі функция құру ережесін элементар функцияларға ақырлы рет қолданғанда алынған элементар функциялардың туындысын есептеу ережесі.

2 Дифференциалданатын элементар функцияның туындысын есептеуді қарапайым тұжырымға айналдыратын бірізділік жолы – күрделі функция туындысын сырттан ішке принципімен және туындысы бар функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижелері болатын функциялардың туындысын есептеу ережелерін ретінмен қолдану.

§5. ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ТУЫНДЫСЫ ТӨҢІРЕГІНДЕГІ МӘСЕЛЕЛЕР

1. Функцияның туындысын нүктеде есептеудің дайын туынды табу формулалары мен тікелей анықтаманы қолданатын екі жағдайы – туынды есептелетін нүкте маңайында қайсыбір дифференциалданатын элементар функцияға тепе-тең болғанда туынды кестесі мен элементар функцияны дифференциалдау ережелерін қолдану және де қалған жағдайларда тікелей анықтамадағы функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы нақты мәнді шегінің бар болуын анықтап, оның дәл мәнін табу.

2. Дифференциалданатын элементар функциялардың туындыларының өзі де элементар – негізгі элементар функциялардың туындылары да дифференциалданатын элементар функция болады, сонымен бірге элементар функция нүктеде дифференциалданбауы да мүмкін, ал дифференциалданатын болған жағдайда оның туындысы болатын жаңа функцияның да элементар болатындығы.

3. Дәрежелі-көрсеткіштік функцияның туындысын табу ережесі – дифференциалданатын функциялардан құрылған дәрежелі-көрсеткіштік функцияның дифференциалдануы және оның туындысының құраушы функциялар және олардың туындыларымен өрнектелу формуласы.

§6. ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ТУЫНДЫЛАР

1. Функцияның нүктедегі жоғарғы ретті туындысы туындыдан туынды алу арқылы алынатын реккурентті анықтама ретінде – функция туындысының өзі де функция болады да, одан алынған туынды бастапқы функцияның екінші ретті туындысын және ары қарай жалғастыра отырып, үшінші, т.с.с. кез келген оң бүтін мәнді жоғарғы ретті туындыларын анықтау.

2. Функцияның берілген нүктеде берілген оң бүтін дәрежелі жоғарғы ретті туындысы бар деген мәліметті орындалуын қамтамасыз етуі үшін функцияның өзінен талап етілетін шарттар – функция нүктеде n-рет дифференциалдануы үшін осы нүктенің қандай да бір маңайында функцияның өзі анықталып, маңайдың әр нүктесінде осы маңайда толық анықталған бірінші ретті туындысы, бірінші ретті туынды болатын функциядан екінші ретті туындысы, солай жалғаса беріп, $(n-1)$ -ретті туындысы бар болып, ең соңында маңайда толық анықталған $(n-1)$ -ретті туындының сол нүктеде туындысының бар болуы.

3. Негізгі элементар функциялардың жоғарғы ретті туындыларын есептеу формулалары – дәрежелік, көрсеткіштік және логарифмдік, $\sin x, \cos x$ функцияларының жинақы түрде және $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, кері тригонометриялық функциялар үшін күрделі түрде жазылатын жоғарғы ретті туындыларды есептеу формулалары.

4. Екі функцияның көбейтіндісінің жоғарғы ретті туындыларын бейнелейтін Лейбниц формуласы – Ньютон биномындағы дәреже орнына сол ретті туынды қойғандағы формула, бұл математикада құнды болып табылатын, әртүрлі салалар арасында баламалы көшірілетін ұқсастық мысалы.

§7. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУДІҢ НЕГІЗГІ ТЕОРЕМАЛАРЫ

1. Сандық функцияның нүктедегі локалді экстремумы – функцияның аралықта монотонды, үзіліссіз болуы қасиеттер тізбесі қатарында *функцияның нүктедегі мәні қайсыбір екіжақты маңайындағы* мәндер жиынында шеткі мән болуы, дәл айтқанда, шеткі болып, одан үлкен мән болмаса, ең үлкені болуы не шеткі болып, одан кіші мән болмаса, ең кішісі болуы, бұнда да локалді деп аталуы қасиеттің қайсыбір екіжақты маңайда орындалуында.

2. Ферма теоремасы мен оның геометриялық бейнесі– локалді экстремум нүктесінде функция дифференциалдануы да, дифференциалданбауы да мүмкін, дифференциалданатын сандық функцияның сол нүктедегі туындысының міндетті түрде нөлге тең болуы, бірақ туындысы нөлге тең нүкте локалді экстремум нүктесі болуы міндетті емес.

3. Ролль теоремасы мен оның геометриялық бейнесі – сегменттің өзінде үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функцияның шеткі нүктелеріндегі мәндері өзара тең болғанда міндетті түрде локалді экстремум нүктесі, сол себептен Ферма теоремасы бойынша туындысы нөлге тең болатындай ішкі нүктенің табылуы.

4. Коши теоремасы мен оның геометриялық бейнесі – сегменттің өзінде үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданатын екі функцияның шеткі нүктелердегі мәндерінің айырмалар қатынасының сол функциялардың туындыларының қатынасына тең болатындай ішкі нүктенің табылуы.

5. Лагранж теоремасы мен оның геометриялық бейнесі – сегменттің өзінде үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасына тең туынды мәнінің табылуы және функцияның монотондылық қасиеттерін туынды таңбасы арқылы сипаттау.

6. Функцияның анықталу аралығының шеткі нүктелерінде біржақты туындысы бар болуы туралы теорема – нүктенің маңайында туындысы бар болуынан шектік нүктедесінде туындысының бар болуын шығарып алу: нүктенің біржақты маңайы болатын сегментте үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функцияның туындысының нақты мәнді шегі бар болғанда сол шеткі нүктеде біржақты туындысы бар болады да, мәні шектің мәніне тең болады.

7. Дарбу теоремасы – функция сегменттің әрбір нүктесінде дифференциалданғанда үзілісті де бола алатын туындының әр екі мәнінің арасындағы кез келген нақты сан қандай да бір нүктеде туындының мәні болуы: үзілісті туынының өзі үзіліссіз функцияларға ғана тән байланыстылық қасиетті сақтауы.

§8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ – ЛОКАЛДЫ СЫЗЫҚТАНДЫРУДАҒЫ БАСТЫ СЫЗЫҚТЫ ФУНКЦИЯ

1. Сандық функцияның нүктедегі дифференциалдануы оның сол нүктедегі өсімшесінің сызықтық функциямен локалді жуықталуы ретінде – функцияның өзін берілген нүктеде $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \overline{\overline{o}}(x - x_0)(x \to x_0)$ локалды сызықтандыру түрінде өрнектеу.

2. Сандық функцияның нүктедегі дифференциалы $-L(h)) = Ch(-\infty < h < +\infty)$ түріндегі сызықтық деп аталатын функцияның коэффициенті сол нүктедегі туынды мәніне $C = f'(x_0)$ тең болатын барлық нақты сандар жиынында анықталған $L(h) = f'(x_0)h$ сызықтық функция, соның ішінде $f(x) = x^8$ функциясының $x = 24$ нүктесіндегі дифференциалының $L(h) = 8 \cdot 24^7 h(h \in (-\infty,\ +\infty), h \equiv dx$ -екеуі де ақырсыз шама емес!) функциясы болуы.

3. Функцияның нүктедегі дифференциалының белгілеулері: $dy := y'dx$, $df := f'(x)dx$, $df(x_0) := f'(x_0)dx(dx \in (-\infty, +\infty))$.

4. Дифференциал нүктеде дифференциалданатын сандық функция өсімшесінің басты "сызықты бөлігі" ретінде – функция өсімшесі локалды сызықтандырылған жағдайда сызықты бөлік пен оған қарағанда нөлге жылдам ұмтылумен қатар сызықтылықты бүлдіретін "бүлдіргіш" деп аталатын екі қосылғыштан тұрғандықтан дифференциал сол қосылғыштардың бастысы болатын "сызықты бөлігі" тұрғысында.

5. Сандық функцияның нүктедегі дифференциалының геометриялық кескіні – функция графигінің нүктесіндегі өсімшені тәуелсіз айнымалы етіп алғанда пайда болатын сызықтық функцияның өзі дифференциал, ал оның графигі функция графигіне сол нүктеде жүргізілген жанама болуы.

6. Дифференциалданатын сандық функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижесінде пайда болған функцияның дифференциалын алғашқы функциялардың өздері мен дифференциалдары арқылы өрнектеу – дифференциал анықтамасы мен туындыға арифметикалық амалдар қолдану нәтижелерінің жазылуыларын баламалы түрде қайталау.

7. Дифференциалданатын функцияның әр нүктесіне оның сол нүктедегі дифференциалын сәйкес қоятын ереже функцияның жаңа түрі ретінде – аралықта дифференциалданатын функция жағдайында аралықтың әр нүтесіне бір нақты сан сәйкес қойылса, бұнда әр нүктеге оның сол нүктедегі дифференциалы болатын бір сызықтық функцияның сәйкес қойылуы және осылайша функцияның жаңа бір түрінің анықталуы.

8. Сәйкес нүктелерде дифференциалданатын сандық функциялардан құрылған күрделі функцияның дифференциалдануы мен оның туындысын есептеу формуласының тағы бір дәлелдемесі – күрделі функцияның құрамындағы сыртқы функция дифференциалын локалді сызықтандыру түрінде ішкі функцияның мәні болатын нүктеде жазып, артынша, ондағы ішкі функция өсімшесін де локалді сызықтандырып, күрделі функцияның тәуелсіз айнымалысы бойынша бас сызықтық бөлігін бөліп, жинақталғанда шығатын теңдіктің тікелей салдары ретінде.

§9. АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТЫ АШУДЫ ТУЫНДЫЛАР ҚАТЫНАСЫНЫҢ ШЕГІНЕ КЕЛТІРЕТІН ЛОПИТАЛЬ ЕРЕЖЕЛЕРІ

1. Лопиталь ережесінің мазмұны болатын екі функцияның қатынасының шегі олардың туындылар қатынасының шегіне тең болатынын айқын түрде көрсету – шек алынып тұрған нүктеде дифференциалданатын, мәні нөлге тең болып, $\frac{0}{0}$ анықталмағандықты құрайтын екі функция қатынасының шегі сол нүктедегі туындылар мәндерінің қатынасына тең болуы.

2. Лопиталь ережесі – шек алынып тұрған нүктенің ойылған маңайында дифференциалданатын екі функцияның сол нүктедегі шектері бірдей нөлге немесе шексіздікке тең болып, сонысымен сәйкес $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарын құрған жағдайда туындылар қатынасының шегі бар болуынан бастапқы функциялар қатынасының да шегінің бар және мәні сол туынды қатынасының шегіне тең болуы.

3. Лопиталь ережесін қолдану сәттері – Лопиталь ережесінің анықталмағандықты ашу есебінде әрқашан қолданыста бола бермейтіндігін $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықтың нақты мәнді шегі бар болатындығы тікелей жолмен ашылғанымен, олардың туындыларының қатынасының ешқандайда да шегі болмайтындығын көрсететін мысал; туындылар қатынасының шегі бастапқы функциялар қатынасының шегіне қарағанда анықталмағандықтан арылған, үзіліссіз функцияның мәніне тең шек болуы; анықталмағандықты ашу мақсатына жету үшін Лопиталь ережесін бірнеше рет қолдану қажеттілігі.

4. Лопиталь ережесін қолдану келтірілетін $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ түріндегі анықталмағандықтар – шегін табу қажет функцияларды Лопиталь ережесін қолдануға мүмкін болатындай функциялар қатынасы түрінде өрнектеу.

§10. САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫ АЛГЕБРАЛЫҚ КӨПМҮШЕЛІКПЕН ЖУЫҚТАЙТЫН ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСЫ

1. Жуықтау формулаларының мағынасы мен мақсаты – қандай да бір мағынада күрделі объектіні құрылысы белгілі бір мағынада қарапайым екінші объектімен алдын ала берілген дәлдікті қанағаттандыратындай етіп алмастыру арқылы күрделі объектіні сол дәлдікпен қарапайым объектінің орынбасуы, соның ішінде дифференциалдану мағынасында жатық кез келген функцияны алгебралық көпмүшелікпен алмастыру.

2. Алгебралық көпмүшелік жағдайындағы Тейлор формуласының мазмұны мен мағынасы – күрделі объект ретінде функцияны, ал функцияның өзін жуықтау құралы ретінде таңдалған алгебралық көпмүшелік деп алғанда бір ғана нүктедегі барлық туындылары арқылы функцияның әр нүктедегі мәнінің дәл өрнектелуі және сол жазылудың Тейлор формуласы деп аталуы, сонымен алгебралық көпмүшеліктің ерекше қасиеті бір нүкте маңайындағы құрылысымен анықталатын туындылары арқылы алгебралық көпмүшелік мәнінің әр нүктеде дәл бейнеленуі.

3. Сандық функцияның бір ғана нүктедегі туындыларымен анықталған Тейлор көпмүшелігі мен Тейлор формуласы – функция көпмүшелік болған жағдайдағыдай жалпы функция үшін де Тейлор көпмүшелігі деп аталатын жуықтау көпмүшелігінің бір ғана нүктедегі функция туындылары арқылы анықталуы және көпмүшеліктен ерекшелігі жуықтау көпмүшелігінің бастапқы функциядан ауытқуы нөлден өзге болуынан мейлінше кіші болуы талап етілетін қалдық мүшенің пайда болуы, осы жазудың Тейлор формуласы деп аталуы.

4. Тейлор формуласының жәй (глобалді) және локалді екі түрі – Тейлор формуласындағы қалдық мүшенің жиындағы абсолют шамасын шенеу болатын глобалді және нөлге ұмтылу жылдамдығын анықтайтын локалді екі көзқарас.

5. Тейлордың глобалді формуласының дәлелдеуі – Коши теоремасындағы екі функцияның бірін қалдық мүше, екіншісін тәуелсіз айнымалының туынды алынып отырған нүктеден ауытқуының дәрежесі түрінде алу арқылы.

6. Тейлордың локалді формуласының дәлелдеуі – қалдық мүшесі белгісіз нақты санға көбейтілген өсімшенің ең үлкен дәрежесі түрінде жазылады да, сол белгісіз коэффициентті Ролль теоремасына ыңғайланған шеткі нүктелердегі мәні тең көмекші функция арқылы анықтау барысында қолданылған Тейлор формуласының дәрежесіне тең ретті туындысы бар деген теорема шартына өз-өзінен келуі.

7. Тейлор глобалді формуласының айқын жазылған қалдық мүшелері – Тейлор формуласының дәрежесінен бірге артық туынды мәні мен өсімше дәрежесінің параметрі арқылы өрнектелген Шлемильх және Рош берген қалдық мүшелері және де Тейлор көпмүшеліндегі факториал заңдалығын бұзбай жалғастаратын параметрдің сәйкес $n+1$ мен 1 мәндерін қабылдағандағы Лагранж және Коши берген түрлері.

8.Тейлор локалды формуласының Пеано қалдық мүшесі –нүктеде Тейлор көпмүшелігінің ретіне тең туындысының бар болуы қалдық мүшенің нөлге жылдам ұмтылуын қамтамасыз етуі.

9. Тейлордың глобалді және локалді формулаларындағы қалдық мүшелерінің арақатынастары –қалдық мүшелері Лагранж және Пеано берген түрде болатын Тейлор формулаларымен қанағаттанған жағдайда дәлелдеуді локалді формуламен шектеу.

§11. ЖОҒАРҒЫ РЕТТІ ТУЫНДЫЛАРЫ АЙҚЫН, ЖИНАҚЫ ТҮРДЕ ЖАЗЫЛАТЫН НЕГІЗГІ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАРДЫ ТЕЙЛОР (МАКЛОРЕН) ФОРМУЛАЛАРЫ АРҚЫЛЫ АЛГЕБРАЛЫҚ КӨПМҮШЕЛІКТЕРМЕН ЖУЫҚТАУ ЖӘНЕ СОНДА ПАЙДА БОЛАТЫН ҚАТЕЛІКТЕРДІҢ АЙҚЫН ТҮРЛЕРІ МЕН ОЛАРДЫҢ ЖОҒАРЫДАН БАҒАЛАУЛАРЫ

1. Сандық функцияның глобалді және локалді Маклорен формуласы – туындылар мәні нөлге тең нүктеде алынғандағы Тейлор формуласы және сол жеке жағдайдағы глобалді және локалді қалдық мүшелеренің жазылулары.

2. Негізгі элементар функцияларды кез келген дәлдікпен есептеуді қамтамасыз ететін Маклорен формуласы – негізгі элементар функциялардың күрделі түрдегі анықталу тәртібі тікелей мәндерін табуға ешқандай мүмкіндік бермеуінен туындалған күрделі теориялық мәселенің Маклорен формуласындағы нөл нүктесіндегі туындылар арқылы құрылған алгебралық көпмүшелікпен жуықтағандағы қалдық мүшесі айқын түрде шенеу теңсіздіктері түрғасынан практикалық шешілуі.

3. Көрсеткіштік функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен барлық нақты сандар жиынында жуықтау – көрсеткіштік функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы.

4. $\sin x$ функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен периодта жуықтау – $\sin x$ функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы.

5. $\cos x$ функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен периодта жуықтау – $\cos x$ функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы.

6. Логарифмдік функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен анықталу жиынында жуықтау – логарифмдік функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы.

7. Дәрежелік функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен анықталу жиынында жуықтау – дәрежелік функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы.

8.Тейлордың локалді формуласына негізделген шек табу тәсілі – анықталмағандықтарды ашудың Тейлор формуласына негізделген алгебралық бас бөлікті ажырату арқылы.

§12. АРАЛЫҚТА ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫ, ӨСУІ ЖӘНЕ КЕМУІ

1. Дифференциалданатын функцияның аралықта тұрақтылығының критерийі – аралықта функция тұрақтылығы мен әр нүктеде туындысының нөлге тепе-тең болуының пара-парлығы.

2. Дифференциалданатын функцияның аралықта кемімеуі мен өспеуінің критерийлері – аралықта функцияның кемімелі не өспелі болуы мен әр нүктеде туындысының сәйкес теріс емес не оң емес болуының пара-парлығы.

3. Дифференциалдық есептеуді теңсіздіктерді дәлелдеуге қолдану мысалдары – теңсіздіктің екі жағындағы функциялар айырмасы түрінде құрылған функция туындысының қатаң оң не теріс емес болуынан сәйкес қатаң теңсіздік пен қатаң емес теңсіздіктерді алу.

§13.САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫ ЛОКАЛДІ ЭКСТРЕМУМГЕ ТУЫНДЫ АРҚЫЛЫ ЗЕРТТЕУ

1. Дифференциалданатын функцияның нүктедегі локалді экстремумын қамтамасыз ететін туынды таңбалары арқылы берілген шарттар – геометриялық суреттемесінде нүкте локалді максимум болғанда сол нүктеге жеткенше өсіп, ары қарай кемуін

математикалық тілге аударғанда сол нүктеге дейінгі аралықта туынды оң, ал одан өткеннен кейінгі аралықта туынды теріс болуы, дәл сол сияқты локалді минимум болғанда кеміп барып өсуін туынды таңбасының терістен оңға ауысуы арқылы тұжырымдау.

2. Көп ретті дифференциалданатын функцияның нүктедегі локалді экстремумының екінші және одан да жоғарғы ретті туынды таңбалары арқылы берілген жеткілікті шарттары – функция экстремумының бірінші ретті туындының өзгерісі арқылы берілген шарттарындағы өзі де функция болатын туынды қасиеттерінің екінші және одан да жоғарғы ретті туындылар арқылы өрнектелуі.

3. Функцияны локалді экстремумге зерттеудің жалпы сипаттамасы – зерттелген экстремумге күдікті нүктеде ақырлы туындысы бар және нөлге тең жағдайды толықтыратын экстремумге күдікті ақырлы туындылары жоқ нүктедегі біржақты ақырсыз туындыларының таңбасына байланысты экстремум нүктелерін зерттеу: нүктедегі оң және сол жақты ақырсыз туындылары біртаңбалы болғанда экстремум нүктесінің болмауы және де, керісінше, қарама-қарсы таңбалы болғанда экстремум нүктесі болуы.

4. Сегментте үзіліссіз және бөлік-бөлік дифференциалданатын функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу ережесі – функцияның нөлге тең туындысы бар, ешқандай туындысы жоқ және сегменттің шеткі нүктелеріндегі мәндерін салыстыру.

§14. САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ДӨҢЕСТІГІ МЕН ИІЛУ НҮКТЕЛЕРІ

1. Дөңес функцияның пара-пар анықтамалары – геометриялық тұрғыдан көрнекі қасиеттің аналитикалық жазылуы мен оған пара-пар туынды анықтамасына бейімделген функция өсімшесі мен аргумент өсімшесінің қатынастары теңсіздігі.

2. Дифференциалданатын функция дөңестігінің туындылар тіліндегі критерийлері – функция туындысының монотондылығына және соның негізінде бастапқы функцияның екінші ретті туындысының бір таңбалылығына пара-парлығы.

3. Дифференциалданатын функция дөңестігінің геометриялық критерийі – функция графигінің әр нүктесіне жүргізілген жанамасынан біржақта жатуы.

4. Дөңес функцияның анықтамасында қамтылмаған функцияның үзіліссіздігі мен біржақты дифференциалдануы – функцияның дөңестік аралығының әрбір нүктесінде оң жақты ақырлы және сол жақты ақырлы туындыларының бар болуы, соның салдарынан үзіліссіз болуы.

5. Сандық функцияның иілу нүктесі және оның бар болуының өзара бөлек қажетті және жеткілікті шарттары – функцияның дөңестік бағыты ауысу нүктесі, екі рет дифференциалданатын функцияның иілу нүктедегі екінші ретті туындысының нөлге тең болуы, иілу нүктесі болуын қамтамасыз ететін туындысының нүкте маңайында әртүрлі монотондылығы мен соның негізіндегі екінші ретті туындының нүктеге дейінгі және кейінгі аралықтардағы тұрақты таңбаларының қарама-қарсылығы.

§15. ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР ГРАФИГІНІҢ ЭСКИЗІН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР АЯСЫНДА САЛУ ЖОБАСЫ

1. Элементар функцияның график эскизін салу жобасы – анықталу және мәндер жиындарын, координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін, жұп, тақтылығын мен периодтылығын, үзіліссіздік аралықтары мен үзіліс нүктелерін, тік, көлденең және көлбеу асимптоталарын, бірінші ретті туынды құрылғысымен монотондылық аралықтары мен экстремумдарын, екінші ретті туынды құрылғысымен дөңестік аралықтары мен иілу нүктелерін анықтау.

VI ТАРАУ. САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ МЕН АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

§ 1. «АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ» ТАҚЫРЫБЫНЫҢ МАЗМҰНЫ

1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл – сәйкес берілген аралықтың әр нүктесінде туындысы бастапқы функцияға тепе-тең функция және осы шартты қанағаттандыратын, бір-бірінен тұрақтыға тең шамамен өзге функциялар жиыны.

2. «Анықталмаған интеграл» тақырыбының мазмұны – қандай функциялардың алғашқы функциялары бар деген сұраққа жауап болатын әрбір аралықта үзіліссіз функцияның алғашқы функциясының міндетті түрде бар болуы; әрбір элементар функция анықталу аралығында үзіліссіз болғандықтан оның алғашқы функциясының міндетті түрде бар болуы; элементар функцияның алғашқы функциясының элементар бола бермеуі; «алынатын интеграл» деп аталатын алғашқы функциясы элементар болатын анықталмаған интеграл; «Анықталмаған интеграл» тақырыбы: «алынатын интегралдарды» іріктеу және «айқын түрде интегралдау» деп аталатын алғашқы функциялар болатын элементар функцияға жету әдістері.

3. Элементар функциялардың анықталмаған интегралдар кестесі – анықталмаған интеграл анықтамасына бойынша туындылар кестесінің «кері» көшірмесі.

§2.АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛДЫ ТАБУДЫҢ ЖАЛПЫ ӘДІСТЕРІ МЕН РЕКУРРЕНТТІ ФОРМУЛАЛАР

1. Сызықтық түрдегі жіктеу әдісі – интегралданатын функциялардың сызықтық комбинациясының да интегралдануы және оларды анықталмаған интеграл анықтамасы мен туындының сызықтық қасиетінің тікелей салдары болатын жіктеу әдісімен алу.

2. Айнымалыны ауыстыру әдісі – интегралданатын сыртқы және үзіліссіз дифференциалданатын ішкі функциядан құрылған күрделі функцияның интегралдануы және күрделі функция туындысының анықтамасы негізінде ішкі функцияны жаңа айнымалы түрінде алып интегралды табу.

3. Бөліктеп интегралдау әдісі – үзіліссіз дифференциалданатын функциялар көбейтіндісінің туындысын табу формуласының анықталмаған интеграл анықтамасы бойынша оқылуы.

4. Рекуррентті формулалар – оң бүтін сандармен нөмірленген бір түрдегі анықталмаған интегралдар тізбесінде белгілі бір нөмірден бастап әр интегралдың өз алдындағы нөмірлі интегралдармен байланысын теңдік түрінде тағайындайтын қатынастар.

§3. ӘРҚАШАНДА ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯ ТҮРІНДЕГІ АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯЛАРЫ БАР РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ ТӘСІЛДЕРІ

1. Нақты мәнді коэффициентті алгебралық көпмүшеліктің нақты мәнді коэффициентті сызықты $x-\alpha$ және нақты мәнді коэффициентті квадраттық x^2+px+q көбейткіштерге жіктелуі.

2. Рационал функцияны жай бөлшектерге жіктеу – екі алгебралық көпмүшеліктің қатынасы болатын $\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}(n<m)$ түріндегі рационал бөлшектерді жай бөлшектер деп аталатын $\frac{A}{x-\alpha_1}, \frac{A_r}{(x-\alpha_1)^r}, \frac{Cx+D}{x^2+px+q}, \frac{C_sx+D_s}{(x^2+px+q)^s}$ ретіндегі бөлшектер түрінде жазу.

3. Рационал функцияны интегралдау – берілген бөлшек бұрыс болған жағдайда көпмүшелік болатын бүтін бөлігі мен дұрыс бөлшек түрінде ажыратып жазу; дұрыс бөлшектерді жай бөлшектерге жіктеу және сондағы белгісіз коэффициенттерді табу; сәйкесінше алынған бірінші және екінші түрдегі жай бөлшекті тікелей анықтамамен есептеу және соның негізінде табиғаты өзге элементар функцияға келу, үшінші түрдегі жай бөлшекті айнымалыны ауыстыру әдісі бойынша және төртінші түрдегі жай бөлшекті рекуррентті формула негізінде есептеу.

4. Рационал бөлшекті интегралдауда бөлімінің түбірлерін тауып, жай бөлшектерге жіктеуге қарағанда белгісіз коэффициенттер санының азаюын қамтамасыз ететін Остроградский әдісі – бөліміндегі жай көбейткіштерінің реті бастапқы жай көбейткіштер ретінен бір дәрежеге кем дұрыс бөлшек пен интеграл астындағы дәрежесі бірге тең дұрыс бөлшек қосындылары түрінде өрнектеу арқылы белгісіз коэффициенттердің санын азайту.

§4. КЕЙБІР РАЦИОНАЛ ЕМЕС ФУНКЦИЯЛАРДЫ РАЦИОНАЛДЫҚҚА ӘКЕЛУ АРҚЫЛЫ АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛЫН ТАБУ

1. $\int R(\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))dx$ анықталмаған интегралын айнымалы енгізу арқылы әрқашан да алынатын рационал фукцияның интегралына айналдыру – көп айнымалылы рационал бөлшектер деп аталатын айнымалылардың оң бүтін дәрежелері көбейтінділерінің ақырлы қосындысы болатын көп айнымалылы көпмүшеліктер қатынасы және нәтижесінде пайда болған нақты айнымалылы сандық функцияны айнымалы ауыстыру арқылы рационал функцияға келтіру.

2. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right)dx$ ($r_1, r_2, ..., r_s$ - рационал сандар) түріндегі интегралдар – $\varphi_0(x) = x, \varphi_i(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ жағдайында $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, m$ -дәреже бөлімдерінің ең кіші ортақ еселігі арқылы жасалған алмасыруы.

3. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ түріндегі интегралдар – $\varphi_0(x) = x, \varphi_1(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ жағдайында $a>0$ болғанда $\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a} = t$; $c \geq 0$ болғанда $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$; екі нақты мәнді түбірі бар болғанда $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \pm t(x-x_1)$ түріндегі Эйлер ауыстырулары.

4. $x^m(a+bx^n)^p$ түріндегі дифференциалдық бином деп аталатын өрнек интегралы – айнымалы ауыстырғаннан кейін $\int(a+bt)^p t^q dt \left(q=\frac{m+1}{n}-1\right)$ түріндегі интегралды p - бүтін сан болғанда $z^s=x^n$, мұндағы s – q рационал санының бөлімі; q - бүтін сан болғанда $x=\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; $p+q$ бүтін сан болғанда $z^s=\frac{a+bt}{t}=\frac{a+bx^n}{x^n}$ ауыстыруы арқылы рационалдандыру.

5. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ түріндегі интеграл – $\varphi_0(x)=\sin x, \varphi_1(x)=\cos x$ жағдайын әрқашанда рационалдандыратын, сол себепті универсалды $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ алмастыруы.

6. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ түріндегі интеграл – $\varphi_0(x)=\sin x, \varphi_1(x)=\cos x$ жағдайын R функциясының жұп-тақ қасиеттері арқылы универсалды ауыстыру қарағанда ықшамды сәйкес айнымалылар енгізіп рационалдандыру.

VII ТАРАУ. РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

§1. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ЖОҒАРҒЫ ЖӘНЕ ТӨМЕНГІ ҚОСЫНДЫЛАР ТІЛІНДЕГІ АНЫҚТАМАСЫ МЕН РИМАН БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯЛАР

1.Геометриялық көзқарастармен қамтылған Риман интегралының жоғарғы және төменгі қосындылар тіліндегі $(U-L)$ анықтамасы – геометриялық тұрғыдан қарағанда Риман интегралының анықтамасы дөңгелекке іштей сызылған квадраттан бастап қабырғалар санын екі еселей отырып, бірінің ішіне бірі орналасқан көпбұрыштар сызғанда олардағы үшбұрыштар саны да еселене отырып, есептелуі белгілі үшбұрыш ауданы арқылы іштей және осы көпбұрыштар төбелерінен жүргізілген жанамалар арқылы салынған көпбұрыштар аудандарымен сырттай дөңгелек ауданы деп аталатын санға ақырсыз жақындай отырып анықталған жазықтықтағы дөңгелек ауданы мәнін есептеу тәрізді жүргізілуі: екі бүйір жағынан ордината өсіне парраллель екі түзумен, төменнен абсцисса өсінде жатқан кесіндімен, жоғарыдан сол кесіндіде анықталған, теріс емес, шенелген функция графигімен шектелген жазықтықтағы қисық сызықты трапеция атты фигура және де функция берілген сегмент сонда жататын нүктелермен жіктелгеннен соң, сол жіктеу нүктелері бойынша қисық сызықты трапецияның оған іштей сызылған ең үлкен тікбұрыштар ауданының қосындысымен төменнен және де сырттай сызылған ең кіші тіктөртбұрыштар аудандарының қосындысымен жоғарыдан жуықталуы және осы геометриялық құрылымды аналитикалық тілге аударғанда берілген сегмент өзара қиылыспайтын сегменттерге жіктеледі, ал сегменттердің өздері шеткі нүктелерімен ғана толық анықталғандықтан шеткі нүктелерін көрсеткенде сегментті бөлшектеу деп аталатын сол шеткі нүктелерден құрылған ақырлы нақты сандар жиынына келуіміз және осы жіктелу бойынша қисықсызықты трапецияны биіктігі әр бөліктің мәндер жиынының супремумы мен инфимумы, табаны бөлшектеу сегменті болатын жоғарғы және төменгі қосындылар деп аталатын тіктөрбұрыштар аудандарының қосындысымен сәйкес жоғарыдан және төменнен жуықтауы және осы қосындылар бір сан маңайына шоғырланса, сол сан Риман интегралының мәні деп аталып, ізделінді ауданды беруі.

2. Жоғарғы және төменгі интегралдық қосындылардың, жоғарғы және төменгі интегралдардың монотондық сипаттағы қасиеттері – геометриялық тұрғыдан көрнекі бөлшектену ұсақталған сайын жоғарғы қосындылар жоғарғы интегралға жоғарыдан кеми, ал төменгі қосындылар төменгі интегралға үлкейе отырып жақындай түсуі, кез келген төменгі қосындының жоғарғы қосындыдан, төменгі интегралдың жоғарғы интегралдан аспауы.

3. Функцияның Риман бойынша интегралдануының техникалық критерийі – сегментте шенелген функцияның Риман бойынша интегралдануы мен ортақ бөлшектенулі жоғарғы және төменгі қосындылардың бір-біріне қалауымызша жақын болуының парапарлығы.

4. Риман бойынша интегралдануды қамтамасыз ететін функция қасиеттері – интегралдану сегментінде функцияның үзіліссіз не монотонды болуы.

§ 2. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ МЕН ОРТА МӘН ТӨҢІРЕГІНДЕГІ ҚОЛДАНУЛАРЫ

1. Риман интегралының сызықтық қасиеттері – Риман бойынша интегралданатын функциялардың тұрақты санмен көбейтіндісінің де, олардың қосындыларының да, соның нәтижесінде кез келген сызықтық комбинациясының да Риман бойынша интегралдануы және ол интеграл мәнінің бастапқы функция интегралдар мәндерімен дәл сондай сызықтық комбинацияда өрнектелуі.

2. Күрделі функция мен функциялар көбейтіндісінің Риман бойынша интегралдануы – сәйкес үзіліссіз сыртқы және интегралданатын ішкі функциялардан құрылған күрделі функцияның және интегралданатын екі функцияның көбейтіндісінің Риман бойынша интегралдануы.

3. Риман интегралының аддитивтік қасиеті – жалпыны жекелерге жіктеп, керісінше жекелерден жалпыны жинайтын аддитивтілік атты қасиеті Риман интегралы жағдайында сегментте интегралданатын функцияның сегменттің ақырлы жүктелуіндегі әр сегментте де интегралдануы және сегменттегі интегралдың жіктеудегі интегралдар қосындысына тең болуы, керісінше, жіктеудегі әр сегментте интегралануынан сегменттің өзінде де интегралданып, әр сегментіндегі интегралдар мәндері қосындысының сегменттегі интегралын беруі, сонымен қатар сегменттің бір ғана шеткі нүктесінде үзілісті бола алатын шенелген функцияның сол сегментте интегралдануы мен үзіліс нүктелер саны ақырлы шенелген функцияның интегралдану қасиетін қамтамасыз етуі.

4. Риман интегралының сегменттегі интегралданатын функциялар теңсіздік қатынасын сақтауы – интегралданатын екі функцияның сегменттің әр нүктесіндегі біріншісінің мәні екіншісінің мәнінен аспауынан, олардың Риман интегралдарының мәні де сол қатынаста болуы, интегралданатын теріс емес функция интегралының да теріс емес болуы, сол себепті интегралданатын функция интегралы модулінің функция модулінің интегралынан аспауы, шенелген функция интегралы модулінің сегмент ұзындығы мен шенінің көбейтіндісімен жоғарыдан шенелгенуі және теріс емес интегралданатын функциялар көбейтіндісінің интегралын төменгі және жоғарғы шендер мен теріс емес функция интегралы көбейтіндісімен сәйкес төменнен және жоғарыдан бағалау.

5. Риман интегралының орта мән туралы теоремасы дискретті жағдайдағы арифметикалық орта ұғымының үзіліссіз баламасы ретінде – аналитикалық тұрғыдан сегментте үзіліссіз функцияның ақырсыз көп мәндерін соның Риман интегралы арқылы жазылған орта мән деп, әрі қарай қолданыста дамытылған ілімдерде математикалық күтім деп те аталатын бір ғана мәнмен өрнектелуі, оның геометриялық тұрғыдағы мағынасы сол үзіліссіз функциямен шектелген қисық сызықты трапеция аудан мәнін сақтай отырып, тіктөртбұрыштың сыртындағы қисық сызықты трапеция бөлігінің ішіндегі қисық сызықты трапециядан бос бөлікпен тең болатындай етіп тіктөртбұрышқа түзететін орта мән атты ізделініcті тіктөртбұрыш биіктігінің мәні мен орта мән туралы теореманың кез келген шенелен фукциялар үшін жоғарғы және төменгі шендері арасындағы санмен бағалануы.

§3. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ БАСҚА ДА ЭКВИВАЛЕНТТІ АНЫҚТАМАЛАРЫ

1. Риман интегралының S (мәндер) тіліндегі анықтамасы – берілген сегментте анықталған (шенелу шарты алдын ала қойылмаған) сандық функцияның аралықтың бөлшектенуіне сәйкес интегралдық қосынды деп аталатын жіктеу сегменттерінің ұзындығы мен сол сегментте жататын қайсы бір нүктедегі функция мәні көбейтіндісінің қосындысы және бөлшектеу диаметрі бойынша анықталған интегралдық қосындының диаметр нөлге ұмтылғандағы интегралдық қосындыдағы функция мәндеріне тәуелсіз жаңа түрдегі нақты мәнді шегі мен бар болған жағдайда функцияның S тілінде интегралдануы және де сол шек мәнінің функцияның S тіліндегі интегралы деп аталуы.

2. Риман интегралының $(U_{2^n}-L_{2^n})$ -тіліндегі анықтамасы – интегралдың $(U-L)$ -тіліндегі анықтамасындағы бөлшектеуді кездейсоқ емес, бірте-бірте бөлшектеудің әр сегментін қақ бөле отырып, тең 2^n бөлікке бөлгенде бөлшектеулер бойынша алынған супремум мен инфимум орнына сәйкес жоғарғы қосындылары монотонды кеми отырып, төменгі қосындылары монотонды өсе отырып бар болатын тізбек шектері өзара тең болып беттесуі бойынша интегралды анықтау.

3. Интегралдың $(U-L)$ және S -тіліндегі анықтамаларының эквиваленттігі – сегментте анықталған шенелуі алдын ала қойылмаған функцияның S -тілінде интегралдануынан оның шенелуі мен $(U-L)$ -тілінде интегралдануы, керісінше $(U-L)$ -тіліндегі анықтама бойынша интегралданатын шенелген функцияның S -тілінде интегралдануы және де әрқашанда екі анықтамадағы интеграл мәндерінің өзара тең болуы, қорытындылап айтқанда, интеграл анықтамаларының бірі бойынша интегралданатын функцияның екіншісі бойынша да интегралдануы мен интеграл мәндерінің өзара тең болуы.

4. Риман интегралының $(U - L)$ және $(U_{2^n} - L_{2^n})$ тілдеріндегі анықтамаларының эквиваленттілігі – сегментте шенелген сандық функциялар үшін сәйкес inf-sup пен монотонды тізбек шегі арқылы берілген интеграл анықтамаларының бірі бойынша интегралдануынан екіншісі бойынша да интегралдануы мен интеграл мәндерінің өзара тең болуы.

§4. ИНТЕГРАЛДАУ МЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУДЫҢ НЬЮТОН-ЛЕЙБНИЦ ТҮРІНДЕГІ БАЙЛАНЫСЫ

1. $\sin x$ функциясы $\cos x$ үшін $(\sin x)\prime = \cos x$ болатындай айқын туындысы берілмеген үзіліссіз функция туындысын табу мәселесін жаңа функцияны анықтайтын жоғарғы шегі айнымалы болатын Риман интегралы арқылы анықтау – сегментте үзіліссіз болуынан басқа еш шарт қойылмайтын алдын ала берілген функция үшін әр нүктедегі туындысы дәл осы функция мәні болатын функция құру мақсатымен анықталған сегменттің бастапқы нүктесінен жаңа функция айнымалысы ретінде қабылданатын кез келген нүктесіне дейінгі аралықта алынған жоғарғы шегі айнымалы болатын берілген функция интегралының жаңа функция ретінде қойылған күрделі мәселені шешуі.

2. Интегралдау және дифференциалдау ілімдерін байланыстыратын Ньютон-Лейбниц формуласы – үзіліссіз функцияның Риман интегралы мен туынды арқылы анықталған алғашқы функциясының теңдік түріндегі теориялық байланысы, соның ішінде, алғашқы функциясы айқын түрде берілген (анықталмаған интеграл тақырыбы болған) жағдайларда функция үшін Риман интегралын оның анықтамасындағы $inf - sup$, шек күрделі есептеулерін жүргізбей-ақ алғашқы функциялардың бірінің сегмент шекараларындағы мәндерінің айырмасы арқылы практикалық есептеу.

3. Интегралдық және дифференциалдық есептеудің негізгі теоремасы болып табылатын Ньютон-Лейбниц формуласының үзіліссіздікті сегментте интегралдану шартымен кеңейтетін жалпы жағдайы.

§5. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІ МЕН ОРТА МӘН ТУРАЛЫ ЕКІНШІ ТЕОРЕМА

1. Риман интегралында айнымалыны ауыстыру мәселесі – сегментте үзіліссіз функцияның айнымалысын мәндері функция анықталған сегментте жатып, үзіліссіз дифференциалданатын, жаңа сегментте анықталған функциямен алмастыру арқылы бастапқы функцияның Риман интегралын жаңа айнымалыға тәуелді күрделі функция мен ауыстырымдағы функция туындысының көбейтіндісін жаңа айнымалы анықталған сегментте интегралдау арқылы өрнектеу.

2. Риман интегралын бөліктеп интегралдау – берілген функцияны туындыларымен қоса үзіліссіз функциялар көбейтіндісі түрінде жазып, сол көбейтінді туындысы формуласының екі жағын да Риман бойынша интегралдағанда сызықтық қасиет бойынша пайда болған үш интегралдағы көбейтінді туындысының интегралы Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша тікелей есептеліп, интегралдан арылады да, көбейтінді түрінде жазылған бастапқы функция интегралының «симметриялы» мағынада анықталған оған қарағанда есептеу тұрғысынан ұтымды интеграл мен тікелей есептелген интеграл мәні арқылы өрнектелуі.

3. Қалдығы интегралдық түрдегі Тейлор формуласы – еселі рет туындылатын және ең үлкен ретті туындысы үзіліссіз функцияны Тейлор формуласымен жазуда бөліктеп интегралдау формуласын функция туындысы мен жіктеу көбейткішіне қажетті рет қолдану нәтижесінде ең үлкен ретті туынды мен жіктеу көбейкішінің бірге кем дәрежесінің сол туынды алынатын нүктеден сегменттің қайсыбір нүктесіне дейінгі интегралы арқылы өрнектелген қалдық мүшесі және оның Лагранж, Коши берген қалдық мүшелерге өтуі.

4. Орта мән туралы екінші теорема атты Риман интегралының аддитивтілік қасиетінің монотонды функция мен интегралданатын функциялар көбейтіндісіне жалпылауы болып, монотонды функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері арқылы интеграл таңбасы астынан алып шығуы – Риман интегралының аддитивтілік қасиеті сегменттегі кез келген нүкте үшін орындалса, сегментте кемімейтін функция мен интегралданатын функция көбейтіндісінің сол сегмент бойынша алынған Риман интегралының өспелі функцияның ең кіші және ең үлкен мәндерін сегменттің бастапқы нүктесінен қайсыбір нүктесіне дейінгі және ары қарай сол нүктеден соңғы нүктеге дейінгі аралықтағы интегралданатын функция интегралының сәйкес мәніне көбейтіндісінің қосындысына тең болатындай нүктенің табылу.

§6. ҚИСЫҚ ЖӘНЕ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ АРҚЫЛЫ ЕСЕПТЕЛЕТІН ОНЫҢ ҰЗЫНДЫҒЫ

1. Қисықтың аналитикалық түрде ортақ сегментте үзіліссіз және реттелген қос функция ретінде анықталуы мен оның геометриялық сипаттамасы – анықталу сегментіндегі тәуелсіз айнымалының әр мәніне үзіліссіз функциялар арқылы екі мән сәйкес қойылып, олардың ретіне сәйкес бірінші координатасы бірінші функция, екінші координатасы екінші функция мәні болатын нүкте салынады да, сондай нүктелердің барлығы бірігіп, жазықтықтағы қисықты құруы.

2. Қисық ұзындығының анықтамасы – қисық анықталған кесіндінің бөліктенуіне сәйкес қисықтың өзі де бөліктеніп, ұзындықтары шеткі нүктелерінің координаталарына Пифагор теоремасын қолдану арқылы анықталған кесінділерден тұратын сынық сызықтар ұзындықтарымен іштей жуықталғанда пайда болған қосынды супремумы ретінде.

3. Қисық ұзындығын Риман интегралы арқылы есептеу – интегралдық қосындыны бірден бермегенімен, Лагранж формуласы бойынша қандай функцияның интегралы болатындығына бағыт беретін анықтамадағы қисық сызық ұзындығына тең шама мен қисықты беретін реттелген, үзіліссіз функциялар арқылы өрнектелген функцияның интегралы арқылы ұзындық есептеу формулаларының теңдіктерін оны дәлелдеуге қарағанда оңай екі қарама-қарсы теңсіздікті супремум мен интегралының қосындылар тіліндегі анықтамасын қолдана отырып дәлелдеу арқылы алу.

§7. ЖАРАТЫЛЫСТАНЫ МӘСЕЛЕЛЕРІНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬ ҚҰРУ АРҚЫЛЫ РИМАН ИНТЕГРАЛЫН ҚОЛДАНУ ҮЛГІЛЕРІ

1. Сегментте үзіліссіз функциялар графиктері арқылы анықталған жазықтықтағы фигураның ауданын есептеу – ауданы Риман интегралымен өрнектелген бір таңбалы қисық сызықты трапецияларға жіктеу арқылы.

2. Айналу денесінің көлемін есептеу формуласы белгілі деп қабылданған цилиндр көлемі арқылы Риман интегралы теориясымен анықтау және оны есептеу формуласы – қисық сызықты трапеция өспен толық айналғанда шыққан айналу денесі атты дененің көлемін айналу өсіндегі кесіндіні бөлшектегенде пайда болған цилиндрлер көлемі арқылы іштей және сырттай жуықтағандағы құрылған қосындылардың интегралдар теориясындағы жоғарғы және төменгі қосындылар екендігін көрген соң ғана сол теориядағы үзіліссіз функцияның интегралы бар болуы туралы теоремадан қосындылардың сәйкес инфимумы мен супремумының ортақ мәнінің бар болуынан айналу денесінің көлемі бар деп, ал сол Риман интегралы бойынша өрнектелген ортақ санды ізденісті көлемнің мәні деп анықтама бойынша қабылдау.

3. Материялық қисықтың статикалық моменті мен ауырлық центрін интеграл арқылы есептеу – бірқалыпты таралған салмақты материялық қисық бөлшектенуіне сәйкес одан алынған нүктелер бойынша бір нүктеде шоғырланған әрбір бөлігінің салмағын дискретті жағдайдағыдай құрылғандағы қосындылар интегралдық қосындыны бергендіктен үзіліссіз функцияның Риман интегралы бар болып, сол интеграл мәні арқылы статикалық момент пен ауырлық центр мәнін анықтау және есептеу.

§ 8. РИМАН ИНТЕГРАЛЫН ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУ ӘДІСТЕРІ

1. Үзіліссіз функцияның Риман интегралын жуықтап есептеу деген не? – есептеу тұрғысынан күрделі, берілген сегменттегі ақырсыз нүктелерге тәуелді, дәл мәні тікелей есептеуге келмейтін $sup - inf$, шек болатын интеграл түріндегі ақырсыз объектіні квадратуралық формула атты функцияның түйін деп аталатын нүктедегі мәндерін сәйкес салмақтары деп аталатын коэффициенттерге көбейте отырып алынған ақырлы қосындымен қалауымызша алдын ала алынған дәлдікте алмастыру.

2. Лагранж интерполяциялық көпмүшелігі – алдын ала берілген жазықтықтағы ақырлы санды нүктелерден реті нүктелер санынан бірге кем көпмүшелік құру мәселесінің 1795 жылы Джозеф Лагранж берген Лагранж көпмүшелігі атты шешімі және сандық функцияның Лагранж интерполяциялық көпмүшелігі.

3. Лагранж интерполяциялық көпмүшелігін Риман интегралын жуықтап есептеуге қолдануының әдістемесі – интеграл астындағы үзіліссіз функцияны берілген сегменттің бөлшектеу нүктелерінде сол функцияның мәндері бойынша құрылған Лагранж интерполяциялық көпмүшелігімен алмастыру арқылы дәл есептелетін көпмүшеліктің интегралымен жуықтау.

4. Тіктөртбұрыштар әдісі – сегментті бірқалыпты жіктеген соң, интегралдың аддитивтік қасиеті бойынша әр бөлігіндегі интегралды интеграл астындағы функцияны бөлік ортасындағы мәні болатын нөлінші ретті Лагранж интерполяциялық көпмүшелігімен алмастыру арқылы жуықтау және жуықтау қателігінің екінші ретті туынды ең үлкен мәнінің бөлшектеу санының екінші дәрежесіне қатынасы арқылы алынған бағалауы.

5. Трапециялар әдісі – сегментті бірқалыпты жіктеген соң, интегралдың аддитивтік қасиеті бойынша әр бөлігіндегі интегралды сегмент ұштарындағы интеграл астыфункция мәні бойынша құрылған кесіндіні беретін бірінші ретті Лагранж

интерполяциялық көпмүшелігімен алмастыру арқылы жуықтау және жуықтау қателігінің екінші ретті туындысының ең үлкен мәнінің бөлшектеу санының екінші дәрежесіне қатынасы арқылы алынған бағалауы.

6. Параболалар (Симпсон) әдісі - сегментті бірқалыпты жіктеген соң, интегралдың аддитивтік қасиеті бойынша әр бөлігіндегі интегралды сегмент ұштары мен ортасындағы нүктедегі интеграл асты функция мәні бойынша құрылған параболаны беретін екінші ретті Лагранж интерполяциялық көпмүшелігімен алмастыру арқылы жуықтау және жуықтау қателігінің төртінші ретті туынды ең үлкен мәнінің бөлшектеу санының төртінші дәрежесіне қатынасы арқылы алынған бағалауы.

VIII ТАРАУ. САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

§1. САНДЫҚ ҚАТАР АТТЫ АҚЫРСЫЗ ҚОСЫНДЫНЫҢ АҚЫРЛЫ ҚОСЫНДЫМЕН ҰҚСАСТЫҒЫ ЖӘНЕ АЙЫРМАШЫЛЫҒЫ

1. Сандық қатар және де сол саны ақырсыз қосылғыштардың қосындысын тағайындау – берілген сандық тізбек мүшелерінің бірінші мүшесімен, екінші мүшесімен сол сияқты нөмірленген әр мүшесімен анықталатын сандық қатар атты ақырсыз қосынды түрінде жазылуы, қосылғыш саны қанша көп болса да, ақырлы қосынды мағыналы да, ақырсыз қосындының өзіндік мағынасыздығы, 1821 жылы "Сандық қатар деген шек" деп Коши айтқандай ақырсыз қосынды ұғымын дербес қосындысы деп аталатын тізбектің алғашқы мүшелері қосындыларынан құрылған сандық тізбек шегі нақты мәнді болғанда қатар жинақталады және қатар қосындысы осы тізбек шегіне тең, ал тізбек шегі ақырсыз не шегі жоқ болғанда қатар жинақталмайды деген түрғыда мағыналы етілуі.

2. Бірінші, екінші, жалпы айтқанда, әр мүшесімен анықталатын сандық қатарлардың сәйкес нөмірлі мүшелеріне сызықтық амалдарды қолданғанда пайда болған сандық қатар – сандық қатарды анықтайтын тізбекке белгілі сызықтық амалдар қолдану нәтижесінде пайда болған тізбек арқылы анықталған қатар берілген сандық қатарға қолданылған сол сызықтық амалдар нәтижесі ретінде, сандық қатарды нөлден өзгеше санға көбейту оның жинақталуын өзгертпеуі және жинақталған жағдайда санға көбейтілген қатар қосындысының бастапқы қатар қосындысы мен сол сан көбейтіндісіне тең болуы; екі жинақталатын қатардың сәйкес мүшелерінің қосындысынан құрылған қатардың да жинақталуы, жинақталатын және жинақталмайтын қатардың сәйкес мүшелерінің қосындысынан құрылған қатардың жинақталмауы, екі жинақталмайтын қатардың сәйкес мүшелерінің қосындысынан құрылған қатардың жинақталу да, жинақталмауы да мүмкіндігі.

3. Сандық қатардың дербес қосынды мен қалдық қатарына жіктелуі және сондай жағдайда қосындысы өзгермейтін ақырлы қосындыға қарағандағы ерекшеліктері – сандық қатарды белгілі бір нөмірлі мүшеге дейінгі нөмірлі мүшелерінен тұратын ақырлы қосынды мен қалған мүшелерінен құралған бастапқы қатардың қалдық қатары деп аталатын жаңа қатарға бөлу, бастапқы қатар мен қалдық қатар жинақталуының пара-парлығы, сол себепті қатар жинақталуының да, жинақталмауының да қатардың әр жеке мүшесіне тәуелсіздігі, қалдық қатардың бастапқы нөмірі өскен сайын нөлге ұмтылуы.

4. Сандық қатар мүшелерінің ақырлы қосылғыштарға жіктелуі арқылы, керісінше топтастырылған қатарды қайта ашу арқылы алынған жаңа қатарлар және олардың қалай жіктелсе де, қалай ашылса да қосындысы өзгермейтін ақырлы қосындыға қарағандағы ерекшеліктері – жинақталатын қатар мүшелерінің орнын ауыстырмай топтастырғанда әр мүшесі сәйкес топтағы қосындыға тең болатын жаңа қатардың құрылуы және сол жаңа қатардың да жинақталып, бастапқы қатар қосындысына тең болуы, керісінше, топтастырғанда шыққан қатар жинақталуының әр топтағы қосынды таңбасы бірдей болғанда ашылған қатарда сақталуы.

5. Сандық қатар жинақталуының бір қажетті шарты – сандық қатардың жалпы мүшесінің шегі бар және нөлге тең болуы, сол себепті қатардың жалпы мүшесінің нөлге ұмтылмауы оның жинақталмауын қамтамасыз етуі.

§2. БІР ТАҢБАЛЫ МҮШЕЛІ САНДЫҚ ҚАТАРЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ БІРЖАҚТАН ЖИНАҚТАЛУЫНЫҢ МОНОТОНДЫ ТІЗБЕКТЕР ЖИНАҚТАЛУЫМЕН ПАРА-ПАРЛЫҒЫ, ЖИНАҚТАЛУЫ БЕЛГІЛІ ЭТАЛОН ҚАТАРЛАРМЕН САЛЫСТЫРУЛАРЫ

1. Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының критерийі – қатар жинақталу, жинақталмауының тікелей анықтамасы бойынша дербес қосындылар тізбегінің сәйкес нақты мәнді шегі бар не болмауына пара-парлығы және қатар теріс емес сандардан құрылуынан оның дербес қосындылар тізбегі келесі нөмірге көшкенде теріс емес сан қосылып, кемімейтін болады да, монотонды тізбектің нақты мәнді шегі бар болуы жайлы критерийінен тізбектің жоғарыдан шенелу не шенелмеуіне баламалылығы.

2. Теріс емес мүшелі қатардың жинақталуының интегралдық критерийі – үзіліссіз, теріс емес, өспейтін функцияның бүтін мәнді мүшелерінен құрылған қатар жинақталуының $A+n \equiv \int\limits_1^n f(x)dx$ интегралымен анықталған кемімейтін тізбек шенелуімен пара-парлығы.

3. Нөмірлес мүшелері белгілі реттік қатынаста болатын екі теріс емес мүшелі сандық қатарлар жинақталуының салыстыру теоремалары – мүшелері үлкен қатардың жинақталуынан мүшелері кіші қатардың жинақталуы және мүшелері кіші қатардың жинақталмауынан мүшелері үлкен қатардың жинақталмауы, сонымен бірге мүшелері үлкен қатардың жинақталмауы немесе кіші мүшелі қатардың жинақталуы екінші қатардың жинақталу, жинақталмауы жайлы еш мәлімет бермеуі.

4. Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Коши белгісі және оның мәселені толық шешпеуі – қатардың жалпы мүшесінің n -ші дәрежелі арифметикалық түбірімен анықталған Коши көмекші тізбегінің шегі бар және бірден кіші, үлкен және тең болуына сәйкес берілген қатардың жинақталуы, жинақталмауы және мәселені шешпеуі.

5. Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Даламбер белгісі және оның мәселені толық шешпеуі – қатардың жалпы мүшесінің кейінгі мүшесіне қатынасы арқылы анықталған Даламбер көмекші тізбегінің шегі бар және бірден кіші, үлкен және тең болуына сәйкес берілген қатардың жинақталуы, жинақталмауы және мәселені шешпеуі.

6. Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Раабе белгісі және оның мәселені толық шешпеуі – $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ формуласымен анықталған Раабе көмекші тізбегінің шегі бар және бірден кіші, үлкен және тең болуына сәйкес берілген қатардың жинақталмауы мен жинақталуы.

7. «Қатардың тынысталуы» деген атауға ие сандық қатар жинақталуы мен жинақталмауының орнықтылығы – оң мүшелі жинақталатын қатардың мүшелерінің «кішкенелігінің» құпия заңдылығынан олардың барлығын қосқанда белгілі бір саннан аспауы, солай бола тұрып, оның әр мүшесін ақырсыз үлкен көбейткіштерге көбейтіп, мүшелерін «үлкейткенімен» қатардың жинақталуын сақтайтындай мүшелерде артық «қор» болуы және керісінше, оң мүшелі жинақталмайтын қатардың мүшелері тіпті нөлге ұмтылса да оның мүшелерінің «кішкенелігінің» құпия заңдылығынан қандай сан алсақ та одан асып қосынды құру мүмкіндігі және солай болғанда да оның әр мүшесін нөлге ақырсыз кемитін көбейткіштерге көбейтіп, мүшелерін «кішірейткенімен» қатардың жинақталмауын сақтауы.

§3.АЙНЫМАЛЫ ТАҢБАЛЫ МҮШЕЛІ ҚАТАРЛАР МЕН ОЛАРДЫҢ ТЕРБЕЛІС ТҮРДЕГІ ЖИНАҚТАЛУЫНЫҢ СУРЕТТЕМЕСІ ЖӘНЕ ЖИНАҚТАЛУДЫҢ АБЕЛЬ ТҮРЛЕНДІРУІ АРҚЫЛЫ ЖАЛПЫ ҚАТАРҒА АРНАЛҒАН КОШИ КРИТЕРИЙІНЕ КЕЛТІРЕТІН ШАРТТАРЫ

1. Екі таңбалы да мүшелерінің саны ақырсыз айнымалы таңбалы қатарлар және олардың жинақталу жолы – бір таңбалы қатардың дербес қосындылары бір бағытта өзгеріп, монотонды түрде өз шегіне бір жақты жолмен ұмтылса, бар-жоғы екі оң және теріс таңбаны да қамтитын айнымалы таңбалы қатарларда дербес қосындысына жаңадан енетін қосылғыштар топ-топпен кезекпен кездесетін теріс емес таңбалы топқа түскенде қосынды өсіп, оң емес топқа түскенде кеміп, ырғала шегіне ақырсыз ұмтылуы.

2. Жалпы жағдайдағы сандық қатар жинақталуының Коши критерийі – сандық қатар жинақталуы дербес қосынды атты сандық тізбек жинақталуымен анықталғандықтан қатар жинақталуы сол дербес қосындыдан құрылған сандық тізбектің нақты мәнді шегі бар болуы жайлы Коши критерийінің қатарлар тіліндегі екі дербес қосындының айырмасы болатын ақырсыз қосындының бір нөмірден үзбей екінші нөмірге дейінгі кесіндісімен жазылған көшірмесі ретінде.

3. Әр қосылғышы екі санның көбейтіндісі болатын ақырлы қосындының Абель түрлендіруі – біріншісінен сол нөмірлі мүшеге дейінгі бірінші көбейткіштердің қосындысын екінші көбейткіштің алдындағы мүшемен айырмасына көбейткендегі көбейтінділер қосындысы мен өзіндік түрдегі шеткі жағдайлардың қосындысы түрінде.

4. Сандық қатар жинақталуының Дирихле белгісі мен оның салдары болатын Лейбниц теоремасы – біріншісінің мүшелерінен құрылған дербес қосындылары шенелген, екіншісі кеми отырып, нөлге ұмтылатын екі тізбектің нөмірлес мүшелерінің көбейтіндісі түрінде берілген сандық қатар жинақталуын Абель түрлендіруі бойынша Коши критерийімен бекіту және бірінші көбейткіш кезекпен кезек екі таңбаның ауысуын бергендегі оның салдары.

5. Сандық қатар жинақталуының Абель белгісі – біріншісінен құрылған қатар жинақталып, екіншісі монотонды, шенелген екі тізбектің нөмірлес мүшелерінің көбейтіндісі түрінде берілген сандық қатар жинақталуын Абель түрлендіруі бойынша Коши критерийімен бекіту.

6. Лейбниц теоремасының тағы бір дәлелдеуі – теорема шартын тікелей қолданып, тақ және жұп нөмірлерінен құралған тізбекшелер монотонды және шенелген тізбек ретінде жинақталғандықтан дербес шектер қасиеттері негізінде олардың бар және ортақ шектерінің дербес қосынды шегін беруі.

§4. АБСОЛЮТТІ ЖӘНЕ ШАРТТЫ ЖИНАҚТАЛАТЫН САНДЫҚ ҚАТАРЛАР МЕН ОЛАРДЫҢ АЛМАСТЫРУЛАРЫ

1. Сандық қатардың абсолютті және шартты атты жинақталу түрлері – қатар мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған жаңа қатардың жинақталуы бастапқы қатардың абсолютті деп аталатын жинақталуын анықтауы және абсалютті жинақталу міндетті түрде бастапқы қатар мүшелерінің «кішкене» болуымен қатардың өзінің де жинақталуын қамтамасыз етуі, абсолютті жинақталмайтын бастапқы қатар жинақталғанда оның шартты жинақтылық деп аталуы және осы жинақталу қатар мүшелерінің абсолют шамасына таңба әсер етуімен тербеле қамтылуы.

2. Мүшелері бастапқы қатар нөмірлерімен міндетті түрде бір және тек бір рет қана нөмірленетін жаңа алмастырылған қатар – берілген қатарды анықтайтын тізбектің оң бүтін сандар жиынынан тұратын анықталу жиынын өзара бірмәнді сәйкестікте пайда болған тізбекпен жасалған қатар алмастыруы деп аталатын жаңа қатардың құрылуы.

3. Абсолютті жинақталатын қатардың барлық мүмкін алмастыруларының жинақталуы мен олардың қосындыларының бірмәнділігі – абсолютті жинақталатын қатар қосындысының ақырлы қосындыдағыдай қосынды мәнін сақтап, қосылғыштардың орындарын қалауымызша алмастыруға болатындығы.

4. Шартты жинақталатын қатардың алдын ала берілген кез келген санға жинақталатын алмастыруының бар болуы туралы Риман теоремасы – берілген айнымалы таңбалы қатар абсолютті жинақталмағандықтан ретімен тек теріс емес таңбалы мүшелері $+\infty$ -ке ұмтылатын, теріс таңбалы мүшелері $-\infty$ -ке ұмтылатын қатарлар болады да, нөлге ұмтылатын бір мүшеге біресе асып, біресе кеми отырып, екі қатардың мүшелерін кезекпен қоса алдын ала берілген нақты санға ұмтылатын, сол сияқты $+\infty$ пен $-\infty$ ұмтылатын қатарды құру.

§5. САНДЫҚ ҚАТАРЛАРДЫҢ КӨБЕЙТІНДІСІ МЕН ЕСЕЛІ ҚАТАРЛАР

1. Екі сандық қатардың Коши көбейтінді атты жаңа қатар мен Мертенс теоремасы – әрбір мүшесі көбейткіш қатарлардың тиісті мүшелерімен алгебралық көпмүшеліктің көбейтіндісі жолымен айнымалы дәрежесі алдындағы коэффициенттер түрінде анықтатын Коши көбейтіндісі және екі жәй жинақталатын қатардың Коши көбейтіндісінің әрқашан жинақтала бермеуі, ал ең болмағанда біреуі абсолютті жинақталғанда оның жинақталып, осы көбейтіндінің екі қатар қосындысының көбейтіндісіне тең болатындығын беретін Мертенс теоремасы.

2. Екі сандық қатардың өзі де сандық қатар болатын көбейтіндісінің жалпы анықтамасы – оң бүтін саннан құрылған барлық мүмкін жұптар жиынын өзара қиылыспайтын және әрбір жұп міндетті түрде біреуінде және тек қана біреуінде жататын ақырлы жиыншаларға бөлу арқылы сол жиында жататын жұптарға сәйкес сандық қатарлар мүшелерінің қос-қостан көбейтінділерінің қосындыларын жаңа қатар мүшесі болатындай нөмірлей отырып, екі қатар көбейтіндісін анықтаудың жалпы шексіз әдістері.

3. Еселі сандық қатарлар және олардың жинақталуы – теріс емес бүтін саннан құрылған барлық мүмкін жұптар жиынында анықталған функция түріндегі $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ екі еселі тізбек, осы тізбектің барлық мүшелерінің қосу таңбасымен жазылған $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = a_{0,0}+a_{0,1}+a_{1,0}+\ldots$ символы түріндегі екі еселі қатары және оның жинақталуының бірінің ішінде бірі орналасқан жұптардың ақырлы жиындары бойынша құрылған сандық қатар жинақталуымен анықталуы.

§ 6. НАҚТЫ САНДАРДЫҢ АҚЫРСЫЗ КӨБЕЙТІНДІСІНІҢ АҚЫРЛЫ КӨБЕЙТІНДІМЕН ҰҚСАСТЫҒЫ ЖӘНЕ АЙЫРМАШЫЛЫҒЫ

1. Ақырсыз көбейтінді және де сол саны ақырсыз көбейткіштердің көбейтіндісін тағайындау – берілген сандық тізбек мүшелерінің бірінші мүшесімен, екінші мүшесімен сол сияқты нөмірленген әр мүшесімен анықталатын ақырсыз көбейтінді атты көбейтінді түрінде жазылуы, көбейткіштер саны қанша көп болса да, ақырлы көбейтінді мағыналы да, ақырсыз көбейтіндінің өзіндік мағынасыздығы, ақырсыз көбейтінді ұғымын дербес көбейтінді деп аталатын тізбектің алғашқы мүшелері көбейтінділерінен құрылған сандық тізбек шегі нақты мәнді болғанда ол жинақталады және көбейтінді мәні осы тізбек шегіне тең, ал тізбек шегі ақырсыз не шегі жоқ болғанда көбейтінді жинақталмайды деген тұрғыда мағыналы етілуі.

2. Оң мәнді көбейткішті ақырсыз көбейтінді жинақталуы мен оның сәйкес мүшелерінің логарифмінен құралған сандық қатар жинақталуының пара-парлығы - дербес көбейтінді логарифмінің мүшелері логарифмінің қосындысы арқылы жазалуы.

3. Валлис формуласы - $\frac{\pi}{2}$ санының оған жинақталатын, жалпы мүшесі $\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}$ ақырсыз көбейтінді арқылы бейнеленуі.

IX ТАРАУ. ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕКТЕР МЕН ҚАТАРЛАР ШЕККЕ КӨШУ АРҚЫЛЫ ФУНКЦИЯ БЕРІЛУІНІҢ ӘДІСІ РЕТІНДЕ

§1. ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕК ПЕН ҚАТАР, ОЛАРДЫҢ НҮКТЕЛІ ЖИНАҚТАЛУЫ ЖӘНЕ ОЛАРМЕН ФУНКЦИЯНЫ АНЫҚТАУ ӘДІСТЕМЕСІ

1. Функциялық тізбек пен функция анықтауын қамтамасыз ететін нүктелі жинақталуы деп аталатын ең аз үнемді шарты және солар арқылы нүктелі шек атты функция берілуінің тағы бір әдістемесі – табиғаты кез келген жиын алдын ала беріліп, әр оң бүтін санға сол жиында анықталған функцияны сәйкес қоятын функциялық тізбек атты ереже және сол жиынның әрбір нүктесінде функциялық тізбек айналатын сандық тізбектің нақты мәнді шегі бар болғанда функциялық тізбектің нүктелі шек атты функцияға нүктелі жинақталуы және әр нүктеге сол шекті сәйкес қою арқылы функцияны анықтаудың тағы бір тәсілі.

2. Функциялық қатар мен функция анықтауын қамтамасыз ететін нүктелі жинақталуы деп аталатын ең аз үнемді шарты және солар арқылы нүктелі шек атты функция анықтауының тағы бір әдістемесі – берілген функциялық тізбектің мүшелерін қосу таңбасымен жалғайтын сол жиында берілген функциялық қатар атты символ, оның нүктелі жинақталуының алғашқы мүшелерінің қосындысынан құрылған дербес қосындылар деп аталатын функциялық тізбек тілінде анықталуы және сондағы нүктелі шек функциялық қатардың да сондай атаулы функциясы болуы, осылайша функцияны анықтаудың тағы бір тәсілі.

3. Нүктелі жинақталу кезінде шектік функция функциялық тізбек пен қатар мүшелерінің үзіліссіздік, дифференциалдану, интегралдану қасиеттерін әрқашан сақтай бермейтіндігін, сақтаған жағдайдың өзінде теңдік орындала бермейтіндігін көрсететін мысалдар мен содан туындайтын зерттеу мәселелері – ақырлы қосындыда қосылғыштардың барлық қасиеттері қосындыға өткенімен, ақырсыз қосындыда шекке көшу кезінде қасиеттердің жоғалуы.

§2. ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕК ПЕН ҚАТАРДЫҢ БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУЫ

1. Функциялық тізбек пен қатардың бірқалыпты жинақталуы – функциялық тізбек не қатар тек функцияны ғана анықтап қоймай мүшелерінің қасиеттерін шектік функцияда сақтауды көздегенде нүктелі жинақталу атты ең аз талапты күшейтетін жинақталу түрі.

2. Функциялық тізбек пен қатардың жиында бірқалыпты жинақталуының Коши критерийлері – бірқалыпты жинақталудың шектік функцияның қатысуынсыз тек функциялық тізбек не қатар мүшелерінің өзара қатынасымен ғана анықталуы.

3. Нүктелі және бірқалыпты жинақталу ұғымдарының арақатынасы – бірқалыпты жинақталатын функциялық тізбектің де, қатардың да нүктелі шектік функцияға әрқашанда нүктелі жинақталуы, бірақ та бұның кері бағытта әрқашан орындала бермеуі.

4. Нүктелі жинақтылығы алдын-ала белгілі функциялық тізбектің бірқалыпты жинақталу критерийі – нүктелі жинақталатын функциялық тізбек мүшелерінің жиында шектік функциясынан ауытқуының супремумдарынан құрылған сандық тізбектің нөлге ұмтылуымен пара-парлығы және оның функциялық қатар жағдайына көшірмесі.

5. Функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақталуының Вейерштрасс белгісі – функциялық қатардың әрбір мүшесін сол жиында шенейтін сандардан құрылған сандық қатар жинақталуынан шығуы.

6. Функциялық қатардың бірқалыпты жинақталуының Дирихле және Абель белгілері – сандық қатар жолына сәйкес Коши критерийі және Абель түрлендіруінің тікелей салдары ретінде.

§3. БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ МЕН ҮЗІЛІССІЗДІК

1. Бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың мүшелерінің үзіліссіздік қасиетінің шектік функциясында сақталуы – кесіндіде әр мүшесі үзіліссіз болатын функциялық қатардың нүктелі шегі болатын функция үзілісті болуы мүмкін болса да, жинақталу түрін бірқалыптыға дейін күшейткенде қатар мүшілерінің үзіліссіздік қасиетін сақтап, шектік функцияның да үзіліссіз болуы.

2. Дини теоремасы – сегментте үзіліссіз шектік функциясына монотонды, сол себепті нүктелі ұмтылатын мүшелері де үзіліссіз функциялық тізбектің бірқалыпты жинақталуы.

3. Бірқалыпты жинақталатын функциялық қатарда шек пен қатар таңбасының ауыстырымдылығы – аралықта бірқалыпты жинақталатын функциялық қатар мен сол жиынның шектік нүктесі болатын нүктеде функциялық қатардың анықталмауы да мүмкін әрбір мүшесінің нақты мәнді шегі бар болып, сол шектерден құралған сандық қатардың жинақталуынан шектік функцияның да сол шектік нүктедегі шегі бар болуы және оның мәнінің сандық қатар қосындысына тең болуы.

§4. БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДАНУ

1. Үзіліссіз функциялардан құрылған функциялық қатарды мүшелеп интегралдау – сегментте үзіліссіз, сол себепті Риман бойынша интегралданатын функциялардан құрылған бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың әрбір мүшесінің интеграл мәндерінен құрылған сандық қатар жинақталуы және оның қосындысының шектік функция интегралына тең болуы.

2. Интегралданатын функциялардан құрылған функциялық қатарды мүшелеп интегралдау – сегментте Риман бойынша интегралданатын функциялардан құрылған бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың әрбір мүшесінің интеграл мәндерінен құрылған сандық қатар жинақталуы және оның қосындысының шектік функция интегралына тең болуы.

§5. БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУ

1. Нүктелі жинақталатын функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау – мүшелері үзіліссіз дифференциалданып, өзі нүктелі және туындыларынан құрылған жаңа функциялық қатар бірқалыпты жинақталатын қатардың шектік функциясының да дифференциалдануы және әр нүктеде туындыларынан құрылған қатар қосындысының шектік функция туындысына тең болуы.

2. Кемінде бір нүктеде жинақталатын функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау – мүшелері дифференциалданып, өзі кемінде бір нүктеде және туындыларынан құрылған қатар бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың бірқалыпты жинақталуы мен сол шектік функцияның дифференциалдануы және әр нүктеде туындыларынан құрылған қатар қосындысының шектік функция туындысына тең болуы.

§ 6 ДӘРЕЖЕЛІК ҚАТАРЛАР

1. Дәрежелік қатар – мүшелері коэффициент деп аталатын нақты санға көбейтілген теріс емес бүтін көрсеткішті дәрежелік функция ретінде жазылған, сол коэффициенттерімен толық анықталатын ерекше функциялық қатар. Дәрежелік қатардың Коши-Адамар формуласы арқылы анықталатын жинақталу интервалы және де одан айырмашылығы ең көп дегенде шеткі нүктелері болатын жинақталу аралығы.

2. Дәрежелік қатардың жинақталу интервалында іштей жатқан кез келген сегментте бірқалыпты жинақталуы мен жинақталу интервалының өзінде қосындысының үзіліссіздігі.

3. Абель теоремасы – дәрежелік қатардың қосындысының жинақталу аралығының әр нүктесіндегі үзіліссіздігі.

4. Дәрежелік қатар қосындысының жинақталу аралығында іштей жатқан кез келген сегментте интегралдануы мен жинақталу интервалында дифференциалдануы.

5. Бір нүктеде шенелген туындылары бар функция үшін сол туындылар арқылы коэффициенттері анықталатын Тейлор қатары атты дәрежелік қатар - нүктеде ақырсыз дифференциалданатын функция үшін дербес қосындылары функцияның сол нүктедегі туындылары арқылы берілген Тейлор формуласымен анықталатын дәрежелік қатар құру және оның жинақталу радиусының Коши-Адамар формуласымен анықталуы.

6. $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\mu$ функциялардың анықталу жиынның әр нүктесінде Тейлор қатарына жіктелуі.

§ 7. АНАЛИЗДІҢ КЕЙБІР МАҢЫЗДЫ ТЕОРЕМАЛАРЫ

1. Бірде-бір нүктеде ақырлы туындысы жоқ үзіліссіз функцияның Вейерштрасс берген тригонометриялық қатар түріндегі $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(b_n x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ мысалы – үзіліссіз $f(x) = |x|$ функциясы жалғыз ғана $x = 0$ нүктесінде дифференциялданбаса, Вейерштрасс берген мысалдың сандық жиынның әр нүктесінде ақырлы туындысының болмауы.

2. Әрбір үзіліссіз функцияны кез келген дәлдікпен алгебралық көпмүшелікпен жуықтау туралы Вейерштрасс теоремасы - құрылысы шексіз еркіндіктегі үзіліссіз функция мен құрылысы ең үлкен дәрежеге тең кез келген нүктелердегі мәндерімен толық анықталатын қайсыбір алгебралық көпмүшелік айырмасының алдын ала алынған дәлдік атты оң саннан аспауы.

3. Стирлинг формуласы – күрделілігі бірден бастап алдын ала берілген оң бүтін санға дейінгі барлық оң бүтін сандардың көбейтіндісінен тұратын кез келген оң бүтін сан факториалын жинақы түрде көрсеткіштік және дәрежелік функциялардың көбейтіндісімен дәл өрнектеутінің бар болу түріндегі теңдік.

4. Тригонометриялық функциялардың аналитикалық анықтамасы – мектептен бастап геометриялық сызба арқылы алынған функция анықтамасына сай емес тригонометриялық функциялар үшін оның бар қасиеті мен сызбасын сақтайтын тригонометриялық қатарды ереже ретінде сәйкес қою арқылы аналитикалық түрде анықтау.

ТАРАУ. R^n ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІ

§ 1. МАТЕМАТИКАЛЫҚ R^n ҚҰРЫЛЫМЫ

1. Математика – математикалық құрылымдар жайындағы ғылым, құрылым – элементтерінің арасына кейбір қатынастар тағайындалған жиын.

2. R^1 барлық нақты сандар жиыны математиканың негізгі құрылымы ретінде кейбір қасиеттерімен бөлісіп, көптеген топ, сақина, өріс тәрізді жаңа құрылымдарға әкеледі, солардың ішіндегі ең мазмұндысы – n -өлшемді R^n Евклид кеңістігі.

3. Жиындардың тіке көбейтіндісі бастапқылардан туындайтын жаңа құрылым ретінде – алдын ала берілген жиындар тізбесінен бір элементтен ала отырып, рет-ретімен тізбеленген бір тұсас элементтер жиыны.

4. R^n жиыны n рет алынған R^1 жиынының тіке көбейтіндісі – әр элементі координата атты реттелген n нақты сан тізбесі болатын құрылым.

5. Толық анықтамасыз, тек түсінік деңгейінде қолданылған, ереже, сәйкестік, тәртіп ұғымдарынсыз функция анықтамасының тағы бір түрі – анықталу және мәндер қабылданатын екі жиынның тіке көбейтіндісінің графигі түрінде, ширатып айтқанда, бірінші жиынның әр элементі мен екінші жиынның бір ғана элементі жұптасқан арнайы жиыншасы түрінде.

6. Сызықтық R^1 кеңістігі – элементтерінің арасында қосу және нақты санға көбейту амалдары анықталған жиын.

7. R^1 негізгі құрылымындағы нақты санның абсолютті шамасын толық сипаттайтын қасиеттері негізіндегі R^n сызықтық кеңістігіндегі норманың жалпы анықтамасы – норманың теріс еместігі, элемент нөлге тең болғанда ғана және сол жағдайда ғана норманың нөлге тең болуы, біртектілігі мен үшбұрыштар теңсіздігін қанағаттандыруы.

8. R^n сызықтық кеңістігіндегі әр элементтің евклидтік нормасы – екі өлшемді жағдайда Пифагор теоремасы бойынша координата басынан сол нүктеге дейін есептелген арақашықтық сол элементтің нормасы деп қабылданған, ары қарай $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ түрінде жалғасатын Евклид атты норма.

9. R^n нормаланған кеңістігіндегі Евклидтің нормасына эквивалентті тағы екі норма – координаталарымен анықталатын әр элементтің координаталарының абсолют шамаларының қосындысы және абсолют шамаларының ең үлкені түрінде анықталған нормалар және олардың эквиваленттілігін беретін бірін-бірі шенейтін теңсіздіктерді қанағаттандыруы.

10. Метрикалық кеңістік анықтамасы мен R^n метрикалық кеңістігі – R^n кеңістігінде норма арқылы екі элементтің $\rho(x, y) = \|x - y\|_r$ арақашықтығын енгізіп, оның теріс еместік, екі элемент өзара тең болғанда және тек сонда ғана нөлге тең болуы,

симметриялық, үшбұрыштар теңсіздігін қанағаттандыруы және метрика деп аталуы, метрика анықталған жиынның метрикалық кеңістік деп аталуы, соның ішінде, R^n кеңістігінің нормаланғаннан метрикалық кеңістікке кеңеюі.

11. R^n сызықтық кеңістігіндегі скалярлық көбейтінді – геометрияның ұзындық пен бұрыш ұғымдарын R^n кеңістігіне енгізетін және олардың сандық мәндерін нүкте координаталары арқылы сипаттауға мүмкіндік беретін, аттас координаталарының көбейтіндісінің қосындысы арқылы анықталатын амал.

12. R^n сызықтық кеңістігі векторлық кеңістігі ретінде – скалярлық көбейтіндімен жабдықталған R^n сызықтық кеңістігі.

13. R^n кеңістігіндегі ортогоналды және нормаланған стандартты базис – сәйкес әртүрлі екеуінің скалярлық көбейтіндісі нөлге, ұзындықтары бірге тең R^n кеңістігінің әр элементін бірмәнді жіктейтін n элементті жүйе.

§2. R^n НОРМАЛАНҒАН КЕҢІСТІКТІҢ ЖИЫНШАЛАРЫ

1. Тағы да жиындарға қолданылатын амалдар – қабылдайтын мәндері шектелмеген индекс атты белгімен таңбаланған жиындарға бірігу, қиылысу амалдарын қолдану.

2. R^n нормаланған кеңістігіндегі евклидтік норма жағдайындағы маңай – алдын ала берілген нүктеден арақашықтығы алдын ала берілген саннан аспайтын барлық нүктелерден құрылған шар деп аталатын евклид нормасына қатысты маңай атты R^n кеңістігінің жиыншасы.

3. R^n нормалаған кеңістігіндегі үш түрлі маңайлар және олардың арақатынастары – алдын ала берілген нүктемен алдын ала бекітілген эквивалетті үш норманың бірі бойынша анықталған арақашықтығы маңай радиусы атты алдын ала берілген оң саннан аспайтын барлық нүктелерден құрылған сол нормаға сәйкес маңай атты R^n кеңістігінің жиыншасы және нормалардың эквиваленттілігінен олар арқылы анықталған маңайлардың әрқашан да бірінің ішіне бірінің салынуы.

4. R^n кеңістігінің берілген жиыншасының ішкі нүктесі, жиынның ашық болуы және де осы анықтамалардың эквивалентті үш нормаға тәуелсіздігі – берілген жиынның қайсыбір маңайымен сол жиында толығымен жататын ішкі нүкте атты нүктесі, әрбір нүктесі ішкі болатын ашық жиын және бір нормамен ішкі нүкте болса, қалғандарымен де ішкі болуы.

5. R^n кеңістігінің берілген жиыншасының шектік және оңашаланған нүктелері, жиынның тұйық болуы – сәйкес R^n кеңістігінен алынған нүктенің кез келген маңайында жиынның ақырсыз көп нүктелерінің болуы және сол жиыннан алынған нүктенің қандай да бір маңайында сол жиынның одан өзге бір де бір нүктесінің болмауы, әр шектік нүктесі өзінде жататын жиын.

6. Берілген жиынның R^n кеңістігіне дейінгі толықтауыш жиыны, ашық және тұйық жиындардың өзара толықтауыш болу қасиеті – R^n кеңістігі мен берілген жиынның толықтауы атты сол жиында жатпайтын барлық нүктелерден құрылған айырмасы, әрқашанда тұйық жиынның толықтауышының ашық, ашық жиынның толықтауышының тұйық болуы.

7. Берілген жиынның іші, сырты және шекарасы – R^n кеңістігіндегі әр жиын бойынша кеңістік өзара қиылыспайтын үш жиынға жіктеледі: қайсыбір маңайымен жиында толық жататын ішкі нүктелерден құрылған жиынның іші, сыртқы нүкте деп аталатын қайсыбір маңайында жиынның бір де бір нүктесін қамтымайтын барлық нүктелерден құрылған жиынның сырты, шекаралық нүкте атты кез келген маңайында жиында жататын да, жатпайтын да нүктелер табылатын барлық нүктелерден құралған жиынның шекарасы.

§ 3. R^n СЫЗЫҚТЫҚ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ШЕК

1. Мәндері R^n кеңістігіндегі тізбек және оның шегі – әрбір оң бүтін санға R^n кеңістігінің бір элементін сәйкес қоятын ереже және сандық тізбек шегі анықтамасындағы $|x_n - a| < \varepsilon$ модулді теңсіздігін $\|x_n - a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \varepsilon$ нормалы теңсіздігімен алмастырғандағы анықтаманың сөзбе-сөз қайталануы.

2. R^n сызықтық кеңістіктегіндегі тізбек шегінің оның координаталық тізбегі болатын R^1 кеңістігіндегі шектермен өзара байланысы – R^n сызықтық кеңістіктегіндегі бір тізбектің сол жиын элементіне жинақталуының координаталық тізбек атты n сандық тізбек жинақталуына пара-парлығы және R^n кеңістігіндегі шектің координаталық тізбек шектері арқылы жазылуы.

3. R^n сызықтық кеңістігіндегі Коши критерийі – R^n кеңістігіндегі тізбектің сол кеңістік элементіне жинақталуын оның ішкі құрылысы арқылы бейнелеген, сандық тізбек үшін берілген Коши критерийінің модулді нормаға алмастырғандағы оқылуы мен талқылауының дәлме-дәл қайталануы болатын қажетті және жеткілікті шарты.

4. R^n жағдайындағы Больцано-Вейерштрасс теоремасы – кез келген шенелген тізбектен шегі бар тізбекше бөліп алу мүмкіндігі.

5. Көп айнымалылы сандық функция – R^n сызықтық кеңістігінің жиыншасы болатын жиынның әр элементіне бір ғана нақты сан сәйкес қоятын ереже.

6. Көп айнымалылы сандық функцияның нақты мәнді шегінің анықтамасы – бір айнымалы сандық функция шегі анықтамасындағы аргументке қатысты модулді теңсіздігін нормалы теңсіздікпен алмастырғандағы анықтаманың сөзбе-сөз қайталануы.

§4. R^n КЕҢІСТІГІНДЕГІ ТҰЙЫҚ ЖӘНЕ ШЕНЕЛГЕН ЖИЫНДА АНЫҚТАЛҒАН ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ЕРЕКШЕ ҚАСИЕТТЕРІ ТУРАЛЫ ВЕЙЕРШТРАСС ЖӘНЕ КАНТОР ТЕОРЕМАЛАРЫ. КОМПАКТІ ЖИЫНДАР

1. Көп айнымалылы сандық функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасы – көп айнымалылы сандық функцияның анықталу жиынында жатқан нүктесіндегі нақты мәнді шегінің бар және сол шектің функция мәніне тең болуы.

2. Барлық мүшелері тұйық және шенелген R^n жиында жататын тізбектен әрқашанда шегі сол жиында жататын тізбекше бөліп алу мүмкіндігі.

3. Көп айнымалылы сандық функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері бар болу шарттарын анықтайтын Вейерштрасс теоремасы – функцияның тұйық және шенелген жиында анықталған және үзіліссіз болуы.

4. Көп айнымалылы сандық функцияның анықталу жиындағы бірқалыпты үзіліссіздігі мен оны қамтамасыз ететін шарттарды анықтайтын Кантор теоремасы – көп айнымалы сандық функцияның нүктеде үзіліссіздік анықтамасында табылатын оң сан әр нүктеге тәуелді жеке табылмай жиынның барлық нүктелеріне бірдей табылуы және осы үзіліссіздіктің бірқалыптылығын қамтамасыз ететін функция анықталу жиынының тұйық және шенелген болуы мен әр нүктесінде үзіліссіз болуы.

XI ТАРАУ. КӨП АЙНЫМАЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ТЕОРИЯСЫ

§1. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУЫ ЛОКАЛДЫ СЫЗЫҚТАНДЫРУЫ РЕТІНДЕ

1. Тағы да бір айнымалылы функцияның нүктеде дифференциалдануының анықтамасы мен сондағы дифференциал деп аталатын бір айнымалы сызықтық функция туралы – функция өсімшесінің кездейсоқ емес, қарапайымдылығы тұрақты функцияның келесісі болатын сызықтық функция түрінде эквивалентті жазылулары.

2. Көп айнымалының сандық сызықты функциясының анықтамасы және оның жалпы түрі – функцияның әр екі нүктеде бір мән қабылдауы түріндегі тұрақтылық қасиеттен кейінгі қарапайым сызықтылық қасиетін қанағаттандыратын функцияның түрін анықтау.

3. Көп айнымалылы сандық сызықтық функцияның коэффициенттері және олар стандарттық базис мүшелерінің сол сызықтық функцияның мәндері ретінде.

4. R^n кеңістігіндегі әр сызықтық функция оның аргументі мен коэффициенттерінің векторлық түріндегі скаляр көбейтіндісі ретінде.

5. Бір айнымалылы сызықтық функцияның түзу түріндегі жазықтықтағы геометриялық бейнесі.

6. Екі айнымалылы сызықты функцияның жазықтық түріндегі кеңістіктегі геометриялық бейнесі.

7. Көп айнымалылы сандық функцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасы – функция өсімшесі дифференциал атты аргумент өсімшесіне тәуелді сызықтық функция мен аргумент өсімшесімен бірге, бірақ оның ұзындығына қарағанда нөлге тез ұмтылатын «бүлдіргіш» атты функциялардың қосындысы түрінде өрнектелуі.

8. Көп айнымалылы фунцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасының скаляр көбейтінді арқылы өрнектелуі.

9. Сызықтық функцияның орта мектеп пен математика ғылымындағы атауы біреу болғанымен, түсінулерінің өзгешелігі – орта мектепте сызықтық функция деп түзу теңдеуін атаса, математика ғылымда сызықтық қасиетті қанағаттандыратын функцияның аталуы.

10. Екі және үш айнымалылы функцияның нүктеде дифференциалдануының тікелей қолдануға ыңғайландырылған жазылулары.

11.Көп айнымалылы сандық функцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасындағы қосылғыштарының мағынасин сипаттайтын атаулар мен талқылауларды жинақтап қорытындылау – дифференциалданатын функция өсімшесін құрайтын сызықтық функция мен «бүлдіргіш» жайлы әртүрлі мәліметтер мен әртүрлі өрнектелулері.

12. Көп айнымалылы сандық функцияның ашық жиында дифференциалдануы және де бұл анықтамада жиын ашық болуының себебі – аргумент өсімшесі 0 нүктесінің толық маңайында өзгеруі қажет болса, функция жайлы мәлімет дифференциалданатын нүкте маңайындағы толық көлемді құрылысына тәуелді.

§2. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ЖӘНЕ СОЛ СЫЗЫҚТЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ БОЛАТЫН ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛАР

1. Көп айнымалылы функцияның нүктедегі дифференциалы – дифференциалданатын функция өсімшесінің сызықтық бөлігі ретінде алынған бүкіл кеңістікте анықталған сызықты функция.

2. Дифференциал – сызықты функция өз коэффициенттерімен толық анықталатындықтан, функцияның локалды құрылысы бойынша оның коэффциеттерін бейнелеу мәселесінің қойылуы.

3. Дифференциал анықтамасындағы сызықтық функцияның коэффициенттерін анықтауда дербес туынды атты жаңа ұғымның пайда болуы – есептеулер көрнекі, жазу ықшам болуы мақсатында екі өлшемді жағдайды қарастыру.

4. Көп айнымалылы функцияның белгіленген айнымалысы бойынша нүктедегі дербес туындысы – көп айнымалылы функцияның нүктедегі дифференциалының сәйкес айнымалыларының коэффициенті.

5. Дербес туындының анықтамасын бір айнымалылы функцияның туындысы ретінде өрнектеу және оның геометриялық суреттемесі – бекітілген айнымалыдан басқаларының барлығын тұрақты ретінде қабылдап, бір айнымалылы функция түрінде қарастыру және функция графигі мен осы айнымалыны қамтымайтын $(n-1)$ өлшемді жазықтықтың қиылысуын беретін «қисыққа» $(a_1, a_2, \ldots, a_n, f(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті.

6. Көп айнымалылы функцияның дербес туындысын есептеу мәселесінің бір айнымалы жағдайға көшірілуі – элементар функция мысалында дербес туынды табуды жүргізу.

7. Нүктеде дифференциалданатын функцияның сол нүктедегі дифференциалын дербес туынды арқылы дәл өрнектеу мүмкіндігі – нүктеде дифференциалданатын функцияның сол нүктедегі барлық дербес туындыларының бар болуы және олардың сызықтық функциядағы сәйкес айнымалылар коэффициенттеріне тең болуы, керісінше, нүктеде барлық дербес туындылары бар функцияның сол нүктеде міндетті түрде дифференциалдана бермеуі.

8. Нүктеде дифференциалданатын көп айнымалылы функция сол нүктеде үзіліссіз де – бір айнымалылы функция тәрізді көп айнымалылы функцияның дифференциалдану қасиетінің үзіліссіздік қасиетін де қамтамасыз етуі, бірақ кері жағдайдың әрқашан орындала бермеуі.

9. Көп айнымалылы функцияның нүктедегі дифференциалын белгілеу туралы келісімдер – дифференциалдың әртүрлі жазуларының арасындағы $df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$ түріндегі негізгісіндегі $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ белгілеулерінің әрқайсысы біртұтас болып, толық көлемде Rn кеңістігін құрап, сызықтық функцияның әдеттегі айнымалысы болуы.

§3. ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ БАРЛЫҚ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛАРЫ АРҚЫЛЫ БЕРІЛГЕН ҚАСИЕТТЕРІ

1. Функцияның нүктеде дифференциалдануын қамтамасыз ететін дербес туындылар тіліндегі шарты – сол нүктенің маңайында дербес туындылары бар және сол нүктеде үзіліссіз болуы.

2. Ашық жиында анықталған және оның әр нүктесінде барлық дербес туындылары бар және үзіліссіз функцияның сол жиынның әр нүктесінде дифференциалдануы – функцияның нүктеде дифференциалдануының дербес туындылар тіліндегі жеткілікті шартының салдарын ретінде.

3. Көп айнымалылы функцияның нүктеде дифференциалдануының оның сол нүктедегі барлық дербес туындылары арқылы қорытынды суреттемесі - дифференциалданатын функцияның дербес туындыларының бар болуы, барлық дербес туындылары бар функция дифференциалданбау мүмкіндігі, бірақ олардың әрқайсысы үзіліссіз болғанда дифференциалдануы.

4. Көп айнымалылы сандық функцияның градиенті және оның көп айнымалылы функция үшін «үзіліссіз дифференциалдану» ұғымын беретін $R^n \to R^n$ бейнелейтін функция ретіндегі үзіліссіздігі – n өлшемді кеңістіктің ашық жиынында анықталған n айнымалылы функцияның әр нүктедегі барлық дербес туындылары бар болғанда анықталу жиыны берілген ашық жиын, мәндері n -өлшемді кеңістіктің элементі болатын, дербес туындылардан рет-ретімен n -өлшемді вектор түрінде құрылған градиент атты жаңа функцияны беруі, бір айнымалылы функцияның туындысы бар және басқа функция ретінде үзіліссіз болғанда бастапқы функцияның үзіліссіз дифференциалданатын сандық функция деп аталғаныдай дербес туындылардың әрқайсысының сандық функция ретінде үзіліссіздігінен $R^n \to R^n$ бейнелейтін градиеттік функцияның да үзіліссіз болуы және оның көпайнымалылы функцияның үзіліссіз дифференциалдануын беруі.

5. Жиында дифференциалданатын функция сол жиында үзіліссіз дифференциалданбауы мүмкін – ашық жиында анықталған және оның әр нүктесінде дербес туындылары бар, бірақ дербес туындылары функция ретінде үзілісті болатын функция мысалы.

6. Функцияның графигіне нүктеде жүргізілген жанама жазықтық – екі өлшемді функция жағдайында функция графигіне жүргізілген жанама жазықтық теңдеуінің осы нүктедегі дербес туындылар арқылы өрнектелуі.

§4. БІРІНЕН СОҢ БІРІ АНЫҚТАЛАТЫН КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ЖОҒАРЫ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛАРЫ

1. Көп айнымалылы сандық функцияның жоғары ретті дербес туындылары – ашық жиында анықталған көп айнымалылы функцияның қандай да бір айнымалысы бойынша әр нүктеде дербес туындысы бар болғанда анықталған жаңа функцияның дәл сол айнымалысы бойынша немесе аралас дербес туынды деп аталатын басқа айнымалы бойынша алынған туындысы.

2. Нүктедегі аралас туындылары өзара тең емес көп айнымалылы сандық функция мысалы – ашық жиында анықталған функцияның бірінші айнымалысы бойынша алынған туындысынан одан өзге екінші айнымалы бойынша алынған аралас туындысы мен керісінше, ретін ауыстырып алдымен екінші айнымалы бойынша содан бірінші айнымалы бойынша туындылауда нақты мәнді туындылары бар және өзара тең бола бермейтіндігін көрсететін екі айнымалылы функция мысалы.

3. Нүктедегі аралас туындаларының өзара тең болуын қамтамасыз ететін олардың локалды үзіліссіздігі – ашық жиында анықталған функцияның аралас туындыларды алған айнымалылар мен олардың неше рет алыну санын сақтап, реттерін қалай алмастырсақ та мәндірінің өзара бір санға тең болуына сол нүктедегі аталмыш аралас туындылардың барлығының сол нүктенің қайсібір маңайында бар болып, нүктенің өзінде үзіліссіз болуының жеткіліктілігі.

§5. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

1 Нүктеде дифференциалданатын көп айнымалылы сандық функцияларға арифметикалық амалдар қолдану нәтижесі болатын жаңа функцияның да сол нүктеде дифференциалдануы және оның дифференциалы берілген функциялар мен олардың дифференциалдары арқылы өрнектелу формулалары.

2. Сәйкес өз нүктелерінде дифференциалданатын ішкі және сыртқы функциялардан құрылған күрделі функцияның да бастапқы нүктеде дифференциалдануы - күрделі функция өсімшесін алдымен дифференциалданатындығынан сызықтық функция мен "бүлдіргіш" функция қосындысы түрінде берілген айнымалысы ішкі функция өсімшесі болатын сыртқы функция өсімшесі, артынша дәл осындай түрдегі ішкі функцияның өсімшесі арқылы жазып алған соң, ішкі функция өсімшесіне қатысты сызықтық бөлігін бөліп алып, одан кейін нөлге аргумент өсімшесіне қарағанда жылдам ұмтылатын функцияның арифметикалық қасиеттерін қолдана отырып, күрделі функцияның өзінің бүлдіргішін анықтап, күрделі функция өсімшесі де кездейсоқ емес сызықтық функция мен "бүлдіргіш" функция қосындысы түрінде жазылатындығын көрсету.

3. Сэйкес өз нүктелерінде сыртқы функция толық көлемде дифференциалданып, сыртқы функция айнымалыларының санына тең болатын ішкі функциялардың тек дербес туындылары бар болғанда, олардан құрылған күрделі функцияның бастапқы нүктеде дербес туындыларының бар болуы және оларды есептеу формулалары – ішкі функция қанша айнымалыға тәуелді болса, күрделі функцияның сонша түрлі дербес туындысы бар болады да, олардың әрқайсысы сыртқы функцияда қанша айнымалы болса, әр айнымалысы бойынша алынған дербес туындысының сол айнымалыдағы ішкі функцияның дербес туынды алынып жатқан айнымалысы бойынша алынған дербес туындына көбейтінділерінің сонша қосындысынан тұратын күрделі функция дербес туындысын есептеу формуласы.

4. Күрделі функциялардың дербес туындыларын есептеу формулаларының жеке жағдайда толық жазылуы – үш айнымалылы сыртқы, екі айнымалылы ішкі функциядан құрылған екі айнымалылы күрделі функцияның әр айнымалылары бойынша дербес туындылары формулаларын ашып жаза отырып, бір мысал негізінде есептеу жүргізу.

5. Көп айнымалылы сандық функциясы үшін Лагранж формуласы - көп айнымалылы сандық функциясының нүктедегі өсімшесінің оның барлық дербес туындыларының қосындысының аралық нүктедегі мәні арқылы дәл өрнектелуі.

6. Көп айнымалылы сандық функцияның дөңес және ашық болатын анықталу жиынында тұрақты болу критерийі – сол дөңес және ашық жиында тұрақты болуы мен әрбір нүктесінде барлық дербес туындыларының бар және нөлге тең болуынның пара-парлығы.

7. Берілген ретті үзіліссіз дифференциалдану деп аталатын сол ретке дейінгі барлық дербес туындылары бар және үзіліссіз болуының көп айнымалылы күрделі функция жағдайындағы жеткілікті шарты – көп айнымалылы күрделі функцияның берілген ретті дербес туындысының бар және үзіліссіз болуын оны құрайтын ішкі және сыртқы функциялардың сол ретті үзіліссіз дербес туындыларының бар болуы қамтамасыз етуі.

8. Сыртқы функцияның дифференциалына ішкі функцияның дифференциалын қойғанда дифференциалдар түрлерінің инварианттылығы деп аталатын күрделі функцияның бастапқы нүктедегі дифференциалына тең болуы – дифференциалдағы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ әрқайсысы біртұтас айнымалыларын тәуелсіз айнымалы ретінде алсақ та, күрделі функция ретінде алсақ та дифференциал жазылуы түрінің өзгеріссіз қалуы, яғни $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ белгілеуіндегі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тәуелсіз айнымалыларының әрқайсысын функциямен алмастырып, пайда болған күрделі функцияның дифференциалының да бастапқы тәуелсіз айнымалылармен берілген дифференциал жазуының түріне келуі.

§6. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІНІҢ ҚОЛДАНУЛАРЫ

1. Үш өлшемді R^3 кеңістігіндегі сандық функцияның бағыт бойынша туындысы негізінде біржақты дербес туындыларының пайда болуы – бағыт бойынша алынған өсімшенің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегі ретінде, соның ішінде бағыт координаталық өстермен беттескенде бағыт бойынша туындының сәйкес айнымалылар бойынша біржақты дербес туындыға айналуы және осылардың барлығының геометриялық суреттемесі.

2. Үш өлшемді R^3 кеңістігіндегі сандық функцияның бағыт бойынша туындысының дербес туындылардың толық жүйесі бойынша жіктелуі – ашық жиында анықталған көп айнымалылы ретінде нүктеде дифференциалданатын функцияның кез келген бағыт бойынша туындысының бар болуы және олардың дербес туындылар мен бағыттың сәйкес координата өсімен жасайтын бұрыш косинусына көбейтіндісінің қосындысы түрінде жазылуы.

3. Көп айнымалылы сандық функцияның бағыт бойынша туындысы – дербес туындыларының жалпылауы және де оның дербес туындылардың толық жүйесі бойынша жіктелуі.

4. Көп айнымалылы сандық функцияның ең жылдам өзгеру бағытын сипаттайтын градиент $gradf \equiv \Delta f(a)$ – бағыттар арасындағы абсолют шамасы ең үлкен градиент атты туынды және туындының механикалық мағынасы жылдамдық болғандықтан ең жылдам өзгеру бағытын беруі.

5. Көп айнымалылы сандық функция үшін қалдық мүшесі Лагранж түрінде берілген Тейлор формуласы – құрлысы шектеусіз күрделі объект деп қабылданатын көп айнымалылы сандық функцияны қарапайым объект болатын арнайы түрдегі сондай айнымалылы алгебралық көпмүшелікпен алмастыру және осы алмастыруда пайда болатын ауытқуының Лагранж түріндегі бағалануы.

7. Көп айнымалылы сандық функция үшін қалдық мүшесі Пеано түрінде берілген Тейлор формуласы – күрделі объект деп қабылданатын көп айнымалылы сандық функцияны қарапайым объект болатын арнайы түрдегі сондай айнымалылы алгебралық көпмүшелікпен берілген нүктенің маңайында алмастыратын, осы алмастыруда пайда болатын ауытқудың осы нүктедегі шегі нөл болатын Пеано түріндегі жазылуы.

§9. АЙҚЫНДАЛМАҒАН ФУНКЦИЯ ФУНКЦИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ АЛҒАШҚЫ КООРДИНАТАЛАРДЫҢ БЕКІТІЛГЕН САНЫ ТӘУЕЛСІЗ АЙНЫМАЛЫ, АЛ ҚАЛҒАНДАРЫ ОЛАРҒА ФУНКЦИЯЛЫҚ ТӘУЕЛДІЛІКТЕ БОЛАТЫН ШЕШІМІ РЕТІНДЕ – ФУНКЦИЯ БЕРІЛУІНІҢ ТАҒЫ БІР ӘДІСІ

1. Екі айнымалылы сандық функция арқылы құрылған теңдеу бойынша анықталған айқындалмаған функция – берілген екі айнымалылы функцияның нөлмен теңестіру арқылы құрылған теңдеу деп аталатын шартты теңдік, оның екі координаталы шешімі, солардың негізінде бірінші координатасы тәуелсіз айнымалы деп алынғанда онымен бірге бар және жалғыз болып шешім құрайтын екінші координата функция анықтамасына сай келіп айқындалмаған атты тәуелсіз айнымалысы бірінші координата, мәні екінші координата болатын функция.

2. «Айқындалмаған функция» деп аталатын функция берілуінің тағы бір тәсілінің жалпы анықтамасының жүзеге асыру барысындағы нақтылаулары – құрылған теңдеудің нақты шешімінен бастау алып, соның бірінші координатасы маңайында анықталған, мәндері екінші координата маңайында жатқан функция ретінде.

3. Берілген функция бойынша құрылған теңдеудің нақты шешімі айқындалмаған функцияны әрқашан да анықтай бермеуі және оның дәл мағынасының кері анықтама құру тәртібімен символдық, содан кейін сөзбен жазылулары.

4. Айқындалмаған фунция анықтамасының астарлы тұстары барлық шешімдер жиыны жазықтықтағы бірлік шеңбер болатын функциялық теңдеу мысалында - теңдеу шешімінің бірінші координатасының маңайынан алынған әрбір нүктеге теңдеу шешімі болатындай мән дәл сол екінші координатасының маңайынан ізделініп, айқындалмаған функцияны беретін тәуелділік орнауы, бірінші координатаның кез келген маңайындағы қандай да бір нүктеге екінші координатаның маңайынан теңдеу шешімі болатындай не мән табылмауы, не бірден көп мән табылуы себебінен айқындалмаған функцияның анықталмауы.

5. Екі айнымалылы бастапқы функция бойынша анықталған айқындалмаған функция анықтамаларының көп айнымалылы сандық функция жағдайына көшірілуі – екі айнымалылы сандық функцияның болашақ айқындалмаған функцияның тәуелсіз айнымалысы ретіндегі қолданылған сан мәнді бірінші координаттың сан мәнді айнымалысы көп айнымалылы мәнді бастапқы функцияның айнымалысының бірінші бөлігін құрайды да, екі еселі айнымалыдағы екінші координаталық сандық айнымалысы сақталады да екі айнымалы бастапқы функция жағдайындағы айтылғандардың бәрі теңдеу құруынан бастап сөзбе-сөз қайталануы.

6. Математикалық анализдің кейбір оқулықтарындағы «айқындалмаған функцияның» жалған анықтамалары туралы – айқындалмаған функция атты бастапқы функция арқылы құрылған теңдеудің алдын-ала берілген бір шешімінің қайсыбір маңайындағы шешімдерінің бір бөлігі тәуелсіз айнымалы, ал қалғандары сол бірінші бөлікпен бірігіп аталмыш маңайда теңдеу шешімін құрайтын функция анықтамасына бағынатын тәуелділік болса, айнымалылардың бірінші тобына тәуелді болып және сонымен бірге шешім құрайтын кез-келген функцияны айқындалмаған функция деп атауға болмауы.

7. Бастапқы екі айнымалылы функция бойынша анықталған теңдеудің айқындалмаған функция анықталуының геометриялық тұрғыдан көрнекі аналитикалық дәлелдемесінің жобасы – айқындалмаған функция локалді ұғым болғандықтан жалпылықты жоғалтпай бүкіл зерттеулерді геометриялық тұрғыдан көрнекі, центрі берілген екі айнымалылы үзіліссіз, бірінші айнымалысын бекітіп алғанда, екінші айнымалысы бойынша қатаң өспелі бастапқы функция бойынша құрылған теңдеу шешімі болатын тіктөртбұрышқа шоғырландырып, тіктөртбұрышты нүкте маңайының жоғарғы және төменгі жағында екі түрлі таңбалы болатындай центрін сақтай отырып, тіктөртбұрышқа дейін қажетінше кішірейтіп, сондағы кез келген бекітілген бірінші координат үшін Больцано-Коши теоремасының негізінде бірінші координатамен бірге бастапқы функцияны нөлге айналдыратын,

сонымен бірге ізденісті айқындалмаған функция мәні болатын екінші координаттың бір ғана мәні табылу арқылы анықталған айқындалмаған функция, оның үзіліссіздігі.

8. Бастапқы екі айнымалылы функция бойынша құрылған теңдеудің шешіміне негізделген айқындалмаған функцияның бар болуын, үзіліссіздігі мен дифференциалдануын қамтамасыз ететін дербес туындылар тілінде бастапқы функцияға қойылатын шарттар – центрі теңдеудің шешімі болатын қайсыбір тіктөртбұрышта анықталған және үзіліссіз, әр нүктесінде әр айнымалы бойынша дербес туындылары бар және үзіліссіз болумен қатар, бастапқы функцияның қажетті монотондылығын қамтамасыз ететін центрдегі екінші айнымалысы бойынша дербес туындысы нөлден өзгеше болуы және де бастапқы функцияға оның өзі жаратқан айқындалмаған функцияны қойғанда пайда болатын нөлмен тепе-теңдікті дифференциалдау арқылы туындыны есептеу формуласы.

9. Бастапқы $n+1$ айнымалылы функция бойынша құрылған теңдеудің шешіміне негізделген n айнымалылы сандық айқындалмаған функцияның бар болуын, үзіліссіздігі мен үзіліссіз дифференциалдануын қамтамасыз ететін $n+1$ айнымалылы функцияға қойылатын шарттардың сәйкес екі айнымалылы функциядан көшірмесі – екі айнымалы сандық функция жағдайындағы айқындалмаған функцияның мәні болатын айнымалы бойынша алынған дербес туындының бастапқының теңдеудің шешім нүктесінде нөлге айналмау шарты, басқасы көпайнымалы жағдайға сәйкестіріліп, сөзбе-сөз қайталануы.

10. Бастапқы $n+m$ айнымалылы функция бойынша құрылған теңдеудің шешіміне негізделген n айнымалылы m мәнді айқындалмаған функцияның бар болуын, үзіліссіздігі мен үзіліссіз дифференциалдануын қамтамасыз ететін $n+m$ айнымалылы бастапқы функцияға қойылатын шарттардың сәйкес $n+1$ айнымалылы функциядан көшірмесі – $n+1$ айнымалылы сандық функция жағдайындағы айқындалмаған функцияның мәні болатын айнымалы бойынша алынған дербес туындының нөлге айналмау шарты сондай айнымалылар бойынша алынған, бірінші жатық жолында бастапқы функцияның бірінші координаттық функцияның айқындалмаған функция мәндерін құрайтын n айнымалыларының координаттық нөмерлер ретімен алынған дербес туындыларының, дәл осылай екінші координаттық функция екінші жатық жолын, әрі қарай m -ші координаттық функция m -ші жатық жолы алынған бастапқы теңдеудің шешім нүктедегі Якоби анықтауышы нөлге тең болмау шартына айналады да, центрі аталмыш шешім болатын қайсыбір параллелепипедте анықталған көпайнымалылы жағдайға сәйкестіріліп сөзбе-сөз қайталануы.

11. Айқындалмаған функция анықтамасының локалділігі негізінде сызықтық теңдеулер жүйесіне көшу арқылы оның концепциясын іштей-техникалық түсіну – соңғы m айнымалысы ізделінді және алдыңғы n айнымалыға тәуелді болатын $n+m$ айнымалылы бастапқы m сандық функциядан құралған m теңдеуден тұратын жүйенің жетекші қасиеттерін жоғалтпай бастапқы функцияның дифференциалындану анықтамасының жазуындағы басты сызықтық бөлігін ғана қалдырып, Крамер ережесі бойынша сызықтық теңдеулер шешімінің бірмәнділік шартымен сәйкес берілген қатынастағы шешімділігі тұрғысынан эквиваленттілігінің айқындалмаған функцияның бар болуындағы жоғарыдағы дәлелдемелердегі шарттармен беттесуі.

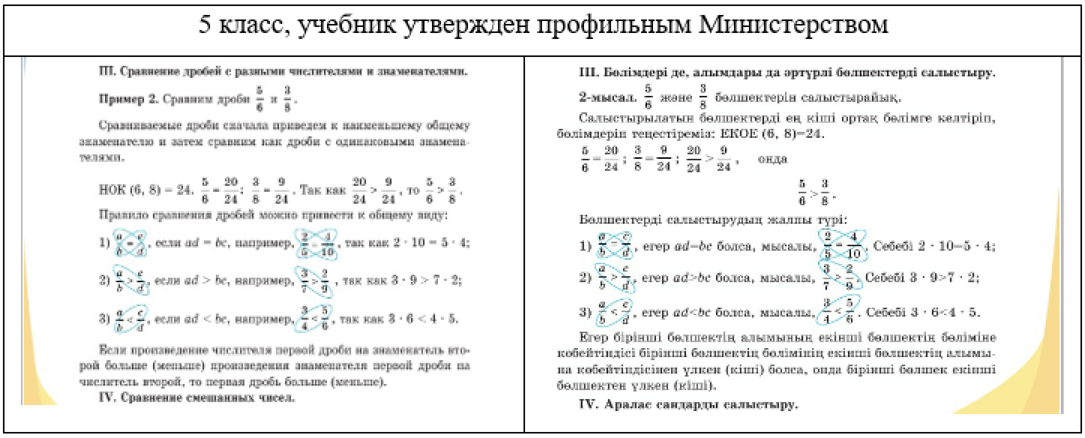
12. Айқындалмаған функцияның жоғарғы ретті дербес туындыларын оны жаратқан бастапқы функцияның дербес туындылары арқылы есептеу формулалары – бастапқы функция арқылы анықталған теңдеуді айқындалмаған функциялар тепе-теңдікке айналдырады, сол тепе-теңдікті айқындалмаған функцияның тәуелсіз айнымалының әрқайсысы бойынша дербес туынды алғанда күрделі функцияның дербес туындыларын есептеу формуласы бойынша саны айқындалмаған функцияның тәуелсіз айнымалысының өлшеміне тең ізденісті айқындалмаған функцияның дербес туындылары арқылы сызықты теңдеу, ал оның Крамер анықтауышы нөлге тең емес Якоби анықтауыштарымен беттесіп мақсатымыз болатын шешім беруі.

§8. ДОПУСК К ПРЕПОДАВАНИЮ «СНАЧАЛА ПОЛНАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА ПО ПРЕДМЕТУ, ТОЛЬКО ЗАТЕМ МЕТОДИКА С ПОНИМАНИЕМ ДОСТУПНОСТИ ИЛИ НЕДОСТУПНОСТИ К УСВОЕНИЮ УЧАЩИМИСЯ И НИКАК НЕ НАОБОРОТ» НА ПРИМЕРЕ ВСЕГО ОДНОЙ ПРОБЛЕМНОЙ ТЕМЫ «СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ С РАЗНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ» НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Есть замечательная тема для демонстрации мощи Математики и внедрения учащихся в ее структуру – это сравнение и сложение дробей с разными знаменателями.

Конечно, можно предположить, что все со Школьными свидетельствами об окончании имеют остаточные знания на уровне Начальной школы. Так вот, всем предлагается проверить себя во времени постижения и объеме усвоения темы по утвержденному профильным Министерством учебнику и Методологии от ИТМиНВ.

Вот как пишут в учебниках : сухо, малопонятно, формально с констатацией известного без каких-либо объяснений, без развития математической речи и доказательств-правдоподобных рассуждений, с методической стороны совершенно необучающей.



5 класс, учебник утвержден профильным Министерством

III. Сравнение дробей с разными числителями и знаменателями.

Пример 2. Сравним дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$.

Сравниваемые дроби сначала приведем к наименьшему общему знаменателю и затем сравним как дроби с одинаковыми знаменателями.

НОК (6, 8) = 24. $\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$; $\frac{3}{8}=\frac{9}{24}$. Так как $\frac{20}{24}>\frac{9}{24}$, то $\frac{5}{6}>\frac{3}{8}$.

Правило сравнения дробей можно привести к общему виду:

1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, если $ad=bc$, например, $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$, так как $2\cdot 10=5\cdot 4$;

2) $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, если $ad>bc$, например, $\frac{3}{7}>\frac{2}{9}$, так как $3\cdot 9>7\cdot 2$;

3) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, если $ad<bc$, например, $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$, так как $3\cdot 6<4\cdot 5$.

Если произведение числителя первой дроби на знаменатель второй больше (меньше) произведения знаменателя первой дроби на числитель второй, то первая дробь больше (меньше).

IV. Сравнение смешанных чисел.

III. Бөлімдері де, алымдары да әртүрлі бөлшектерді салыстыру.

2-мысал. $\frac{5}{6}$ және $\frac{3}{8}$ бөлшектерін салыстырайық.

Салыстырылатын бөлшектерді ең кіші ортақ бөлімге келтіріп, бөлімдерін теңестіреміз: ЕКОЕ (6, 8)=24.

$\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$; $\frac{3}{8}=\frac{9}{24}$; $\frac{20}{24}>\frac{9}{24}$, онда

$$\frac{5}{6}>\frac{3}{8}.$$

Бөлшектерді салыстырудың жалпы түрі:

1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, егер $ad=bc$ болса, мысалы, $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$. Себебі $2\cdot 10=5\cdot 4$;

2) $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, егер $ad>bc$ болса, мысалы, $\frac{3}{7}>\frac{2}{9}$. Себебі $3\cdot 9>7\cdot 2$;

3) $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, егер $ad<bc$ болса, мысалы, $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$. Себебі $3\cdot 6<4\cdot 5$.

Егер бірінші бөлшектің алымының екінші бөлшектің бөліміне көбейтіндісі бірінші бөлшектің бөлімінің екінші бөлшектің алымына көбейтіндісінен үлкен (кіші) болса, онда бірінші бөлшек екінші бөлшектен үлкен (кіші).

IV. Аралас сандарды салыстыру.

Учащийся приобретает, лучше быть вообще незнакомым с предметом, чем быть в обязанности усвоить и преподавать бессмысленное и недопустимое, – именно приобретает неграмотность и теряет интерес к учебе, способность и желание преодолевать трудности на пути к знаниям.

Всего одна фраза «Сравниваемые дроби сначала приведем к наименьшему общему знаменателю» делает учебник неприменимым к обучению Математике, а бедствие от применения попадает под изречение Виссариона Григорьевича Белинского «Учебная книга - не роман, и если составлена дурно, то приносит вреда не меньше чумы и холеры», – еще с советских времен в средней школе сравнение и сложение дробей стало проблемно-убийственным.

Школьный учебник в принципиальных моментах должен быть категоричным и слово «можно» недопустимо «Правило сравнения дробей можно привести к общему виду». И, вообще, спрашивается «общее» в чем и требуется только заучить – это не математика.

***

Тогда как ИТМиНВ предлагает развернуть эту элитную тему в подробностях всех сопровождающих базовых математических понятий и правильной описательной речи.

1^0. Геометрическая иллюстрация на базовой для Человечества задаче измерения длин отрезков при заданном единичном отрезке длины 1 с аналитическим оформлением в обыкновенных дробях (Рис. 1):

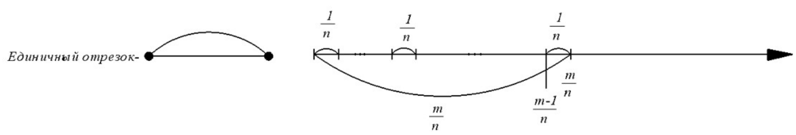


Рисунок 4 – Геометрическая иллюстрация измерения длин отрезков

Здесь же возникают правдоподобные на интуитивном уровне понятия линии, отрезка, прямой, направления прямой, луча с его началом и направлением, равенства отрезков – говоря высоким слогом, создание Математической модели задачи измерения длин отрезков с развитием особого языка и структуры Математики, и все на описательно-демонстрационном уровне.

2^0. Сравнение дробей с одинаковыми знаменателями логически и визуально ясное в виде сравнения числителей: если $m < q$, то $\frac{m}{n} = m \times \frac{1}{n} = q \times \frac{1}{n} = \frac{q}{n}$ и наоборот.

3^0. При первом прямом восприятии сравнение дробей с разными знаменателями как визуально и логически неразрешимая в числовых неравенствах математическая проблема, такая же, как и Компьютерная томография с нахождением плотности тела без нарушения его оболочки, какая из дробей $\frac{3}{7}$ и $\frac{2}{5}$ больше (Рис. 5):

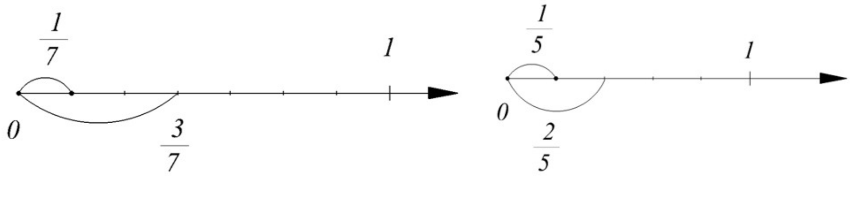


Рисунок 5 – Геометрическая иллюстрация визуальной и логической сложности задачи сравнения дробей

Сразу же сообщим, что задача сравнения дробей разрешима чисто геометрически – отрезки при заданном единичном отрезке в длинах обыкновенных дробей допускают построение с помощью циркуля и линейки, сравнения полученных отрезков завершаются их наложением только с применением циркуля.

4^0. Мощь Математики состоит в том, что задача сравнения дробей с разными знаменателями разрешима приведением к ясному случаю сравнения дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} \text{ и } \frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n},$$

откуда

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q} \Leftrightarrow m \cdot q < p \cdot n,$$

в частности

$$\frac{3}{7} < \frac{2}{5} \Leftrightarrow 3 \cdot 5 = 15 > 14 = 2 \cdot 7.$$

Тем самым, задача сравнения дробей с разными знаменателями сведена к сравнению целых неотрицательных чисел, которое наглядно осуществимо благодаря еще одному величайшему достижению Математики – позиционной записи чисел.

То же от ИТМиНВ 2023 года происходит с проблемой Компьютерной томографии – такая же демонстрация мощи Математики по реалиям своих времен – далеком прошлом и современностью, в теоретическом равнозначном исполнении на уровне потребностей Человечества

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)} \le 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \Phi_N(x - \xi_k) \right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y) \cdot \|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)} \le 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) R\left(\Phi_N(y - \xi_k)\right)(x) \right\|_{W_2^{\alpha(y) \cdot \|y\|^{\frac{s-1}{2}}}},$$

где $Rf(x) := \int_{y \in R_x^{s-1}} f(y)dy$ – преобразование Радона, а ядро $\Phi_N(x)$ – это 1-периодическая по каждой из s переменных $x = (x_1, ..., x_s)$ действительнозначная функция.

Здесь ИТМиНВ претендует на результат, который перекрывает все научные исследования от основополагающей 16-страничной статьи Иогана Радона 1917 года по настоящее время, претендует в контексте "*Возникает новая тема исследований с авторским решением в модельной ситуации, которая сразу же привлекает множество последователей, пока одна публикация не закрывает проблему в главном. Бывает и так, что другая публикация создает рукав исследований еще одной новизны*".

Итоги – это Программа Математики Начальной школы от ИТМиНВ, где делаются геометрически-визуально понятными дроби, затем сравнение дробей с одинаковыми знаменателями, после чего геометрически-интерпретационное наглядное тяжёлое пояснение числовой безнадежности в случае разных знаменателей, с дальнейшей демонстрацией Мощи Математики с числовым решением опять же с геометрическими иллюстрациями. Здесь надо вогнать в подсознание учащегося Начальной школы, что математически задача сравнения дробей сведена к сравнению целых неотрицательных чисел, которое возможно лишь благодаря еще одному достижению Математики – позиционной системе записи чисел.

И это еще не полный список включения учащихся Начальной школы в Мир Математики в рамках всего одного вопроса, – столько возможностей упущено в процитированном учебнике 5 класса, да еще запоздалом, поскольку это есть тема обучения в Начальной школе.

В утвержденном профильным Министерством учебнике повторяется наносившее ещё с советских времен бесконечной урон в виде неумения сложения и сравнения дробей из-за сведения в общем-то доступного к пониманию учащимися геометрически-числового метода к неизмеримо сложной задаче нахождения наименьшего кратного знаменателей (напомним, что именно на сложности разложения на простые множители основан один из основных методов криптографии), о чём во все годы Независимости твердила Научная школа Н.Темиргалиева.

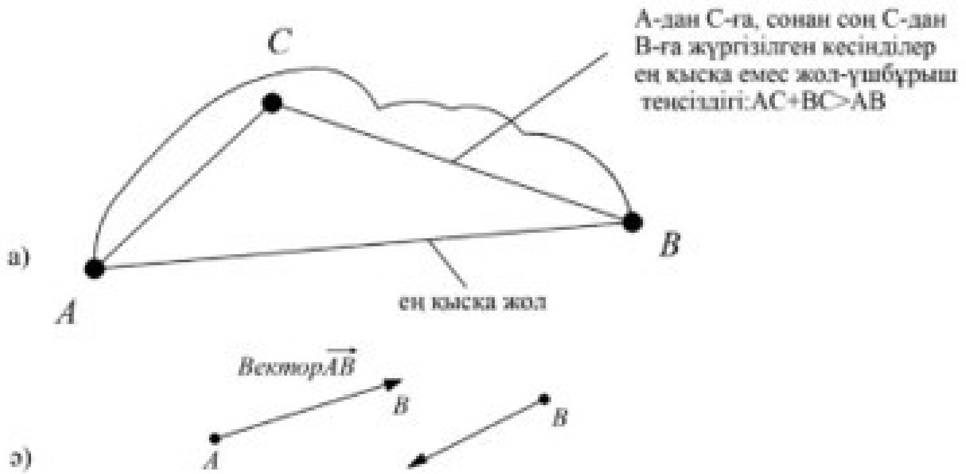
Казахстан должен принять Закон в обучении: "Сначала мощная теоретическая подготовка по предмету, только затем допуск к преподаванию с методикой. Только знание теории позволяет видеть трудные места усвоения учащимися, избегать притаившихся недосказанностей и логических ошибок".

Даже на примере этой одной темы можно увидеть, каким в содержании и постоянном математическом развитии идей с конечной школьной целью достижения Математической зрелости должен быть Полный комплект учебников с 1 по 11 классы.

Именно этому посвящена Национальная программа «Казахская математическая справедливость в школьном образовании – это равные для всех условия в обучающих учебниках и учителях», где тема «Сравнение и сложение обыкновенных дробей с разными знаменателями» для учителей математики и для создания самого учебника детально разработана в нижеследующих пунктах §5 Главы I учебника «Математикалық анализ (Второе издание на 2000 страницах текста со 100 страничным Синопсис-Оглавлением)»:

3. Алғашқы геометриялық келісімдер – кесінді, оның ішкі және шекаралық нүктелері, түзу, сәуле. Жазықтық, сондағы нүкте мен сызық түсініктерін *«нүкте – бөлшегі (бөлігі) жоқ зат»; «сызық – ені жоқ (көлденеңсіз) ұзындық», «түзу – өзіндегі нүктелерге қатысты біртекті орналасқан сызық»; «бет –ұзындығы, ені (көлденеңі) ғана бар зат»*, соның ішінде *«жазық бет өзінде жатқан түзуге қатысты біртекті орналасқан бет», «шекара – бір нәрсенің аяқталған сәті»* деп кезінде Евклид өзінің «**Бастамалар**» атты еңбегінде берген.

Кесінді ұғымы. Жазықтықта бірінен-бірі өзге екі нүкте берілген болсын. Оларды және әріптерімен белгілейік. мен нүктелерін ең қысқа жолмен жалғайтын сызық A нүктесі мен B нүктесін жалғайтын AB, сол мағынада BA *кесіндісі* деп (9a)-суретті қараңыз) аталып, олар $AB \equiv BA$ тепе-теңдігін қанағаттандыратын бір кесінді құрайды. Әрине, кесінді, әрбір геометриялық фигура сияқты, нүктелерден құралған. A мен B нүктелері AB кесіндісінің *шеткі*, ал қалғандары *ішкі* нүктелері деп аталады.



9-сурет

Егер де $AB \equiv BA$ кесіндісінде бағыт A нүктесінен B нүктесіне, және, керісінше, B нүктесінен A нүктесіне қарай көрсетілсе, онда пайда болған бағытталған кесінді вектор деп аталады да, сәйкес $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{BA}$ түрлерінде белгіленеді (9ә)-суретті қараңыз).

Кесінді анықтамасындағы шеткі A және B нүктелеріне өзара бөлек деген талап қойылған. Оған қоса, *жеке нүктенің* өзін де *шеткі нүктелері* беттесетін, «ұзындығы» ретінде оң да, теріс те емес «нөл» атты, 0 таңбасымен белгіленетін ерекше сан болатын *кесінді* деп қабылдау көп жағдайда нәтижелі және де сол себептен осы жерден бастап қолданыста болады.

Әр өзара бөлек екі нүктесімен бірге соларды жалғайтын кесіндінің барлық нүктелерін өзінен шығармайтын және де кез келген кесіндінің екі жағын да дәл сол кесіндіге созуда осы қасиетті сақтау мағынасында шектеусіз болатын барлық нүктелердің (10а)-суретті қараңыз) геометриялық орны түзу деп аталады.

10ә)-суреттегі γ_2 сызығын құрайтын A_0B_0 кесіндісі AB кесіндісін толық қамтығанымен екі жағы ақырсыз созылмағандықтан және 10б)-суретте, керісінше, γ_2 сызығы ақырсыз созылғнымен AB кесіндісін қамтымағандықтан екеуі де түзу болмайды.

Басқаша айтқанда, кез келген екі нүктесін ең қысқа жолмен қосатын кесіндіні өзінде қамтитын екі жағы да шектеусіз қисық түзу деп аталады.

10-сурет

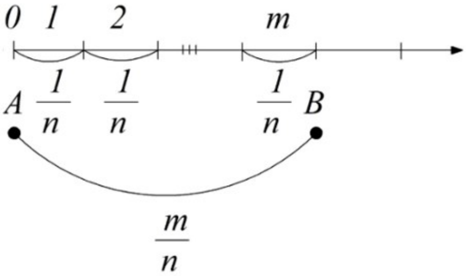
15. Кесінділерді салыстыру – екі кесіндінің әрқайсысының шекаралық нүктелерінің бірін сәуле басында, екіншілерін сол сәуле бойында салғанда, олардың сәуле бойында орналасуына қарай геометриялық тұрғыдан ұзын, қысқа және тең мағынасында салыстыру.

6. Бірлік кесінділерден $1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 11, \ldots$ ***оң бүтін сандарға көшу жолы: ұзындықты өлшеу есебі «*** 0 ***» таңбасымен белгіленетін ерекше «нөл» саны, «*** 1 ***» таңбасымен белгіленетін ерекше «бір» саны және кезекті «*** $2, 3, \ldots$ ***» таңбаларымен белгіленетін оң бүтін сандар көзі ретінде – сәйкес кесіндінің ұштары бір нүктеде беттескендегі сол нүктеден ғана тұратын «кесінді ұзындығын» белгілейтін «нөл» атты сан, эталон түрінде алынатын кесіндінің ұзындығы ретінде тағайындалған «бір» саны және алдын ала келісіліп алынған қос бірлік кесіндіні қосу амалының нәтижесі болатын кесінді ұзындығы ретіндегі «екі» атты*** $2 := 1 + 1$ ***санын, анықталған екі санына сәйкес келетін кесіндіге бірлік кесіндіні қосу нәтижесінің ұзындығына сәйкес «үш» атты*** $3 := 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ ***санын анықтағандай барлық оң бүтін сандарды беру, анықталу негізінде*** $2 := 1 + 1, 3 := 2 + 1 = 1 + 1 + 1, \ldots$ ***, қорытындысында ізделінді*** $0, 1, 2, ..., 9$ ***, ары қарай позициялық жүйеде жазылған*** $10, 11, ...$ ***нөл мен оң бүтін сандар тізбесіне келу.***

21. Жай бөлшектің « n ***-нен*** m ***» оқылуындағы және*** $\frac{m}{n}$ ***жазылуында Ахмет Байтұрсынов енгізген*** n ***-«бөлімі» және*** m ***-«алымы» атты сөйлеп тұрған атаулар – бірлік кесінді ретінде қабылданған кесіндіні бөлімі деген атына сай дәл n санына тең бөлікке бірдей етіп бөліп, алымы деген атау өзі айтып тұрғандай***

ұзындығы $\frac{1}{n}$ деп белгіленген кесінділердің m данасын алу

$$1^0. \underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m} = m\times\frac{1}{n} = m\cdot\frac{1}{n} =: \frac{m}{n}\,(n=1,2,...;m=0,1,...)$$



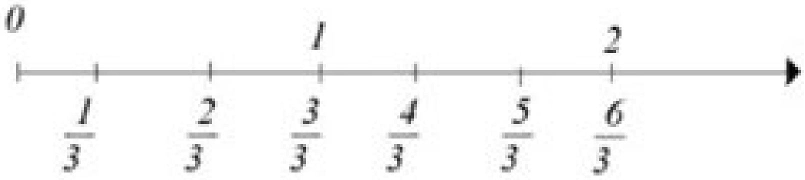
38-сурет

Егер де бірлік кесіндінің тең бөліктерінің бірі – оның $\frac{1}{n}$ бөлігі, қарастырылып отырған кесіндіде бүтін m рет орналасса, онда ізделінді ұзындық мәнін оң мәнді жай бөлшек дейді де, $\frac{m}{n}$ түрінде белгіленеді (38-сурет).

n оң бүтін және m нөл не оң мәнді бүтін сандар арқылы анықталған нөл не оң мәнді рационал сан деп аталып, «n-нен m» деп оқылып және $\frac{m}{n}$ түрінде жазылады. Сонымен, жай бөлшекті білу деген оның жеке-жеке алымын білу және бөлімін білу болып табылады.

Барлық оң мәнді жай бөлшек сандар жиыны Q_+ таңбасымен белгіленеді.

Мәселен (39-сурет), бірлік кесіндіні тең $n=3$ бөлікке бөлгенде пайда болған ұзындығы $\frac{1}{3}$ санына тең кесіндіден $m=2$ болғандағы дәл екеуін алғанда шыққан кесіндінің ұзындығы «үштен екі» деп оқылатын $2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ оң рационал санын берсе, дәл осы кесіндіден $m=4$ болғанда төртеуін алғанда шыққан кесінді ұзындығы «үштен төрт» деп оқылатын $4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ оң рационал санын анықтайды.



39-сурет

Сонымен, ұзындықты өлшеу есебінен табиғи түрде екі – оң бүтін сандар жиыны $N\equiv Z_+=\{1;2;\ldots\}$ және оң мәнді жай бөлшек сандар жиыны $Q_+\equiv\{\frac{m}{n}:n\in Z_+,m\in Z_+\}$ пайда болды.

24. Бөлімдері бірдей бөлшектерді ортақ бірлік кесінді бойынша салынған сәйкес кесінділер арқылы салыстырудың геометриялық мағынасы және оларды салыстырудың бөлшек алымдарын салыстырумен пара-парлығы – бөлімдері өзара тең екі $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m} = m\times\frac{1}{n}\equiv m\cdot\frac{1}{n} =: \frac{m}{n}$ және $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{p} = p\times\frac{1}{n}\equiv p\cdot\frac{1}{n} =:$ $\frac{p}{n}$ жай бөлшекке сәйкес келетін кесінділердегі бірлік кесіндінің тең n бөлікке бөлінгендегі $\frac{1}{n}$ ұзындықты бөлігінің әр кесіндідегі m және p сандары үшін бүтін сандарды салыстыру бойынша $m<p, m>p$ және $m=p$ болуына сәйкес бірінші кесіндінің екіншісінен қысқа, ұзын және тең болуы және сол арқылы осы кесінді

ұзындықтары $\frac{m}{n}$ мен $\frac{p}{n}$ сандары арасында $3^0.\frac{m}{n} < \frac{p}{n} \Leftrightarrow m < p, 4^0.\frac{m}{n} > \frac{p}{n} \Leftrightarrow m > p, 5^0.\frac{m}{n} = \frac{p}{n} \Leftrightarrow m = p$ қатынастарының қабылдануы.

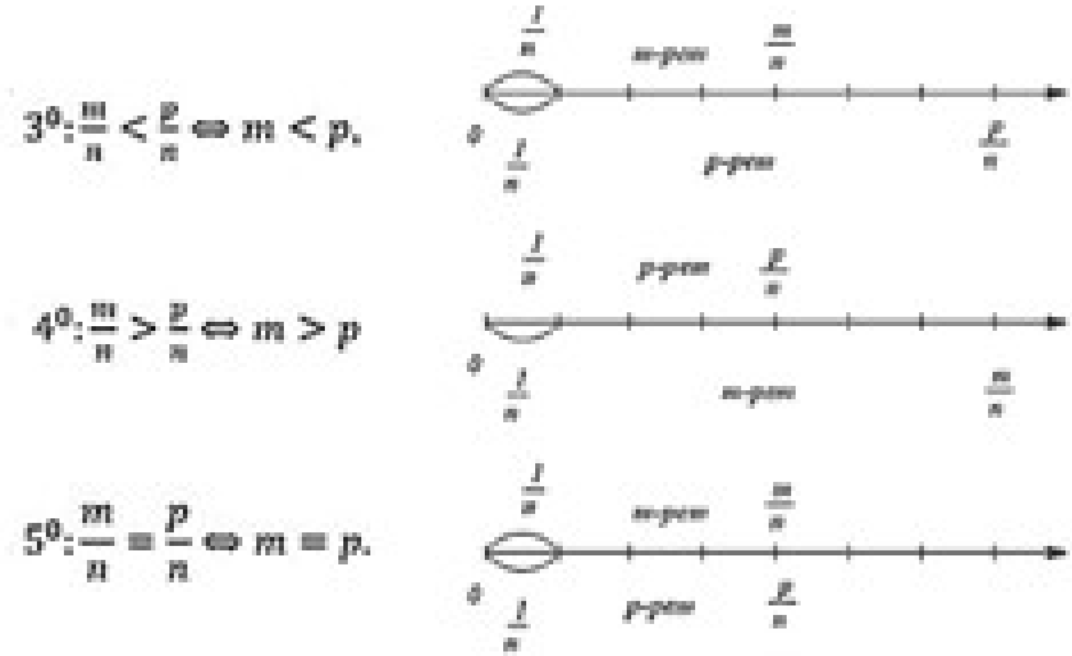
Кесінді ұзындығын өлшеу жолында сандар мен олардың қасиеттерін енгізу үрдісі бөлімдері бірдей бөлшектерді салыстыруда жалғастырылады.

$\frac{m}{n}$ мен $\frac{p}{n}$ жай бөлшектерің 1^0 анықтамасы бойынша

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m} = m \times \frac{1}{n} =: \frac{m}{n}$$

және

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{p} = p \times \frac{1}{n} =: \frac{p}{n}$$



41-сурет

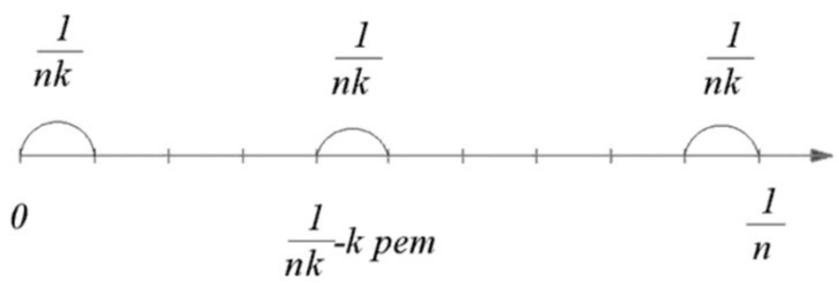
Ұзындықтары $\frac{m}{n}$ және $\frac{p}{n}$ жай бөлшектеріне тең кесінділерде бірлік кесіндінің тең n бөлікке бөлінгендегі $\frac{m}{n}$ ұзындықты кесінді сәйкесінше m және p рет орналасқанын анықтап, осы бүтін сандарды салыстырғандағы арақатынас ұзындықтары $\frac{m}{n}$ және $\frac{p}{n}$ жай бөлшектеріне тең кесінділерді салыстырғанда да сақталады (41-сурет).

Сонымен, бөлімдері бірдей бөлшектер арасында олардың алымдары арасындағы қатынастың сақтауы: бөлімдері бірдей бөлшектің алымы үлкенінің үлкен, алымы кішісінің кіші және алымдары тең болған жағдайда тең болуы.

25. «Бөлшектің негізгі қасиеті» атты кез келген оң бүтін m, k, n сандары үшін $\frac{m}{n}$ бөлшегінің алымын да, бөлімін де k санына көбейткенде бөлшектің жазылуы өзгергенімен сандық мәнінің өзгермеуін беретін $\frac{m}{n} = \frac{m\cdot k}{n\cdot k}$ теңдігі – кез келген кесіндіні тең k бөлікке бөліп, сондай бөліктерді k қосылғыш ретінде алғанда пайда болған қосынды бастапқы кесінді болады да, осы жолмен ұзындығы $\frac{1}{n}$ кесіндісін тең k бөлікке бөлгенде $\frac{1}{n\cdot k}$ ұзындықты кесінділер шығады да, олардың k данасын қосылғыш ретінде жинап алғанда қайтадан $\frac{1}{n}$ ұзындықты кесінді, ал $\frac{1}{n}$ ұзындықты кесінділердің m данасынан құралған $\frac{m}{n}$ ұзындықты кесінді $\frac{1}{n\cdot k}$-ұзындықты кесінділермен есептегенде олардың саны mk болатындығының көрнекі геометриялық түсіндірмесі. Алдын ала қабылданған бірлік кесінді бойынша ұзындығы

$\frac{m}{n}$ жай бөлшегі болатын кесінді берілген болсын. $\frac{1}{n}$ -ұзындықты кесіндіні өзара тең дәл k бөлікке бөлгенде сол $\frac{1}{n}$ -ұзындықты кесінді $\frac{1}{n\cdot k}$ ұзындықты k кесінділерге жіктеледі, өйткені $\frac{1}{n}$ ұзындықты кесінді тағайындалған бірлік кесіндіні өзара тең n бөлікке бөлуден пайда болса, $\frac{1}{n}$ ұзындықты кесіндіні дәл k бөлікке бөлгенде сол бөлікте бірлік кесіндіні k × n бірдей бөлікке бөледі де, әрқайсысының ұзындығы, әрине, $\frac{1}{n\times k}=\frac{1}{n\cdot k}$ (42-сурет):

$$\frac{1}{n}=\underbrace{\frac{1}{n\cdot k}+\frac{1}{n\cdot k}+\cdots+\frac{1}{n\cdot k}}_{k}=k\times\frac{1}{n\cdot k}=\frac{k}{n\cdot k}.$$



42-сурет

Сол себеппен, $\frac{m}{n}$-ұзындықты кесінді m рет алынған $\frac{1}{n}$-ұзындықты кесіндіден, ал әрбір $\frac{1}{n}$-ұзындықты кесінді k рет алынған $\frac{1}{n\cdot k}$-ұзындықты кесінділерден тұрғандықтан, қорытындысында, $\frac{m}{n}$-ұзындықты кесінді $m\cdot k$ рет алынған $\frac{1}{n\cdot k}$-ұзындықты кесінділерге жіктеледі:

Дәл осы кез келген n, m және k оң бүтін сандары үшін әрқашанда орындалатын

$$6^0:\frac{m}{n}=\frac{m\cdot k}{n\cdot k}$$

теңдігі *бөлшектің негізгі қасиеті* деп аталады.

Сонымен, бірлік кесіндіні n өзара тең бөлікке бөлгенде пайда болған кесіндіні m рет қосқанда пайда болатын *кесінді* бар, одан жаратылған $\frac{m}{n}$ жазылуындағы сол кесіндінің ұзындығы ретінде қабылданған *бөлшек сан* бар, ал қаншама k оң бүтін сан бар болса, сол бір кесіндінің ұзындығын белгілейтін $\frac{m}{n}$ бөлшек санының оған тең соншама $\frac{m\cdot k}{n\cdot k}$ түріндегі жазылулары бар .

Бұл ереженің геометриялық мағынасы, жоғарыда көрсетілгендей, былай оқылады: $\frac{m}{n}$-ұзындықты кесінді $\frac{1}{n}$ -ұзындықты m кесіндіге және әр оң бүтін k үшін $\frac{1}{n\cdot k}$-ұзындықты mk кесіндіге жіктеледі.

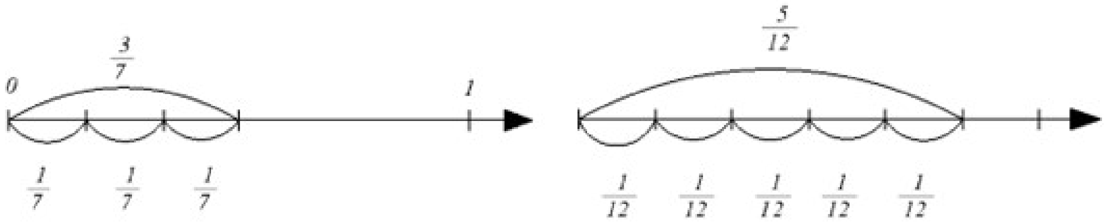
Кейде бұл қасиетті «*бөлшек өзгермейді*» деп түсіндіреді, бұнда ол сөйлемше бөлшектер теңдігі арқылы дәл мағыналы « $\frac{m\cdot k}{n\cdot k}$ бөлшегі $\frac{m}{n}$ бөлшегіне тең» деп айтылатындығын ескерте кетейік.

26. Бөлімдері әртүрлі екі жай бөлшектер үшін ортақ бірлік кесінді бойынша салынған сәйкес сол ұзындықты кесінділерді салыстыру есебі сәл ойланғанда шешілмейтін күрделі мәселе екендігінің айқын көрінуі мен оларды салыстыру әрекетінің табылу кереметтілігінен тұратын ғажап оқиға және оның геометриялық мағынасы мен аналитикалық өрнектелуі – әртүрлі тең бөлікке бөлінген бірлік кесінді бөліктерінен солардың қайсыбір сандарын алғанда пайда болған кесінділердің, әрине, ұзындықтарымен бірге, қайсысының өзі, сол мағынада мәні үлкен, қайсысынікі кіші, не өзара тең екендігін тікелей салыстырғанда анықтау мүмкін емес күрделі мәселенің Математика «құдіретімен» шешілуі: егер де алдын ала берілген жай бөлшек сандар $\frac{m}{n}$ және $\frac{p}{q}$ болса, онда ортақ бірлік

кесіндіні салыстырылып жатқан кесінділердің бөлімдерінің көбейтіндісі болатын $n \cdot p$ бірдей бөлікке бөлгенде «Бөлшектің негізгі қасиеті» бойынша $\frac{m}{n}$-ұзындықты кесіндіні $\frac{1}{n \cdot p}$-ұзындықты кесінділерден $m \cdot$ кесінді, ал $\frac{p}{q}$-ұзындықты кесіндіні qn кесінді құрайды да, салыстырылып жатқан кесінділердің қайсысында $\frac{1}{n \cdot p}$-ұзындықты кесінді көп болса, сол ұзын, бірдей болғанда тең болуы және оның бөлшекті беріп тұрған төрт m, n, p, q сандары арқылы өрнектелуі. Ұзындықтары сәйкес $\frac{m}{n}$ және $\frac{p}{q}$ жай бөлшектер болатын екі кесінді берілсін. Сол кесінділердің ұзындықтарын бейнелейтін m, n, p және q оң бүтін сандардың қандай арақатынастарында сәйкес кесінділер өзара тең не бірінен бірі үлкен болатынын анықтау мәселесін зерттелік.

Бұл мәселенің күрделілігін келесі бір ғана мысалдан түсінуге болады: бірлік кесіндінің $\frac{1}{2}$-ортасына жақын алынған $\frac{3}{7}$ және $\frac{5}{1}2$ ұзындықты кесінділердің қайсысы ұзын екендігін жазылуынан бірден анықтау мүмкін емес, тіпті есеп шешілмейді деген де үрей келеді.

Расында да, бірлік кесіндіні дәл 7 бірдей бөлікке бөліп, солардың 3 бөлігін алғандағы кесінді ұзын ба, әлде дәл сол бірлік кесіндіні бірдей 12 бөлікке бөліп, солардың 5 бөлігін алғаны ұзын ба екендігін бірден анықтау мүмкін емес, тіптен ешқандай болжамдауға да келмейді. Оның себебі, алдымен бірлік кесіндіні ұзынырақ бөліктерге бөліп (бөлімі кіші болғандықтан), олардың аз (алымы екіншісінікіне қарағанда кіші) санын және дәл сол бірлік кесіндіні біріншісіне қарағанда қысқарақ бөліктерге бөліп, ондайлардың санын көбірек алғандықтан салыстыру мүмкіндігінен айырылып қалуымызда (43-сурет).



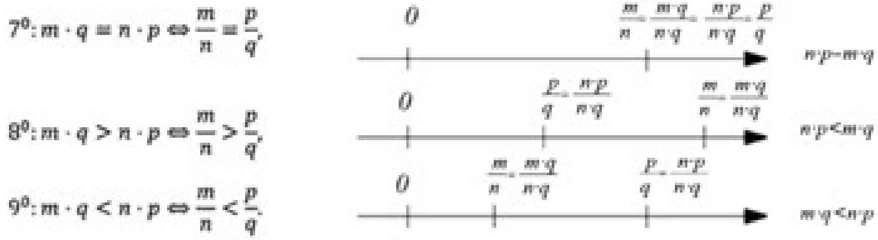
43-сурет

Қойылған күрделі мәселе ортақ өлшем енгізу арқылы былай шешіледі: бірлік кесіндіні салыстырылып жатқан кесінділердің бөлімдерінің көбейтіндісі болатын $n \cdot q$ бірдей бөлікке бөлгенде 6^0. «Бөлшектің негізгі қасиеті» бойынша $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} = (m \cdot q) \times \frac{1}{n \bullet q}$ және $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = (p \cdot n) \times \frac{1}{n \bullet q}$.

$\frac{m}{n}$-ұзындықты кесінді $\frac{1}{n \bullet q}$-ұзындықты $m \cdot q$ кесіндіге, ал $\frac{p}{q}$ -ұзындықты кесінді сол $\frac{1}{n \bullet q}$-ұзындықты $p \cdot n$ кесіндіге жіктеледі.

Бұдан $3^0, 4^0, 5^0$ «Бөлімдері бірдей бөлшектерді салыстыру» ережелері бойынша «Бөлшектер ұзындықтарын салыстыру» ережесі шығады. кесінділердің қайсысында - ұзындықты кесінді көп болса, сол ұзын, бірдей болғанда – тең. Бұл n, p, m және q арқылы былай өрнектеледі:

алғандықтан салыстыру мүмкіндігінен айырылып қалуымызда (43-сурет).



44-сурет

Бұл жалпы ережеден $\frac{3}{7}$ және $\frac{5}{12}$ жай бөлшектерінің қайсысы үлкен деген сұраққа жауап бере аламыз: $m = 3, n = 7, p = 5$ және $q = 12$ болып, $m \cdot q = 3 \cdot 12 = 36$ және $n \cdot p = 7 \cdot 5 = 35$ болғандықтан $m \cdot q = 36 > 35 = n \cdot p$ сол себептен $\frac{3}{7} > \frac{5}{12}$.

Оны көрнекі түрде $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 12}{7 \cdot 12} = \frac{36}{84}$ және $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{34}{84}$ бөлшектер теңдіктерінен көруге болады: $\frac{1}{84}$-ұзындықты кесіндіні 36 рет алынғандағы кесінді 35 рет алынғанынан ұзын болады.

Егер де қайсыбір оң бүтін n, k және q сандары үшін $n = q \times k$ теңдігі орындалса, онда n саны k санына *еселі* деп аталады (әрине, онымен бірге n саны q санына да еселі).

Көптеген оқулықтарда екі бөлшекті салыстыру солардың бөлімдерінің ең кіші ортақ еселігін табуды талап етеді де, сонымен бөлімдері тең бөлшектерді салыстыруға әкеледі. Мәселен, салыстыру керек екі $\frac{5}{12}$ және $\frac{8}{18}$ жай бөлшектердің 12 мен 18 сандарына тең бөлімдерінің жай көбейткіштерге жіктелулері сәйкесінше $12 = 3 \cdot 2^2$ және $18 = 2 \cdot 3^2$ болып, ортақ еселігі $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ болады да, «Бөлшектің негізгі қасиеті» бойынша бірінші бөлшекті $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3}$ түрінде, ал екінші бөлшекті $\frac{8}{18} = \frac{8 \cdot 2}{18 \cdot 2}$ түрінде жазып, бөлімдері бірдей бөлшектерді салыстыру ережесі бойынша

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{15}{36} < \frac{16}{36} = \frac{8 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{8}{18}$$

қатынасын анықтаймыз.

Бұндай ең кіші ортақ еселігі «көрініп» тұрған бөлшектер есептер жинағына енеді де, «жалпы» жағдайға «көлеңке» түсіреді. Міне, аса «күрделі» емес $\frac{136}{273}$ және $\frac{160}{323}$ бөлшектерін салыстыру керек болсын. Жоғарыдағы әдіс бойынша бұл бөлшектерді салыстыру үшін ең кіші еселігін табу талабына көшелік: бұған керекті өте қиын жай көбейткіштерге жіктеу амалы $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$ және $323 = 17 \cdot 19$ нәтижелерін бергенімен, олардың жіктеулерінде ортақ жай сандар болмағандықтан ең кіші еселігі бөлімдерінің $273 \cdot 323 = 88179$ көбейтіндісі болады да, аталған бөлшектерін салыстыру үшін бөлімдері бірдей бөлшектерді салыстыру амалына келтіру үшін әрқайсысын келесісінің бөліміне көбейту қажет, онда салыстыру

$$\frac{136}{273} = \frac{136 \cdot 323}{273 \cdot 323} \frac{43928}{88179} > \frac{43680}{88179} = \frac{273 \cdot 160}{273 \cdot 323} = \frac{160}{323}$$

түрінде жүргізіліп, бөлімдерін жай көбейткіштерге жіктеу амалы керек болмай қалғанын көреміз.

§9. ВЗГЛЯДЫ НА СПРАВЕДЛИВОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В МЕЖДУНАРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ИТМиНВ исходит из концепции, что по рождению все дети в познавательном процессе практически, за редкими исключением, равны между собой, святая обязанность государства состоит в том, чтобы всех обеспечить обучающими учебниками и обучающими учителями. Учебники на протяжении всех школьных лет образуют путь из мелких ступенек последовательного восхождения к математической зрелости, учителя подготовлены по принципу – сначала теоретическая подготовка, и только потом методика.

На этом фоне сделаем беглый обзор доступной для нас литературы, связанной со справедливостью математического образования в Зарубежье, с сохранением лексики статей.

Широкое разнообразие исследований по вопросам равенства в математическом образовании, со своими концепциями, с позиций обучающих и обучающихся, демонстрирует сложность этой проблематики.

Обзор методологий состоит из двух аспектов по вопросам равенства в математическом образовании: один из них по классификации участников образовательного процесса носит качественный характер, а другой носит количественный характер по крупномасштабным национальным и международным исследованиям.

В статье [35] авторы из Южной Африки анализируют как образовательная политика и практика влияют на доступ к математическому обучению для учащихся из разных социально-экономических слоев и культурных групп. В центре внимания исследование гендерных, расовых и классовых различий, как образовательные реформы могут способствовать или препятствовать достижению равенства. Исследование также подчеркивает важность создания инклюзивной среды и пересмотра методов преподавания, чтобы способствовать справедливому распределению образовательных возможностей в математике.

На глобальном и системном уровнях международные исследования и отчеты выявляют многочисленные проявления неравенства стран и вырабатывают политику обеспечения равенства. Так, известные исследователи в области математического образования, специализирующиеся на психометрии, образовательных оценках и использовании технологий для улучшения учебного процесса, авторы [36] использовали данные TIMSS (2011–2019 гг.), чтобы продемонстрировать влияние различных условий на уровне учащихся, семей и школ на успеваемость по математике в Гонконге. Ими получены высокие результаты по показателям TIMSS, обнаружено, что социально-экономический статус семьи оказывает значительное влияние на успеваемость по математике, в то время как расположение школы (город-село) и школьные ресурсы не оказывают существенного влияния. Напротив, в Южной Африке расположение школы и ее ресурсы были связаны с успеваемостью по математике. Такие исследования показывают влияние социально-экономического статуса, пола и школьных ресурсов на успехи учащихся в математике.

Международные исследования выдвигают на первый план неравенство в учебных программах по математике, подготовке учителей и обеспечении ресурсами. В статье [37] показано, как в Норвегии по результатам PISA выявленные стабильные различия в достижениях между учащимися-иммигрантами и неиммигрантами привели к изменениям в их системах качества и тестировании, школьных учебных программах, подготовке учителей и повышении внимания к большому числу учащихся с низкой успеваемостью по математике.

В публикациях [38]-[39] рассматриваются различные подходы к обеспечению доступного, инклюзивного и качественного математического образования. Здесь исследуются сложности, с которыми сталкиваются учащиеся разных социальных слоев, гендерного стереотипа, культурных различий и их влияние на успеваемость по математике. Анализируются факторы, влияющие на разрыв в успеваемости между учащимися из разных групп.

Культурно релевантное преподавание математики предполагает адаптацию учебных материалов к соответствующим социальным особенностям учащихся. Предлагаются практические методы преподавания, ориентированные на учет культурного разнообразия в классе [40]. В статье [41] обсуждаются гендерные и этнические различия в математическом образовании и их влияние на успеваемость учащихся.

Важной роли использования технологий для устранения образовательных неравенств, справедливого доступа к математическому образованию и созданию персонализированного обучения с предложением способов использования технологий для уменьшения разрыва в образовательных возможностях посвящена статья [42].

Отдельная роль уделяется инклюзивному образованию с точки зрения удовлетворения специальных образовательных потребностей учащихся с различными когнитивными и физическими особенностями с рекомендациями системных мер, направленных на достижение справедливости математического образования [43].

В работе [44] рассматривается, как математика может использоваться для укрепления социальной справедливости и демократических ценностей в обществе, разработано направление критической педагогики, связанное с тем, как государство, контроль и доминирующие идеологии проявляются в математическом образовании и как возникающие при этом негативные факторы можно преодолеть.

Таким образом, в научной литературе по теме справедливого математического образования большое внимание уделяется обеспечению равных условий обучения для всех учащихся, независимо от их социального, культурного или гендерного фона как культурно релевантного преподавания, так и использования технологий для снижения неравенства.

Заключение

При всем разнообразии способов установления справедливости математического образования в Мировом пространстве, Казахский подход, чему посвящена данная статья, заключается в государственном обеспечении средней школы прокладывающими путь к "Математической зрелости" обучающими учебниками и высокой профессиональной подготовки учителями по Математике. При этом не только в правильных словах общего содержания, а в методологических разработках каждой темы, объединенных в Единый комплекс учебников и программ всей Средней школы. Должен быть установлен допуск к преподаванию – наличие соответствующей теоретической подготовки по предмету.

Еще раз повторимся, целью Школьного математического образования должно быть внедрение Математического подсознания с высоким интеллектуальным мышлением на основе очерченного в последних столетиях программного содержания в облегченном Математическом анализе, причем без потерь, поскольку именно эта теория есть основа всего последующего вплоть до современного в Большой математике.

References

1 Образование, которое мы можем потерять // Сборник. – Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Институт компьютерных исследований. 2003. – 360 с.

2 Пока еще не слишком поздно. Доклад Национальной комиссии Соединенных Штатов Америки по преподаванию математики и естественных наук в 21-м веке. Перевод с английского. С.205-286 из [Сборник. – Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Институт компьютерных исследований. 2003. – 360 с].

3 Равные возможности для всех детей. Проект программы реформ в области образования Президента Соединенных Штатов Америки Джорджа Буша. С. 287-324. Перевод с английского. С.287-322 из [Сборник. – Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Институт компьютерных исследований. 2003. – 360 с].

4 Президент — о создании новой системы преподавания математики [электронный ресурс]. Газета "Газета.uz". URL: https://www.gazeta.uz/ru/2020/06/12/math/. Дата обращения: 29.06.2024.

5 «ОСОБЕННОСТИ НАЦИОНАЛЬНОЙ НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ, ИЛИ КАЗАХСТАН В УСЛОВИЯХ МАССОВОЙ ОСТЕПЕНИЗАЦИИ И ДИПЛОМИЗАЦИИ [электронный вариант]. Лаборатория общих проблем образования и науки, Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ), Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Астана.

6 Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А., Международные математические олимпиады. - Москва: Провещение, 1976. – 289 с.

7 Темірғалиев Н., Әубакір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X-XI кластар. -Алматы: "Жазушы", 2002. -382 б.

8 Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, для X-XI классов. Алматы:"Жазушы", 2002. -423 с.

9 Темірғалиев Н., «Математикалық анализ», 1 том, Алматы: Мектеп, 1987 – 288 б.

10 Темірғалиев Н., «Математикалық анализ» , 2 том, Алматы: Ана тілі, 1991 – 280 б.

11 Темірғалиев Н., «Математикалық анализ» , 3 том, Алматы: Білім, 1997 – 450 б.

12 Темірғалиев Н., «Математикалық анализ» (өңделген және толықтырылған екінші басылым) – Астана, 2024 – 2000 б.

13 Темиргалиев Н. Предисловие Главного редактора журнала «Вестник ЕНУ. Серия Математика. Информатика. Механика» о целях издания и путях их реализации // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. – 2018. - №1(122), С.8-69.

14 Математика: МЕТОДОЛОГИЯ и МЕТОДИКА. Казахстанская модель образования и науки. Материалы Института теоретической математики и научных вычислений ЕНУ им. Л.Н.Гумилева: III. Лаборатория математического образования в бакалавриате, магистратуре и Ph.D докторантуре, IV. Лаборатория по школьной математике, V. Лаборатория общих проблем образования и науки в РК (Электронное продолжающееся издание), Астана, 2024, С.1- 2245.

15 Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Теория мен есептерден тұратын «Бір айнымалылы сандық функция шегі» атты негізгі тақырып бойынша кешенді дамыту. – Астана: "Булатов А.Ж."ЖК, 2024, 135 б.

16 Жұбанышева А.Ж., Тауғынбаева Ғ.Е., Дулатова А. Комплексная разработка базовой темы «Предел числовой функции одной переменной» в теории и задачах: учебное пособие. – Астана: "Булатов А.Ж."ЖК, 2024, 130 б.

17 Темірғалиев Н. Ақырлы нәтижелі элементар ықтималдықтар теориясы: оқулық. -Астана: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2024. -160 бет.

18 Темиргалиев Н. Элементарная теория вероятностей с конечным числом исходов: учебник -Астана: Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, 2024. - 160 с.

19 Тауғынбаева Ғ.Е., Жұбанышева А.Ж. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: оқулық. -Астана: "Булатов А.Ж."ЖК, 2023. – 214 б.

20 Жұбанышева А.Ж., Тауғынбаева Ғ.Е. Ықтималдықтар теориясы бойынша есептер жинағы: Электронды оқулық. -Астана. - 2023.

21 Темиргалиев Н., Жайнибекова М., Воказе К., О некоторых «понятных» понятиях школьной математики // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Гуманитарные науки. – 2011. - №1(80), С.33-38.

22 Темиргалиев Н. , Жайнибекова М.А., Воказе К.Е., Анализ «понятных» понятий школьной математики // Математика в школе. - 2014 - №1, С.57-59.

23 Проскуряков И.В. Числа и многочлены. 2-е изд. – М.: Просвещение, 1965. –284 с.

24 Киселев А.П. Алгебра. Ч.1.- М.: ФИЗМАТЛИТ.2006.-152с.

25 Темиргалиев Н. Как быть с переместительным и сочетательными законами в средней школе?// Материалы Международной научной конференции, посвященной 105-летию академика С.М.Никольского «Современные проблемы анализа и преполавания математики», Москва, 2010, С.122-123.

26 Темиргалиев Н. Принципы создания и проведения экспертизы учебников по математике// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, 2009, №5 (72), С. 35-43.

27 Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. М., «Просвещение», 1992.- 351 с.

28 Киселев А.П. Алгебра: Часть первая; Учебник для 8-10 классов средней школы. –М.: ГУПИ МП РСФСР, 1963.-232 с.

29 Математическая энциклопедия. Том 5. М.: Сов. энциклопедия, 1977.- 1052с.

30 Виленкин Н.Я. и др. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений. – 24-е изд., испр. – М.:Мнемозина, 2008. -280 с.

31 Математика: Энциклопедия. М.: Большая Российская энциклопедия, 2003.

32 Темиргалиев Н. Научный, научно-методический и организационный отчет «Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева в 2019 году (Часть II)». Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. 2020. Т. 132. №3. С.31–69.

33 Джумакаева Г.Т., Темиргалиев Н. Метод анализа возрастных способностей учащихся к усвоению учебного материала //Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, №1 (80), 2011, С.39-50.

34 Жубанышева А.Ж., Каримова Д. Мектеп оқушыларының жас ерекшеліктеріне байланысты мектеп бағдарламасындағы ықтималдықтар теориясын игерудің эмпирикалық әдісін жүзеге асыру, Наука и образование, 2015.

35 Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. Астана, 2012.

36 Vithal R., Brodie K., Subbaye R. Equity in mathematics education // ZDM – Mathematics Education, 2024). V.56, P.153-164. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01504-4

37 Qiu X. L., Leung, F. K. Equity in mathematics education in Hong Kong: Evidence from TIMSS 2011 to 2019. Large Scale Assessments in Education, 2022. V.10(1), P.1–21. https://doi.org/ 10.1186/s40536-022-00121-z

38 Nortvedt G. A. Policy impact of PISA on mathematics education: The case of Norway // European Journal of Psychology of Education, 2018. V.33(3), P.427–444. https://doi.org/10.1007/s10212-018- 0378-9.

39 Boaler J. Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math // Journal of Mathematics Education, 2016.

40 Gutiérrez, R. (2012). Context matters: How should we conceptualize equity in mathematics education? In B. Herbel-Eisenmann, J. Choppin, D. Wagner, and D. Pimm (Eds.), Equity in Discourse for Mathematics Education: Theories, Practices and Policies, 2012. P.17–33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2813-4

41 Ladson-Billings G. Toward a Theory of Culturally Relevant Pedagogy // American Educational Research Journal, 1995.

42 Leyva L.A. Unpacking the Male Superiority Myth in Mathematics Education // Journal of Urban Mathematics Education, 2017.

43 Kitchen R. S., and Berk, S. Educational Technology and Equity in Mathematics Education // Educational Technology Research and Development, 2016.

44 Schleicher A. Equity in Education: Breaking Down Barriers to Social Mobility // OECD Publishing, 2018.

45 Skovsmose O. Critical Mathematics Education // Philosophy of Mathematics Education Journal, 2011

Мектеп біліміндегі Қазақтың математикалық әділеттігі – оқылатын оқулық пен оқытушылармен баршаны жабдықтау

Н. Темірғалиев, Қ.Б. Нұртазина, Ғ.Е. Тауғынбаева, А.Ж. Жұбанышева
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Қажымұқан көш., 13, Астана, 010008, Қазақстан

Аннотация. Мектепте математиканы оқыту әділеттілігі шын мәнісінде білім алушыларға өз қабілетін «Математикалық жетілу» деңгейіне жету барысында қолдану мүмкіндігін мемлекет тарапынан толық және егжей-тегжейлі қамтамасыз ету. Не туралы айтып отырғанымызды толық бүгі-шігін ажыра отырып түсіну үшін бастауыш мектеп математикасындағы бір ғана тақырыпты қарастыру жеткілікті:таңдауымызша алынған бірлік кесінді негізінде ұзындықтары бөлімдері әртүрлі жай бөлшектер болатын кесінділер салып, салынған екі кесінді ұзындықтарының сандық мәндері арқылы салыстырымсыздығы мен осы бір қарағанда шешілмейтінде есептің шешуге мүмкіндік беретін Математика құдіретінің кереметтілігі.

Білім беру үрдісінде мемлекет пен оқушыны ажырата білу қажет – біріншісі білім алуға мүмкіндік бергенімен екіншісіне жауап бермейді, алайда жоғары сападағы білім алу үшін моральдық және материалдық ынталандыру болуы керек: Данышпан Абай айтқандай " *Білімдіден шыққан сөз, Талаптыға болсын кез. Нұрын, сырын көруге Көкрегінде болсын көз. «Айтшы-айтшылап» жалынар, Ұққыш жансып шабынар. Ұқпай жатып жалығар, ұйқылы-ояу бойкүйез*", әрине білімді меңгеру жеке сипатқа ие және *"Атты суға апаруға болады, бірақ ішуге мәжбүрлей алмайсың"* принципіне бағынады.

«Әділеттілік» халықаралық білім беру кеңістігіндегі көп қырлы тақырып – бұл экономика, инфрақұрылым және технология мықты дамыған және кедейлік пен теңсіздікті сипаттайтын, көбінесе біріншісіне жататын елдерінің отарлауында болған экономикасы жан жақты емес «Жаһандық Солтүстік» және «Жаһандық Оңтүстік» түріндегі ғаламның бөлінуі. Бұл «Оқулықтардың сапасы тұрғысындағы тең дәрежеде білім» немесе «Білім алушылардың сұраныстарын ескере отырып, оқу бағдарламаларын әзірлеу және енгізу», «Білім берудегі теңсіздікті жоюға бағытталған педагогикалық стратегиялардың тиімділігін бағалау», «Білімге қолжетімділікті қамтамасыз етудегі технологияның рөлі» сынды кәсіби көзқарастағы әртүрлі әлеуметтану, экономикалық, педагогикалық, құқықтық және саяси көзқарастардағы зерттеулер. Мақала көп жылдық тәжірибеге және бұрын жасалған идеяларға негізделген бірнеше жылда айтарлықтай көлемде нәтижесін беретін жүйелі түрде құрылған Қазақстан Республикасының Ұлттық бағдарламасын қамтиды.

Шегерілген **әр сағат** барлық сыныптар үшін және әрбір оқушы үшін бір математика сабағын тиімсіз етеді және мемлекетке адам-сағатпен барлық оқушылардың көлемінде шығын келтіреді: 13.04.2015 ж. және одан бұрын, 1974 жылдан бастап та «*Мен, Нұрлан Темірғалиев, тікелей маман ретінде «Қазақстан Республикасының қазіргі математика-информатика саласының деңгейі бойынша төтенше жағдай» жариялануын талап етемін*»; 31.01.2019 ж. «*Алғыр бала Иманбектің болашағын сақтайық*»; 12.07.2020 ж. «*Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі бекіткен барлық мектеп математикасы оқулықтарына 13 жұмыс күні ішінде бір ғана Ғалия Тауғынбаева күмәнсіз сараптама жүргізе алады*»; 4.11.2021 ж. «*30 жылдық тәуелсіз Қазақстанның Білім және ғылым жүйесі тіпті Рамануджанның ой-өрісіндей мүмкіндігі бар қазақты математикалық Мауглиге айналдырады*»; 2024 жылғы 1 шілдедегі «*2023-2024 оқу жылында 5 миллион оқушы бүкіл мектеп математикасы бойынша, жоғары мектепте математикаға негізделген барлық мамандықтар бойынша оқытылмады, бұл математика, компьютер ғылымдар және AI-ML салаларындағы халықаралық деңгейде алғышебтегі ТМжәнеҒЗИ Қазақстан Республикасының 10 жылдық бюджетіне де тапсырыс беруге болмайтын ұлттық бағдарламасы бар жағдайда орын алуы*»; *«Бір ғана Бастауыш мектептің «Бөлімдері әртүрлі жай бөлшектерді салыстыру» тақырыбының мысалында*

«Алдымен пән бойынша теорияны толық меңгеру, тек содан кейін ғана оқушылардың меңгеруге қол жетімділігі мен қолжетімсіздігін түсінуді қамтитын әдістеме және ешуақытта керісінше емес» тұрғысындағы оқытуға рұқсат беру»; 30.10.2024 және осыған дейінгі, кейінгі басқа да даталар, «*Оқулықтар мен ғылыми басылымдарда, рецензияларда көрнекі түрде ғылыми, ғылыми-әдістемелік қателер жіберген тұлғалар осы бөлімнің қызмет аясынан өмір бойына шығарыла отырып, «тиісті мекеменің қара тізіміне» енгізілу қажет – бұдан еш нәрсе бүлінбейді, тек жақсарады, кезінде үйренбеген ешқашан да үйренбейді, өзі білімсіз білім бере алмайды* ” қағидасы заң ретінде қабылдансын.

Түйін сөздер: Математикалық әділеттілік, Математика – жүйелі ғылым, мектептегі математикалық білім беру, даусыз сараптама, тікелей сабақта қолданылатын әдістемелер, мектеп оқушыларының жас ерекшеліктеріне байланысты қабілеттері, математикалық жетілу, математиканы түсіну, синопсин-мазмұн.

Kazakh mathematical justice in school education is equal conditions for all in teaching textbooks and teachers

N. Temirgaliyev, K. Nurtazina, G. Taugynbayeva, A. Zhubanysheva
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan

Abstract. Equity in school mathematics education ideally means providing students with the opportunity to realize their potential through the provision of public responsibility for the means to achieve "Mathematical Maturity" in full and in detail. To gain an understanding of the nuances of this concept, it is enough to delve into just one topic of elementary school mathematics curriculum. Select an arbitrarily unit segment, build two segments with lengths of ordinary fractions with different denominators and make sure that it is impossible to compare them in length in numerical terms. Then, appreciate the remarkable ability of Mathematics, to provide a solution to what would otherwise appear to be an insoluble problem.

In the educational process, it is essential to differentiate between the state and the student. The first provides the opportunity to obtain knowledge, but is not to answer for the second. However, there must be moral and material motivation to obtain high-quality knowledge. In his teachings, wise Abay cautioned that the word from the educated though demanding, can illuminate the path to understanding. He urged to perceive the light and mystery that surrounds us. With his words "*Aitshy-aytshyp zhalynar, Uqqysh zhansyp shabynar. Uqpay zhatyp zhalyǵar, uıqyly-oıaý boıkúıez*", which translates as ‘mindless boredom, drowsiness’, he emphasised the importance of remaining alert and awake to the world around us. In the absence of boredom, sleepiness", as in the case of personal transformation of the individual and the principle of "*you can lead a horse to water, but you cannot make it drink*".

The concept of "Justice" is a multifaceted topic in the International Educational Space. It is the universal division between "Global North" and the "Global South", where the former has a stronger economy, infrastructure and technology, while the latter is characterized by less diverse economy, by poverty and inequality and a history of colonization by the countries of the Global North. These studies adopt from various points of views: sociological, economic, pedagogical, legal and political, as well as various professional approaches such as "Fair education from the standpoint of textbook quality" or "Development and implementation of programs that take into account the needs of different groups of students", "Evaluation of the effectiveness of pedagogical strategies aimed at eliminating educational inequality", and "The role of technology in providing access to education", etc.

This article is a presents a methodically structured National Program of the Republic of Kazakhstan, based on many years of experience and previously developed ideas, the result will be noticeable in a few years.

Every hour of delay makes one math lesson in all classes and for each student unschoolable, and damages the State in man-hours in the number of all students: "I, Nurlan Temirgaliyev, as a direct specialist, demand to declare a "State of emergency for the current state of mathematics and computer science of the Republic of Kazakhstan!" dated 04/13/2015 and, earlier, since 1974; "Save the future of a capable boy Imanbek" dated 01/31/2019; "Galiya Taugynbayeva alone can conduct an indisputable examination of all approved by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan in 13 calendar days textbooks on school mathematics" dated 07/12/2020; "The education and Science system of 30-year-old independent Kazakhstan turns a Kazakh, even if with the rudiments of Ramanujan's thinking, into a Mathematical Mowgli" dated 11/14/2021; "The academic year ended 2023-2024 for 5 million teachers and students was non-educational in all School mathematics, in Higher education in all specialties based on Mathematics, and this is in the presence of the National ITMiNV Program for elevation in Mathematics, Computer Science and AI-ML to World leading positions, which cannot be ordered with execution even for 10 annual budgets of the Republic of Kazakhstan" from 1.07.2024; "*Admission to teaching "First, complete theoretical training in the subject, only then the methodology, including understanding the accessibility or inaccessibility to assimilation by students and not the other way around*" on the example of just one problematic topic "Comparison of ordinary fractions with different denominators of "Elementary school". To adopt in the form of a Law "*Those who have made demonstrative scientific and methodological mistakes in textbooks and scientific publications, official reviews are included in the "Blacklist of a specialized institution" with lifelong excommunication from the sphere of activity of this department, there will be no losses from this, only recovery will occur, , never learned at the time never learned, cannot teach without knowledge itself*" from 10/30/2024, numerous of the same earlier and later dates.

Key words: Mathematical justice, Mathematics is a systematic science, school mathematical education, indisputable expertise, methods of direct application in the classroom, age abilities of schoolchildren, mathematical maturity, understanding of mathematics, synopsis–table of contents.

References

1 Obrazovanie, kotoroe my mozhem poteryat' [Education that we can lose], Collection. Moskow: M.V. Lomonosov Moscow State University. Institute of Computer Research. 2003. 360 p. Translated from English. [in Russian]

2 Poka eshche ne slishkom pozdno. Doklad Nacional'noj komissii Soedinennyh SHtatov Ameriki po prepodavaniyu matematiki i estestvennyh nauk v 21-m veke[It's not too late yet. Report of the United States National Commission on the Teaching of Mathematics and Science in the 21st Century] in [Collection. Moskow: M.V. Lomonosov Moscow State University. Institute of Computer Research. 2003. 360 p.] Translated from English [in Russian]

3 Poka eshche ne slishkom pozdno. Doklad Nacional'noj komissii Soedinennyh SHtatov Ameriki po prepodavaniyu matematiki i estestvennyh nauk v 21-m veke. [Equal opportunities for all children. Draft educational reform program of the President of the United States of America George W. Bush] in [Collection. Moskow: M.V. Lomonosov Moscow State University. Institute of Computer Research. 2003. 360 p.] P.287-322. Translated from English [in Russian]

4 Prezident — o sozdanii novoj sistemy prepodavanija matematiki [The President spoke about the creation of a new system of teaching mathematics] [electronic resource]. Newspaper "Газета.uz". Available at: https://www.gazeta.uz/ru/2020/06/12/math/. Accessed: 29.06.2024.

5 «OSOBENNOSTI NACIONAL"NOJ NAUKI I OBRAZOVANIJa, ILI KAZAHSTAN V USLOVIJaH MASSOVOJ OSTEPENIZACII I DIPLOMIZACII [jelektronnyj variant]. Laboratorija obshhih problem obrazovanija i nauki, Institut teoreticheskoj matematiki i nauchnyh vychislenij (ITMiNV), Evrazijskij nacional'nyj universitet imeni L.N.Gumileva, Astana. ["THE PECULIARITIES OF NATIONAL SCIENCE AND EDUCATION, OR KAZAKHSTAN IN THE CONTEXT OF MASS SETTLEMENT AND GRADUATION [electronic version]. Laboratory of General Problems of Education and Science, Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computing (ITMiNV), L.N.Gumilev Eurasian National University, Astana.]

6 Morozova E.A., Petrakov I.S., Skvortsov V.A. Mezhdunarodnye matematicheskie olimpiady [International Mathematical Olympiads]. Moscow: Proveshchenie, 1976. 289 p.

7 Temirgaliyev N., Aubakir B., Bailov E., Potapov M. K., Sherniyazov K. Algebra zhane analiz bastamalary [Algebra and the beginning of analysis], X-XI classes. Almaty: "Zhazushy", 2002. 382 P.

8 Temirgaliev N., Aubakir B., Bailov E., Potapov M.K., Sherniyazov K. Algebra i nachala analiza [Algebra and the beginning of analysis], for grades X-XI. Almaty:"Zhazushi", 2002. -423 p.

9 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 1 [Mathematical analysis. Vol 1] (Mektep, Almaty, 1987, 288 p.). [in Kazakh]
10 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 2 [Mathematical analysis. Vol 2] (Ana-tili, Almaty, 1991, 400 p.). [in Kazakh]
11 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 3 [Mathematical analysis. Vol 3] (Bilim, Almaty, 1997, 432 p.). [in Kazakh]
12 Темірғалиев Н., «Математикалық анализ» (өңделген және толықтырылған екінші басылым) – Астана, 2024 – 2000 б.
13 Temirgaliyev N. Predislovie Glavnogo redaktora zhurnala «Vestnik ENU. Serija Matematika. Informatika. Mehanika» o celjah izdanija i putjah ih realizacii [Introdaction of the Editor-in-chief of the journal "The Bulletin of the L.N. Gumilyov EurasianNational University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series" about the issue purposes and the ways ofits implementation], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science.Mechanics series, 2018. Vol. 122. №1. P. 8-67.
14 Matematika: METODOLOGIJa i METODIKA. Kazahstanskaja model' obrazovanija i nauki. Materialy Instituta teoreticheskoj matematiki i nauchnyh vychislenij ENU im. L.N.Gumileva: III. Laboratorija matematicheskogo obrazovanija v bakalavriate, magistrature i Ph.D doktoranture, IV. Laboratorija po shkol'noj matematike, V. Laboratorija obshhih problem obrazovanija i nauki v RK [Mathematics: METHODOLOGY and METHODOLOGY. The Kazakh model of education and science. Materials of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computing of the L.N.Gumilev ENU: III. Laboratory of Mathematical Education in Bachelor's, Master's and Ph.D. doctoral studies, IV. Laboratory of School Mathematics, V. Laboratory of General Problems of Education and Science in the Republic of Kazakhstan] (Electronic continuing edition), Astana, 2024, P.1-2245.
15 Taugynbaeva G.E., Zhubanysheva A.Zh. Teorija men esepterden turatyn «Bir ajnymalyly sandyk funkcija shegi» atty negizgi takyryp bojynsha keshendi damytu [Development of a complex on the main topic "limits of a numerical function with one variable", consisting of theory and problems]. Astana: IP "Bulatov A.ZH.", 2024, 135 p.
16 Taugynbaeva G.E., Zhubanysheva A.Zh. Kompleksnaja razrabotka bazovoj temy «Predel chislovoj funkcii odnoj peremennoj» v teorii i zadachah: uchebnoe posobie [Development of a complex on the main topic "limits of a numerical function with one variable", consisting of theory and problems]. Astana: IP "Bulatov A.ZH.", 2024, 130 p.
17 Temirgaliyev N. Akyrly natizheli jelementar yktimaldyktar teorijasy: oқulyk [Elementary probability theory with a finite number of outcomes: textbook]. Astana: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2024. 160 p.
18 Temirgaliev N. Jelementarnaja teorija verojatnostej s konechnym chislom ishodov: uchebnik [Elementary probability theory with a finite number of outcomes: textbook]. Astana: L.N.Gumilev Eurasian National University, 2024. 160 p.
19 Taugynbaeva G.E., Zhubanysheva A.Zh. Yktimaldyktar teorijasy bojynsha esepter zhinagy: oқulyқ. [Collection of problems on probability theory: textbook]. Astana: IP " Bulatov A. ZH.", 2023. 214 P.
20 Zhubanysheva A.Zh., Taugynbaeva Ғ.E. Yktimaldyktar teorijasy bojynsha esepter zhinagy: Jelektrondy okulyk [Collection of problems on probability theory: an electronic textbook]. Astana. 2023.
21 Temirgaliev N., Zhainibekova M., Vocaze K. O nekotoryh «ponjatnyh» ponjatijah shkol'noj matematiki [On some "understandable" concepts of school mathematics], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, Humanities. 2011. №1(80), P.33-38.
22 Temirgaliev N., Zhainibekova M.A., Vocaze K.E. Анализ «понятных» понятий школьной математики [Analysis of "understandable" concepts of school mathematics], Mathematics at school. 2014. №.1. P. 57-59.
23 Proskuryakov I.V. Chisla i mnogochleny [Numbers and polynomials]. 2nd edition. Mockow: Enlightenment, 1965. 284 p.
24 Kiselev A.P. Algebra [Algebra]. Part 1. Moscow: FIZMATLIT. 2006. 152p.
25 Temirgaliev N. Kak byt' s peremestitel'nym i sochetatel'nymi zakonami v srednej shkole? [What about translational and combinational laws in secondary school?], Materialy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, posvjashhennoj 105-letiju akademika S.M.Nikol'skogo «Sovremennye problemy analiza i prepolavanija matematiki» [Proceedings of the International Scientific Conference dedicated to the 105th anniversary of Academician S.M.Nikolsky "Modern problems of analysis and teaching mathematics"], Moscow, 2010, P. 122-123.
26 Temirgaliev N. Principy sozdanija i provedenija jekspertizy uchebnikov po matematike [Principles of creation and examination of textbooks in mathematics], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2009, №. 5 (72), P. 35-43.
27 Bashmakov M. I. Algebra i nachala analiza [Algebra and the beginning of analysis], grades 10-11. Moscow, "Enlightenment", 1992. 351 p.
28 Kiselev A.P. Algebra: Chast' pervaja [Algebra: Part one]. Textbook for grades 8-10 of secondary school. Moscow: GUPI MP RSFSR, 1963. 232 p.
29 Matematicheskaja jenciklopedija [The Mathematical Encyclopedia]. Volume 5. Moscow: Soviet Encyclopedia, 1977. 1052 p.
30 Vilenkin N.Ya. et al. Matematika [Mathematics]. 5th grade: studies. for general education institutions. 24th ed., ispr. Moscow: Mnemosyne, 2008. 280 p.
31 Matematika: Jenciklopedija [Mathematics: Encyclopedia]. Moscow: The Great Russian Encyclopedia, 2003.

32 Temirgaliev N. Scientific, scientific, methodological and organizational report "Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computing (ITMiNV) of the L.N.Gumilev Eurasian National University in 2019 (Part II)" [Scientific, methodological and organizational report "Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computing (ITMiNV) of the L.N.Gumilyov Eurasian National University in 2019 (Part II)"], Bulletin of the L.N. Gumilev Eurasian National University. Mathematics series. Computer science. 2020. Vol. 132. №3. C.31–69. Mechanics

33 Dzhumakaeva G.T., Temirgaliev N. Metod analiza vozrastnyh sposobnostej uchashhihsja k usvoeniju uchebnogo materiala [Method of analyzing the age-related abilities of students to assimilate educational material], Bulletin of the L.N. Gumilev Eurasian National University, 2011. №1 (80). P. 39-50.

34 Zhubanysheva A. zh., Karimova D. Mektep okushylarynyn zhas erekshelikterine bajlanysty mektep bagdarlamasyndagy yktimaldyktar teoriyasyn igerudiң empirikalyk ədisin zhүzege asyru [Implementation of an empirical method for mastering the theory of probability in the school curriculum depending on the age characteristics of schoolchildren], Science and education, 2015.

35 Temirgaliev N. Teoriya veroyatnostej [Probability theory]. Electronic edition. Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computing, L.N. Gumilev Eurasian National University. Astana, 2012.

36 Vithal R., Brodie K., Subbaye R. Equity in mathematics education, ZDM – Mathematics Education, 2024. V.56, P.153-164. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01504-4

37 Qiu X.L., Leung F.K. Equity in mathematics education in Hong Kong: Evidence from TIMSS 2011 to 2019. Large Scale Assessments in Education. 2022. V. 10(1). P.1–21. https://doi.org/ 10.1186/s40536-022-00121-z

38 Nortvedt G. A. Policy impact of PISA on mathematics education: The case of Norway, European Journal of Psychology of Education. 2018. V. 33(3). P. 427–444. https://doi.org/10.1007/s10212-018- 0378-9.

39 Boaler J. Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Journal of Mathematics Education, 2016.

40 Gutiérrez, R. Context matters: How should we conceptualize equity in mathematics education? In B. Herbel-Eisenmann, J. Choppin, D. Wagner, and D. Pimm (Eds.), Equity in Discourse for Mathematics Education: Theories, Practices and Policies, 2012. P.17–33. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2813-4

41 Ladson-Billings G. Toward a Theory of Culturally Relevant Pedagogy, American Educational Research Journal, 1995.

42 Leyva L.A. Unpacking the Male Superiority Myth in Mathematics Education, Journal of Urban Mathematics Education, 2017.

43 Kitchen R. S., and Berk, S. Educational Technology and Equity in Mathematics Education, Educational Technology Research and Development, 2016.

44 Schleicher A. Equity in Education: Breaking Down Barriers to Social Mobility, OECD Publishing, 2018.

45 Skovsmose O. Critical Mathematics Education, Philosophy of Mathematics Education Journal, 2011

Сведения об авторах:

Темиргалиев Нурлан – д.ф.-м.н., профессор, директор института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Нуртазина Карлыгаш Бегахметовна – ***автор для корреспонденции,*** к.ф.-м.н., старший научный сотрудник института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Таугынбаева Галия Ерболовна – PhD, старший научный сотрудник института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Жубанышева Аксауле Жанбыршиевна – PhD, старший научный сотрудник института Теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Nurlan Temirgaliyev – Doct. of phys.-math. sci., professor, Director Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Karlygash Nurtazina – ***corresponding author,*** Cand. of phys.-math. sci., Assoc. Pr., Senior scientific researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Galiya Taugynbayeva – PhD, Senior scientific researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Aksaule Zhubanysheva – PhD, Senior scientific researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Поступила: 12.09.2024. После редакции: 21.09.2024.
Одобрена: 27.09.2024. Доступна онлайн: 30.09.2024.

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2024, Vol. 148, №3, P. 100-109.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 29.37.19

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЗИЦИОННОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗВУКОПРОНИЦАЕМЫХ СФЕР [1]

Э.Ш. Насибуллаева
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, пр.Октября, 71, Уфа, 450054, Россия
(E-mail: elvira@anrb.ru)

Аннотация. В рамках решения задачи акустического рассеяния на системе, состоящей из множества звукопроницаемых сфер, исследуется одна из основных характеристик явления рассеяния — позиционное сечение рассеяния, позволяющая провести анализ интенсивности рассеянной волны в заданном направлении. Получена формула для данной характеристики, учитывающая взаимодействие между сферами в системе, которая является универсальной и применима для любого числа сфер различных радиусов, расположенных в произвольных трехмерных конфигурациях, для различных физических свойств окружающей среды внутри сфер, а также при произвольном внешнем воздействии на систему. Проведена верификация с данными других численных исследований; получено качественное совпадение результатов. Численный параметрический анализ для системы, состоящей из двух звукопроницаемых сфер, при воздействии плоской или сферической (от монопольного источника излучения) волны показал, что в случае воздушных пузырьков в воде система обладает наилучшими рассеивающими свойствами; рассеяние в обратном направлении в системе со сферами одинакового радиуса выше, чем в системе со сферическими частицами различных размеров; для плоской волны увеличение волнового радиуса приводит к уменьшению значения функции обратного сечения рассеяния, а для монопольного источника излучения рост волнового радиуса, наоборот, приводит к росту данной величины. Для слоя капель воды в воздухе получено, что при увеличении расстояния между центрами сфер увеличиваются рассеивающие свойства данного слоя в обратном направлении.

Ключевые слова: система звукопроницаемых сфер, интенсивность рассеянной волны, позиционное сечение рассеяния, обратное сечение рассеяния, плоская волна, монопольный источник излучения.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2024/3.4

2000 Mathematics Subject Classification: 76Q05

1. Введение

При решении задачи рассеяния акустической волны на множестве сферических препятствий малых размеров определение основных характеристик рассеяния, таких, как позиционное

[1]Работа выполнена при поддержке госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

сечение рассеяния (differential scattering cross section) или полное сечение рассеяния (total scattering cross section), является одним из ее основных этапов. Анализ данных характеристик позволяет установить параметры системы, при которых взаимодействие между частицами является либо существенным, либо им можно пренебречь и свести к упрощенной задаче с множеством одиночных невзаимодействующих частиц.

До настоящего времени научная литература, связанная с изучением основных характеристик явления рассеяния как правило была ограничена случаями одиночной сферы или системы пары сфер. Обзор данных исследований, включающий работы по исследованию рассеяния на одиночном препятствии до 1950 г., представлен в [1], а с более поздними работами, включая случай двух сфер, можно ознакомиться в [2]-[5], а также в обзорной работе [6]. В работе [7] выведена явная формула полного сечения рассеяния, учитывающая взаимодействие между звукопроницаемыми сферами в системе. Данная формула применима для любого числа сфер различных радиусов, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, и при произвольном внешнем воздействии в границах применимости алгоритмов, используемых для общего [8] или осесимметричного [9] случаев.

Настоящая работа посвящена исследованию позиционного сечения рассеяния от системы звукопроницаемых сфер. Данная характеристика позволяет провести анализ интенсивности рассеянной волны в заданном направлении. На основе преобразованной формулы для интенсивности рассеянной волны, представленной в работе [7], получено выражение для позиционного сечения рассеяния, и проведен численный параметрический анализ исследуемой характеристики на системе сфер при падении двух видов волн: плоской или сферической от монопольного источника излучения.

2. Постановка задачи и формула позиционного сечения рассеяния для системы сфер

Рассмотрим рассеяние акустической волны на системе, состоящей из N звукопроницаемых сфер различных радиусов a_v $(v = 1, 2, ..., N)$, произвольным образом распределенных в бесконечном трехмерном пространстве. Среды вне и внутри сфер являются однородными, характеризуются плотностями ρ_0 и ρ_v и скоростями звука c_0 и c_v соответственно. На систему воздействует либо плоская волна, имеющая нормальный вектор $\mathbf{n}_{\mathrm{pw}}$ к ее фронту, либо сферическая волна от монопольного источника излучения, расположенного в произвольной точке M_{ms} трехмерного пространства. На рис. 1 представлена схема и основные обозначения для данной задачи.

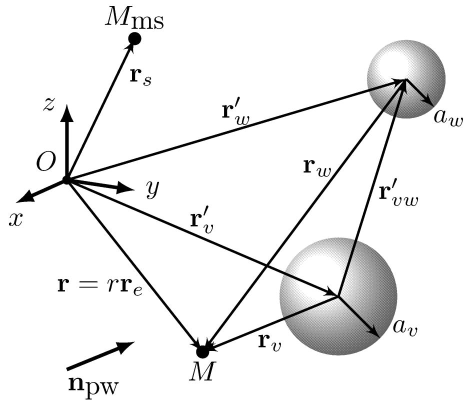


Рисунок 1 – Схема задачи и основные обозначения в разных системах отсчета. $\mathbf{n}_{\mathrm{pw}}$ — нормальный вектор к фронту плоской волны; M_{ms} — монопольный источник излучения; $M = M(r, \theta, \varphi)$ — произвольная точка в трехмерном пространстве.

Математическая модель, описывающая рассеяния внешней волны на множестве звукопроницаемых сфер, а также система линейных уравнений в матричном виде, к которой сводится решение данной задачи, приведены в работе [7]. Заметим, что моделирование задачи осуществлялось в предположении, что центры сфер неподвижны и радиальное движение сферической границы отсутствует.

Преобразуем формулу для позиционного сечения рассеяния $\sigma(\theta,\varphi)$, характеризующую интенсивности рассеянной волны в заданном направлении (θ,φ), которая в общем случае определяется выражением [10]:

$$\sigma(\theta,\varphi)=\frac{4\pi r^2 I_s(\theta,\varphi)}{I_0}, \tag{1}$$

где I_s — интенсивность рассеянной волны; I_0 — интенсивность падающей волны.

Формула для интенсивности рассеянной волны I_s, полученная в работе [7], с учетом формулы для комплексного сопряжения (обозначается знаком «*») ортогональной сферической гармоники

$$Y_l^{s*}(\theta,\varphi)=(-1)^s Y_l^{-s}(\theta,\varphi),$$

примет следующий вид:

$$I_s=\frac{\omega\rho_0}{2k_0r^2}\mathrm{Re}\sum_{v,w=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=-l}^{l}(-1)^{n+s}i^{n+l}A_n^{(v)m}A_l^{(w)s*}e^{ik_0(\mathbf{r}'_{vw}\cdot\mathbf{r}_e)}Y_n^m(\theta,\varphi)Y_l^{-s}(\theta,\varphi).$$

Здесь $\omega=2\pi f$ — угловая частота; f — частота внешнего поля; k_0 — волновое число для внешней среды; i — мнимая единица; $A_n^{(v)m}$ — решение матричной системы [7].

Преобразуем произведение двух поверхностных сферических гармоник:

$$\begin{gathered}Y_n^m(\theta,\varphi)Y_l^{-s}(\theta,\varphi)=\\=\frac{(-1)^{m-s}}{4\pi}\sqrt{(2n+1)(2l+1)\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}\frac{(l-|s|)!}{(l+|s|)!}}P_n^{|m|}(\cos\theta)P_l^{|s|}(\cos\theta)e^{i(m-s)\varphi}=\\=\frac{(-1)^{m-s}}{4\pi}c^{(n,m,l,s)}P_n^m(\cos\theta)P_l^s(\cos\theta),\end{gathered}$$

где введено обозначение:

$$c^{(n,m,l,s)}=(-1)^{(m-|m|+s-|s|)/2}\sqrt{(2n+1)(2l+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{(l-s)!}{(l+s)!}};$$

$P_l^s(\cos\theta)$ —присоединенные функции Лежандра [11].

С учетом формулы разложения произведения двух присоединенных функций Лежандра [12]

$$P_n^m(\cos\theta)P_l^s(\cos\theta)=\sum_{i_1=|n-l|}^{n+l}b_{i_1}^{(nmls)}P_{i_1}^{m-s}(\cos\theta),$$

где $b_{i_1}^{(nmls)}$ — коэффициенты Клебша–Гордана, получим следующее выражение интенсивности рассеянной волны через присоединенные функции Лежандра:

$$I_s=\frac{\omega\rho_0}{8\pi k_0r^2}\mathrm{Re}\sum_{v,w=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=-l}^{l}(-1)^{n+m}i^{n+l}A_n^{(v)m}A_l^{(w)s*}e^{i(k_0(\mathbf{r}'_{vw}\cdot\mathbf{r}_e)+(m-s)\varphi)}\times$$
$$\times c^{(n,m,l,s)}\sum_{i_1=|n-l|}^{n+l}b_{i_1}^{(nmls)}P_{i_1}^{m-s}(\cos\theta).$$

Окончательная формула для позиционного сечения рассеяния (1) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\sigma(\theta,\varphi)=\frac{\omega\rho_0}{2k_0I_0}\mathrm{Re}\sum_{v,w=1}^{N}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=-l}^{l}(-1)^{n+m}i^{n+l}A_n^{(v)m}A_l^{(w)s*}\times\\ \times e^{i(k_0(\mathbf{r}'_{vw}\cdot\mathbf{r}_e)+(m-s)\varphi)}c^{(n,m,l,s)}\sum_{i_1=|n-l|}^{n+l}b_{i_1}^{(nmls)}P_{i_1}^{m-s}(\cos\theta),\end{gathered}\tag{2}$$

где в случае плоской волны интенсивность I_0 определяется как

$$I_0 = \frac{p_0^2}{2\rho_0 c_0},$$

а в случае сферической волны от монопольного источника излучения —

$$I_0 = \frac{\omega \rho_0 V_0^2 k_0}{32\pi^2 d_{\mathrm{ms}}^2}.$$

Здесь p_0 — давление в начальный момент времени; V_0 — производительность монопольного источника; d_{ms} — расстояние от монопольного источника M_{ms} до геометрического центра сфер.

3. Численные расчеты

Расчет позиционного сечения рассеяния по формуле (2) производился с помощью разработанного автором программного кода на языке Fortran 90 для Windows со стандартной сборкой компиляторов (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64). Для численного решения матричной системы [7] подключалась библиотека LAPACK [13].

При расчетах использовались следующие физические параметры для сред: $\rho = 998$ кг/м^3, $c = 1484$ м/с для воды; $\rho = 1.205$ кг/м^3, $c = 343.1$ м/с для воздуха; $\rho = 1252$ кг/м^3, $c = 1034$ м/с для дихлорэтана.

Для верификации численных данных, полученных по формуле (2), было проведено сравнение результатов работы [14] для двух пузырьков в резонансной области при падении плоской волны, фронт которой параллелен оси, соединяющей центры звукопроницаемых сфер, расположенных на расстоянии d_l друг от друга. В выбранной системе отсчета, где нормальный вектор к фронту плоской волны параллелен оси Oz, его сферические координаты равны $\mathbf{n}_{\mathrm{pw}} = (\pi/2, 0)$. На рис. 2 приведены зависимости функции, характеризующей обратное сечение рассеяния (backscattering cross section) $10\log_{10}(\sigma_b/(\pi a_1^2))$ (где обозначено $\sigma_b \equiv \sigma(\pi/2, 0)$), то есть в направлении, противоположном нормальному вектору к фронту плоской волны, от волнового радиуса $k_0 a_1$ для случаев систем с пузырьками одинакового радиуса $a_1 = a_2$ и разных радиусов $a_2 = 2a_1$. Сравнение полученных в настоящей работе численных данных с результатами исследований, представленных в работе [14] на рис. 5 для значений $d_l/a_1 = 2$ и 6, показало качественное сопадение характера кривых. Количественное отличие можно объяснить различием в выборе вида формул для сферических гармоник $Y_n^m(\theta, \varphi)$. Также на данных графиках представлены результаты расчета для рассмотренной системы в случае падения волны от монопольного источника излучения, расположенного на расстоянии $d_{\mathrm{ms}} = 5a$ от геометрического центра системы на оси, перпендикулярной к отрезку, который соединяет центры сфер и делит его пополам.

На рис. 3(а) представлена функция обратного сечения рассеяния $\sigma_b/(\pi a_1^2)$ в зависимости от волнового расстояния между центрами сфер $d_l a_1$ при падении плоской волны на систему двух воздушных пузырьков в воде в случаях сфер одного радиуса $a_1 = a_2$ (тонкие линии) и разных радиусов $a_1 = 2a_2$ (толстые линии) при различных значениях волнового радиуса $k_0 a_1 = 0.1$, 0.2 и 0.5. Аналогичные кривые в случае падения сферической волны от монопольного источника излучения с $d_{\mathrm{ms}} = 5a$ приведены на рис. 3(б). Видно, что в случае плоской волны увеличение волнового радиуса приводит к уменьшению значения функции обратного сечения рассеяния. При этом рассеяние в обратном направлении в случае идентичных пузырьков выше, чем для пузырьков различных размеров. Для монопольного источника излучения рост волнового радиуса, наоборот, приводит к увеличению значения обратного сечения рассеяния, причем с ростом расстояния между центрами сфер данная величина быстро стремится к нулю.

Результаты, аналогичные приведенным на рис. 3(а), представлены на рис. 4(а) в случае капель воды в воздухе и рис. 4(б) в случае капель дихлорэтана в воде. Видно, что значения искомой функции на несколько порядков ниже, чем в случае воздушных пузырьков в воде,

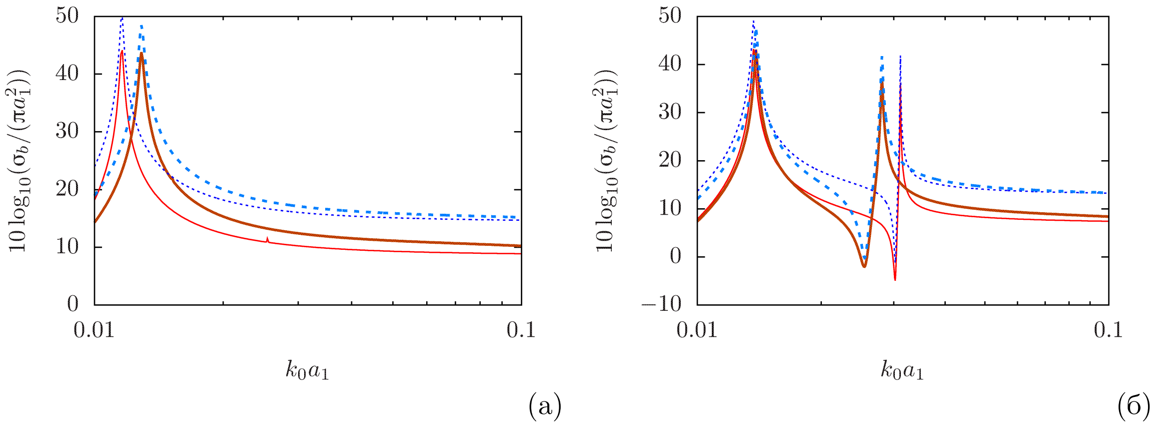


Рисунок 2 – Зависимость обратного сечение рассеяния от волнового радиуса для системы двух воздушных пузырьков около резонанса при падении плоской волны (сплошные линии) и сферической волны от монопольного источника излучения с $d_{\mathbf{ms}} = 5a$ (пунктирные линии) для расстояний между центрами сфер $d_l = 2a_1$ (тонкие линии) и $d = 6a_1$ (толстые линии): $a_1 = a_2$ (а); $a_1 = 2a_2$ (б)

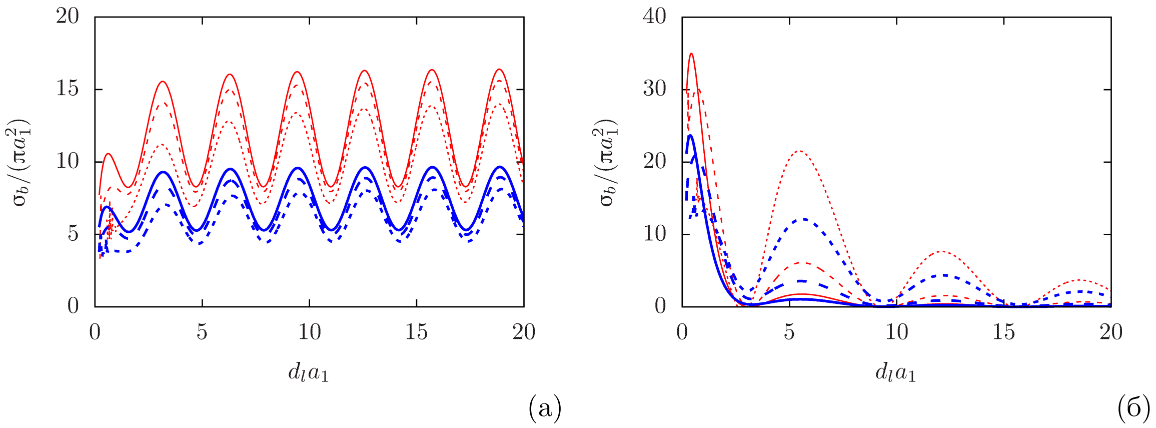


Рисунок 3 – Зависимость функции обратного сечения рассеяния $\sigma_b/(\pi a_1^2)$ от волнового расстояния $d_l a_1$ для различных значений $k_0 a_1 = 0.1$ (сплошные линии), 0.2 (штриховые линии), 0.5 (пунктирные линии) для двух воздушных пузырьков в воде одного радиуса (тонкие линии) и разных радиусов (толстые линии) в случае падения: плоской волны (а); сферической волны от монопольного источника излучения с $d_{\mathbf{ms}} = 5a$ (б).

то есть для систем с каплями рассеивающие свойства всей системы меняются существенно по сравнению с пузырьковыми системами.

Зависимость позиционного сечения рассеяния $\sigma(\theta, \varphi)$, рассчитанная по формуле (2), для двух воздушных пузырьков в воде от угла θ при фиксированных значениях углов φ (значения приведены в легенде) для значений волнового радиуса $k_0 a_1 = 0.5$ и расстояния между центрами сфер $d_l = 4a_1$, представлена на рис. 5(а) для плоской волны и рис. 5(б) для монопольного источника излучения с $d_{ms} = 5a_1$. А на рис. 6 — аналогичные зависимости от угла φ при фиксированных значениях углов θ.

Рассмотрим рассеивающий слой, состоящий из $N = 11 \times 11 = 121$ капель воды одинакового радиуса a_1, в воздухе (см. рис. 7(а)). Капли равномерно распределены в плоскости Oyz с наименьшим расстоянием между центрами соседних сфер, равном δl. Монопольный источник излучения M_{ms} располагается на оси Ox на расстоянии $d_{\mathrm{ms}} = 10a$ от начала координат O (геометрического центра системы звукопроницаемых сфер). На рис. 7(б) продемонстрированы результаты расчетов нормированного обратного сечения рассеяния $\sigma_b/(\pi a_1^2)$, вычисленного с помощью формулы (2), при $\delta l = 3a$ и $5a$. Видно, что увеличение расстояния между центрами сфер приводит к увеличению рассеивающих свойств данного слоя в искомом направлении.

4. Заключение

В рамках решения задачи акустического рассеяния волны на системе звукопроницаемых сфер в настоящей работе впервые получена формула для позиционного сечения рассеяния (2) в случае множества рассеивателей, учитывающая взаимодействие между сферами в системе. Данная формула универсальна и применима для любого числа сфер различных радиусов, расположенных в произвольных трехмерных конфигурациях, для различных физических свойств окружающей среды и среды внутри сфер, а также при произвольном внешнем воздействии на систему.

Верификация данных, вычисленных по выведенной в настоящей работе формуле (2), с результатами работы [14] показала хорошее качественное совпадение.

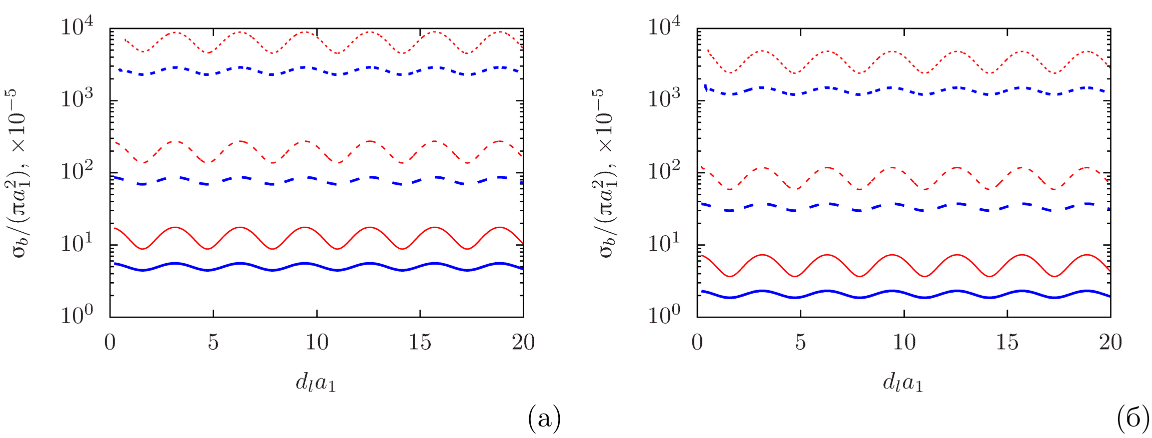
Проведен численный параметрический анализ системы, состоящей из двух звукопроницаемых сфер, для трех различных случаев соотношения параметров (упругости $\chi = \rho c^2$ и плотности ρ среды) внешней среды и среды внутри сфер:

1. $\chi_0/\chi_v \gg 1$, $\rho_0/\rho_v \gg 1$ – система газовых пузырьков в жидкости (при расчетах использовались физические параметры сред, соответствующие пузырькам воздуха в воде);
2. $\chi_0/\chi_v \ll 1$, $\rho_0/\rho_v \ll 1$ – система жидких капель воды в газе (использовались физические параметры, соответствующие каплям воды в воздухе);
3. $\chi_0/\chi_v \approx 1$, $\rho_0/\rho_v \approx 1$ – система капель одной жидкости в другой (использовались физические параметры, соответствующие каплям дихлорэтана в воде).

Рассмотрены также случаи систем одного и разных радиусов и два вида внешнего воздействия — плоская волна и сферическая волна от монопольного источника излучения. Получено, что

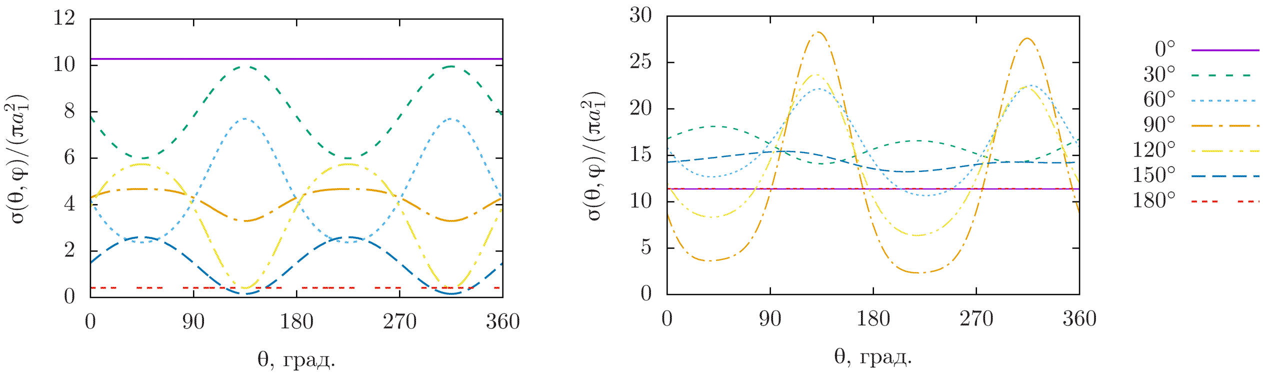
- в случае отношений параметров $\chi_{out}/\chi_{in} \gg 1$ и $\rho_0/\rho_v \gg 1$ система обладает хорошими рассеивающими свойствами;
- рассеяние в обратном направлении в системе со сферами одинакового радиуса выше, чем в системе со сферическими частицами различных размеров;
- для плоской волны увеличение волнового радиуса приводит к уменьшению значения функции обратного сечения рассеяния, в то время как для сферической волны рост волнового радиуса приводит к росту данной величины.

Расчет обратного сечения рассеяния по формуле (2) для системы, состоящей из большого числа сфер, проведен для слоя из 121 капли воды в воздухе (см. рис. 7(а)). Отметим, что данная система в случае звуконепроницаемых сфер была рассмотрена в работе [15] и



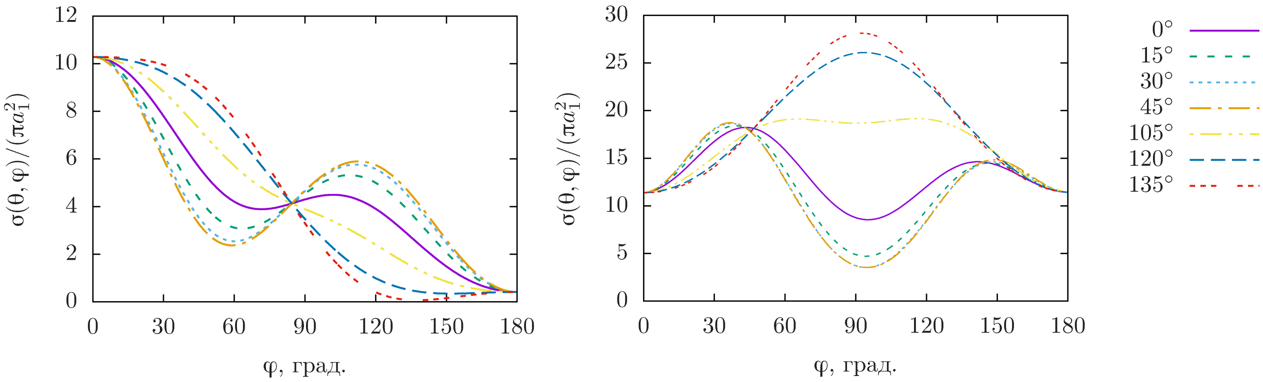
(а) (б)

Рисунок 4 – Зависимость функции обратного сечения рассеяния $\sigma_b/(\pi a_1^2)$ от волнового расстояния $d_l a_1$ для различных значений $k_0 a_1 = 0.1$ (сплошные линии), 0.2 (штриховые линии), 0.5 (пунктирные линии) в случае падения плоской волны для звукопроницаемых сфер одного радиуса (тонкие линии) и разных радиусов (толстые линии) в случае: двух капель воды в воздухе (а) и двух капель дихлорэтана в воде (б).



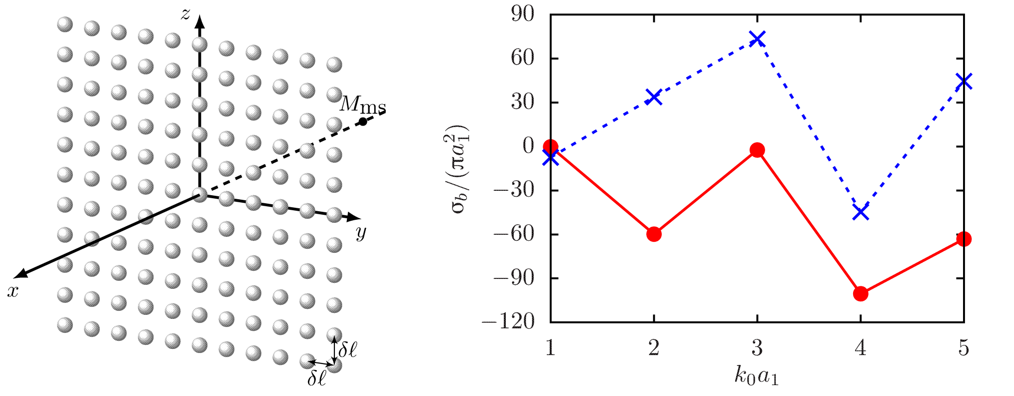
(а) (б)

Рисунок 5 – Зависимость позиционного сечения рассеяния $\sigma(\theta,\varphi)$ от угла θ при фиксированных значениях углов φ, приведенных в легенде справа, для двух воздушных пузырьков в воде. Для случая: плоской волны (а); сферической волны от монопольного источника излучения с $d_{\mathbf{ms}} = 5a_1$ (б)



(а) (б)

Рисунок 6 – Зависимость позиционного сечения рассеяния $\sigma(\theta,\varphi)$ от угла φ при фиксированных значениях углов θ, приведенных в легенде справа, для двух воздушных пузырьков в воде. Для случая: плоской волны (а); сферической волны от монопольного источника излучения с $d_{\mathbf{ms}} = 5a_1$ (б)



(а) (б)

Рисунок 7 – Конфигурация рассеивающего слоя, содержащего 121 каплю воды одинакового радиуса, равномерно распределенных в воздухе (а); характер нормированного обратного сечения рассеяния $\sigma_b/(\pi a_1^2)$ в зависимости от волнового радиуса $k_0 a_1$ для $\delta l = 3a$ (сплошная линия) и $\delta l = 5a$ (штриховая линия) (б).

является одной из немногих систем, содержащей более трех сфер, для которой имеются численные расчеты (а именно, зависимость искомой функции STF от числа усечения при разложении рядов), что позволило в дальнейшем в работе автора [8] провести верификацию численного алгоритма для случая звукопроницаемых сфер, применяемого для определения коэффициентов $A_n^{(v)m}$ в формуле (2). Численные расчеты настоящей работы показали, что при увеличении расстояния между центрами сфер рассеивающая способность рассмотренного слоя капель воды в воздухе в обратном направлении увеличивается.

Список литературы

1 Martin P.A. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6 // J. Acoust. Soc. Am. – 2019. – Vol. 146. – P. 920–926. DOI: 10.1121/1.5120127.

2 Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory // J. Acoust. Soc. Am. – 2007. – Vol. 122, No. 6. – P. 3252–3267. DOI: 10.1121/1.2793610.

3 Lee W.M. Three-dimensional acoustic scattering by multiple spheres using collocation multipole method // Int. J. Solids Structures. – 2015. – Vol. 63. – P. 39–49. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.02.033.

4 Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case // Acoustical Physics. – 2016. – Vol. 62, No. 3. – P. 280–291. DOI: 10.1134/S1063771016030015.

5 Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles // J. Acoust. Soc. Am. – 2019. – Vol. 145, No. 1. – P. 301–311. DOI: 10.1121/1.5087556.

6 Насибуллаева Э.Ш. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор) // Многофазные системы. – 2021. – Т. 16, № 3–4. – С. 88–104. DOI: 10.21662/mfs2021.3.013.

7 Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. – Т. 15, № 4. – С. 383–398. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29.

8 Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. – 2022. Т. 27, № 2. – С. 19–36. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003.

9 Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. – 2021. – Т. 25, № 2(92). – С. 93–101. DOI: 10.54708/19926502_2021_2529293.

10 Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. – 867 с.

11 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1974. – 832 с.

12 Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

13 LAPACK — Linear Algebra PACKage. URL: https://netlib.sandia.gov/lapack/ (дата обращения: 12.09.2024).

14 Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. – 2003. – V. 113, No. 6. – P. 3001–3011. DOI: 10.1121/1.1572141.

15 Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. – V. 112, No. 6. – P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253.

Дыбыс өткізетін сфералар жүйесі үшін акустикалық толқын шашырауының позициялық қимасын зерттеу

Э.Ш. Насибуллаева

Р. Р. Мавлютова атындағы механика институты – Ресей Ғылым академиясының Уфа федералды зерттеу орталығының федералды мемлекеттік бюджеттік ғылыми мекемесінің жеке құрылымдық бөлімшесі, Октябрь даңғ., 71, Уфа, 450054, Ресей

Аннотация. Көптеген дыбыс өткізетін сфералардан тұратын жүйеде акустикалық шашырау мәселесін шешу шеңберінде шашырау құбылысының негізгі сипаттамаларының бірі – берілген бағытта шашыраңқы толқынның қарқындылығын талдауға мүмкіндік беретін шашыраудың позициялық қимасы зерттеледі. Берілген сипаттама үшін формула алынды, бұл формула жүйедегі сфералар арасындағы өзара әрекеттесуді, үш өлшемді кеңістіктегі кез келген конфигурацияларда орналасқан әртүрлі радиусты сфералардың кез келген саны үшін, сондай-ақ сфералар ішіндегі қоршаған ортаның әртүрлі физикалық қасиеттерін және жүйеге әсер ететін сыртқы факторларды ескеруге мүмкіндік беретін әмбебап формула болып табылады. Басқа сандық зерттеулердің деректерімен верификация жүргізілді; нәтижелердің сапалы сәйкестігі алынды. Жазық немесе сфералық (монополиялық сәулелену көзінен) толқынға ұшыраған кезде екі дыбыс өткізетін сферадан тұратын жүйе үшін сандық параметрлік анализ судағы ауа көпіршіктері жағдайында жүйенің ең жақсы шашырау қасиеттеріне ие екендігін көрсетті; бірдей радиусты сфералары бар жүйеде әр түрлі мөлшердегі сфералық бөлшектерге қарағанда керісінше шашырау жоғары екендігі көрсетілді; жазық толқын үшін толқын радиусының ұлғаюы кері шашырау функциясының мәнінің төмендеуіне әкелетіндігі, ал монополиялық сәулелену көзі үшін толқын радиусының өсуі, керісінше, берілген шаманың өсуіне әкелетіндігі сандық анализге сәйкес алынды. Ауадағы су тамшыларының қабаты үшін сфералардың центрлері арасындағы қашықтық ұлғайған кезде бұл қабаттың шашырау қасиеттері кері бағытта артатындығы көрсетілген.

Түйін сөздер: дыбыс өткізетін сфералар жүйесі, шашыраңқы толқынның қарқындылығы, шашыраудың позициялық қимасы, кері шашырау қимасы, жазық толқын, монополиялық сәулелену көзі.

Study of the differential scattering cross section of the acoustic wave for a system of sound-permeable spheres

E.Sh. Nasibullaeva

Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 450054, Ufa, Russia

Abstract. In the context of solving the acoustic scattering problem for a system of multiple sound-permeable spheres, this study investigates one of the key characteristics of the scattering phenomenon: the differential scattering cross section. This characteristic allows one to analyze the intensity of a scattered wave in a fixed direction. The formula for this characteristic, taking into account the interaction between the spheres in the system, is obtained. This formula is universal and applicable to any number of spheres of different radii located in arbitrary three-dimensional configurations, for various physical properties of the environment inside the spheres, as well as under arbitrary external action on the system. The data is verified with the data of other numerical studies; showing qualitative agreement. Numerical parametric analysis for a system consisting of two sound-permeable spheres under an action of a plane or spherical (from a monopole radiation source) wave shows that in the case the air bubbles in water the system has the best scattering properties; backscattering in a system with spheres of the same radius is higher than in a system with spherical particles of different sizes; for a plane wave, an increase in the wave radius leads to a decrease in the value of the backscattering cross section function, while for a monopole radiation source, an increase in the wave radius leads to an increase in this value. For a layer of water droplets in air, it was found that an increase in the distance between the centers of the spheres leads to an increase in the scattering properties of this layer in the opposite direction.

Keywords: system of sound-permeable spheres, scattered wave intensity, differentional scattering cross section, backscattering cross section, plane wave, monopole radiation source.

Список литературы

1 Martin P.A. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6. J. Acoust. Soc. Am. 2019. Vol. 146. P. 920–926. DOI: 10.1121/1.5120127.

2 Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory. J. Acoust. Soc. Am. 2007. Vol. 122, No. 6. P. 3252–3267. DOI: 10.1121/1.2793610.

3 Lee W.M. Three-dimensional acoustic scattering by multiple spheres using collocation multipole method. Int. J. Solids Structures. 2015. Vol. 63. P. 39–49. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.02.033.

4 Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case. Acoustical Physics. 2016. Vol. 62, No. 3. P. 280–291. DOI: 10.1134/S1063771016030015.

5 Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles. J. Acoust. Soc. Am. 2019. Vol. 145, No. 1. P. 301–311. DOI: 10.1121/1.5087556.

6 Nasibullaeva E.Sh. Rasseyaniye zvukovykh voln na sferakh: metody resheniya i osnovnyye kharakteristiki (obzor) [Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review)]. Multiphase systems. 2021. Vol. 16. No. 3–4. P. 88–104. [In Russian] DOI: 10.21662/mfs2021.3.013.

7 Nasibullaeva E.Sh. Chislennyy analiz mnogokratnogo rasseyaniya akusticheskoy volny na mnozhestve zvukopronitsayemykh sfer v trekhmernom prostranstve [Numerical analysis of multiple scattering of an acoustic wave on a set

of sound-permeable spheres in 3D space]. Computational Continuum Mechanics. 2022. Vol. 15. No. 4. P. 383-398. [In Russian] DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29.

8 Nasibullaeva E.Sh. Modelirovaniye akusticheskogo rasseyaniya ot mnozhestva zvukopronitsayemykh sfer v trekhmernom prostranstve [Simulation of acoustical scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space]. Computational technologies. 2022. Vol. 27. No. 2. P. 19–36. [In Russian] DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003.

9 Nasibullaeva E.Sh. Chislennyy analiz akusticheskogo rasseyaniya ot zvukopronitsayemykh sfer pri vneshnem vozdeystvii [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University). 2021. Vol. 25. No. 2(92). P. 93–101. [In Russian] DOI: 10.54708/19926502_2021_2529293.

10 Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macypura V.T. Osnovy akustiki [Basics of acoustics]. Kiev, Naukova Dumka. 2009. 867 p. [In Russian]

11 Korn G.A., Korn Th.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.

12 Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water. J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 113. No. 6. P. 3001–3011. DOI: 10.1121/1.1572141.

13 Ivanov Ye.A. Diffraction of electromagnetic waves on two bodies. Washington, National Aeronautics and Space Administration, 1970. 597 p.

14 LAPACK — Linear Algebra PACKage. URL: https://netlib.sandia.gov/lapack/ (Accessed: 12.09.2024).

15 Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112. No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253.

Сведения об авторе:

Насибуллаева Эльвира Шамилевна — кандидат физико–математических наук, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, пр.Октября, 71, Уфа, 450054, Россия.

Nasibullaeva Elvira Shamilevna — PhD of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Oktyabrya Avenue, 71, Ufa, 450054, Russia.

Поступила: 12.09.2024. После редакции: 21.09.2024.
Одобрена: 27.09.2024. Доступна онлайн: 30.09.2024.

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: Ғ.Е. Тауғынбаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы.
- 2024. 3(148). - Астана: ЕҰУ. 110-б. Басуға қол қойылды: 30.09.2024.
Ашық қолданыстағы электронды нұсқа: http://bulmathmc.enu.kz/
Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген:
http://bulmathmc.enu.kz/

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды