

ISSN 3007-0155
eISSN 3007-0163

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА**

№2(147)/2024

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2024

Astana, 2024

БАС РЕДАКТОРЫ

Темірғалиев Н., ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Жұбанышева А.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алимхан Қилан

PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бекенов М.И.

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Гоголина У.

ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

ф.-м.ғ.д., проф., Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет) Долгопрудный, Ресей

Зунг Динь

ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам ұлттық университеті, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

ф.-м.ғ.д., проф., Тула мемлекеттік университеті, Тула, Ресей

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ

Кобельков Г.М.

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Курина Г.А.

ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей

Марков В.В.

ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей

Мейрманов А.М.

ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Нуртазина К.Б.

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Омарбекова А.С.

т.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Смелянский Р.Л.

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Тауғынбаева Г.Е.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Умирбаев У.У.

ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ

Холщевникова Н.Н.

ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.

Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты редактор: Г.Е. Тауғынбаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР, МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.

№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,

тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

EDITOR-IN-CHIEF

Nurlan Temirgaliyev, *Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

Deputy Editor-in-Chief

Aksaule Zhubanysheva

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Nurlan Nauryzbayev

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Editorial board:

Evgueni Abakumov

*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee
Paris, France*

Alexander Iosevich

PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA

Alimhan Keylan

PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Makhsut Bekenov

Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof.

Ushangi Goginava

L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.

Boris Golubov

Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and
Technology (State University)*

Dũng Dinh

Dolgoprudnyi, Russia

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute,
Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*

Valerii Ivanov

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, Russia

Georgii Kobel'kov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Galina Kurina

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh,
Russia*

Vladimir Markov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical
Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Anvarbek Meirmanov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Com-
munications and Informatics, Moscow, Russia*

Karlygash Nurtazina

*Cand. of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana,
Kazakhstan*

Asel Omarbekova

Cand. of Tech. Sci., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ruslan Smelyansky

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Galiya Taugynbayeva

PhD, L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ualbay Umirbaev

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.,

Wayne State University, Detroit, USA

Natalya Kholshchevnikova

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State

Technological University "Stankin", Moscow, Russia

Hans-Juergen Schmeisser

Dr. habil., Prof., Friedrich-Shiller University

Jena, Germany

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.

Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible Editor-in-Chief: Galiya Taugynbayeva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS, COMPUTER SCIENCE, MECHANICS Series

Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

© L.N. Gumilyov Eurasian National University

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Темиргалиев Н., *д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

Зам. главного редактора

Жубанышева А.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Зам. главного редактора

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алимхан Килян

PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Гогинова У.

д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

д.ф.-м.н., проф., Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Зунг Динь

д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, Тула, Россия

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США

Кобельков Г.М.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Курина Г.А.

д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Марков В.В.

д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Мейрманов А.М.

д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Нургазина К.Б.

к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Омарбекова А.С.

к.т.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Смелянский Р.Л.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Таугынбаева Г.Е.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Умирбаев У.У.

д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США

Холщевникова Н.Н.

д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402

Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). *E-mail:* vest_math@enu.kz

Ответственный редактор: Г.Е. Таугынбаева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Серия МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ, МЕХАНИКА

Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.

Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,

тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, №2(147)/2024

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics, computer science, mechanics series, №2(147)/2024

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия
Математика, компьютерные науки, механика, №2(147)/2024

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Мейрманов А. М. Бакли-Леверетт моделіндегі бастапқы мұнай концентрациясы
үзілуінің азаюы

Meirmanov A.M. Decay of the initial oil concentration discontinuity in the Buckley–
Leverett model

Мейрманов А. М. Уменьшение начального разрыва концентрации нефти в модели 6
Бакли-Леверетта

Тәжібай Л.К., Мурзабекова Г.Е., Стыбаев Г.Ж., Муратова Г.К. Бидай
өнімділігіне әсер етуші климаттық факторларды машиналық оқытумен анықтаудың
моделі

Tazhibay L.K., Murzabekova G.Y., Stybayev G.Zh., Muratova G.K. Model for
determining climatic factors affecting wheat productivity by machine learning

Тәжібай Л.К., Мурзабекова Г.Е., Стыбаев Г.Ж., Муратова Г.К. Модель 17
определения климатических факторов, влияющих на урожайность пшеницы, с
помощью машинного обучения

Мамаева З.З., Насырова Д.А. Ашық тік ұңғымадағы сұйық бағанасының
тербелістерін зерттеу

Matayeva Z.Z., Nasyrov D.A. Study of natural vibrations of a liquid column in an
open vertical well

Мамаева З.З., Насырова Д.А. Исследования собственных колебаний столба 32
жидкости в открытой вертикальной скважине

IRSTI: 27.35.25

DECAY OF THE INITIAL OIL CONCENTRATION DISCONTINUITY IN THE BUCKLEY–LEVERETT MODEL¹

A. M. Meirmanov 

*Institute of Ionosphere, Gardening Association "Ionosphere", 117, 050020, Almaty, Kazakhstan
(E-mail: anvarbek.list.ru)*

Abstract. We consider a free boundary problem for a one-dimensional system of Buckley-Leverett equations, describing the displacement of oil by a suspension. For this problem we formulated conditions for the strong decay of the discontinuity of the initial oil concentration. We will prove that the phenomenological Buckley-Leverett model does not adequately describe the physical process under consideration. To do this, we will study the problem of the decay of a discontinuity in the initial concentration of oil, when at rest in one half of the domain there is oil, and in the other half of the domain there is a suspension, and these domains are separated by an impenetrable partition. At the initial moment of time, the partition is removed and a non-negative suspension velocity is maintained at the injection wells. An accurate analysis of the unique solution to the Buckley-Leverett model shows that at the initial moment of time, oil begins to displace the suspension, resulting in the formation of a zone of mixing of oil and suspension. If the velocity of the suspension at the injection wells is high enough, then at some point in time the natural option of displacing oil by the suspension begins to be realized.

Keywords: Free boundary problems, transport equations, displacement of oil by suspension, strong discontinuity conditions.

DOI: <https://doi.org/10.32523/3007-0155/bulmathenu.2024/2.1>

2000 Mathematics Subject Classification: 35Q35.

1. Introduction and main results

Free boundary problems for differential equations are some of the most difficult in the theory of partial differential equations. In these problems, along with solving differential equations, it is necessary to determine the domain in which this solution is sought. As a rule, this domain (boundary) is determined from an additional boundary condition at the free boundary. In the theory of free boundary problems, the Stefan problem, the Masket problem, and the Heele-Shaw problem [1]–[5] for the heat or Laplace equations are well known. These problems are formulated quite simply, but so far the existence of a classical solution has been proven only locally in time (excluding some simple

¹The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, grant N° AP19676964

cases). As for systems of differential equations, here we should note the works of V. A. Solonnikov for free boundary problems to the Navier-Stokes system [6], [7] and A. Friedman [8].

But, as in the case of one equation, here it is possible to prove only local existence of a classical solution [6], [7], or limit oneself to a phenomenological model that describes the physical process at the macroscopic level [8].

Separately, there is a large class of free boundary problems for the equations of gas dynamics and hydrodynamics of an ideal incompressible fluid. These problems are well studied and have a rich history [9]-[11].

We will consider the Buckley–Leverett model, formulated in [12] and describing the displacement of oil by a suspension in the pore space of the absolutely rigid solid skeleton at the macroscopic level. Let us recall that such models are called **Phenomenological**.

The existence and uniqueness of a generalized solution to the system of Buckley–Leverett equations for smooth data of the problem was proved by S. N. Antontsev and V. N. Monakhov [13]. We will be interested in the structure of the weak solution of the Buckley–Leverett system of equations for a discontinuous initial oil concentration. In the terminology of L.V. Ovsyannikov (Appendix A in [14]), such a problem is called **Problem on the decay of strong discontinuity**.

For simplicity of presentation, we restrict ourselves to the case of one spatial variable.

We look for the solution to the Buckley–Leverett system in the domain $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, consisting of Darcy’s system of filtration

$$v_{ol} = -\frac{k}{\mu_{ol}} f_{ol}(c) \frac{\partial p_{ol}}{\partial x}, \tag{1}$$

$$v_{sp} = -\frac{k}{\mu_{sp}} f_{sp}(c) \frac{\partial p_{sp}}{\partial x} \tag{2}$$

and laws of conservation of mass

$$\frac{\partial}{\partial t}(mc) + \frac{\partial v_{ol}}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}m(1-c) + \frac{\partial v_{sp}}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

The system (1) – (4) is completed with the state equations

$$k p_{ol} - k p_{sp} = \alpha_{cap} c, \tag{5}$$

$$f_{ol}(c) = \alpha_{ol} c, \quad f_{sp}(c) = \alpha_{sp} (1 - c) \tag{6}$$

and following boundary and initial conditions

$$v_{sp}(0, t) = 0, \quad v_{ol}(1, t) = 0, \tag{7}$$

$$c(x, 0) = c^0(x). \tag{8}$$

In (1) – (8) c is a concentration of oil in the pore liquid, $(1 - c)$ is a concentration of suspension in the pore liquid, v_o is the oil velocity, v_{sp} is the suspension velocity, p_{ol} is the oil pressure, p_{sp} is the suspension pressure, μ_{ol} is the dimensionless oil viscosity and μ_{sp} is the dimensionless suspension viscosity.

The positive constants α_{ol} , α_{sp} and α_{cap} are supposed to be known.

First of all, we transform the equations (1) - (6) into a convenient for us form:

$$\frac{f_{ol}}{\mu_{ol}} k \frac{\partial p_{ol}}{\partial x} + \frac{f_{sp}}{\mu_{sp}} k \frac{\partial p_{sp}}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{f_{ol}}{\mu_{ol}} \left(k \frac{\partial p_{sp}}{\partial x} + \alpha_{cap} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{f_{sp}}{\mu_s} k \frac{\partial p_{sp}}{\partial x} \right) = 0, \tag{10}$$

$$k \frac{\partial p_{ol}}{\partial x} = \frac{\alpha_{cap} \mu_{ol} f_{sp}}{(\mu_{ol} f_{sp} + \mu_{sp} f_{ol})} \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{11}$$

$$k \frac{\partial p_{sp}}{\partial x} = -\frac{\alpha_{cap} \mu_{sp} f_{ol}}{(\mu_{ol} f_{sp} + \mu_{sp} f_{ol})} \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{12}$$

$$v_{ol} = -\frac{f_{ol}}{\mu_{ol}} k \frac{\partial p_{ol}}{\partial x} = -\frac{\alpha_{cap} f_{ol} f_{sp}}{(\mu_{ol} f_{sp} + \mu_{sp} f_{ol})} \frac{\partial c}{\partial x} = m c u_{ol},$$

$$u_{ol} = -\varphi_{ol}(c) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (13)$$

$$v_{sp} = -\frac{f_{sp}}{\mu_{sp}} k \frac{\partial p_{sp}}{\partial x} = \frac{\alpha_{cap} f_{ol} f_{sp}}{(\mu_{ol} f_{sp} + \mu_{sp} f_{ol})} \frac{\partial c}{\partial x} = m(1-c)u_{sp},$$

$$u_{sp} = \varphi_{sp}(c) \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\varphi_{ol}(c) = \alpha_{\varphi} \frac{(1-c)}{(a-bc)}, \quad \varphi_{sp}(c) = \alpha_{\varphi} \frac{c}{(a-bc)},$$

$$\varphi(c) = \alpha_{\varphi} \frac{c(1-c)}{(a-bc)} = c = (1-c)\varphi_{sp}(c) = c\varphi_{ol}(c), \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c + \frac{\partial}{\partial x} (c u_{ol}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (1-c) + \frac{\partial}{\partial x} ((1-c)u_{sp}) = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right). \quad (17)$$

In (9) – (17)

$$\alpha_{\varphi} = m^{-1} \alpha_{ol} \alpha_{sp} \alpha_{cap}, \quad a = \mu_{ol} \alpha_{sp} + \mu_{sp} \alpha_{ol}, \quad b = \mu_{ol} \alpha_{sp} < a. \quad (18)$$

The Buckley–Leverett model and its analogs (see [15] - [17] and literature cited there) are phenomenological mathematical models and serve as the basis model for existing hydrodynamic simulators, such as **Eclipse**, **Black Oil** (Schlumberger), **Tempest** (Roxar), **VIP** (Landmark) and **TimeZYX** (Standard Oil and Trust).

Note that a hydrodynamic simulator is a certain **Scale** (set) of mathematical models of an oil reservoir of varying degrees of accuracy, supplemented with digital characteristics of physical properties, such as density and elastic properties of the solid skeleton, soil, density and viscosity of filtered liquids, as well as geometric characteristics of the reservoir in consideration, such as the structure of the solid skeleton, the geometry of the domain occupied by the reservoir, and visualization programs for numerical implementations.

Existing simulators, according to their purpose, must adequately reflect the simulated physical process.

Do existing simulators solve this problem?

Let's reformulate the question differently.

Since the basis of any hydrodynamic simulator is the corresponding scale of mathematical models (ideally!), the question can be formulated as follows:

Do the existing mathematical models underlying existing hydrodynamic simulators adequately reflect the simulated physical process?

Only adequate mathematical models will be able to optimize the oil production process, and only with adequate modeling can the main task of a hydrodynamic simulator be solved - this, of course, is **Maximum benefit** during the exploitation of a field.

A positive or negative answer depends on what exactly **Adequacy of a mathematical model for a given physical process means**.

To do this, it is necessary to formulate **Adequacy Criteria** of the mathematical model.

In the case of phenomenological models, the criterion of adequacy can only be experiment. Is experiment a criterion of adequacy?

The answer is NO.

In fact, it makes no sense to talk about an experiment, since in any phenomenological model there are enough free parameters and even functions that are in no way related to the geometry of the reservoir (porosity and structure of the pore space) or to the physical characteristics of the displacement process (viscosity and density of filtered liquids and density and elastic properties of the solid skeleton). Therefore, by varying the indicated constants and functions, one can achieve agreement with any experiment!

Let us recall that by its definition, any phenomenological mathematical model is a set of postulates (axioms), expressed using differential equations, supplemented by corresponding boundary and initial conditions, and defining relations (equalities). In this case, the characteristic dimensions in macroscopic models are meters or tens of meters. Because of this, these models do not distinguish either the microstructure of a continuous medium, or the free boundary separating liquids, or the peculiarities of the interaction of fluids with the solid skeleton of the soil (adhesion or sliding conditions), since in such a model at each point of the continuous medium there is both rock (hard skeleton) together with the liquid in the pores of this skeleton, and the free boundary separating the various components of the medium. All such models are built on the same principle. Fluid dynamics, as a rule, are controlled by the Darcy filtration equation system or some modification thereof, and the interaction of fluids is governed by the laws of mass conservation for each fluid. But all fundamentally important changes occur precisely at the microscopic level, corresponding to the average size of pores or cracks in rocks, while any of the proposed macroscopic models operates on completely different (orders of magnitude larger) scales, which explains their diversity. The authors of such models simply do not have an accurate method for describing physical processes at the microscopic level based on the fundamental laws of Newtonian continuum mechanics, nor the ability to take into account the microstructure of rocks in macroscopic models. Therefore, they have to limit themselves to certain speculative considerations (postulates) formulated by the authors themselves.

In view of the above, a natural question arises: if there are several macroscopic models describing the same physical process, which of them most adequately reflects this process? Where is the criterion of truth here?

The answer to this question is quite complex and is beyond the scope of this article. Let's just say that in order to derive a macroscopic model adequate to the physical process under consideration, it is first necessary, following the principles formulated in the works of J. B. Keller [18] and E. Sanchez-Palencia [19], to describe this process based on the equations of Newton's classical mechanics at the microscopic level (average size of tens of microns) and only then, using mathematically strict averaging (homogenization), derive a macroscopic model that most accurately describes this physical process.

In this publication we will prove that the phenomenological Buckley-Leverett model does not adequately describe the physical process under consideration. To do this, we will study the problem of the decay of a discontinuity of the initial concentration of oil, when at rest in one half of the domain there is oil, and in the other half of the domain there is a suspension, and these domains are separated by an impenetrable partition. At the initial moment of time, the partition is removed and at the injection wells a non-negative suspension velocity is maintained. An accurate analysis of the unique solution to the Buckley-Leverett model shows that at the initial moment of time, oil begins to displace the suspension, resulting in the formation of a zone of mixing of oil and suspension. If the velocity of the suspension at injection wells is high enough, then at some point in time the natural option of displacing oil by suspension begins to take place.

Everywhere below we use the notation of functional spaces and norms in these spaces adopted in [20] and [21].

2. Auxiliary statements

2.1. Domain and boundaries

As $\Omega_{ol}(t) = \{x \in \Omega : 0 < R_{ol}(t) < x < 1\}$ we denote the domain occupied by oil, as $\Omega_m(t) = \{x \in \Omega : R_{sp}(t) < x < R_{ol}(t) < x < 1\}$ —the domain occupied by the mixture of oil and suspension and as $\Omega_{sp}(t) = \{x \in \Omega : 0 < x < R_{sp}\}$ we denote the domain occupied by the suspension.

Here $R_{sp}(t)$ is the boundary between $\Omega_{sp}(t)$ and $\Omega_m(t)$ and $R_{ol}(t)$ is the boundary between $\Omega_m(t)$ and $\Omega_{ol}(t)$.

$$\text{Let also } \Omega_{ol,T} = \bigcup_{t=0}^{t=T} \Omega_{ol}(t), \quad \Omega_{m,T} = \bigcup_{t=0}^{t=T} \Omega_m(t), \quad \Omega_{sp,T} = \bigcup_{t=0}^{t=T} \Omega_{sp}(t),$$

$$\Gamma_{ol}(t) = \{x \in \Omega : x = R_{ol}(t)\}, \quad \Gamma_{sp}(t) = \{x \in \Omega : x = R_{sp}(t)\},$$

$$\Gamma_{T,sp} = \bigcup_{t=0}^{t=T} \Gamma_{sp}(t) \quad \text{and} \quad \Gamma_{T,ol} = \bigcup_{t=0}^{t=T} \Gamma_{ol}(t).$$

2.2. Derivation of boundary conditions on strong discontinuities

Suppose that during the diffusion of oil and suspension between domain $\Omega_{ol,T}$, occupied by oil and domain $\Omega_{sp,T}$, occupied by suspension, instantly formed domain $\Omega_{m,T}$, occupied by mixture of oil and suspension.

According supposition $c = 1$ in $\Omega_{ol,T}$ and $c = 0$ in $\Omega_{sp,T}$.

Next we will derive boundary conditions on strong discontinuities $\Gamma_{sp,T}$ and $\Gamma_{ol,T}$ following [14].

Recall, that for the case of one spacial variable for equation

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{F} \tilde{u}) = 0 \quad (19)$$

(equality (A.6.4) in [5]) where $\tilde{F} = F_{sp}$ as $(x, t) \in \Omega_{sp,T}$, $\tilde{F} = F$ as $(x, t) \in \Omega_{m,T}$ and $\tilde{F} = F_{ol}$ as $(x, t) \in \Omega_{ol,T}$, $\tilde{v} = v_{sp}$ s $(x, t) \in \Omega_{sp,T}$, $\tilde{v} = v$ as $(x, t) \in \Omega_{m,T}$ и $\tilde{v} = v_{ol}$ as $(x, t) \in \Omega_{ol,T}$, the jump of functions \tilde{F} and \tilde{v} at the strong discontinuities $\Gamma_{sp,T} = \{x \in \Omega = (0, 1) : x = R_{sp}(t)\}$ are defined from relations

$$\begin{aligned} [\tilde{F}(\frac{dR_{sp}}{dt} - \tilde{u})]_{\Gamma_{sp}} &= F_{sp}(R_{sp}(t), t)(\frac{dR_{sp}}{dt}(t) - u_{sp}(R_{sp}(t), t)) - \\ &- F(R_{sp}(t), t)(\frac{dR_{sp}}{dt}(t) - u(R_{sp}(t), t)) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

(equality (A6.12) in [14]).

In the same way we get the equality

$$\begin{aligned} [\tilde{F}(\frac{dR_{ol}}{dt} - \tilde{u})]_{\Gamma_{ol}} &= F(R_{ol}(t), t)(\frac{dR_{ol}}{dt}(t) - u(R_{ol}(t), t)) - \\ &- F_{ol}(R_{ol}(t), t)(\frac{dR_{ol}}{dt}(t) - u_{ol}(R_{sp}(t), t)) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

on the boundary $\Gamma_{ol}(t)$.

In section 4 we prove that $c = 0$ in $\bar{\Omega}_{sp}(t)$, $c = 1$ in $\bar{\Omega}_{ol}(t)$ and

$$c(x, t) > 0 \text{ as } R_{sp}(t) \leq x \leq R_{ol}(t) \text{ and } 0 < t < T. \quad (22)$$

Thus, for equations (21) in the form

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{c} \tilde{u}) = 0, \quad (23)$$

where

$$\tilde{c} = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_{sp}(t), \\ c & \text{in } \Omega_m(t), \end{cases}$$

$$\tilde{u} = \begin{cases} 0 & \text{in } \Omega_{sp}(t), \\ u_{ol} = -u_{sp} & \text{in } \Omega_m(t), \end{cases}$$

and on the boundary $\Gamma_{sp}(t)$ holds true equality

$$[\tilde{c}(\frac{dR_{sp}}{dt} - \tilde{u})] = c(R_{sp}(t), t)(\frac{dR_{sp}}{dt} - u_{ol}) = 0, \quad (24)$$

which implies

$$\frac{dR_{sp}}{dt} = u_{ol}(R_{sp}(t), t) < 0. \quad (25)$$

In the same way for equation (23), where

$$\tilde{c} = \begin{cases} c & \text{in } \Omega_m(t), \\ 1 & \text{in } \Omega_{ol}(t), \end{cases}$$

$$\tilde{u} = \begin{cases} u_{ol} = -u_{sp} & \text{in } \Omega_m(t), \\ 0 & \text{in } \Omega_{ol}(t) \end{cases}$$

we get

$$c(R_{ol}(t), t) \left(\frac{dR_{ol}}{dt} - u_{sp} \right) = 0, \tag{26}$$

and, consequently,

$$\frac{dR_{ol}}{dt} = u_{sp}(R_{ol}(t), t) > 0. \tag{27}$$

2.3. Spaces $\mathbb{BV}(\Omega)$ and $\mathbb{L}_\infty(0, T; \mathbb{BV}(\Omega))$ of functions of bounded variation. Helly's selection principle

In the present publication we restrict ourself with spaces $\mathbb{BV}(\Omega)$ and $\mathbb{L}_\infty(0, T; \mathbb{BV}(\Omega))$ of functions of bounded variation in $\Omega \subset \mathbb{R}$ [22].

Definition 1. We call the closure of all infinitely smooth functions $u(x)$ in the norm

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|u(x)| + \left| \frac{du}{dx} \right|) dx \right) \tag{28}$$

as the space of functions of bounded variation $\mathbb{BV}(\Omega)$.

Definition 2. The closure of all infinitely smooth functions $u(x, t)$ in the norm

$$\|u\|_{BV(\Omega_T)} = \max_{0 \leq t \leq T} \left(\int_{\Omega} (|u(x, t)| + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|) dx \right) \tag{29}$$

is called the space of functions of bounded variation $\mathbb{L}_\infty(0, T; \mathbb{BV}(\Omega))$.

Theorem 1. [22]

1) A function $u(x)$ belongs to the space $\mathbb{BV}(\Omega)$ if and only if there exists some constant $K > 0$ such that

$$\int_{\Omega} |u(x+h) - u(x)| dx \leq K |h| \tag{30}$$

for all $h \in \mathbb{R}$.

2) A function $u(x, t)$ belongs to the space $\mathbb{L}_\infty(0, T; \mathbb{BV}(\Omega))$ if and only if there exists some constant $K > 0$ such that

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |u(x+h, t) - u(x, t)| dx \leq K |h| \tag{31}$$

for all $h \in \mathbb{R}$.

Let

$$c_n^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) & \text{for } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{for } x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \end{cases} \tag{32}$$

Lemma 1. The sequence $\{c_n^0\}$ is monotone increasing sequence of monotone increasing functions $c_n^0 \in \mathbb{BV}(\Omega)$ and

$$\|c_n^0 - c^0\|_{\mathbb{BV}} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty. \tag{33}$$

The proof of statements follows from the definition of functions c_n^0 and Theorem 1.

Definition 3. We say that the function $u(x, t)$, bounded in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$, possesses the time derivative $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathbb{L}_2(0, T; \mathbb{W}_2^{-1}(\Omega))$, if

$$\left| \int \int_{\Omega_T} u \frac{\partial \xi}{\partial t} dx dt \right| \leq M_u \left| \int \int_{\Omega_T} |\nabla \xi|^2 dx dt \right|^{\frac{1}{2}}$$

for all functions $\xi \in \mathbb{W}_2^{1,1}(\Omega_T)$ with some positive constant M_u independent of ξ .

Remark 1. We denote the norm of an element φ in $\mathbb{L}_2(0, T; \mathbb{W}_2^{-1}(\Omega))$ as $\|\varphi\|_{W_2^{-1}}$.

Lemma 2. (Helly’s selection principle.) *Let sequences $\{u_n\}$ is bounded in the space $\mathbb{BV}(\Omega)$, and the sequence itself is bounded in $\mathbb{L}_\infty(\Omega)$:*

$$|u_n| \leq K, \quad \|u\|_{BV(\Omega)} \leq K. \quad (34)$$

Then there exists some subsequence of the sequence $\{u_n\}$ convergent almost everywhere in $\mathbb{L}_2(\Omega)$. [23].

Here and below, K will denote constants independent of N .

Consequence 1. Let the sequence $\{u_n\}$ converges almost everywhere in Ω and $0 \leq u_n \leq 1$. Then it converges in $\mathbb{L}_2(\Omega)$.

Lemma 3. *Let sequences $\{u_n\}$ is bounded in the space $\mathbb{BV}(\Omega)$ and the sequence of derivatives $\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\}$ is bounded in the space $\mathbb{L}_2(0, T; \mathbb{W}_2^{-1}(\Omega))$.*

Then there exists some subsequence of the sequence $\{u_n\}$ strongly convergent in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$.

The proof of this lemma repeats the proof of the compactness lemma in Lions [21].

3. Main result

Definition 4. A function $c \in \mathbb{BV}(\Omega_T)$ is called a weak solution to the problem (1) – (8) if

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c(x, t_0) \xi(x, t_0) dx + \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(-m c \frac{\partial \xi}{\partial t} + \varphi(c) \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega} c^0(x) \xi(x, 0) dx + \int_0^{t_0} (\xi(1, t) u_1(t) - \xi(0, t) u_0(t)) dt \end{aligned} \quad (35)$$

for all infinitely smooth functions $\xi(x, t)$ in Ω_T .

Theorem 2. *The problem (1) – (8) has a unique weak solution.*

4. Proof of Theorem 2

4.1. Construction of approximate solutions

Let $c_n(x, t)$ be solution to the approximate diffusion equation

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\varphi(c_n) + \frac{1}{n} \right) \frac{\partial c_n}{\partial x} \right), \quad (36)$$

satisfying initial condition

$$c_n(x, 0) = c_n^0(x) \quad (37)$$

and boundary conditions

$$\left(\varphi(c_n(j, t) + \frac{1}{n}) \right) \frac{\partial c_n}{\partial x}(j, t) = 0, \quad j = 0, 1. \quad (38)$$

The problem (36)–(38) has an unique monotone increasing classical solution $c_n \in \mathbb{C}^{2,1}(\Omega_T) \cap \mathbb{L}_\infty(0, T; \mathbb{BV}(\Omega))$ for all $n > 0$.

The existence of such solution follows from [1], and its monotonicity follows from maximum principle.

Indeed, the following statement holds true

Lemma 4. *For all $n > 0$ $\frac{\partial c_n}{\partial x}(x, t) \geq \alpha > 0$ in Ω_T , where $\alpha = \text{const} > 0$.*

Proof. Note, that in accordance with [1] functions c_n are infinitely smooth in variables x and t in the domain $\bar{\Omega}$ for $t > 0$ and satisfy boundary conditions in a usual sense.

Consequently, the nonlinear heat equation (36) can be differentiated with respect to all variables the required number of times and integration by parts can be used.

First of all, we use the obvious maximum principle

$$0 \leq c_n \leq 1. \tag{39}$$

Next we define new functions $w_n = \frac{\partial c_n}{\partial x}$.

The direct differentiation of (36) in variable x gives us

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = \left((\varphi(c_n) + \frac{1}{n}) \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + 3 \varphi'(c_n) w_n \frac{\partial w_n}{\partial x} + \varphi''(c_n) (w_n)^3 \right), \tag{40}$$

$$\left(\varphi(c(j, t)) + \frac{1}{n} \right) w_n(j, t) = 0, \quad j = 0, 1, \tag{41}$$

$$w_n(x, 0) = \frac{\partial c_n^0}{\partial x}(x) \geq 0. \tag{42}$$

Let's show that $\frac{d^2 \varphi_n}{dy^2}(y) \leq 0$ for $0 \leq y \leq 1$, that, taking into account the boundary conditions (41) and the strict maximum principle [1], immediately guarantees us the required result.

Turning to the equalities (15) we obtain for the function $\psi(z \equiv \varphi(c))$, where $z = a - bc$, following relations:

$$\begin{aligned} \varphi''(c) &= b^2 \psi''(z), \quad \psi'(z) = \frac{\alpha_c a d}{z^2} - 1, \quad \psi''(z) = -\frac{2 \alpha_c a d}{z^3} \leq -\frac{2 \alpha_c a}{d^2} < 0, \\ \varphi''(c) &= b^2 \psi''(z) \leq -\frac{2 b^2 \alpha_c a}{d^2} = \alpha = const < 0, \end{aligned} \tag{43}$$

which completes the proof of the lemma. \square

4.2. Limiting procedure as $n \rightarrow \infty$

Let

$$\chi_n(x, t) = \int_0^{c_n(x, t)} \left(\varphi(y) + \frac{1}{n} \right) dy, \quad \frac{\partial \chi_n}{\partial x} = \left(\varphi(y) + \frac{1}{n} \right) \frac{\partial c_n}{\partial x}. \tag{44}$$

Then equation (36) takes the form

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial x^2}, \tag{45}$$

which we will rewrite as an equivalent integral identity

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_n(x, t_0) \xi(x, t_0) dx + \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(-m c_n \frac{\partial \xi}{\partial t} - \chi_n \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega} c^0(x) \xi(x, 0) dx. \end{aligned} \tag{46}$$

Lemma 5. *The sequence $\{c_n\}$ contains convergent in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ subsequence.*

The proof of the lemma follows from Lemma 21.

Renumbering the sequence $\{c_n\}$ we may assume that it converges in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ to some function $c \in \mathbb{L}_{\infty}(0, T; \mathbb{BV}(\Omega))$.

Consequence 2. The sequence $\{\chi_n\}$ converges in $\mathbb{L}_2(\Omega)$ to function $\chi \in \mathbb{L}_{\infty}(0, T; \mathbb{BV}(\Omega))$ and

$$\chi(x, t) = \int_0^{c(x, t)} \varphi(y) dy, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = \varphi(c) \frac{\partial c}{\partial x}. \tag{47}$$

The proof of the statement follows from the definition of χ_n .

Lemma 6. *The sequence $\{c_n\}$ converges in $\mathbb{L}_2(\Omega_T)$ to the weak solution $c \in \mathbb{L}_\infty(0, T; \mathbb{BV}(\Omega))$ to the problem (36)–(38).*

Proof. To do that we represent the integral identity (35) as

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_n(x, t_0) \xi(x, t_0) dx - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(c_n \frac{\partial \xi}{\partial t} + \chi_n \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega} c_n^0(x) \xi(x, 0) dx. \end{aligned} \tag{48}$$

Passing to the limit as $n \rightarrow \infty$ we arrive at the desired identity

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c(x, t_0) \xi(x, t_0) dx - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(c \frac{\partial \xi}{\partial t} + \chi \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega} c(x, t_0) \xi(x, t_0) dx - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(c \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega} c(x, t_0) \xi(x, t_0) dx - \int_0^{t_0} \int_{\Omega} \left(c \frac{\partial \xi}{\partial t} - \varphi(c) \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega} c^0(x) \xi(x, 0) dx. \end{aligned} \tag{49}$$

□

The uniqueness result proves in a usual way.

References

- 1 Friedman A., Kinderlehrer D. A one phase Stefan problem// Indiana University Mathematics Journal. –1975. –Vol. 24, №11. –P. 1005-1035.
- 2 Meirmanov A. On the classical solution of the multidimensional Stefan problem for quasilinear parabolic equations// Mathematics of the USSR-Sbornik. –1981. –Vol. 40, Issue 2. –P. 157–178.
- 3 Meirmanov A. The Stefan problem. –De Gruyter, 1992. –244 p.
- 4 Meirmanov A., Galtsev O., Zimin R. Free boundaries in Rock Mechanics. –De Gruyter, 2017. –220 p.
- 5 Meirmanov A. Mathematical models for poroelastic flows. –Atlantis Press, 2013. –417 p.
- 6 Solonnikov V.A. Solvability of a problem on the evolution of a viscous incompressible fluid, bounded by a free surface, on a finite time interval // Algebra i Analiz. -1991. -Vol. 3, №1. –P. 222-257; St. Petersburg Math. J. –1992. –Vol. 3, №1. –P. 189-220.
- 7 Solonnikov V. A. Lectures on Evolution Free Boundary Problems: Classical Solutions [in book: Mathematical Aspects of Evolving Interfaces]. – 2003. –Vol. 1812. –P. 123-175.
- 8 Friedman A. A free boundary problem associated with multiscale tumor models// Math. Mod. Nat. Phenom. –2009. –Vol. 4, №3. –P. 134-155.
- 9 Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. – Новосибирск (Сиб. отд-ние): Наука, 1985. –318 стр.
- 10 Monakhov V.N. Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems of equations. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1983. –Vol. 57. –522 p.
- 11 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. –Москва: Наука, 1973. –416 стр.
- 12 Buckley S.E., and Leverett M.C. Mechanism of fluid displacements in sands // Transactions of the AIME. –1942. –Vol. 146. –P. 107-116.
- 13 Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids [in book series: Studies in Mathematics and its Applications]. –Amsterdam: North-Holland Publishing Co. –1990. –Vol. 22. –P. ii-vii, 1-309.
- 14 Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред. Часть I, II. –Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1976.
- 15 Баренблатт Г.И., Енгов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. –Москва: Недра, 1972. –288 стр.
- 16 Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа. – Москва: Недра, 1976. –335 стр.

- 17 Алишаев М.Г., Розенберг М.Д., Теслюк Е.В. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений. –Москва: Недра, 1985. –271 стр.
- 18 Burrigge R., Keller J. B., Poroelectricity equations derived from microstructure// J. Acoust. Soc. Am. 1981. –Vol. 70, Is. 4. –P. 1140-1146.
- 19 Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory: Lecture Notes in Physics 127. –Berlin–New York: Springer-Verlag, 1980.
- 20 Ladyzhenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'seva N.N. Linear and Quasi-linear equations of parabolic type. – Providence R.I.: American Mathematical Society, 1968. –Vol. 23. –648 p.
- 21 Lions J.L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaire. –Paris: Dunon Gauthier-Villars, 1969.
- 22 Vol'pert A.I., Hudjaev, S.I. Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics. Mechanics: Analysis 8, Springer, 1985. –696 p.
- 23 Natanson I. Theory of function of real variable. Courier Dover Publications, 2014. –544 p.
- 24 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory real analysis. –New York: Dover Publications, INC, 1975. –403 p.

А. М. Мейрманов

Ионосфера институты, "Ионосфера" серіктестігі, 117 үй, 050020, Алматы, Қазақстан

Бакли-Левевертт моделіндегі бастапқы мұнай концентрациясы үзілуінің азаюы

Аннотация. Мұнайды суспензиямен ығыстыруды сипаттайтын Бакли-Левевертт теңдеулерінің бір өлшемді жүйесі үшін еркін шекаралық есептері қарастырылады. Бұл мәселе үшін мұнайдың бастапқы концентрациясының секірістері қатты үзіліс шарттары тұжырымдалған. Мақалада Бакли-Левевертт феноменологиялық моделі қарастырылып отырған физикалық процесті дұрыс сипаттай алмайтындығы дәлелденді. Ол үшін бір-бірімен араласпайтын қалқаммен бөлінген аймақтың бір жартысында тыныштық күйде мұнай, ал екінші жартысында суспензия болғандағы мұнайдың бастапқы концентрациясындағы үзілістің ыдырау мәселесі зерттеледі. Бастапқы уақытта қалқа жойылып, айдау скважиналарында суспензияның теріс емес жылдамдығы сақталады. Бакли-Левевертт моделінің жалғыз шешіміне жүргізілген нақты анализ бастапқы уақытта мұнай суспензияны ығыстыра отырып, нәтижесінде мұнай мен суспензияның араласу аймағы пайда болады. Егер айдау ұңғымаларында суспензияның қозғалу жылдамдығы жеткілікті жоғары болса, онда белгілі бір уақытта табиғатына сай суспензия керісінше мұнайды ығыстыра бастайды.

Түйін сөздер: Еркін шекаралық есептер, тасымалдау теңдеулері, мұнайды суспензиямен ығыстыру, қатты үзілістері шарттар.

А. М. Мейрманов

Институт ионосферы, Садоводческое товарищество "Ионосфера", д.117, 050020, Алматы, Казахстан

Уменьшение начального разрыва концентрации нефти в модели Бакли-Левевертта

Аннотация. Рассматривается задача со свободной границей для одномерной системы уравнений Бакли-Левевертта, описывающей вытеснение нефти суспензией. Для этой задачи сформулированы условия сильного разрыва скачка начальной концентрации нефти. В статье доказано, что феноменологическая модель Бакли-Левевертта неадекватно описывает рассматриваемый физический процесс. Для этого изучается задача о распаде разрыва начальной концентрации нефти, когда в одной половине области покоится нефть, а в другой половине области - суспензия, и эти области разделены непроницаемой перегородкой. В начальный момент времени перегородка удаляется и на нагнетательных скважинах поддерживается неотрицательная скорость суспензии. Точный анализ единственного решения модели Бакли-Левевертта показывает, что в начальный момент времени нефть начинает вытеснять суспензию, в результате чего образуется зона смешивания нефти и суспензии. Если скорость движения суспензии на нагнетательных скважинах достаточно высока, то в какой-то момент времени начинает реализовываться естественный вариант вытеснения нефти суспензией.

Ключевые слова: Задачи со свободными границами, уравнения переноса, вытеснение нефти суспензией, условия на сильном разрыве.

References

- 1 Friedman A., Kinderlehrer D. A one phase Stefan problem, Indiana University Mathematics Journal. 1975. Vol. 24. №11. P. 1005-1035.
- 2 Meirmanov A. On the classical solution of the multidimensional Stefan problem for quasilinear parabolic equations, Mathematics of the USSR-Sbornik. 1981. Vol. 40. Issue 2. P. 157–178.
- 3 Meirmanov A. The Stefan problem. De Gruyter, 1992. 244 p.
- 4 Meirmanov A., Galtsev O., Zimin R. Free boundaries in Rock Mechanics. De Gruyter, 2017. 220 p.
- 5 Meirmanov A. Mathematical models for poroelastic flows. Atlantis Press, 2013. 417 p.
- 6 Solonnikov V.A. Solvability of a problem on the evolution of a viscous incompressible fluid, bounded by a free surface, on a finite time interval, Algebra i Analiz. 1991. Vol. 3. №1. P. 222-257; St. Petersburg Math. J. 1992. Vol. 3. №1. P. 189-220.
- 7 Solonnikov V. A. Lectures on Evolution Free Boundary Problems: Classical Solutions [in book: Mathematical Aspects of Evolving Interfaces]. 2003. Vol. 1812. P. 123-175.

- 8 Friedman A. A free boundary problem associated with multiscale tumor models, *Math. Mod. Nat. Phenom.* 2009. Vol. 4. №3. P. 134-155.
- 9 Ovsyannikov L.V., Makarenko N.I., Nalimov V.I. and others *Nelinejnye problemy teorii poverhnostnyh i vnutrennih voln* [Nonlinear problems in the theory of surface waves, Nonlinear problems in the theory of surface waves]. Novosibirsk, Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1985. 318 p. [in Russian]
- 10 Monakhov V.N. Boundary value problems with free boundaries for elliptic systems of equations. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1983. Vol. 57. 522 p.
- 11 Lavrentev M. A., Shabat B. V. *Problemy gidrodinamiki i ih matematicheskie modeli* [Hydrodynamics problems and their mathematical models]. Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 1973. 416 p. [in Russian]
- 12 Buckley S.E., and Leverett M.C. Mechanism of fluid displacements in sands, *Transactions of the AIME.* 1942. Vol. 146. P. 107-116.
- 13 Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids [in book series: *Studies in Mathematics and its Applications*]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1990. Vol. 22. P. ii-vii, 1-309.
- 14 Ovsyannikov L. V. *Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred* [Introduction to continuum mechanics]. Novosibirsk, Novosibirsk State University, parts I, II. 1976. [in Russian]
- 15 Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Teoriya nestacionarnoj fil'tracii zhidkosti i gaza* [Theory of non-stationary filtration of oil and gas]. Moscow, Nedra, 1972. 288 p. [in Russian].
- 16 Rozneberg M.D. *Mnogofaznaja mnogokomponentnaja fil'tracija pri dobyche nefti i gaza* [Multiphase and multi-component filtration during oil and gas production]. Moscow, Nedra, 1976. 335 p. [in Russian].
- 17 Alishaev M.G., Rosenberg M.D., Teslyuk E.V. *Neizotermicheskaja fil'tracija pri razrabotke neftjanyh mestorozhdenij* [Non-isothermal filtration in the development of oil fields]. Moscow, Nedra, 1985. 271 [in Russian].
- 18 Burrige R., Keller J. B., Poroelasticity equations derived from microstructure, *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. Vol. 70. Is. 4. P. 1140-1146.
- 19 Sanchez-Palencia E. *Non-homogeneous media and vibration theory: Lecture Notes in Physics 127.* Berlin–New York: Springer-Verlag, 1980.
- 20 Ladyzhenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'seva N.N. *Linear and Quasi-linear equations of parabolic type.* Providence R.I.: American Mathematical Society, 1968. Vol. 23. 648 p.
- 21 Lions J.L. *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaire.* Paris: Dunon Gauthier-Villars, 1969.
- 22 Vol'pert A.I., Hudjaev, S.I. *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics.* Mechanics: Analysis 8, Springer, 1985. 696 p.
- 23 Natanson I. *Theory of function of real variable.* Courier Dover Publications, 2014. 544 p.
- 24 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Introductory real analysis.* New York: Dover Publications, INC, 1975. 403 p.

Сведения об авторах:

Мейрманов Анварбек Мукатович – бас ғылыми қызметкер, Ионосфера институты, «Ионосфера» серіктестігі, 117 ұй, 050020, Алматы, Қазақстан.

Information about authors:

Meirmanov Anvarbek Mukatovich – Chief Scientific Researcher, Institute of Ionosphere, Gardening Association "Ionosphere", 117, 050020, Almaty, Kazakhstan.

Received: 21.05.2024.

Approved: 29.05.2024. Available online: 30.06.2024.

FTAMP: 20.53.19

БИДАЙ ӨНІМДІЛІГІНЕ ӘСЕР ЕТУШІ КЛИМАТТЫҚ ФАКТОРЛАРДЫ МАШИНАЛЫҚ ОҚЫТУМЕН АНЫҚТАУДЫҢ МОДЕЛІ

Л.К.Тәжібай¹, Г.Е. Мурзабекова², Г.Ж.Стыбаев³, Г.К. Муратова⁴,

¹⁻⁴ С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті,

Жеңіс даңғылы, 62, Астана, Қазақстан

(E-mail: ¹ tazhibai_lazzat@mail.ru, ² g.murzabekova@kazatu.edu.kz, ³ g.stybaye@kazatu.edu.kz,
⁴ g.mugk@mail.ru)

Аннотация. Бидай өнімділігін болжау үшін маңызды климаттық факторларды анықтау ауыл шаруашылығындағы өсімдік шаруашылығына арналған бейімделудің тиімді стратегияларын жасауға мүмкіндік береді. Бұл бидай өндірісіндегі климаттық өзгерістердің кері әсерін азайтуға көмектеседі. Бұл зерттеудің мақсаты бидай өнімділігіне әсер ететін климаттық факторларды анықтау үшін сызықтық модельдер, шешім ағаштары және бустинг модельдері сияқты машиналық оқыту модельдерін әзірлеу болып табылады. Зерттеу Ақмола облысы Ақкөл ауданының 2000-2022 жылдардағы бидай өнімділігі мен метеодеректеріне, соның ішінде ауа температурасына, ылғалдылыққа, жауын-шашынға, желдің жылдамдығы мен бағытына, топырақ бетінің температурасына және ауа ылғалдылығының жетіспеушіліне негізделген. Бұл мақалада болжамдық модельдерді әзірлеу үшін машиналық оқытудың Linear Regression, Ridge Regression, Lasso Regression, Elastic Net Regression, SVR, Gaussian Process Regressor алты сызықтық моделі, Decision Tree Regressor, Random Forest Regressor, Gradient Boosting Regressor, Extra Trees Regressor шешім ағашының төрт моделі және LGBM регрессоры, Xgboost екі бустингтік модельдері қолданылды. Нәтижесінде бидай өнімділігіне едәуір әсер етуші белгілер, олардың арасында шілдедегі ауа ылғалдылығының жетіспеушілігі, маусымдағы максималды ылғалдылық және тамыздағы ауа температурасы анықталды. Ең жақсы нәтижелерді шешім ағашының модельдері көрсетті. Алынған мәліметтер интерпретацияланды және ауылшаруашылық құрылымдарында шаруашылық шешімдер қабылдау кезінде қолданыла алады.

Түйін сөздер: машиналық оқыту, болжамдық модель, белгілер маңыздылығы, зияткерлік талдау, шешімдер қабылдау.

DOI: <https://doi.org/10.32523/3007-0155/bulmathenu.2024/2.2>

2000 Mathematics Subject Classification: 62J05; 62J07; 68T01

1. Кіріспе

Ауыл шаруашылығындағы басқару шешімдерді талдауға, болжауға және тиімдендіруге мүмкіндік беретін заманауи цифрлық технологияларды қолданусыз ауыл шаруашылығы өндірісін тиімді басқаруды елестету мүмкін емес. Заманауи цифрлық технологияларды, оның ішінде зияткерлік талдауды қолдану ауыл шаруашылығы өндірісін тиімді басқаруға мүмкіндік ашады. Ауыл шаруашылығындағы деректерді жинақтау және талдау технологиялары мәселені шешудің механизмдерінің бірі бола алады және фермерлерге дәлірек шешім

қабылдауды қолдау құралдарын ұсына алады [1]. Деректерді зияткерлік талдау әдістері цифрлық агроөнеркәсіптік кешеннің негізі болып табылады.

Арнайы бағдарламалармен үлкен деректерді талдау ауыл шаруашылығының өнімділікті болжау, дәнді дақылдарды егу немесе жинау үшін қолайлы кезеңді анықтау, тыңайтқыштар мөлшерін есептеу және көптеген тағы басқа мәселелерін шешуге мүмкіндік береді [2]. Осы саладағы әртүрлі ғалымдардың зерттеулері, деректерді зияткерлік талдау сияқты технологияларды қолдану жұмыс тиімділігінің жоғарылауына, шығындарды азайтуға және кәсіпорын үшін тәуекелдерді азайтуға әкелетін шешім қабылдауға оң әсер ететінін растайды [3].

Машиналық оқыту моделі зерттеу мәселесі мен зерттеу сұрақтарына байланысты сипаттамалық немесе болжамды болуы мүмкін. Сипаттамалық модельдер жиналған деректерден білім алу және не болғанын түсіндіру үшін пайдаланылса, болжамды модельдер болашақты болжау үшін қолданылады [4]. Машиналық оқытуды зерттеу өнімнің болжамдық моделін құру кезінде әртүрлі мәселелерге тап болады. Қойылған міндетті шешу үшін дұрыс алгоритмдерді таңдау өте маңызды, сонымен қатар, алгоритмдер мен негізгі платформалар үлкен көлемдегі деректерді өңдей алуы керек [5].

Машиналық оқыту - бұл компьютерлік жүйелердің үлгілер мен логикалық тұжырымдарға сүйене отырып, нақты нұсқауларсыз тапсырмаларды орындау үшін қолданатын алгоритмдер мен статистикалық модельдерді әзірлеу туралы ғылым.

Машиналық оқытуды қолдану белгілі бір әрекеттер тізбегін орындауды білдіреді және алынған модельдің сәттілігі тек оқу алгоритмін таңдауға ғана емес, сонымен қатар, реттіліктің әр кезеңін дұрыс орындауға да байланысты [6].

Біздің алдыңғы [7] жұмысымызда машиналық оқыту маңыздылықтары, болжамды модельді машиналық оқытумен құру процесінің сызбалық көрінісі мен машиналық әдістерді қолдана отырып жасалған болжамдық модельдер туралы қысқаша жарияланды.

Зерттеу жұмысында машиналық оқытумен бидай өнімділігінің болжамдық моделін құру процесі бірнеше кезеңдермен жүзеге асырылады. Алдымен, қойылған міндеттер анықталып, содан соң, деректердің жинағы таңдалынып, синтезделеді. Болжамдық модель құруда деректерді тазалау және қалыпқа келтіру, модельді таңдау мен модельдеу және нәтижелерді талдау маңызды кезеңдер болып саналады.

Климаттық модельдер жиынтығының сценарийлерінде климаттың өзгеруі өнімділікке үлкен теріс әсерін тигізеді. Зерттеу жұмысында Crane-Droesch A. [8] жартылай параметрлік нейрондық желілер (SNN) деп аталатын терең нейрондық желілері бар параметрлік статистикалық модельдері әзірленген. Маңызды белгілер мен оларды нәтижемен байланыстыратын функционалдық формалар туралы алдын-ала білімді қолдана отырып, SNN типтік нейрондық желілермен салыстырғанда статистикалық тиімділікті едәуір арттырады. Климаттық модельдер жиынтығының сценарийлерінде модельдер климаттың өзгеруінің өнімділікке үлкен теріс әсерін көрсеткен.

Келесі [9] жұмыс авторлары фермалардан жиналған ауылшаруашылық деректерін, соның ішінде заттар интернетінің сенсорларының нақты уақыттағы деректерін қолдана отырып, модельдеу үшін әртүрлі машиналық оқыту алгоритмдерін фермада өсіруге ең қолайлы дақылдарды ұсыну үшін қолданды. Деректер жиынындағы температура, ылғалдылық, рН және жауын-шашын белгілерін пайдалана отырып, олар Байес желісі (Bayesian Networks) мен кездейсоқ орман әдістері арқылы ең жоғары дәлдікке қол жеткізді.

Өнімділікті арттыруға бағытталған [10] зерттеуде авторлар жіктеу және регрессия есептері үшін қолданылатын параметрлік емес әдіс болып табылатын KNN алгоритмінің барлық аспектілерін қарастырған. Жалпы алғанда, бақылау және тестілеу деректері толық деректердің сәйкесінше 80 және 20 пайызы ретінде таңдалған. Кіріс белгілері ретінде топырақтың қоректік құрамы бойынша азот (N), фосфор (P), калий (K), рН және температура деректері зерттелген болса, шығыс белгілері ретінде дақылдың бір түрі және өнімділік нәтижесі алынған.

Ж. Тусупов және т.б. авторлар [11] жұмыстарында спектрлік жарықтық коэффициенттерін пайдалана отырып, спектрлік деректерді талдау және спутниктік кескіндерде зиянкестер мен аурулардың болуын жіктеу үшін логистикалық регрессия, экстремалды градиентті күшейту (XGBoost) және үйірткілі нейрондық желі (CNN) сияқты машиналық оқыту әдістері қолданылған. Зерттеу нәтижелері ауыл шаруашылығы дақылдарының зиянкестері мен қоздырғыштарының формальды көріністерін талдау және тексеру нәтижесінде өнімділікті арттыруға, зиянкестер мен аурулармен күресу шығындарын азайтуға, өндірістік процестерді оңтайландыруға мүмкіндік береді.

М. Yessenova және т.б. авторлар [12] аэроғарыштық кескіндерді өңдеу арқылы вегетациялық кезеңді анықтау жөніндегі мәліметтер мен спектрлік жарықтық коэффициентті пайдалана отырып, ауыл шаруашылығы дақылдарының дамуының сандық сипаттамаларын анықтау әдістерін, сондай-ақ суреттерді текстуралық өңдеу моделін әзірледі. Зерттеулер ауылшаруашылығы өнімдерінің өсуіне әсер ететін жағымсыз факторларды жою үшін ұсынылған шараларды қабылдауға мүмкіндік береді.

П.К. Куценогий және т.б. [13] авторлар орманды далалы аймақта орындалған ұзақ далалық тәжірибелер материалдарына сүйене отырып, ауа-райы мен агротехникалық факторлардың бидай мен арпаның өнімділігіне әсерін машиналық оқытудың Random Forest Classifier алгоритмін қолданды. Бұл авторлар жұмысында accuracy көрсеткіші тестілік таңдамасында дұрыс болжамдар санының тестілік мысалдарының жалпы санына қатынасы ретінде анықтаған.

Нейрожелілік модельдердің артықшылықтарын қолдана отырып, М. Ю. Архипова [14] жүргізген зерттеуінде нейрондық желі моделі басқа нейрондық модельдермен (көп қабатты перцептрон және үйірткілі нейрондық желі) және регрессиялық модельдермен салыстырғанда, дәлірек болжамды бағалаулар алуына мүмкіндік берді. Ауылшаруашылық дақылдарының өнімділігін болжау модельдерінің дәлдігін жақсарту үшін компьютерлік көру технологиялары қолданылған.

Біздің зерттеуіміз бидай өндіруді тиімдендіру және негізделген шешімдер қабылдау арқылы шығындарды азайту үшін машиналық оқыту алгоритмдерін қолданудың маңыздылығын көрсетеді. Нәтижелер зерттелген аймақтың метеостанциясынан жинақталған метеодеректері бойынша климаттық жағдайлардың бидай өнімділігіне әсерін машиналық оқытудың сызықтық алгоритм, шешімдер ағашы, бустинг алгоритмдерін қолдана отырып, болжау арқылы алынды. Бұл агроқұрылымдарға климаттық факторларды ескере отырып, бидай өнімділігін тиімдендіру үшін дұрыс шешім қабылдауға мүмкіндік береді.

Модельдер бидай өнімділігі мен метеодеректердің тарихи деректері негізінде әзірленді. Солтүстік Қазақстан өңіріндегі Ақмола облысы, Ақкөл ауданы бойынша жаздық бидай өнімділігін болжау моделін әзірлеу міндетін орындау үшін бидай өнімділігіне әсер етуші климаттық факторлардың метеодеректері жинақталып, қажетті форматқа түрлендірілді. Жұмыста 2000-2022 жылдар аралығындағы күнделікті климаттық деректерін жаздық бидайдың жылдық өнімділігімен байланыстыру үшін машиналық оқыту қолданылды.

Жаздық бидай ұзақ жарық күнді талап ететін, өсудің қысқа мерзімді дақылына жатады [15]. Жер көлемі бойынша бұл әлемдегі ең көп өсірілетін дақыл және әлемдегі халыққа тағамдық калория мен ақуыздың бестен бір бөлігін қамтамасыз етеді [16]. Оның жылдық өндірісі орта есеппен 753 миллион тоннаны құрайды [17].

Бидай дақылының жаһандық азық-түлік қауіпсіздігі үшін маңыздылығын, сондай-ақ бидай өндірісіне климаттық факторлар әсерінің ерекшелігін ескере отырып, жұмыста бидайдың өнімділігін болжау және бидай өнімділігіне әсер ететін климаттық факторларды анықтау үшін модельдер әзірленді. Модельдеу процесі машиналық оқытуда қолданылатын Python бағдарламалау тілінің кітапханаларымен жүзеге асырылды. Болжамдық модельдерге салыстырмалы талдау жүргізіліп, бидай өнімділігіне әсер етуші климаттық факторлардың маңыздылығы айқындалды.

2. Әдістер

Бұл жұмыста бидайдың өнімділігі туралы мәліметтер Қазақстан Республикасының Ұлттық статистикалық бюросынан (<https://stat.gov.kz/>), ал метеодеректер «Қазгидромет» РМК-дан (https://meteo.kazhydromet.kz/database_meteo/) алынды.

Әзірленген болжамдық модельдер үшін қолданылған бидай өнімділігі мен метеодеректер бойынша мәліметтер қоры келесі сілтеме бойынша сақталған (<https://drive.google.com/drive/folders/1JckA0xvIbLgXxerZF0N3iv1Gufgx0Tn6?usp=sharing>).

Машиналық оқытуда шешуші рөл атқаратын және жиі еленбейтін үлкен нәрсе - бұл модельдер үшін маңызды белгілерді (әсер етуші факторларды) таңдау болып табылады (feature importance). Пайдасыз деректер машиналық оқытудың соңғы нәтижелерін бұзатын ығысуға әкеледі.

Маңызды белгілер – бұл модельдің нәтижелеріне және оның дәл болжау жасау қабілетіне айтарлықтай әсер ететін айнымалылар. Өсімдік шаруашылығындағы басқару шешімдерін тиімдендіруде, айталық, бидай өнімділігі мен қуаңшылықты болжауда, маңызды белгілер ретінде ауа температурасы, жауын-шашын сияқты белгілерді алуға болады.

Белгілердің маңыздылығы келесі себептерге байланысты өте пайдалы болады:

1) Деректерді түсіну: Модельді құру өз алдына маңызды болса, оған қолданылатын деректерді түсіну тағы бір маңызды кезең болып табылады. Белгілердің маңыздылығы белгілер мен мақсатты айнымалы арасындағы байланысты түсінуге мүмкіндік береді. Ол сондай-ақ, модель үшін қандай белгілер маңызды емес екенін түсінуге көмектеседі.

2) Модельді жақсарту: Модельді үйрету кезінде модельдің өлшемін азайту үшін белгілердің маңыздылығына негізделген бағалауды қолдануға болады. Жоғары көрсеткіштер әдетте сақталады, ал төменгі көрсеткіштер модель үшін маңызды емес болатындықтан жойылады. Бұл модельді жеңілдетіп қана қоймай, оның жұмысын тездетіп, нәтижесінде модельдің өнімділігі артады.

3) Модельдің интерпретациялануы: Белгілердің маңыздылығы модельді басқа мүдделі тараптарға түсіндіру және жеткізу үшін де пайдалы. Әрбір белгілер үшін көрсеткіштерді есептеу арқылы қандай сипаттамалар моделдің болжамды күшіне көбірек әсер ететінін анықтауға болады.

Машиналық оқыту моделі – бұл белгілі бір үлгілерді тануға үйретілген файл. Модельдер мәліметтер жиынтығы негізінде талдау және оқыту үшін қолдана алатын алгоритм бойынша оқытылады. Зерттеу жұмысында машиналық оқытудың мұғаліммен оқыту тәсілі қолданылды. Мұғаліммен оқытудың кез-келген алгоритмінің мақсаты – шығындар функциясын анықтау және оны азайту болып табылады.

Жаздық бидай ерекшелігіне қарай, модельдің деректер жиынына өнімділікке әсер етуші факторлар ретінде, ауа температурасы, жылдық жауын-шашын мөлшері, топырақ температурасы, ылғалдылық, ылғалдылық жетіспеушілігі, желдің бағыты мен жылдамдығы бойынша метеодеректері алынды. Деректер жиынтығы машиналық оқыту алгоритмдеріне сәйкес форматқа түрлендірілді.

Зерттеу жұмысындағы әзірленген модельдер Python бағдарламалау тілінің pandas, numpy, sklearn, seaborn, matplotlib, т.б. әртүрлі кітапханаларын қолданумен әзірленіп, арнайы интерфейс ортада нәтижелері шығарылды.

Төмендегі көрсетілген формулалар негізінде машиналық оқыту бойынша sklearn кітапханасындағы арнайы функциялар арқылы бидай өнімділігіне әсер етуші маңызды белгілер анықталды.

Сызықтық регрессия моделі келесі (1) бойынша есептеледі және оның мақсаты- болжанған \hat{y} мәндері мен нақты y мәндері арасындағы айырмашылықты минимизациялайтын $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ мәндерін табу болып табылады:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon \quad (1)$$

мұндағы y – тәуелді айнымалы (мақсатты белгі), зерттелінді модельдегі (жылдық) бидай өнімділігі; x_1, x_2, \dots, x_n - тәуелсіз айнымалылар (белгілер), модельдегі бидай өнімділігіне

әсер етуші факторлар; β_0 - бос мүше (тұрақты), модельдегі барлық факторлардың нөлдік мәндеріндегі негізгі мәнін білдіреді және деректер кеңістігінде регрессия сызығының ығысуын қамтамасыз ететін регрессия теңдеуінің маңызды бөлігі ретінде қызмет етеді; $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ – әр белгінің мақсатты функцияға әсерін көрсететін регрессия коэффициенттері, әрбір фактор бір бірлікке өзгерген кезде модельдегі бидай өнімділігі қаншалықты өзгередінін көрсетеді; ε - модель қателігі (шу).

Сызықтық регрессияның жетілдірілген түрленуі ретінде қолданылған Ridge-регрессия моделі машиналық оқытуды азайту мақсатында $L2$ регуляризацияны кірістіреді және ол регрессия коэффициенттерінің мөлшеріне айыппұл қосады, бұл мультиколлинеарлық жағдайда көмектеседі және модельдің жалпылау қабілетін жақсартады:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y})^2 + \alpha \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right) \quad (2)$$

мұндағы $\hat{\beta}$ - регрессияның бағаланған коэффициенттерінің векторы; y_i - тәуелді айнымалының нақты мәндері; \hat{y}_i - тәуелді айнымалының болжанған мәндері; α - регуляризация дәрежесін бақылайтын регуляризация параметрі (гиперпараметр); β_j - регрессия коэффициенттері; m - бақылаулар саны; n - белгілер саны.

Lasso-регрессия (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) әдісі Ridge-регрессия тәрізді регуляризациялауды қолдана отырып, модельдің жалпылау қабілетін жақсарту үшін қолданылды. Lasso-регрессиясының Ridge-регрессиядан айырмашылығы – бұл әдісте регрессияның кейбір коэффициенттерін нөлге айналдыратын $L1$ регуляризацияны қолданылады. Lasso-регрессиясы үшін:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2 + \alpha \sum_{j=1}^n |\beta_j| \right) \quad (3)$$

қолданылатын формула.

Lasso-регрессиясы мен Ridge-регрессиясының мақсаты - жоғалту функциясын мейлінше азайту болып табылады және ол екі кезеңмен орындалады:

1 $\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y})^2$ модель қателігін (қателер квадраттарының сомасын) есептеу;

2 $\sum_{j=1}^n |\beta_j|$ ($L1$ регуляризация Lasso-регрессиясы үшін) және $\alpha \sum_{j=1}^n \beta_j^2$ ($L2$ регуляризация Ridge-регрессиясы үшін) регрессия коэффициенттерінің өлшемі үшін айыппұл мөлшерін есептеу.

Айыппұл сызықтық регрессияның жоғалту функциясына қосылады және бұл модельді болжау дәлдігі мен коэффициенттердің шамасы арасындағы мәмілеге келуге мәжбүр етеді. Lasso регрессиясы кейбір коэффициенттерді нөлге айналдыруы мүмкін, бұл белгілерді таңдау үшін пайдалы болады. Осылайша, Lasso регрессиясы қайта оқытуды болдырмауға көмектеседі және белгілердің санын азайта алады. Lasso регрессиясының аталған ерекшеліктері модельді түсіндіруді жеңілдетеді.

Elastic Net регрессиясы Lasso-регрессиясы мен Ridge-регрессиясының артықшылықтарын қолдануға мүмкіндік береді. Бұл регрессия әдісі коэффициенттердің мөлшерін бақылап қана қоймайды, сонымен қатар белгілерді таңдайды. Elastic Net регрессиясы келесі формуламен есептеледі:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y})^2 + \alpha_1 \sum_{j=1}^n |\beta_j| + \alpha_2 \sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right) \quad (4)$$

мұндағы α_1 және α_2 - шамалары сәйкесінше $L1$ және $L2$ регуляризациялау дәрежесін бақылайтын регуляризация параметрлері.

Elastic Net регрессиясы λ параметрі көмегімен $L1$ және $L2$ регуляризациялары арасындағы қатынасты икемді түрде реттеуге мүмкіндік береді:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \left(\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y})^2 + \lambda (\alpha \sum_{j=1}^n |\beta_j| + (1 + \alpha) \sum_{j=1}^n \beta_j^2) \right),$$

мұндағы

λ – регуляризацияның жалпы коэффициенті;

α – $L1$ және $L2$ регуляризациялары арасындағы теңгерімді бақылайтын параметр.

Жұмыстағы тірек векторлар әдісі (Support Vector Regression, SVR) ε -нан артық емес, сондай-ақ, максималды тегіс болып табылатын, шынайы мәндерден ауытқитын функцияны табу мақсатымен қолданылды. SVR әдісінің формуласы келесідей сипатталады:

$$\min_{w,b,\xi,\xi^*} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^m (\xi_i + \xi_i^*)$$

және

$$\begin{cases} y_i - (\mathbf{w} \cdot x_i + b) \leq \varepsilon + \xi_i \\ (\mathbf{w} \cdot x_i + b) - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^* \\ \xi_i, \xi_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

шектеулері орындалады, мұндағы \mathbf{w} – әр-бір фактор салмақтарының (маңыздылықтарының) векторы; b – бос мүше; ξ_i, ξ_i^* - ε - түтік шекарасынан шығатын i -ші нүкте үшін қателерді ұсынатын өлшемдер; C - регуляризациялау коэффициенті; x_i - i -ші бақылау белгілерінің векторы; y_i - i -ші бақылаудың мақсатты функциясы; ε – ішінде қателерге айыппұл салынбайтын ε -түтік ені.

Сызықтық регрессия модельдері нөлдік мәндерді жақсы өңдейді, ал Lasso және Ridge регрессиясы модельдердің жалпылау қабілеттілігін белгілердің үлкен санында жақсарта алады.

Осы жұмыста үш түрлі модельдер типтері қарастырылды: сызықтық, шешімдер ағашы, және бустинг.

3. Нәтижелер мен талқылау

Машиналық оқыту модельдерінде бидай өнімділігіне әсер етуші әрбір факторлар (орташа температура, максималды температура, жел жылдамдығының орташа мәні, топырақ беті температурасы және т.б.) бойынша Ақмола облысы Ақкөл ауданының 2000-2022 жылдар аралығындағы күнделікті әрбір үш сағат сайын алынған деректерінің әр күн бойынша орташа, максималды, минималды мәндері қолданылды. Оқытылған машиналық модельдерге салыстыру жұмыстары жүргізіле отырып, талданды. Зерттеу жұмысындағы өңделген деректер алдын-ала екі бөлікке (оқыту және тестілеу), атап айтқанда, оқытуға арналған деректердің 70%-ына және тестілеуге арналған деректердің 30%-ына бөлінген.

Машиналық оқыту үшін деректерді 70% және тестілеу үшін 30%-ға бөлу модельдің өнімділігін сенімді бағалауға көмектесетін стандартты тәжірибе болып табылады. Оқыту таңдамасы (training set) модельді оқыту үшін пайдаланылса, ал тестілік таңдамасы (test set) модель өнімділігін бағалау үшін қолданылады. Тестілеу таңдамасы модельдің машиналық оқыту кезінде жаңа деректердегі өнімділігін бағалау үшін қолданылады. Модельдің өнімділігін бағалау үшін қолданылатын MAPE (Mean Absolute Percentage Error) орташа абсолютті пайыздық қатесі әрқашан тестілік таңдамасында есептеледі.

Осы жұмыста болжамдық модельдердің қаншалықты дәл екенін бағалау үшін орташа абсолютті пайыздық қате (MAPE) метрикасы қолданылды. Бұл қате түрі қатарлардың мәнімен және іргелес қатарлардағы қателермен салыстырғанда қаншалықты үлкен екенін бағалайды. Ол өте қарапайым интерпретацияланатын коэффициент және төмендетілген болжамдарға қарағанда шамадан тыс болжау жағдайларына өте қатты қарайды. Оны үлеспен немесе пайызбен өлшеуге болады.

Орташа абсолютті пайыздық қате (MAPE) машиналық оқытуда әдетте модельдердің болжамды дәлдігін өлшеу үшін қолданылады. Ол келесідей есептеледі:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right| \times 100\% \quad (5)$$

мұндағы Y_t - t уақыт сәтіндегі нақты мәндер; \hat{Y}_t - t уақыт сәтіндегі болжанған мәндер; n - бақылаулар саны.

MAPE - уақыт қатары мен регрессия есептеріндегі болжау дәлдігін бағалау үшін ең көп қолданылатын көрсеткіштердің бірі. Бидай өнімділігін болжау моделі Linear Regression үшін орташа абсолютті пайыздық қатені (MAPE) есептеу мысалы төменде келтірілген. Болжамдық модельдер жоғарыда айтып кеткендей, 2000-2022 жылдар аралығындағы 23 жылғы деректер бойынша әзірленгендіктен, n бақылаулар саны – 23-ке тең. Деректер базасындағы Ақкөл ауданы бойынша көрсетілген уақыт кезеңіндегі әр жыл бойынша бидай өнімділігінің нақты мәндері - Y_t мәндері болса, Python бағдарламалау тілінің sclearn кітапханасындағы модельдерге сәйкес арнайы функцияларды қолдана отырып, машиналық оқыту барысында бидай өнімділігінің болжанған мәндері \hat{Y}_t алынды.

Нақты және болжамды мәндер арасындағы орташа абсолютті пайыздық қатені Linear Regression моделі бойынша есептеу үшін деректер 1-кестеде берілген.

КЕСТЕ 1 – Linear Regression моделі үшін нақты және болжамды мәндері

Жылдар (t уақыт)	Y_t	\hat{Y}_t	Жылдар (t уақыт)	Y_t	\hat{Y}_t	Жылдар (t уақыт)	Y_t	\hat{Y}_t
2000	8,9	10,1	2008	4,0	4,5	2016	10,3	11,6
2001	11,7	13,2	2009	12,7	14,4	2017	9,3	10,5
2002	8,3	9,4	2010	5,8	6,6	2018	10,4	11,8
2003	8,0	9,0	2011	12,6	14,3	2019	9,8	11,1
2004	4,9	5,5	2012	5,8	6,6	2020	12,0	13,6
2005	7,0	7,9	2013	8,8	10,0	2021	9,2	10,4
2006	9,5	10,7	2014	8,3	9,4	2022	10,8	12,2
2007	9,0	10,2	2015	10,5	11,9			

Алдымен әр жыл үшін абсолютті пайыздық қателік

$$\left| \frac{Y_t - \hat{Y}_t}{Y_t} \right|$$

түрінде есептелінеді, есептеудің келесі қадамында (1) арқылы барлық абсолютті пайыздық қателіктердің орташа мәнін анықтау арқылы Linear Regression моделі үшін орташа абсолютті пайыздық қателік

$$MAPE = \frac{1}{23} (0,1348 + 0,1282 + \dots + 0,1296) = \frac{1}{23} \cdot 3,0032 = 0,131$$

санына тең болады.

MAPE орташа абсолютті пайыздық қате болғандықтан, есептелген нәтижені 100%-ға көбейтіп, 13,1% пайыздық нәтижесін аламыз (2-кесте).

Зерттеу жұмысында қолданылған сызықтық, шешімдер ағашы, бустинг алгоритмдері бойынша әзірленген бірнеше модельдердің тиімділігін бағалауға мүмкіндік беретін болжамды дәлдік нәтижелері 2-кестеде келтірілген.

MAPE пайызбен көрсетілгендіктен, ол әртүрлі деректер жиынтығындағы немесе түрлі болжау объектілеріндегі модельдердің дәлдігін салыстыруды жеңілдетеді. Мысалы, MAPE мәні ең жоғарғы көрсеткішті берген Gradient Boosting Regressor моделі 18,1% құрайды, бұл болжамды мән мен нақты мән арасындағы орташа айырмашылық 18,1% құрайды дегенді білдіреді. MAPE мәні неғұрлым төмен болса, модель соғұрлым мәндерді жақсырақ болжай алады. Мысалы, Extra Trees Regressor моделі (12,2%) Xgboost моделіне (16,3%) қарағанда дәлірек.

Ақмола облысының Ақкөл ауданы бойынша нақты бидай өнімділігі зерттелетін 23 жылдық уақыт кезеңіндегі 4-14,7 ц/га аралығында өзгереді. Агрономиялық саланың ғалымдарының пікірлері бойынша бидай өнімділігін анықтаудағы болжамдық модельдердің қателігі 10-15% аралығында рұқсат етіледі.

Төмендегі 2-кестеден тек үш модель жақсы нәтиже көрсеткендігі байқалады: Extra Trees Regressor (12,2%), Linear Regression (13,1%) және Ridge Regression (13,6%).

Кесте 2 – Қолданылған алгоритмдердің болжамдық нақтылығының өлшемі ретіндегі орташа абсолютті пайыздық қате (MAPE) көрсеткіштері

Р.с.	Алгоритм	Модель атауы	Орташа абсолютті пайыздық қате (MAPE, %)
1	Сызықтық алгоритм	LinearRegression	13.1
2		RidgeRegression	13.6
3		LassoRegression	16.6
4		ElasticNetRegression	16.7
5		SVR	15.9
6		GaussianProcessRegressor	15.2
7	Шешімдер ағашы алгоритмі	DecisionTreeRegressor	16
8		RandomForestRegressor	15.4
9	Бустинг алгоритмі	GradientBoostingRegressor	18.1
10		ExtraTreesRegressor	12.2
11		LGBMRegressor	17.1
12		Xgboost	16.3

Жоғарыда келтірілген орташа абсолютті пайыздық қате нәтижелерін ескере отырып, аталған бірнеше алгоритмдердің ішінде салыстырмалы түрде ең тиімділері – сызықтық алгоритмдерден Linear Regression, Ridge Regression модельдері болса, ал бустинг алгоритмдерінің ішінен Extra Trees Regressor моделі тиімді және ұтымды енгізу үшін заманауи алгоритм болып табылады.

Әзірленген модельдерде қолданылған бидай өнімділігіне әсер етуші климаттық факторлар орташа температура (Temp_average), максималды температура (Temp_max), минималды температура (Temp_min), максималды желдің жылдамдығы (WindSpeed_max), жел жылдамдығының орташа мәні (WindSpeed_average), жел бағытының орташа мәні (WindDir_average), минималды ылғалдылық (Hum_min), максималды ылғалдылық (Hum_max), ылғалдылықтың орташа мәні (Hum_average), топырақ беті температурасының максималды көрсеткіші (SoilTemp_max), топырақ беті температурасының минималды көрсеткіші (SoilTemp_min), топырақ беті температурасының орташа көрсеткіші (SoilTemp_average), ылғалдылық жетіспеушілігінің орташа мәні (DefHum_average), жауын-шашын сомасы (Precipitation_sum), жылдық жауын-шашын сомасы (Annual_prec).

Жүргізілген зерттеу жұмысындағы өнімділікті болжау барысында маңызды деректерді талдау үшін келесідей: Linear Regression; Ridge Regression; Lasso Regression; Elastic Net Regression; SVR; Gaussian Process Regressor; Decision Tree Regressor; Random Forest Regressor; Gradient Boosting Regressor; Extra Trees Regressor; LGBM Regressor; Xgboost машиналық оқыту модельдері қолданылды.

Бидай өнімділігін болжаудағы климаттық факторлардың маңыздылығын анықтау үшін сызықтық, шешімдер ағашы және бустинг әдістері арқылы маңызды белгілердің бета-коэффициенттері мен белгілер маңыздылығының көрсеткіштері машиналық оқытудың арнайы функцияларымен анықталды.

Сызықтық регрессия модельдері үшін әр белгінің тәуелді айнымалыға (бидай өнімділігі) әсер ету күші мен бағытын көрсететін бета-коэффициенттері (β) есептелді. Белгілердің тәуелді айнымалыға әсер ету бағыты бета-коэффициенттің оң немесе теріс таңбасымен анықталады. Оң бета-коэффициенттер белгінің өнімділікке оң әсерін көрсетсе, ал теріс коэффициенттер

сәйкесінше теріс әсерді көрсетеді. Шешім ағашы және бустинг модельдері үшін әрбір белгінің модельді жақсартуға қосқан үлесін көрсететін белгілердің маңызды көрсеткіштері анықталды. Нәтижелер 3-кестеде келтірілген.

Бета-коэффициенттері әр тәуелсіз айнымалының (факторлар) тәуелді айнымалыға (бидай өнімділігі) қаншалықты және қай бағытта әсер ететіндігі туралы түсінік береді. Бұл сызықтық регрессия модельдерін интерпретациялаудың және модельдегі қандай факторлар ең маңызды екенін түсінудің маңызды аспектісі болып табылады.

Сызықтық регрессия моделі бойынша жылдық жауын-шашынның 0,035 оң коэффициенті жылдық жауын-шашынның бір бірлікке артуы (1 мм) бидай өнімділігінің 0,035 бірлікке (ц/га) артуына алып келетіндігін білдірсе, Elastic Net моделі бойынша тамыздағы орташа температураның -0,304 теріс коэффициентінде тамыздағы орташа температураның бір бірлікке артуы (1°C) бидай өнімділігінің 0,304 бірлікке (ц/га) кемуіне байланысты екендігін көрсетеді.

Decision Tree Regressor моделі бойынша ауа ылғалдылығы тапшылығының 0,774 көрсеткіші белгінің модельге, яғни модельді жақсартуға 77% үлес қосатындығын білдіреді. Осы көрсеткіш арқылы әрбір белгінің болжам үшін қаншалықты маңызды екенін бағалауға болады. Бұл алгоритм модельдері үшін белгілердің тәуелді айнымалыға әсер ету бағыты деген түсінік жоқ, сол себепті белгілер маңыздылығының көрсеткіштері тек оң мәндерді береді.

Төменде машиналық оқыту барысында анықталған маңызды белгілердің сызықтық алгоритм модельдері үшін бета-коэффициенттері мен шешім ағашы және бустинг модельдері үшін белгілер маңыздылығының көрсеткіштері берілген. Машиналық оқыту барысында әр модель бойынша он маңызды белгілер анықталды. Төменде әр модель бойынша ең жақсы алғашқы бес бета-көрсеткіштері мен белгілер маңыздылығының көрсеткіштері берілген.

Сызықтық регрессия моделі бойынша бидай өнімділігіне (салмағының кему ретімен) әсер ететін ең маңызды белгілер ретінде келесілерді анықтады: жылдық жауын-шашын (0,035), қарашадағы (0,026) және маусымдағы (0,024) жауын-шашын мөлшері, ақпандағы ең төменгі ылғалдылық (-0,015) және жел бағыты (0,015).

Ridge-регрессиялық моделі (2) арқылы бидай өнімділігіне әсер ететін ең маңызды белгілер ретінде келесілерді анықтады: жылдық жауын-шашын (0,038), маусымдағы (0,025) және қараша (0,024) жауын-шашын, ақпандағы ең төменгі ылғалдылық (-0,018) және қазан айында жел бағыты (-0,015).

Lasso регрессия моделі бидай өнімділігіне әсер ететін ең маңызды белгілер ретінде келесілерді анықтады: қарашадағы жауын-шашын (0,084), жылдық жауын-шашын (0,035), ақпандағы минималды ылғалдылық (-0,021), қазандағы жауын-шашын (-0,021) және қыркүйектегі жел бағыты (-0,018).

Elastic Net моделі бидай өнімділігіне әсер ететін ең маңызды белгілер ретінде келесі нәтижелерді берді: маусымдағы максималды ылғалдылық (0,572), тамыздағы минималды ылғалдылық (0,397), тамыздағы орташа температура (-0,304), қарашадағы жауын-шашын (0,263) және ақпандағы минималды ылғалдылық (-0,243).

Шешім ағаштарына негізделген барлық модельдер шілдедегі ылғалдың тапшылығын маңызды белгі ретінде көрсетеді: Decision Tree Regressor (0,774), Random Forest Regressor (0,071), Gradient Boosting Regressor (0,690), Extra Trees Regressor (0,690).

LGBM Regressor және Xgboost бустингтік модельдердің ішінде ең жақсы мәнді Xgboost градиентті бустингтік моделі көрсетті: тамыздағы температура (0,422), шілдедегі ылғал тапшылығы (0,407), ақпандағы (0,161), қарашадағы (0,004) және маусымдағы ауа температурасы (0,003).

Сызықтық регрессияға арналған β_n коэффициенттері әр белгінің (климаттық факторлар) тәуелді айнымалыға (бидай өнімділігі) әсер ету күші мен бағытын бағалау үшін қолданылады. Бірнеше белгілері бар сызықтық регрессияда β_n коэффициенттерін есептеу бірнеше қадаммен жүзеге асырылады.

Алынған нәтижелердің ішінен, бидай өнімділігіне ақпан айындағы жел бағыты бойынша бета-коэффициентінің 0,015 мәнін көрсеткен (3-кесте) сызықтық регрессия моделі негізінде β_1 коэффициентін есептеу мысалын қарастырайық.

Деректер жиыны бойынша Y мәндері 2000-2022 жылдар аралығындағы Ақкөл ауданы бойынша бидай өнімділігінің (ц/га) көрсеткіші. X мәндері - көрсетілген жылдар аралығындағы жел бағытының (град.) ақпан айы бойынша орташа мәндері.

$Y = [8,9; 11,7; 8,3; 8,0; 4,9; 7,0; 9,5; 9,0; 4,0; 12,7; 5,8; 12,6; 5,8; 8,8; 8,3; 10,5; 10,3; 9,3; 10,4; 9,8; 12,0; 9,2; 10,8];$

$X = [234,082; 186,192; 174,259; 184,000; 162,009; 161,058; 129,348; 179,438; 194,000; 105,661; 125,571; 149,826; 63,487; 195,679; 149,063; 154,094; 161,272; 185,629; 130,795; 160,487; 180,909; 177,536; 151,750];$

Бақылаулар саны $n = 23$ (2000-2022 жылдар аралығы, жалпы 23 жыл).

1. X және Y айнымалылары үшін μ_X және μ_Y орта мәндерін табу:

$$\mu_X = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} X_i = 160,702;$$

$$\mu_Y = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} Y_i = 9,026.$$

2. σ_X және σ_Y стандартты ауытқуларды есептеу:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} (X_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{26728,898}{23}} = 34,090;$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} (Y_i - \mu_Y)^2} = \sqrt{\frac{121,404}{23}} = 2,297.$$

3. X және Y мәндерін стандарттау әдісімен нормалау (Python бағдарламалау тілінің StandardScaler функциясы арқылы келесі формула бойынша есептеледі):

$$X_{standardized,i} = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X};$$

$X_{standardized,i} = [2,1525; 0,7477; 0,3977; 0,6834; 0,0383; 0,0104; -0,92; 0,5496; 0,9768; -1,615; -1,031; -0,319; -2,852; 1,026; -0,341; -0,194; 0,0167; 0,7312; -0,877; -0,006; 0,5928; 0,4938; -0,263];$

$$Y_{standardized,i} = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y};$$

$Y_{standardized,i} = [-0,055; 1,1638; -0,316; -0,447; -1,796; -0,882; 0,2063; -0,011; -2,188; 1,5991; -1,404; 1,5556; -1,404; -0,098; -0,316; 0,6415; 0,5545; 0,1192; 0,598; 0,3369; 1,2944; 0,0757; 0,7721].$

4. β_1 коэффициентін есептеу (жел бағыты белгісі бойынша β_1 коэффициенті):

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{23} (X_{standardized,i} \cdot Y_{standardized,i})}{\sum_{i=1}^{23} (X_{standardized,i}^2)} = \frac{0,338}{23} = 0,015.$$

Осылайша Linear Regression моделі бойынша машиналық оқыту барысында анықталған, бидай өнімділігіне әсер етуші маңызды белгілердің ішінен ақпан айындағы (2-ай) жел бағыты әсерінің бета-коэффициенті ($\beta_1 = 0,015$) алынды (3-кесте). Бета-коэффициенттері машиналық оқытуға арналған бағдарламалау кітапханаларындағы арнайы функциялар көмегімен есептеледі. Машиналық оқытумен модельдер құру барысында бағдарламаны құру кезеңдері мен әр модель әдістері бойынша параметрлердің ерекшеліктері мен маңыздылықтарын ескеру қажет.

Төменде келтірілген 3-кестедегі бидай өнімділігіне әсер етуші климаттық факторлардың сандық мәндері сызықтық регрессия үшін β коэффициенттері болып табылады, олар (1) арқылы есептеледі. Ridge Regression үшін (2) арқылы айыппұл қосатын L2-регуляризация қолданылып есептелсе, ал Lasso Regression моделінде (3) арқылы есептелінетін L1-регуляризациясы қолданылады. Lasso-регрессиясы мен Ridge-регрессиясының артықшылықтарын қолдана отырып, Elastic Net регрессиясы L1 мен L2-регуляризациялары арасындағы қатынасты икемді түрде (4) реттеу арқылы есептейді. Қалған модельдер үшін машиналық оқыту барысында Python бағдарламалау тілінің sclearn кітапханасындағы әр модельдің арнайы кіріктірілген функциялары қолданылады.

Әзірленген модельдер бойынша бидай өнімділігіне әсер ететін маңызды факторлар туралы қорытынды жасауға мүмкіндік беретін бета-коэффициенттер мен белгілердің маңыздылығы көрсеткіштерінің салыстырмалы кестесі (3-кесте) төменде берілген.

Кесте 3 – Машиналық оқыту модельдері бойынша бидай өнімділігіне әсер етуші климаттық факторлардың бета-коэффициенттері мен белгілер маңыздылығының салыстырмалы кестесі

Модель атауы	Бидай өнімділігіне әсер етуші факторлар														
	Орташа температура Temp_average	Максималды темп. Temp_max	Минималды темп. Temp_min	Максимал. жел жылд. WindSpeed_max	Жел бағытының орташа мәні WindDir_average	Жауын-шашын (сомалық) Precipitation_sum	Жауын-шашын (орташа) Precipitation_average	Жылдық жауын- шашын (орташа) Annual_Precipitation	Минималды ылғалдық Hum_min	Максималды ылғалдық	Орташа ылғалдық Hum_average	Макс.топырақ темп. SoilTemp_max	Мин.топырақ темп. SoilTemp_min	Топырақ темп. орташа мәні SoilTemp_average	Ылғал.жетіспеу. орташа мәні DefHum_average
LinearRegression					0,015 (2-ай) -0,015 (10-ай) -0,013 (8-ай) -0,010 (1-ай) -0,011 (5-ай)	0,026 (11-ай) 0,024 (6-ай)		0,0345	-0,015 (2-ай) 0,013 (12-ай)						
RidgeRegression					-0,015 (10-ай) -0,014 (1-ай) 0,014 (2-ай) -0,018 (9-ай) -0,012 (8-ай)	0,025 (6-ай) 0,024 (11-ай)		0,038	-0,018 (2-ай) 0,012 (12-ай)						
LassoRegression					-0,018 (9-ай) 0,016 (12-ай) -0,012 (1-ай)	0,008 (12-ай) 0,084 (11-ай) -0,021 (10-ай) 0,014 (6-ай) 0,025 (8-ай)		0,035	-0,021 (2-мес)						
ElasticNetRegression	-0,304 (8-ай)			0,156 (8-ай)		0,263 (11-ай)			0,397 (8-ай) -0,243 (2-ай) 0,136 (6-ай)	0,572 (6-ай)	-0,145 (8-ай)	-0,227 (7-ай)	-0,171 (7-ай)		
DecisionTreeRegressor		0,186 (2-ай)			0,721 (9-ай)										0,774 (7-ай) 0,039 (5-ай)
RandomForestRegressor	0,057 (8-ай)	0,056 (7-ай)					0,029 (3-ай)		0,045 (8-ай)			0,027 (8-ай)	0,043 (7-ай) 0,038 (7-ай) 0,029 (5-ай)	0,071 (7-ай) 0,024 (8-ай)	
GradientBoostingRegressor	0,026 (8-ай)	0,021 (2-ай)	0,028 (8-ай)								0,026 (8-ай) 0,009 (5-ай)		0,055 (2-ай) 0,031 (8-ай)	0,690 (7-ай) 0,023 (5-ай) 0,010 (8-ай)	
Extra TreesRegressor	0,043 (8-ай) 0,023 (2-ай)	0,034 (2-ай)			0,012 (5-ай)						0,036 (8-ай)		0,033 (2-ай) 0,013 (8-ай)	0,690 (7-ай) 0,019 (8-ай)	
Xgboost	0,422 (8-ай) 0,161 (2-ай) 0,004 (11-ай) 0,003 (6-ай)						0,0001 (3-ай)	0,002	0,0001 (8-ай)						0,407 (7-ай) 0,001 (1-ай)

● өте әлсіз байланыс 0-ден бастап 0,3-ке дейін ● әлсіз байланыс 0,3-тен бастап 0,5-ке дейін ● орташа байланыс 0,5-тен бастап 0,7-ге дейін ● жоғары байланыс 0,7-ден бастап 0,9-ға дейін ● өте жоғары байланыс 0,9-дан бастап 1,0-ге дейін

Нәтижесінде бидай өнімділігіне едәуір әсер етуші белгілер – шілдедегі ауа ылғалдылығының жетіспеушілігі 0,690-нан (Gradient Boosting Regressor шешім ағаштарының ансамблі мен Extra Trees Regressor) 0,774-ке дейін (Decision Tree Regressor), қыркүйек айындағы жел бағытының 0,721 көрсеткішімен (Decision Tree Regressor), маусымдағы максималды ылғалдылық 0,572 көрсеткішімен (Elastic Net Regression сызықтық әдісі) және тамыздағы ауа температурасы 0,422 көрсеткішімен (Xgboost) анықталды. Алынған нәтижелер бойынша, регрессиялық шешім ағашы (Decision Tree Regressor) моделі шілдедегі ауа ылғалдылығының тапшылығы (0,774) және қыркүйек айындағы желдің бағытының орташа мәнінің (0,721) бидай өнімділігі үшін ең маңызды факторлар болып табылатындығын дәлелдейді.

Decision Tree Regressor моделі бұны анық дәлелдейді және ең жоғарғы байланысты көрсетті. Шын мәнінде, Ақмола облысы бойынша шілдедегі ауа ылғалдылығының тапшылығы бидайдың вегетациялық кезеңінде едәуір ықпалын береді, сондай-ақ, қыркүйек айындағы

жел бағыты мен жылдамдығы бидай дәндерінің жерге құлауы есебінен оның өнімділігіне кері әсерін тигізеді. Егер жел қыркүйек айында болса және ол суық жел болған жағдайда, ылғалдың қайтарылуына әсері мол. Егер ыстық және құрғақ жел болса бұл тұқымдардың қатпарлығына әкелуі әбден мүмкін. Желдің жылдамдығы мен бағыты дақылды егу және химиялық өңдеу кезінде де маңызды орын алады. Әсер етуші фактор ретінде жауын-шашын, ылғалдылықтың мөлшері, ауа температурасының да бидай өнімділігіне тигізетін әсері мол. Жауын-шашынның жалпы мөлшерінің көрсеткіші бидай өнімділігі үшін маңызды климаттық факторлардың бірі болып саналады. Кейбір модельдерде есептеу барысында ескермеуімізге болмайтын және өте әлсіз байланысты көрсеткен факторлар да бар. Машиналық оқытумен болжамдық модельдерді құрудың келесі кезеңдерінде маңызды белгілер ретінде әлсіз байланыс көрсеткен кейбір белгілер деректер жиынынан тазартылады. Модельдердің болжамдарын келешекте кейбір қосымша сипаттамаларды және әсер етуші басқа да факторларды деректер жиынына қосу арқылы жақсартуға болады.

4. Қорытынды

Бұл зерттеуде Ақмола облысы, Ақкөл ауданының бидай өнімділігі бойынша деректер мен бидай өнімділігіне әсер етуші климаттық факторлардың метеодеректері негізінде құрылған модельдер нәтижесінде маңызды климаттық факторлар анықталды. Бидай өнімділігіне әсер етуші маңызды климаттық факторлардың сызықтық регрессия үшін бета-коэффициенттері және шешімдер ағашы мен бустинг үшін белгілер маңыздылығының көрсеткіштері ішінен ең жақсы нәтижелерді Decision Tree Regressor, Gradient Boosting Regressor, Extra Trees Regressor және Elastic Net Regression модельдері көрсетті. Decision Tree Regressor моделі маңызды фактор ретінде шілдедегі ылғалдылықтың жетіспеушілігі бойынша белгілер маңыздылығы көрсеткішінің ең жоғарғы 0,774 мәнін берсе, жел бағыты бойынша белгілер маңыздылығының көрсеткіші ретінде 0,721 мәнін берді. Gradient Boosting Regressor және Extra Trees Regressor модельдері шілдедегі ылғалдылықтың жетіспеушілігі бойынша белгілер маңыздылығы көрсеткішінің 0,690 орташа байланыс мәнін берді. Алынған нәтижелерден Elastic Net Regression моделі маусым айындағы максималды ылғалдылықтың коэффициенті ретінде 0,572 мәнін көрсетті. Сызықтық регрессияны, шешім ағаштарын және бустинг алгоритмдерін қоса алғанда, қарастырылған модельдердің ішінде орташа абсолютті пайыздық қателік (MAPE) көрсеткіші бойынша ең жақсы нәтижені Extra Trees Regressor моделі көрсетті. Extra Trees Regressor моделі бойынша MAPE 12,2% құрады, бұл басқа модельдерге қарағанда айтарлықтай төмен. Бұл климаттық факторларды ескере отырып, өнімділікті болжауда осы модельдің жоғары дәлдігін көрсетеді. Extra Trees Regressor моделінің жоғары дәлдігі оның сызықтық емес тәуелділіктер мен белгілер арасындағы өзара әрекеттесулерді тиімді өңдеу қабілетіне, сондай-ақ қайта оқытылуға төзімділігіне байланысты. Осы зерттеудің нәтижелері Extra Trees Regressor моделін пайдалану ауылшаруашылық жоспарлау мен шешім қабылдау үшін маңызды болып табылатын, өнімділікті болжау дәлдігін айтарлықтай жақсартатынын көрсетеді. Жазғы бидай өнімділігіне әсер ететін басқа да факторларға егжей-тегжейлі талдау жүргізу, сондай-ақ топырақ сапасы мен агротехникалық іс-шаралар сияқты қосымша деректерді қосу арқылы Extra Trees Regressor моделін одан әрі жақсарту жұмыстары алға қойылған. Алынған нәтижелер машиналық оқытумен болжамдық модельдер құрудың алғашқы маңызды міндеттері болып табылады және оқытудың келесі кезеңдеріне өтуге мүмкіндік береді.

Авторлар үлесі

Тәжібай Л.К. зерттеу жүргізу үшін деректерді қажетті форматқа өңдеді, бидай өнімділігіне әсер ететін маңызды факторларды анықтай отырып, болжамды деректерге талдау жүргізді және осы мақалада Linear Regression моделі үшін бета-коэффициенті мен орташа абсолютті пайыздық қатені анықтау бойынша есептеу мысалдарын келтірді, мақала мәтінін жазу, оның мазмұнын сыни тұрғыдан қайта қарау, жариялау үшін мақаланың соңғы нұсқасын бекіту бойынша жұмыстар жүргізді.

Мырзабекова Г. Е. бидай өнімділігін болжау үшін маңызды климаттық факторларды анықтаудың міндеттер қойылымын ұсынды және машиналық оқыту модельдерін әзірлеуге, мақала мәтінін жазу мен оның мазмұнын сыни тұрғыдан қайта қарауға үлес қосты.

Стыбаев Г. Ж. ауыл шаруашылығы ғылымдары саласындағы ғалым бола отырып, қажетті метеорологиялық деректерді ұсынды және алынған нәтижелерді түсіндіруге көмек көрсетті.

Муратова Г. К. деректерді алдын ала дайындауға, оның ішінде деректерді қалыпқа келтіруге үлес қосты.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Кошкарлов А. В., Кошкарлова Т. А. Технологии сбора и анализа данных в цифровом сельском хозяйстве: барьеры и условия для внедрения и использования // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. – 2018. – №5. – С. 100-104.
- 2 Заяц О.А., Назарова Ю.Н., Стрижакова Е.А., Пенькова Р.И. Технологии Big Data в сельском хозяйстве // Fundamental research. – 2022. – № 7 – С. 35-40.
- 3 Xu X., Gao P., Zhu X., Guo W., Ding J., Li C., Wu X. Design of an integrated climatic assessment indicator (ICAI) for wheat production: a case study in Jiangsu Province, China // Ecological Indicators. – 2019. – Vol. 101. – P. 943-953.
- 4 Alpaydin E. Introduction to Machine Learning. // The MIT Press. Cambridge.– 2014. 3rd edition. p. 3-4. [Electronic resource]. URL: [https://dl.matlabyar.com/siavash/ML/Book/Ethem%20Alpaydin-Introduction%20to%20Machine%20Learning-The%20MIT%20Press%20\(2014\).pdf](https://dl.matlabyar.com/siavash/ML/Book/Ethem%20Alpaydin-Introduction%20to%20Machine%20Learning-The%20MIT%20Press%20(2014).pdf) (Accessed: 20.02.2024).
- 5 Van K. T., Kassahun A., Catal C. Crop yield prediction using machine learning: A systematic literature review // Computers and Electronics in Agriculture. – 2020. - Vol. 177. – P. 105709. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compag.2020.105709>.
- 6 Китов В. Практические аспекты машинного обучения // Открытые системы. СУБД. – 2016 №1 [Электронды ресурс]. URL: <https://www.osp.ru/os/2016/01/13048648> (жүгінген күн: 20.02.2024).
- 7 Тәжібай Л.К., Мырзабекова Г.Е. Ауыл шаруашылығындағы Data Mining технологиялары // М.А.Гендельманның 110 жылдығына арналған «Сейфуллин оқулары-19» халықаралық ғылыми-практикалық конференция материалдары. –2023. –Т.І, Б.ІІІ. –137-141 б.
- 8 Crane-Droesch A. Machine learning methods for crop yield prediction and climate change impact assessment in agriculture // Environmental Research Letters – 2018. – Vol.13, №11. – P. 1748-9326. DOI: <https://dx.doi.org/10.1088/1748-9326/aae159>.
- 9 Elbasi E., Zaki C., Topcu AE., Abdelbaki W., Zreikat AI., Cina E., Shdefat A., Saker L. Crop Prediction Model Using Machine Learning Algorithms // Applied Sciences. – 2023. – 13(16) – P. 9288. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13169288>.
- 10 Gajula A., Singamsetty J., Dodda V., Kuruguntla L. Prediction of crop and yield in agriculture using machine learning technique // 12th International Conference on Computing Communication and Networking Technologies (ICCCNT). – 2021. – P.1-5. DOI: 10.1109/ICCCNT51525.2021.9579843.
- 11 Tussupov J., Yessenova M., Abdikerimova G., Aimbetov A., Baktybekov K., Murzabekova G., Aitimova U. Analysis of Formal Concepts for Verification of Pests and Diseases of Crops Using Machine Learning Methods // IEEE Access – 2024. – Vol.12. – P. 19902–19910.
- 12 Yessenova M., Abdikerimova G., Ayazbaev T., Ismailova A., Beldeubayeva Z., Ainagulova A., Mukhanova A. The effectiveness of methods and algorithms for detecting and isolating factors that negatively affect the growth of crops // International Journal of Electrical and Computer Engineering. —2003. – Vol. 13, № 2. – P. 1669-1679. DOI: 10.11591/ijece.v13i2.
- 13 Куценогий П.К., Каличкин В.К., Пакуль А.Л., Куценогий С.П. Машинное обучение в качестве инструмента прогнозирования урожайности сельскохозяйственных культур// Российская сельскохозяйственная наука. – 2021. – № 1. – С. 72-75. DOI: 10.31857/S2500262721010178
- 14 Архипова М. Ю. Моделирование урожайности зерновых культур сельскохозяйственных регионов с использованием технологий компьютерного зрения // Экономика региона. – 2022. – Т. 18, вып. 2. – С. 581-594. DOI: <https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2022-2-20>.
- 15 Акшалов К.А. Высокоэффективные технологии возделывания зерновых культур в полузасушливых условиях Северного Казахстана //Методические рекомендации. – 2009. – 57 С.
- 16 Erenstein O., Jaleta M., Abdul Mottaleb K., Sonder K., Donovan J., Braun H.-J. Global Trends in Wheat Production, Consumption and Trade // Wheat Improvement: Food Security in a Changing Climate. –2022. –P. 47 – 66.
- 17 Zachow M., Nóia Júnior, Rogério de S., Asseng S. Seasonal climate models for national wheat yield forecasts in Brazil // Agricultural and Forest Meteorology. – 2023. – Vol. 342. – P.109753-109767.

Л.К. Тажибай¹, Г.Е. Мурзабекова², Г.Ж. Стыбаев³, Г.К. Муратова⁴
Казахский агротехнический исследовательский университет имени С. Сейфуллина,
пр. Женис 62, г. Астана, Казахстан

Модель определения климатических факторов, влияющих на урожайность пшеницы, с помощью машинного обучения

Аннотация. Определения важных климатических факторов для прогнозирования урожайности пшеницы позволяет разработать эффективные стратегии адаптации для растениеводства в сельском хозяйстве. Это помогает минимизировать негативные последствия климатических изменений в производстве пшеницы. Целью данного исследования является разработка моделей машинного обучения, таких как линейные модели, деревья решений и бустинговые модели, для определения климатических факторов, влияющих на урожайность пшеницы. Исследование основано на данных по урожайности пшеницы и метеоданных Аккольского района Акмолинской области за 2000-2022 годы, включая температуру воздуха, влажность, осадки, скорость и направление ветра, температуру поверхности почвы и дефицита влажности воздуха. В этой статье для разработки прогностических моделей были использованы шесть линейных моделей машинного обучения Linear Regression, Ridge Regression, Lasso Regression, Elastic Net Regression, SVR, Gaussian Process Regressor, четыре модели деревьев решений Decision Tree Regressor, Random Forest Regressor, Gradient Boosting Regressor, Extra Trees Regressor и две модели бустинга LGBM регрессор, Xgboost. В результате были выявлены признаки, существенно влияющие на урожайность пшеницы, среди которых дефицит влажности воздуха в июле, максимальная влажность в июне и температура воздуха в августе. Лучшие результаты показали модели деревьев решений. Полученные данные были интерпретированы и могут использоваться при принятии хозяйственных решений в сельскохозяйственных структурах.

Ключевые слова: машинное обучение, прогностическая модель, важность признаков, интеллектуальный анализ, принятие решений.

L.K. Tazhibay¹, G.Y. Murzabekova², G. Zh. Stybayev³, G.K. Muratova⁴
Seifullin Kazakh Agrotechnical Research University, Zhenis ave. 62, Astana, Kazakhstan

Model for determining climatic factors affecting wheat productivity by machine learning

Abstract. Determining important climatic factors for predicting wheat yield allows the development of effective adaptation strategies for crop production in agriculture. This helps minimize the negative impacts of climate change on wheat production. The objective of this research is to develop machine learning models such as linear models, decision trees and boosting models to identify climate factors affecting wheat yield. The study is based on wheat yield data and weather data from the Akkol district of the Akmola region for the period 2000-2022. This includes data on air temperature, humidity, precipitation, wind speed and direction, soil surface temperature and air humidity deficit. In this article, six linear machine learning models were used to develop predictive models: Linear Regression, Ridge Regression, Lasso Regression, Elastic Net Regression, SVR, Gaussian Process Regressor, four decision tree models Decision Tree Regressor, Random Forest Regressor, Gradient Boosting Regressor, Extra Trees Regressor and two boosting models LGBM regressor, Xgboost. As a result, signs were identified that significantly affect wheat yield. These findings included a deficit of air humidity in July, maximum humidity in June and air temperature in August. Decision tree models showed the best results. The data obtained were interpreted and can be used to inform business decisions in agricultural structures.

Key words: machine learning, predictive model, feature importance, predictive analysis, decision making.

References

- 1 Koshkarov A. V., Koshkarova T. A. Tekhnologii sbora i analiza dannyh v cifrovom sel'skom hozyajstve: bar'ery i usloviya dlya vnedreniya i ispol'zovaniya. [Koshkarov A.V., Koshkarova T.A. Technologies for collecting and analyzing data in digital agriculture: barriers and conditions for implementation and use], *Sovremennaya nauka: aktual'nye problemy teorii i praktiki. Seriya: Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki* [Modern science: current problems of theory and practice. Series: Natural and Technical Sciences]. 2018. №05. P. 100-104.
- 2 Zayac O.A., Nazarova YU.N., Strizhakova E.A., Pen'kova R.I. Tekhnologii Big Data v sel'skom hozyajstve. [Zayats O.A., Nazarova Yu.N., Strizhakova E.A., Penkova R.I. Big Data technologies in agriculture], *Fundamental research*. 2022. №7. P. 35-40.
- 3 Xu X., Gao P., Zhu X., Guo W., Ding J., Li C., Wu X. Design of an integrated climatic assessment indicator (ICAI) for wheat production: a case study in Jiangsu Province, China, *Ecological Indicators*. 2019. Vol. 101. P. 943-953.
- 4 Alpaydin E. Introduction to Machine Learning, The MIT Press. Cambridge. 2014. 3rd edition. p. 3-4. [Electronic resource]. URL: [https://dl.matlabyar.com/siavash/ML/Book/Ethem%20Alpaydin-Introduction%20to%20Machine%20Learning-The%20MIT%20Press%20\(2014\).pdf](https://dl.matlabyar.com/siavash/ML/Book/Ethem%20Alpaydin-Introduction%20to%20Machine%20Learning-The%20MIT%20Press%20(2014).pdf) (Accessed: 20.02.2024).
- 5 Van K. T., Kassahun A., Catal C. Crop yield prediction using machine learning: A systematic literature review, *Computers and Electronics in Agriculture*. 2020. Vol. 177. P. 105709. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compag.2020.105709>.
- 6 Kitov V. Prakticheskie aspekty mashinnogo obucheniya [Kitov V. Practical aspects of machine learning], *Otkrytye sistemy. SUBD [Open systems. DBMS]*. №01. 2016. [Electronic resource]. URL: (<https://www.osp.ru/os/2016/01/13048648>).

- 7 Tazhibaj L.K., Myrzabekova G.E. Auyly sharuashylygyndagy Data Mining tekhnologiyalary [Tazhibaj L.K., Myrzabekova G.E. Data Mining technologies in agriculture], M.A. Gendel'mannyn 110 zhyldygyna arnalgan «Sejfullin okulary-19» halykaralyk gylymi-praktikalyk konferenciya materialdary [Proceedings of the international scientific and practical conference "Seifullin readings-19" dedicated to the 110th anniversary of M.A. Handelman]. 2023. T.I, B.III. 137-141 b.
- 8 Crane-Droesch A. Machine learning methods for crop yield prediction and climate change impact assessment in agriculture, Environmental Research Letters 2018. Vol.13, №11. P. 1748-9326. DOI: <https://dx.doi.org/10.1088/1748-9326/aae159>.
- 9 Elbasi E., Zaki C., Topcu AE., Abdelbaki W., Zreikat AI., Cina E., Shdefat A., Saker L. Crop Prediction Model Using Machine Learning Algorithms, Applied Sciences. 2023. Vol. 13, №16. P. 9288. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13169288>.
- 10 Gajula A., Singamsetty J., Dodda V., Kuruguntla L. Prediction of crop and yield in agriculture using machine learning technique, 12th International Conference on Computing Communication and Networking Technologies (ICCCNT). 2021. P.1-5. DOI: 10.1109/ICCCNT51525.2021.9579843.
- 11 Tussupov J., Yessenova M., Abdikerimova G., Aimbetov A., Baktybekov K., Murzabekova G., Aitimova U. Analysis of Formal Concepts for Verification of Pests and Diseases of Crops Using Machine Learning Methods, IEEE Access. 2024. Vol.12. P. 19902-19910.
- 12 Yessenova M., Abdikerimova G., Ayazbaev T., Ismailova A., Beldeubayeva Z., Ainagulova A., Mukhanova A. The effectiveness of methods and algorithms for detecting and isolating factors that negatively affect the growth of crops, International Journal of Electrical and Computer Engineering. 2003. Vol. 13, №2. P. 1669-1679. DOI: 10.11591/ijece.v13i2.
- 13 Kucenogij P.K., Kalichkin V.K., Pakul' A.L., Kucenogij S.P. Mashinnoe obuchenie v kachestve instrumenta prognozirovaniya urozhajnosti sel'skohozyajstvennyh kul'tur. [Kutsenogij P.K., Kalichkin V.K., Pakul A.L., Kutsenogij S.P. Machine learning as a tool for crop yield forecasting], Rossijskaya sel'skohozyajstvennaya nauka. [Russian agricultural science]. 2021.№1. P. 72-75. DOI: 10.31857/S2500262721010178
- 14 Arhipova M. YU. Modelirovanie urozhajnosti zernovyh kul'tur sel'skohozyajstvennyh regionov s ispol'zovaniem tekhnologij komp'yuternogo zreniya. [Arhipova M. Yu. Modeling the yield of grain crops in agricultural regions using computer vision technologies], Ekonomika regiona.[Economy of the region]. 2022. Vol. Is. 18, vyp. 2. P. 581-594. DOI: <https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2022-2-20>.
- 15 Akshalov K.A. Vysokoeffektivnye tekhnologii vozdel'yvaniya zernovyh kul'tur v poluzasushlivykh usloviyah Severnogo Kazakhstana. [Akshalov K.A. Highly efficient technologies for cultivating grain crops in semi-arid conditions of Northern Kazakhstan], Metodicheskie rekomendacii. [Guidelines]. 2009. 57p.
- 16 Erenstein O., Jaleta M., Abdul Mottaleb K., Sonder K., Donovan J., Braun H.-J. Global Trends in Wheat Production, Consumption and Trade, Wheat Improvement: Food Security in a Changing Climate. 2022. P. 47 – 66.
- 17 Zachow M., N6ia J6nior, Rog6rio de S., Asseng S. Seasonal climate models for national wheat yield forecasts in Brazil, Agricultural and Forest Meteorology. 2023. Vol. 342. P.109753-109767.

Авторлар туралы мәліметтер:

Тәжібай Ләззат Каналбайқызы – байланыс үшін автор, докторант, С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті, Жеңіс даңғылы 62, Астана, Қазақстан.

Мырзабекова Гүлден Еслямбековна – ф.-м.ғ.к., доцент, С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті, Жеңіс даңғылы 62, Астана, Қазақстан.

Стыбаев Ғани Жасымбекұлы – а.-ш.ғ.к., профессор, С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті, Жеңіс даңғылы 62, Астана, Қазақстан.

Муратова Гульжан Клычовна – т.ғ.к., қауымдастырылған профессор м.а., С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық зерттеу университеті, Жеңіс даңғылы 62, Астана, Қазақстан

Information about authors:

Tazhibay Lazzat Kanalbaykizi –corresponding author, PhD student, S. Seifullin Kazakh Agrotechnical Research University, Zhenis ave. 62, Astana, Kazakhstan.

Murzabekova Gulden Yeslyambekovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, S. Seifullin Kazakh Agrotechnical Research University, Zhenis ave. 62, Astana, Kazakhstan.



Stybayev Gani Zhasymbekovich - Candidate of Agricultural Sciences, Professor, S. Seifullin Kazakh Agrotechnical Research University, Zhenis ave. 62, Astana, Kazakhstan.

Muratova Gulzhan Klychovna – Candidate of Technical Sciences, acting Associate Professor, S. Seifullin Kazakh Agrotechnical Research University, Zhenis ave. 62, Astana, Kazakhstan.

*Қабылданған күні: 29.03.2024. Өңдеуден кейін: 29.05.2024. Қайта өңдеуден кейін: 29.06.2024.
Мақұлданған күні: 29.06.2024. Онлайн қолжетімді: 30.06.2024.*

МРНТИ: 30.17.19

ИССЛЕДОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТОЛБА ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ¹

З.З. Мамаева ¹, Д.А. Насырова ²

^{1,2} *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук, пр. Октября, 71, Уфа, 450054, Россия*
(E-mail: ¹ zilia16@mail.ru, ² dinasyrova@mail.ru)

Аннотация. Проанализированы собственные колебания столба жидкости в нефтяной вертикальной скважине, вызванные резкой остановкой насосов (гидроударе). Отметим, что волновые параметры колебаний зависят от физико-химических свойств закачиваемой жидкости, плотности, пористости, проницаемости коллектора и характеристик трещины гидравлического разрыва пласта. На основе теоретической модели, которая описывает движение жидкости в скважине со свободной верхней границей и фильтрацию жидкости в призабойной зоне с гидроразрывом пласта, найдены аналитические решения задачи о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. При этом учтены начальные и граничные условия процесса. Получены выражения для нахождения изменения давления и скорости жидкости в скважине. Выведено характеристическое уравнение для нахождения волновых параметров собственных частот (частоты, периода, коэффициента и декремента затухания). Исследовано влияние проницаемости породы и проводимости трещины гидроразрыва на частоту колебаний, коэффициент затухания и декремент затухания колебаний давления. Рассмотрена динамика давления в середине и на забое скважины в случаях отсутствия и наличия трещины гидравлического разрыва пласта. Проведено сравнение данных характеристик для жидкостей с различной плотностью, а именно для нефти и воды.

Ключевые слова: собственные колебания, гидроразрыв пласта, собственные частоты, гидроудар, нефть, вертикальная скважина, фильтрация жидкости, колебания жидкости.

DOI: <https://doi.org/10.32523/3007-0155/bulmathenu.2024/2.3>

2000 Mathematics Subject Classification: 76S05

1. Введение

Добыча нефти — сложный и наукоемкий процесс, который непрерывно модернизируется и совершенствуется как в практической, так и в теоретической областях. В настоящее время одной из проблем нефтегазодобывающей отрасли является поддержание уровня добычи нефти на фоне истощения залежей с традиционными запасами и вовлечения в разработку трудноизвлекаемых запасов углеводородов. В этих условиях широкое применение получили геолого-технологические мероприятия по интенсификации добычи нефти, наиболее эффективным из них считается гидравлический разрыв пласта (ГРП). ГРП — это метод интенсификации работы скважин, приводящих к кардинальному изменению ее дебита [1].

¹Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001)

Полученные в следствие ГРП трещины расположены на большой глубине, в связи с этим возникают задачи определения ее параметров и коллекторских характеристик. Многие авторы изучают влияние трещины ГРП на работу скважины, изменение фильтрационных характеристик на забое, прирост добычи нефти.

Хабибуллин И.Л. и Хисамов А.А. [2, 3, 4] в своих работах решали задачи нестационарной фильтрации в системе «пласт-трещина ГРП». Авторы пришли к выводу, что наличие трещины ГРП влияет на зависимость давления, скорость фильтрации от фильтрационных характеристик системы. Авторы построили и провели анализ аналитических решений данной задачи. Было изучено влияние длины трещины на количественные характеристики процесса.

Шагапов В.Ш. и Нагаева З.М. в [5] представили исследования нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной ГРП. Фильтрационные процессы в трещине описаны с использованием классической модели радиальной фильтрации. Получены точные решения, с их помощью проведен анализ коллекторских свойств пласта и трещины гидроразрыва. Проанализировано влияние реологических свойств насыщающей жидкости или газа на изменения давления в трещине.

В [6] решена задача о притоке нефти из породы в трещину ГРП и получены достаточно простые аналитические формулы методом последовательной смены стационарных состояний. На основе полученных формул проведен численный анализ и установлены зависимости динамики давления в трещине ГРП, дебита скважины в режиме постоянного перепада давления от физических свойств жидкости, пористости, проницаемости породы и геометрии трещины. Также изучены данные зависимости при постоянном дебите скважины.

Задача о выходе процесса функционирования скважины на стационарный режим при постоянном перепаде давления между забойным и пластовыми значениями, а также при постоянном дебите решена [7]. Построены точные и приближенные аналитические решения, которые описывают фильтрацию флюида «скважина-трещина ГРП-пласт». Выведены формулы, аналогичные формулам Дюпюи, определяющим дебит скважины. Проанализировано влияние физических и геометрических свойств трещины ГРП, пласта и реологических свойств жидкости на периоды, за которые колебания давления от скважины проникают во всю трещину ГРП.

Авторами [8] исследован гидравлический удар, возникший при завершении процесса гидравлического разрыва пласта. Проведено численное моделирование рассматриваемого процесса на основе уравнений сохранения массы и импульсов. В результате анализа полученных численных результатов было показано, что трещина ГРП влияет на амплитуду, период и продолжительность сигнала гидроудара. Исследователи отмечают, что диагностика трещин гидроударом дает важную информацию о созданной трещине, такую как длина, ширина и высота.

Исследование [9] основано на анализе высокочастотной обработки данных более 100 скважин с горизонтальными ГРП трещинами. Данные были получены, собраны, и проанализированы с помощью нового программного обеспечения для управления данными гидравлического разрыва, которые могут быть использованы для обнаружения и оценки гидроудара. При анализе авторами установлено, что гидроудар влияет на всю систему «скважина-трещина ГРП-пласт». Замечено сильное воздействие трения в скважине на амплитуду сигнала, что может быть полезной информацией при оценивании соединения ствола скважины, начала трещины ГРП и ее местоположения. Авторы отмечают существенное влияние закачиваемой жидкости на сигнал гидроудара.

Влияние сигнала гидроудара на работу скважин, оценку коллекторов и трещин ГРП проанализировано также в работах [10, 11, 12, 13], где гидроудар рассматривается как диагностирующий фактор и как разрушающий.

В работах [14, 15] изучены собственные затухающие колебания столба жидкости в скважине в случае, что ее верхний конец закрыт неподвижной крышкой. Также в этих работах учитываются фильтрационные течения в призабойной зоне, а призабойная зона – это однородная, пористая, проницаемая среда.

В данной статье рассматривается расширенная задача. Предполагаем, что в скважине проведен гидравлический разрыв пласта, имеется вертикальная трещина ГРП. Также, полагаем, что верхняя граница столба жидкости в скважине открыта, значение давления на этой границе можно считать постоянным. Это условие приводит к другим граничным условиям на верхней границе жидкости в скважине, по сравнению с отмеченными работами. С учетом новых факторов проанализированы собственные колебания столба жидкости с учетом фильтрационных течений через проницаемые стенки забойного участка скважины и по вертикальной трещине ГРП на этом участке. Изучены зависимости частоты, коэффициента затухания колебаний давления от значений проницаемости пласта и трещины ГРП. Трещина, образовавшаяся в результате гидроразрыва пласта (ГРП), может влиять на характеристики собственных колебаний низкопроницаемого пласта. Это может привести к изменениям в процессе добычи нефти и газа, а также повлиять на охват пласта воздействием и нефтеотдачей.

2. Основные уравнения

При моделировании процесса движения жидкости в системе «скважина-трещина ГРП-пласт» в начальный момент времени будем полагать следующее: жидкость находится в покое; протяженность столба жидкости в закрытой части скважины l намного больше длины открытого участка l_p ($l \gg l_p$); ось Oz направлена вертикально вниз и начало ее координат совпадает с верхней границей столба жидкости. D_1 , D_2 – мнимые датчики на забое и в середине скважины. Схема вертикальной скважины показана на рисунке 1.

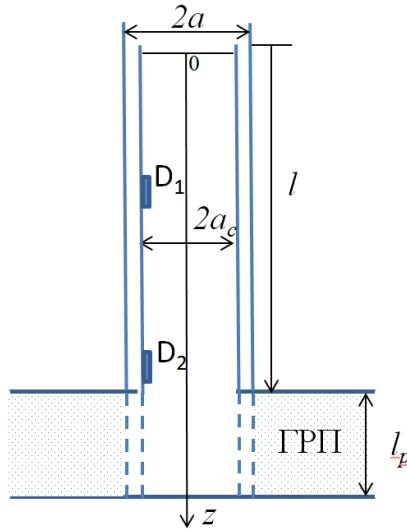


Рисунок 1 – Схема обсаженной скважины, сообщающейся с пластом

Запишем основные уравнения для моделирования процесса движения жидкости в системе «скважина-трещина ГРП-пласт»:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2\sigma}{a_c} \quad (0 < z < l), \quad (1)$$

$$\sigma = \mu \int_{-\infty}^t \frac{\partial w / \partial \tau}{\sqrt{\pi \nu (t - \tau)}} d\tau, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad \rho = \frac{P}{C^2},$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \chi_p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_p}{\partial r} \right) \quad (l < z < l + l_p, \quad a < r < \infty), \quad \chi_p = \frac{k_p \rho_0 C^2}{m_p \mu}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} = \chi_f \int_{-\infty}^t \frac{\partial P_f / \partial \tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau, \quad \chi_f = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\sqrt{\chi_p}}{\chi_f} \quad (l < z < l + l_p, \quad 0 < x < \infty), \quad (3)$$

$$\pi a^2 l_p \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = \pi a_c^2 \rho_0 w^{(l)} - 2\pi a l_p \rho_0 u_{pa} - 2d_f l_p \rho_0 u_{f0}. \quad (4)$$

В систему уравнений (1)-(4) входят уравнение неразрывности и уравнение сохранения импульсов для жидкости в скважине (1) для возмущений плотности ρ , давления P и скорости w в линеаризованном приближении, основное уравнение упругого режима фильтрации в пласте (2) вокруг скважины и в трещине (3) и уравнение сохранения массы в призабойной зоне пласта (4). Здесь σ — касательное напряжение в жидкости на поверхности стенки скважины, μ и ν — динамическая и кинематическая вязкости жидкости, C — скорость звука в жидкости, χ_p и χ_f — коэффициенты пьезопроводности в областях пласта и трещины, k_p — проницаемость пласта, m_p — пористость пласта, a_c — радиус скважины, r — расстояние от оси скважины, a — внешний радиус скважины, u_{pa}, u_{f0} — скорость фильтрации жидкости в окружающую проницаемую горную породу через стенку открытого участка скважины и в трещину шириной d_f , образовавшейся при ГРП. Нижний индекс 0 означает начальное значение параметра.

Запишем граничные условия для уравнений (1), (2) и (3) соответственно:

$$z = 0 : P(0, t) = 0, \quad w(0, t) = 0; \quad z = l : P(l, t) = P^{(l)}(t), \quad w(l, t) = w^{(l)}(t), \quad (5)$$

$$P_p|_{r=a} = P^{(l)}, \quad P_p|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (6)$$

$$P_f|_{x=0} = P^{(l)}, \quad P_f|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Нижний индекс p указывает, что значения параметров относятся к пласту, нижний индекс f означает, что параметр относится к трещине. По закону Дарси вычисляется скорость фильтрации:

$$u_{pa} = u_p|_{r=a} = -\frac{k_p}{\mu} \left(\frac{\partial P_p}{\partial r} \right)_{|r=a}, \quad u_{f0} = u_f|_{x=0} = -\frac{k_f}{\mu} \left(\frac{\partial P_f}{\partial x} \right)_{|x=0}.$$

Подставляя выражения скорости фильтрации в (4) получим:

$$\frac{1}{\rho_0 C^2} \cdot \frac{\partial P^{(l)}}{\partial t} = \left(\frac{a_c}{c} \right)^2 \frac{w^{(l)}}{l_p} + \frac{2k_p}{a\mu} \left(\frac{\partial P_p}{\partial r} \right)_{|r=a} + \frac{2d_f k_f}{\pi a^2 \mu} \left(\frac{\partial P_f}{\partial x} \right)_{|x=0}. \quad (8)$$

3. Решение уравнений в виде стоячих волн

С помощью представленных уравнений будем решать задачу о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. Решение уравнений (1) будем искать в виде стоячих волн:

$$P = A^{(P)}(z)e^{i\omega t}, \quad w = A^{(w)}(z)e^{i\omega t}, \quad (9)$$

где $\omega = \Omega + i\delta$ — комплексная частота собственных колебаний. Действительная часть Ω отвечает за период колебаний $T = 2\pi/\Omega$, мнимая часть δ отвечает за интенсивность затухания.

Подставляя (9) в систему (1) после преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{\rho_0 C^2} A^{(P)} + \frac{d}{dz} A^{(w)} &= 0, \\ \frac{1}{\rho_0 i\omega(1+2/y)} \frac{d}{dz} A^{(P)} + A^{(w)} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $y = (i\omega a_c^2/\nu)^{1/2}$.

Находим решение системы (10) в виде

$$A^{(P)} = c \sin(Kz), \quad A^{(w)} = i \frac{c}{\rho_0} \frac{K \cos(Kz)}{\omega(1+2/y)} \quad (c = c_1), \quad (11)$$

где $K^2 = (1+2/y)\omega^2/C^2$.

Отсюда следует, что при $z = l$ для закона изменения $P^{(l)}$ и $w^{(l)}$ находим

$$P^{(l)} = P|_{z=l} = A^{(P)}(l)e^{i\omega t} = c \sin(Kl)e^{i\omega t},$$

$$w^{(l)} = w|_{z=l} = A^{(w)}(l)e^{i\omega t} = i \frac{c}{\rho_0} \frac{K \cos(Kl)}{\omega(1+2/y)} e^{i\omega t}.$$

Чтобы вычислить градиент давления на стенке открытого участка скважины решаем уравнения (2) и (3), которые соответствуют граничным условиям

$$P_p|_{r=a} = P_f|_{x=0} = P^{(l)} = c \sin(Kl)e^{i\omega t}, \quad p_p \rightarrow 0 \text{ и } P_f \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty \text{ и } x \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Решения ищем в виде

$$P_p = A_p^{(P)}(r)e^{i\omega t}, \quad P_f = A_f^{(P)}(x)e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (2) и (3) получим

$$q_p^2 A_p^{(P)}(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} A_p^{(P)}(r) \right), \quad \lambda_f^2 A_f^{(P)}(x) = \frac{d^2 A_f^{(P)}(x)}{dx^2}, \quad (14)$$

$$q_p = \sqrt{i\omega/\chi_p}, \quad \lambda_f^2 = \chi_f \sqrt{i\omega}.$$

Решения уравнений (14), удовлетворяющие граничным условиям (12) запишутся как

$$A_p^{(P)}(r) = A_p^{(P)}(l) \frac{K_0(rq_p)}{K_0(aq_p)}, \quad A_f^{(P)} = A_p^{(P)} e^{-\lambda_f x}. \quad (15)$$

Здесь $K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi$ — функция Макдональда нулевого порядка, $\lambda_f^2 = \chi_f \sqrt{i\omega}$.

Подставляя выражения (13) с учетом (15) в (8) получим следующее характеристическое уравнение для определения ω

$$\operatorname{ctg}(Kl) = \left(\frac{a}{a_c} \right)^2 Kl_p \left(\frac{2m_p K_1(z_p)}{z_p K_0(z_p)} + \frac{2m_f d_f \lambda_f}{\pi z_f^2} + 1 \right), \quad (16)$$

$$z_p = a \sqrt{i\omega/\chi_p}, \quad z_f = a \sqrt{i\omega/\chi_f},$$

с учетом того, что $dK_0(z)/dz = -K_1(z)$, где $K_1(z)$ — функция Макдональда первого порядка.

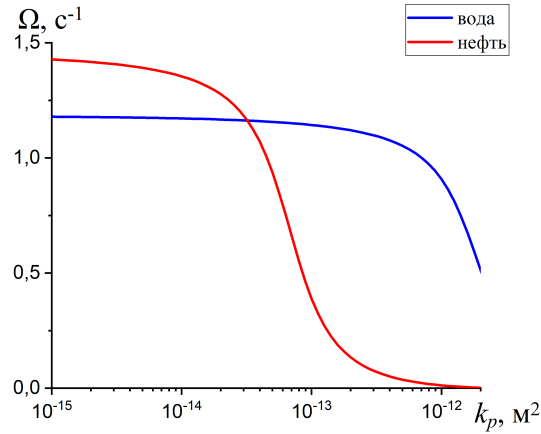
4. Численные результаты

Решение для закона изменения давления в скважине согласно (9), (10) определено с точностью до произвольного постоянного множителя c , т.е. распределение давления нормировано относительно значения $z = 0$ и вместо P будем использовать нормированное значение $P/A_p^{(P)}(0)$ при $c = 1$, тогда: $P = \sin(Kz)e^{i\omega t}$.

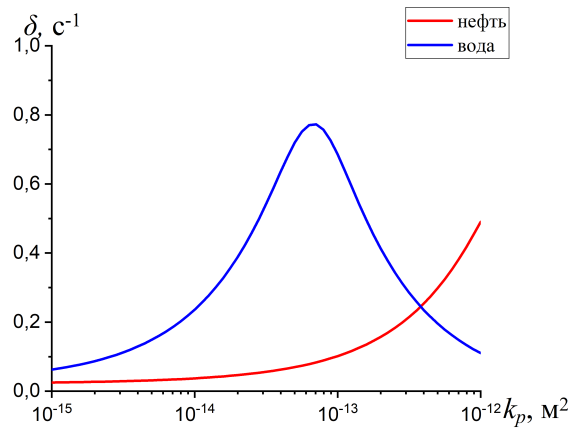
Численные расчеты проводились в предположении, что система заполнена нефтью или водой. Параметры воды: $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $C = 1500$ м/с, $\mu = 10^{-3}$ Па·с. Параметры нефти: $\rho_0 = 890$ кг/м³, $C = 20 \cdot 10^3$ м/с, $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Па·с. Для скважины, трещины и пласта принято: $l = 2600$ м, $l_p = 20$ м, $m_p = 10^{-1}$, $m_f = 2 \cdot 10^{-1}$, $a_c = 3.5 \cdot 10^{-2}$ м, $a = 7.75 \cdot 10^{-2}$ м и $k_p = 10^{-15}$ м². Проводимость трещины ГРП $C_f = d_f \cdot k_f$.

Перейдем к описанию графиков зависимостей параметров пласта и трещины от частотных характеристик. На рисунке 2 представлены графики зависимостей собственной частоты Ω , коэффициента затухания δ , а также декремента затухания, определяемого, как $\Delta = (2\pi/\Omega)\delta$ от проницаемости пласта k_p в случае отсутствия трещины ГРП. Собственная частота

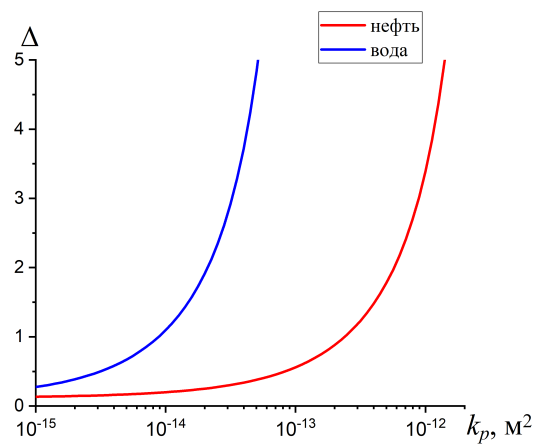
колебаний монотонно снижается с увеличением проницаемости пласта в независимости от закачиваемой жидкости. В пласте как с низкой, так и высокой проницаемостью частота колебаний воды примерно в 1,5 раза выше колебаний нефти. Коэффициент затухания для нефти возрастает с увеличением проницаемости пласта, для воды показана немонотонная зависимость. Декремент затухания увеличивается с ростом проницаемости пласта независимо от закачиваемой жидкости.



(а)



(б)



(в)

Рисунок 2 – Зависимости собственной частоты (а), коэффициента затухания (б), декремента затухания (в) от проницаемости пласта в случае отсутствия трещины ГРП

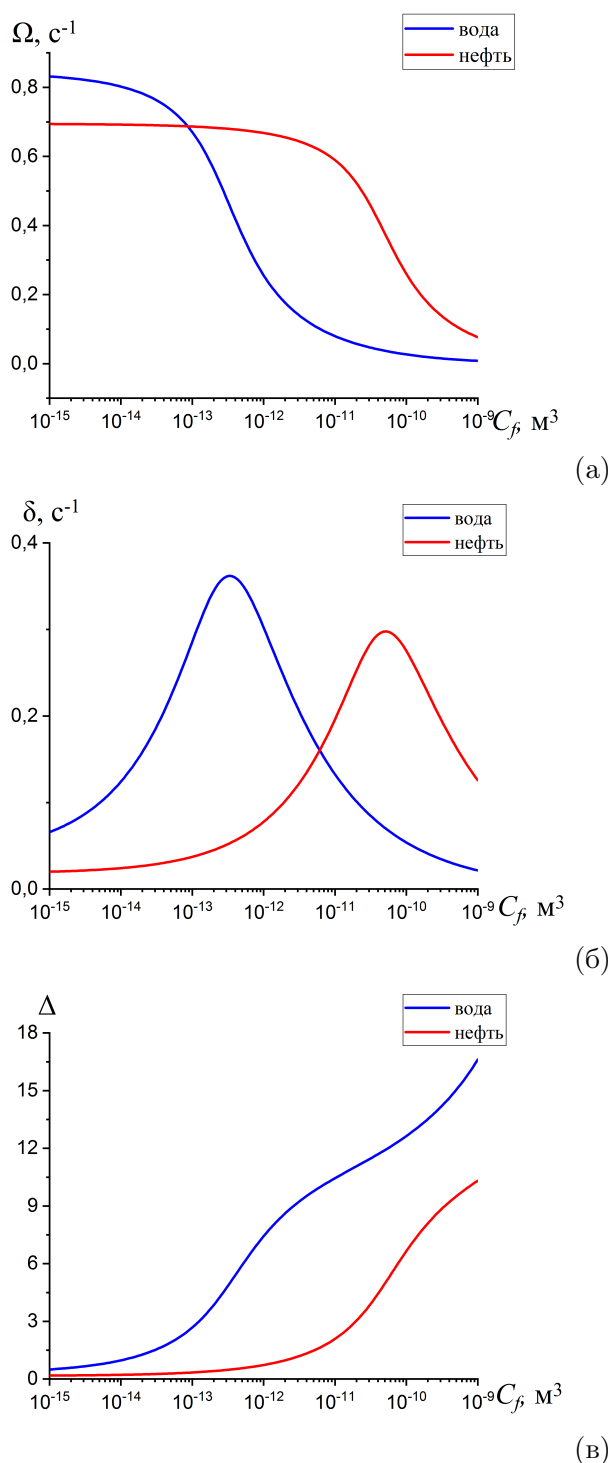


Рисунок 3 – Зависимость собственной частоты (а), коэффициента затухания (б), декремента затухания (в) от коэффициента проводимости в случае трещины ГРП

На рисунке 3 представлены графики зависимостей собственной частоты, коэффициента затухания, декремента затухания от проводимости трещины ГРП ($k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$). На рисунке 3(а) частота колебаний монотонно снижается с увеличением проводимости трещины. При наличии трещины ГРП собственная частота колебаний воды снижается заметно быстрее, чем колебания нефти. В отличие от случая без ГРП трещины (рисунок 2(а)) колебания имеют более низкие частоты. Заметим, что коэффициент затухания на рисунке 3(б) имеет

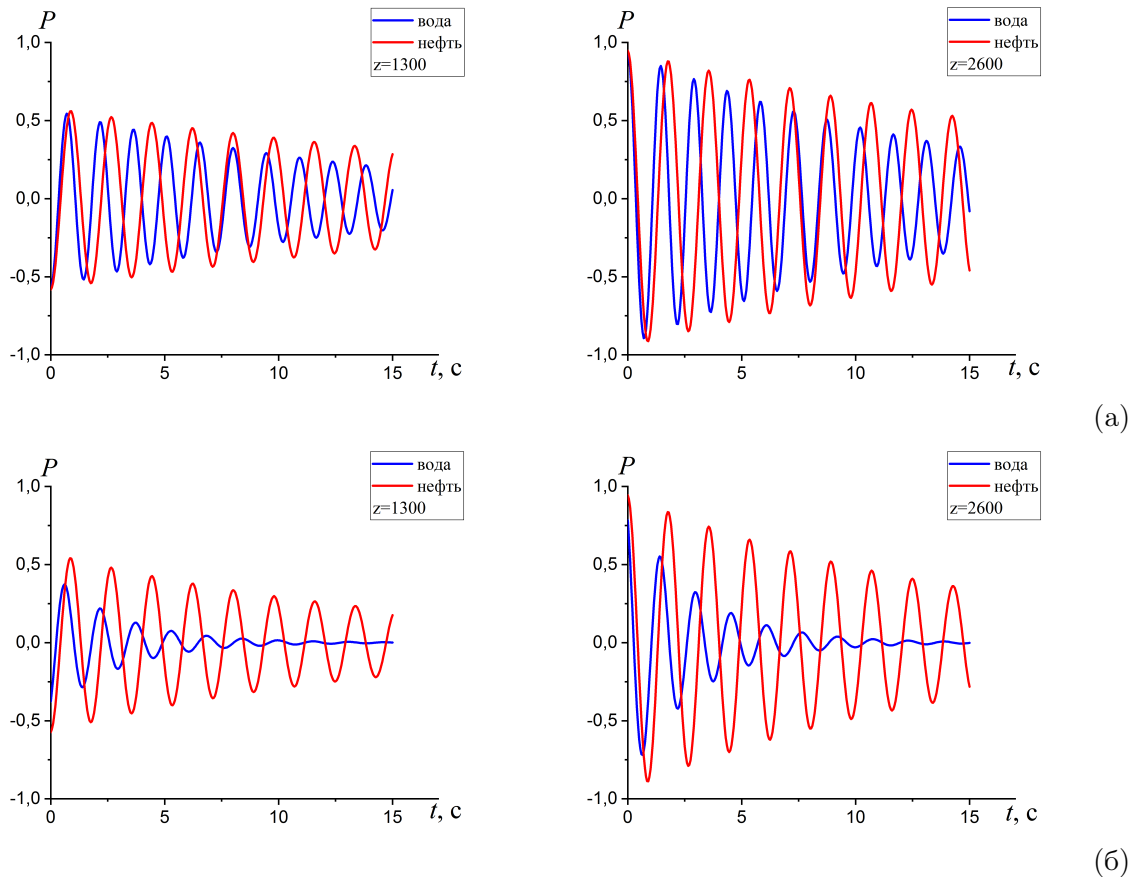


Рисунок 4 – Расчетные осциллограммы давления, регистрируемые датчиками, расположенными в точках скважины $z = 1300$ м (слева) и $z = 2600$ м (справа) при отсутствии (а) и наличии (б) трещины ГРП

немонотонный характер, как и в случае отсутствия трещины. Декремент затухания монотонно увеличивается независимо от закачиваемой жидкости.

Расчетные осциллограммы, соответствующие показаниям мнимых датчиков в середине и на забое скважины ($z = 1300$ м и $z = 2600$ м), при отсутствии (а) и наличии трещины ГРП (б) представлены на рисунке 4. Заметим, что при отсутствии трещины ГРП (а) в начальный момент времени амплитуда колебаний нефти и воды схожи. С течением времени собственные колебания воды затухают быстрее. Видно, что при наличии трещины ГРП (б) колебания воды в середине и на забое скважины затухают заметно быстрее. Анализ случаев наличия и отсутствия трещины ГРП показывает, что при закачке нефти трещина ГРП существенно не влияет на колебания давления.

5. Заключение

Проведен анализ влияния трещины ГРП и закачиваемой жидкости на собственные колебания столба жидкости в вертикальной скважине при открытой верхней границе. Рассмотрены собственные частота, коэффициент и декремент затухания от коэффициента проницаемости пласта (при отсутствии трещины ГРП) и проводимости трещины ГРП. Проведено сравнение данных параметров в зависимости закачиваемой жидкости (нефти и воды). В случае, когда есть трещина, частота колебаний снижается примерно в 2 раза в отличие от случая отсутствия трещины. Для коэффициента затухания в обоих случаях имеет немонотонные зависимости. Таким образом, нефть имеет более высокую амплитуду колебаний, чем вода.

Вклад каждого автора в работу

Мамаева З.З. предложила постановку задачи об исследованиях собственных колебаний жидкости в вертикальной нефтяной скважине, где будет проведено сравнение численных результатов для жидкостей с различной плотностью. Построила теоретическую модель, которая описывает движение жидкости в скважине и трещине ГРП, вывела характеристическое уравнения для нахождения комплексной частоты собственных колебаний.

Насырова Д.А. написала литературной обзор, также провела численные расчеты для исследования влияния проницаемости породы и проводимости трещины гидроразрыва на частоту колебаний, коэффициент затухания и декремент затухания колебаний давления и рассмотрела динамику давления в случае наличия и отсутствия трещины ГРП.

Список литературы

- 1 Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2007. – 237 с.
- 2 Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. К теории билинейного режима фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва // Вестник Башкирского университета. – 2018. – Т. 23, № 4. – С. 958-963.
- 3 Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2019. – № 5. – С. 6–14. <https://doi.org/10.1134/S0568528119050050>
- 4 Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт–трещина гидроразрыва // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 77. – С. 158-168. <https://doi.org/10.17223/19988621/77/12>
- 5 Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81, № 3. – С. 319-329.
- 6 Шагапов В.Ш., Нагаева З.М. Приближенное решение задачи об упругом режиме фильтрации в трещине, находящейся в нефтяном пласте // Инженерно–физический журнал. – 2020. – Т. 93. – № 1. – С. 206-215.
- 7 Шагапов В.Ш., Хамидуллин И.Р., Нагаева З.М. Фильтрация к вертикальной скважине из пласта, подверженного ГРП, в случае коротких трещин // Инженерно–физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 6. – С. 1414-1423.
- 8 Carey, M. Analysis of Water Hammer Signatures for Fracture Diagnosis / M. Carey, S. Mondal, M. Sharma // Annual Technical Conference and Exhibition (Texas, USA). – 2015. – SPE-174866-MS.
- 9 Iriarte J., Merritt J. Using Water Hammer Characteristics as a Fracture Treatment Diagnostic. SPE Oklahoma City Oil and Gas Symposium held in Oklahoma City, Oklahoma (USA), 27–31 March 2017.
- 10 Wuyi, W. Water hammer simulation of a series pipe system using the MacCormack time marching scheme / W. Wuyi, H. Wenrui // Acta Mechanica. – 2018. – V. 229. – P. 3143-3160.
- 11 Wang, X. Water Hammer Effects on Water Injection Well Performance and Longevity / X. Wang, K. Hovem, D. Moos, Y. Quan // SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control. – 2008. – SPE 112282.
- 12 Yu, S. Wellbore annulus water hammer pressure prediction based on transient multiphase flow characteristics / S. Yu, J. Wei, L. Shuanggui, Yu C. Yingjie // Oil and Gas Science and Technology Rev. IFP Energies nouvelles. – 2019. – V. 74. – P. 1-10.
- 13 Людвиницкая, А.Р. Насосные дозировочные системы для осложненных условий нефтедобычи / А.Р. Людвиницкая, В.В. Шайдаков // Нефтегазовое дело. – 2009. – Т. 7, № 2. – С. 71-79.
- 14 Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 4(362). – С. 5-14. <https://doi.org/10.15372/PMTF20200401>
- 15 Мамаева З.З., Рафикова Г.Р. Исследование собственных колебаний нефти в вертикальной скважине // Многофазные системы. – 2021. – Т. 16, № 3–4. – С. 105-111. <https://doi.org/10.21662/mfs2021.3.014>

Ашық тік ұңғымадағы сұйық бағанасының меншікті тербелістерін зерттеу

З.З. Мамаева¹, Д.А. Насырова²^{1,2} Ресей ғылым академиясының Уфа федералдық зерттеу орталығының Р.Р. Мавлютов атындағы Механика институты, Октябрь пр-сі, 71, Уфа, 450054, Ресей

Аннотация. Жұмыста сорғылардың кенет тоқтауынан (гидросоққы) туындаған мұнай тік ұңғымасындағы сұйық бағананың меншікті тербелістері талқыланады. Тербелістердің толқындық параметрлері айдалатын сұйықтықтың физика-химиялық қасиеттеріне, тығыздығына, кеуектілігіне, коллектор өткізгіштігіне және гидравликалық жарықшақтардың сипаттамаларына байланысты екенін айта кетейік. Еркін жоғарғы шекаралы ұңғымадағы сұйық қозғалысын және гидравликалық пласт жарықшасы аймағындағы сұйықтың сүзілуін сипаттайтын теориялық модель негізінде процестің бастапқы және шекаралық шарттарын ескере отырып, ұңғымадағы сұйық бағананың меншікті өшірілген тербесі жайлы есептің аналитикалық шешімі анықталған. Ұңғымадағы сұйықтық қысымы мен жылдамдығының өзгеруін беретін өрнектер де көрсетілді. Меншікті жиіліктің толқындық параметрлерін (жиілік, период, өшудің коэффициенті мен декрементін) табу үшін сипаттамалық теңдеу құрылды. Тау жыныстарының өткізгіштігі мен гидравликалық жарықтардың өткізгіштігі тербеліс жиілігіне, өшу коэффициенті мен қысым тербелістерінің әлсіреуінің төмендеуіне әсері зерттелді. Гидравликалық сынық болмаған және бар болған жағдайда ұңғыманың ортасындағы және түйіндегі қысымның динамикасы қарастырылған. Бұл сипаттамалар әртүрлі тығыздықтағы сұйықтықтар үшін, атап айтқанда, мұнай мен су үшін салыстырылды.

Түйін сөздер: меншікті тербеліс, пласттың гидравликалық жарылуы, меншікті жиіліктер, гидравликалық соққы, мұнай, тік ұңғыма, сұйықтықты сүзу, сұйықтық тербелісі.

Study of natural vibrations of a liquid column in an open vertical well

Z.Z. Mamaeva¹, D.A. Nasyrov²^{1,2} Mavlyutov Institute of Mechanics – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 450054, Ufa, Russia

Abstract. The natural vibrations of a liquid column in a vertical oil well caused by a sudden stop of pumps (water hammer) were analyzed. Note that the wave parameters of the oscillations depend on the physicochemical properties of the injected fluid, density, porosity, permeability of the reservoir and characteristics of the hydraulic fracture. Based on a theoretical model that describes the movement of fluid in a well with a free upper boundary and the filtration of fluid in the bottom-hole zone with hydraulic fracturing, analytical solutions to the problem of natural damped oscillations of the liquid column in the well are found, taking into account the initial and boundary conditions of the process. Expressions are obtained for finding changes in pressure and fluid velocity in a well. A characteristic equation is derived for finding the wave parameters of natural frequencies (frequency, period, coefficient and damping decrement). The influence of rock permeability and hydraulic fracture conductivity on the oscillation frequency, damping coefficient and damping decrement of pressure oscillations was studied. The dynamics of pressure in the middle and at the bottom of the well is considered in the cases of the absence and presence of a hydraulic fracture. A comparison was made of these characteristics for liquids with different densities, namely oil and water.

Keywords: natural vibrations, hydraulic fracturing, natural frequencies, hydraulic shock, oil, vertical well, fluid filtration, fluid vibrations.

References

- 1 Economides M., Oligney R., Valkó P. Unified fracture design : bridging the gap between theory and practice. Orsa Press, 2002. 200 p.
- 2 Khabibullin I.L., Khisamov A.A. K teorii bilineynogo rezhima fil'tratsii v plastakh s treshchinami gidrorazryva [On the theory of bilinear flow regime in the layers with hydraulic fracturing cracks], Vestnik Bashkirskogo universiteta [Bulletin of Bashkir University]. 2018. Vol. 23, №. 4. P. 958-96. [in Russian]
- 3 Khabibullin I.L., Khisamov A.A. Unsteady flow through a porous stratum with hydraulic fracture, Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54, No. 5. P. 594-602. <https://doi.org/10.1134/S0015462819050057>
- 4 Khabibullin I.L., Khisamov A.A. Modelirovaniye nestatsionarnoy fil'tratsii v sisteme plast - treshchina gidrorazryva [Modeling of unsteady filtration in a formation – hydraulic fracture system], Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics]. 2022. No. 77. P. 158-168. [in Russian]
- 5 Nagaeva Z.M., Shagapov V.S. Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir, Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. Vol. 81, No. 3. P. 214-222. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.08.013>
- 6 Shagapov V.S., Nagaeva Z.M. Approximate solution of the problem on elastic-liquid filtration in a fracture formed in an oil stratum, Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2020. Vol. 93, No. 1. P. 201-209. <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02109-4>

- 7 Shagapov V.S., Khamidullin I.R., Nagaeva Z.M. Filtration to a vertical well from a broken-down formation in the case of short fractures, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2020. Vol. 93, No. 6. P. 1363-1372. <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02241-1>
- 8 Carey M., Mondal S., Sharma M. Analysis of Water Hammer Signatures for Fracture Diagnostics, *Annual Technical Conference and Exhibition (Texas, USA)*. 2015. SPE-174866-MS.
- 9 Iriarte J., Merritt J. Using Water Hammer Characteristics as a Fracture Treatment Diagnostic. *SPE Oklahoma City Oil and Gas Symposium held in Oklahoma City, Oklahoma (USA)*, 27–31 March 2017.
- 10 Wuyi W., Wenrui H. Water hammer simulation of a series pipe system using the MacCormack time marching scheme, *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229. P. 3143-3160.
- 11 Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y. Water Hammer Effects on Water Injection Well Performance and Longevity, *SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control*. 2008. SPE 112282.
- 12 Yu S., Wei J., Shuangui L., Yingjie Yu C. Wellbore annulus water hammer pressure prediction based on transient multiphase flow characteristics, *Oil and Gas Science and Technology Rev. IFP Energies nouvelles*. 2019. V. 74. P. 1-10.
- 13 Lyudvinitzkaya A.R., Shaidakov V.V. Pump dosing systems for difficult conditions of oil production, *Oil and gas business*. 2009. Vol. 7, No. 2. P. 71-79.
- 14 Shagapov V.Sh., Bashmakov R.A., Rafikova G.R., Mamaeva Z.Z. Zatukhayushchiye sobstvennyye kolebaniya zhidkosti v skvazhine, soobshchayushcheysya s plastom [Damped natural vibrations of fluid in a well interfaced with a reservoir], *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2020. Vol. 61, No. 4(362). P. 5-14. [in Russian]
- 15 Mamaeva Z.Z., Rafikova G.R. Issledovaniye sobstvennykh kolebaniy nefti v vertikal'noy skvazhine [Study of natural oscillations of oil in a vertical well], *Mnogofaznyye sistemy [Multiphase Systems]*. 2021. Vol. 16, No. 3–4. P. 105-111. [in Russian]

Сведения об авторах:

Мамаева Зилия Зайтовна – автор для корреспонденции, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории механики многофазных систем, Институт механики им. Р.Р.Мавлютова УФИЦ РАН, пр.Октября, 71, Уфа, 450054, Россия. Насырова Дина Ахметовна – магистр физико-математических наук, инженерисследователь лаборатории механики многофазных систем, Институт механики им. Р.Р.Мавлютова УФИЦ РАН, пр.Октября, 71, Уфа, 450054, Россия.

Information about authors:

Mamaeva Ziliya Zaitovna – Corresponding author, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Laboratory of Mechanics of Multiphase Systems, Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Oktyabrya Avenue, 71, Ufa, 450054, Russia.

Nasyrova Dina Akhmetovna – Master of Physical and Mathematical Sciences, Research Engineer at the Laboratory of Mechanics of Multiphase Systems, Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Oktyabrya Avenue, 71, Ufa, 450054, Russia.

*Поступила: 17.06.2024. После редакции: 29.06.2024.
Одобрена: 29.06.2024. Доступна онлайн: 30.06.2024.*

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: Ғ.Е. Тауғынбаева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы.
- 2024. 2(147). - Астана: ЕҰУ. 43-б. Басуға қол қойылды: 30.06.2024.

Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген:
<http://bulmathmc.enu.kz/>

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды