

ISSN 2616-7182  
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің  
**ХАБАРШЫСЫ**

---

---

**BULLETIN**  
of L.N. Gumilyov Eurasian  
National University

**ВЕСТНИК**  
Евразийского национального  
университета имени Л.Н. Гумилева

**МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА** сериясы

**MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS** Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№1(146)/2024

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

**Астана, 2024**  
**Astana, 2024**

## БАС РЕДАКТОРЫ

*Темірғалиев Н., ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан*

*Бас редактордың орынбасары*

**Жұбанышева А.Ж.**

*PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан*

*Бас редактордың орынбасары*

**Наурызбаев Н.Ж.**

*PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан*

*Редакция алқасы*

**Абакумов Е.В.**

**Алексеева Л.А.**

*PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР БжҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан*

**Алимхан Қилан**

**Балтаева У.**

**Бекенов М.И.**

**Гогинава У.**

*PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан  
ф.-м.ғ.д., Мамун Хорезм академиясы, Хорезм, Өзбекстан  
ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан  
ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия*

**Голубов Б.И.**

*ф.-м.ғ.д., проф., Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет)  
Долгопрудный, Ресей*

**Зунг Динь**

*ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам  
ұлттық университеті, Ханой, Вьетнам*

**Иванов В.И.**

**Иосевич А.**

**Кобельков Г.М.**

*ф.-м.ғ.д., проф., Тула мемлекеттік университеті, Тула, Ресей  
PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ  
ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей*

**Курина Г.А.**

**Марков В.В.**

*ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей  
ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей*

**Мейрманов А.М.**

*ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей*

**Омарбекова А.С.**

**Смелянский Р.Л.**

*т.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан  
ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей*

**Умирбаев У.У.**

**Холщевникова Н.Н.**

*ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ  
ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей*

**Шмайссер Ханс-Юрген**

*Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия*

*Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.*

*Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: vest\_math@enu.kz*

*Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева*

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.**

**МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы**

Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.

№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,

тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

## EDITOR-IN-CHIEF

**Nurlan Temirgaliyev**

*Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

*Deputy Editor-in-Chief*

**Aksaule Zhubanysheva**

*PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

*Deputy Editor-in-Chief*

**Nurlan Nauryzbayev**

*PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

### *Editorial board:*

**Evgueni Abakumov**

*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee  
Paris, France*

**Lyudmila Alexeyeva**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling Ministry of Education  
and Science Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

**Alexander Iosevich**

*PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA*

**Alimhan Keylan**

*PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

**Umida Baltaeva**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Khorezm Mamun Academy, Khorezm,  
Uzbekistan*

**Makhsut Bekenov**

*Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof.  
L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

**Ushangi Goginava**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.  
Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

**Boris Golubov**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and  
Technology (State University)  
Dolgoprudnyi, Russia*

**Dũng Dinh**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute,  
Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*

**Valerii Ivanov**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, Russia*

**Georgii Kobel'kov**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia*

**Galina Kurina**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh,  
Russia*

**Vladimir Markov**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical  
Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**Anvarbek Meirmanov**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Com-  
munications and Informatics, Moscow, Russia*

**Asel Omarbekova**

*Cand. of Tech. Sci., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

**Ruslan Smelyansky**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russia*

**Ualbay Umirbaev**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.,  
Wayne State University, Detroit, USA*

**Natalya Kholshchevnikova**

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State  
Technological University "Stankin", Moscow, Russia*

**Hans-Juergen Schmeisser**

*Dr. habil., Prof., Friedrich-Shiller University  
Jena, Germany*

*Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.*

*Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: vest\_math@enu.kz*

*Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva*

**Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.**

**MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series**

Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

© L.N. Gumilyov Eurasian National University

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**Темиргалиев Н.**, д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

*Зам. главного редактора*

**Жубанышева А.Ж.**

*PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

*Зам. главного редактора*

**Наурызбаев Н.Ж.**

*PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

### *Редакционная коллегия*

**Абакумов Е.В.**

*PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция*

**Алексеева Л.А.**

*д.ф.-м.н., проф., Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан*

**Алимхан Килян**

*PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

**Бекенов М.И.**

*к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

**Балтаева У.**

*д.ф.-м.н., Хорезмская академия Маъмуна, Хорезм, Узбекистан*

**Гогинава У.**

*д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия*

**Голубов Б.И.**

*д.ф.-м.н., проф., Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия*

**Зунг Динь**

*д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам*

**Иванов В.И.**

*д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, Тула, Россия*

**Иосевич А.**

*PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США*

**Кобельков Г.М.**

*д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**Курина Г.А.**

*д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

**Марков В.В.**

*д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*

**Мейрманов А.М.**

*д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*

**Омарбекова А.С.**

*к.т.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

**Смелянский Р.Л.**

*д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**Умирбаев У.У.**

*д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США*

**Холщевникова Н.Н.**

*д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия*

**Шмайссер Ханс-Юрген**

*Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия*

*Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402*

*Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: vest\_math@enu.kz*

*Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева*

**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.**

**Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.

Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.  
Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, №1(146)/2024

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.  
Mathematics. Computer science. Mechanics series, №1(146)/2024

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.  
Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, №1(146)/2024

МАЗМҰНЫ  
CONTENTS  
СОДЕРЖАНИЕ

- Аканова К.М., Мырканова А.М., Ластовецкий А.Л., Шохина А.М.*  
Моменттік кернеулері бар тау массасындағы абсолютті қатты төсеммен бекітілген эллиптикалық жұмыстың орнықтылығы  
*Akanova K.M., Myrkanova A.M., Lastovetsky A.L., Shokhinova A.M.* Stability of an elliptical working fixed with absolutely rigid lining in a rock mass with moment stresses
- Аканова К.М., Мырканова А.А., Ластовецкий А.Л., Шохина А.М.* 6  
Устойчивость закрепленной абсолютно жесткой крепью эллиптической выработки в массиве горных пород с моментными напряжениями
- Курманова Д.Е.* Геликоидты жылу алмастырғыштағы жылу тасымалдағыш параметрлерін сандық модельдеу  
*Kurmanova D.Y.* Numerical modeling of coolant parameters in helicoid heat exchangers
- Курманова Д.Е.* 17  
Численное моделирование параметров теплоносителей в теплообменниках геликоидной формы
- Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М.* Сипаттамалық теңдеулердің шешімдері комплексті-түйіндес болған жағдайда ерекше ядролы Вольтерра типті интегралдық теңдеулер үшін Коши типті есептің шешімі  
*Rajabova L.N., Akhmadov F.M.* Solution of a Cauchy type problem for an integral equation of Volterra type with singular kernels, when the roots of the characteristic equations are complex conjugate
- Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М.* 26  
Решение задачи типа Коши для интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные
- Бейсембекова М.Қ., Маемерова Г.М., Ракишева З.Б.* Балқаш көліндегі толқындардың биіктігін SMB параметрлік әдісі арқылы модельдеу  
*Beisembekova M.K., Maemerova G.M., Rakisheva Z.B.* Modeling wave heights of Lake Balkhash using the parametric SMB method
- Бейсембекова М.Қ., Маемерова Г.М., Ракишева З.Б.* 34  
Моделирование высот волн озера Балхаш параметрическим методом SMB

**IRSTI: 27.23; 24.01.45; 27.01.33**

К.М. Аканова<sup>1</sup>, А.А. Мырканова<sup>2</sup>, А.Л. Ластовецкий<sup>3</sup>, А.М. Шохина<sup>4</sup>

<sup>1,2</sup> *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева, 2, Астана, 010008, Республика Казахстан*

<sup>3</sup> *Колледж университета Дублин - Национальный университет Ирландии, Belfield, 4, Дублин, Ирландия*

<sup>4</sup> *Карагандинский университет Казпотребсоюза, ул. Академическая, 9, Караганда, Казахстан*

(*E-mail:* <sup>1</sup>*akanova\_km@mail.ru,* <sup>2</sup>*asema80@bk.ru,* <sup>3</sup>*alexey.lastovetsky@ucd.ie,* <sup>4</sup>*Aiman.sh.m@mail.ru* )

## **УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРЕПЛЕННОЙ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ КРЕПЬЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ВЫРАБОТКИ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

**Аннотация:** Проведение подземной конструкции в сплошном массиве горных пород нарушает ее свойство непрерывности и может привести к ее обрушению, что представляет собой угрозу для жизни рабочих, а также причиняет материальный и финансовый ущерб. На сегодняшний день разработано немало способов решения классической задачи по определению напряженно-деформированного состояния горных пород с подземными сооружениями. Однако единой теории для описания напряженно-деформированного состояния горных пород с моментными напряжениями вокруг подземных выработок не существует, поскольку задача осложняется тем, что появляется необходимость расчета деформации изгиба и вращения горного массива, а не только сжатия-растяжения и сдвига. В данной статье предлагается решение задачи об определении зон потери устойчивости выработки эллиптической формы в массиве горных пород с моментными напряжениями в условиях ползучести, которая закреплена абсолютно жесткой крепью так, что породные стенки и крепь по всему контуру жестко сцеплены друг с другом. Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с отверстием состоит из суммы основных напряжений, обусловленных напряженным состоянием плоскости без отверстия, и дополнительных напряжений, обусловленных наличием отверстия. При этом решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния упруго-ползучего массива с моментными напряжениями вокруг незакрепленной некруговой горизонтальной выработки сводится к решению последовательности аналогичных задач для круговой выработки методом малого параметра. Суть этого метода заключается в том, что функции напряжений раскладываются в числовые ряды по степеням параметра, который характеризует отклонение формы выработки от круга. Получены численные результаты по определению напряженно-деформированного состояния горной породы при воздействии обычных и моментных напряжений на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением в условиях ползучести. Расчеты по определению горного давления на контуре выработки от обычных и моментных напряжений проведены для анализа поведения алевролита с течение времени  $t = 120$  часов и  $t = 600$  часов в полярных координатах. Построенные эпюры искомого моментного горного давления на абсолютно жесткую крепь в нулевом и первом приближении при  $t = 120$  и  $t = 600$  часов показывают, что с течением времени оно усиливается, поэтому в зонах максимального роста требуется ее усилить для повышения устойчивости.

**Түйін сөздер:** напряжения, деформации, крепь, конформное отображение, горное давление, ползучесть, обрушение.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2024/1.1>

**2000 Mathematics Subject Classification: 74A05; 74A10.**

Если нетронутая среда до нарушения ее сплошности находится в состоянии напряженного равновесия, то после возведения в ней подземной выработки она теряет свою устойчивость в результате смещений пород вокруг конструкции. На подземный объект оказывается внешнее давление от действия массы вышележащих горных пород, которое может привести к его обрушению. Наибольшие смещения и деформации происходят на контуре подземной выработки и вокруг нее, а по мере удаления от нее они затухают. Для предотвращения обрушения кровли и стенок выработки и обеспечения безопасности ее эксплуатации в течение всего срока службы возводятся искусственные сооружения, называемые горной крепью. Горная крепь - это искусственное строительное сооружение, которое служит для укрепления окружающих горных пород и сохранения заданных размеров и формы подземных сооружений с целью защиты от обрушений [1].

Конструкция крепи и ее материал зависят от площади и формы поперечного сечения горной выработки, горно-геологических условий, величины и характера давления породы, срока службы и других факторов [2]. Несущие крепи служат для восприятия нагрузки от горного давления и должны удовлетворять таким требованиям, как прочность - способность выдерживать давление горных пород в течение всего срока ее эксплуатации; огнестойкость, коррозионная стойкость, сейсмостойкость, ремонтпригодность и др. На рисунке 1 показан укрепленный подземный тоннель в массиве горных пород.



Рисунок 1 – Укрепленный подземный тоннель в массиве горных пород

Проведенные исследования показали, что давление ползущих горных пород на крепь определяется величиной радиального напряжения на контуре выработки, а его величина с развитием свойств ползучести с течением времени растет. Характер горного давления показывает его однородность, напряжения сжимающие, а вертикальное давление более чем в два раза превышает боковое. Полученные результаты указывают на наиболее неустойчивые области массива горных пород, в которых следует провести дополнительные мероприятия по усилению крепи из-за возрастания риска ее обрушения. При этом моментные напряжения оказывают дополнительные воздействия на абсолютно жесткую крепь.

### Постановка задачи

Пусть в однородном упруго-ползучем изотропном массиве горных пород с моментными напряжениями на глубине  $H$  от дневной поверхности пройдена горизонтальная выработка поперечного эллиптического сечения. Она закреплена абсолютно жесткой (недеформируемой) крепью той же формы так, что породные стенки и крепь по всему контуру жестко сцеплены друг с другом. Требуется определить компоненты обычных и моментных напряжений в крепи и горном массиве в окрестности выработки в условиях ползучести.

Такой массив вокруг некруговой выработки моделируется в условиях плоской деформации бесконечной изотропной упругой невесомой плоскостью с несимметричными тензорами напряжения, ослабленной отверстием заданной формы со впаиванной в него жесткой шайбой. Расчетная схема задачи показана на рисунке 2.

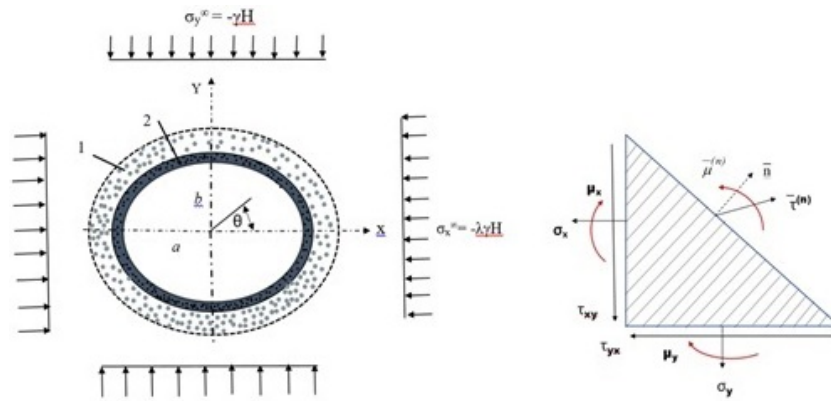


Рисунок 2 – Расчетная схема задачи.

### Метод решения задачи

При помощи отображающей функции  $z(\zeta) = R(\zeta + \varepsilon\zeta^{-1})$  конформно отобразим всю бесконечную область вне некругового отверстия на внешность единичного круга в плоскости комплексного переменного  $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$  при условии (1):

$$1 + \varepsilon\phi(\zeta) \neq 0 \quad \text{при } |\zeta| \geq 1, \quad (1)$$

где  $\rho$  и  $\theta$  - полярные координаты;  $i$  - мнимая единица;  $\varepsilon$  - малый числовой параметр, находящийся в пределах  $-1 \leq \varepsilon \leq 1$  и характеризующий отклонение заданного отверстия от кругового. Параметры  $\varepsilon$  и  $R$  находятся по формулам (2): где  $a$  и  $b$  - полуоси эллипса. Для решения задачи в отображенной области ставятся условия (3)-(5).

1. Начальные условия:

$$v_\rho^\pi + iv_\theta^\pi = 0, \quad \omega_{\rho\theta}^\pi = 0, \quad \text{при } t = 0 \quad (3)$$

2. Граничные условия: на бесконечности ( $z \rightarrow \infty$ ) действуют усилия, равные усилиям основного напряженного состояния:

$$\sigma_\xi^\infty(t) = -\lambda\gamma H, \quad \sigma_\eta^\infty(t) = -\gamma H, \quad \tau_{\xi\eta}^\infty(t) = \tau_{\eta\xi}^\infty = 0, \quad \mu_\xi^\infty(t) = \mu_\eta^\infty(t) = 0 \quad (4)$$

3. Условия сопряжения:

$$v_\rho^p + iv_\theta^p = 0, \quad \omega_{\rho\theta}^p = 0 \quad \text{при } \rho = 1 \quad (5)$$

где индекс "  $\pi$  " означает ползучесть;  $t$  - время;  $\lambda = \frac{v}{1-v}$  - коэффициент бокового давления;

$v_\rho^\pi, iv_\theta^\pi, \omega_{\rho\theta}^\pi$  - соответственно компоненты перемещения и вращения, обусловленные ползучестью горных пород;

$\sigma_\xi^\infty(t), \sigma_\eta^\infty(t), \tau_{\xi\eta}^\infty(t), \tau_{\eta\xi}^\infty, \mu_\xi^\infty(t), \mu_\eta^\infty(t)$  - компоненты обычных и моментных напряжений соответственно.

Напряженное состояние упругой плоскости с отверстием складывается из компонентов основных напряжений, обусловленных напряженным состоянием плоскости без отверстия,



и компонентов дополнительных напряжений, обусловленных наличием отверстия. Тогда функции напряжений, согласно идее работы [3], можно представить в виде суммы (6):

$$\varphi(\zeta) = \varphi^0(\zeta) + \varphi^{00}(\zeta), \psi(\zeta) = \psi^0(\zeta) + \psi^{00}(\zeta), P(\zeta, \bar{\zeta}) = P^0(\zeta, \bar{\zeta}) + P^{00}(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (6)$$

где  $\varphi^0(\zeta)$ ,  $\psi^0(\zeta)$ ,  $P^0(\zeta, \bar{\zeta})$  – функции напряжений Колосова-Мусхелишвили основного напряженного состояния, характеризующего нетронутый массив;  $\varphi^{00}(\zeta)$ ,  $\psi^{00}(\zeta)$ ,  $P^{00}(\zeta, \bar{\zeta})$  – функции напряжений дополнительного напряженного состояния, вызванного наличием выработки. Здесь функция напряжений  $P(\zeta, \bar{\zeta})$  – решение известного уравнения Гельмгольца [4] вида (7):

$$\Delta P - c^2 P = 0 \quad (7)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа. Из условия (5) следует, что смещения и поворот точек контура  $L$  жесткой крепи отсутствуют. Перемещения и вращения, связанные только со свойствами ползучести горного массива, найдем при  $\rho = 1$  по формулам (8) согласно работе [3]:

$$v_\rho^{00}(t) + iv_\theta^{00}(t) = v_\rho^{00} + iv_\theta^{00} \\ \omega_{\rho\theta}(t) = \omega_{\rho\theta}^{00}. \quad (7)$$

Обозначим потенциалы для определения компонентов дополнительных напряжений, перемещений и вращения в условиях ползучести горного массива вокруг закрепленной выработки через  $f(\zeta, t)$ ,  $g(\zeta, t)$ ,  $N(\zeta, \bar{\zeta}, t)$ . Тогда дополнительные перемещения и вращения в упруго-ползучем горном массиве, соответствующие моменту времени  $t$  после закрепления выработки, определим через временные операторы  $\bar{G}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\chi}$  параметров среды  $G, v, \chi$ , которые вычисляются по формулам (9):

$$\bar{v} = v, \bar{\chi} = \chi \left\{ 1 - \frac{2(1-2v)}{\chi} \beta \mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta) \right\}, \bar{G} = G \left\{ 1 - \frac{3}{2(1+v)} \beta \mathfrak{E}_\alpha^* \left[ -\frac{3\beta}{2(1+v)} \right] \right\}, \quad (9)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $v$  – коэффициент Пуассона,  $\chi$  – компонента деформаций искривления от моментных напряжений, при этом  $\chi = 3 - 4v$ .

Согласно гипотезе Ержанова Ж.С. ползучесть горных пород хорошо описывается степенной функцией с ядром наследственности типа Авеля вида  $\Omega(t - \tau) = \delta(t - \tau)^{-\alpha}$ , где  $\alpha, \delta$  – параметры ползучести горного массива ( $0 < \alpha < 1$ ) [4]. Однако построение резольвент такого типа весьма затруднительно, поэтому для вычисления интегрального временного оператора дробного порядка Ю.Н. Работнова  $\mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta)$  [5] использована аппроксимация М.И. Розовского [6] по формуле (10):

$$\mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta) * 1 = \beta^{-1} [1 - \exp(-\omega \beta t^{1-\alpha})], \quad (10)$$

где  $\omega = (1 - \alpha)^{(1-\alpha)}$ ,  $\beta = \delta \Gamma(1 - \alpha)$ ,  $\Gamma(1 - \alpha)$  – гамма-функция Эйлера.

В результате получим следующую граничную задачу для определения напряжений  $f(\zeta, t)$ ,  $g(\zeta, t)$ ,  $N(\zeta, \bar{\zeta}, t)$ , при  $\rho = 1$  по формуле (11):

$$\bar{\chi} f(\sigma, t) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{f'(\sigma, t)} - \overline{g(\sigma, t)} - \bar{m} \frac{\overline{F'(\sigma, t)}}{\omega'(\sigma)} + \frac{2i}{\omega'(\sigma)} \frac{\partial N}{\partial \bar{\sigma}} = \\ = \frac{\bar{G}}{G} \left[ \chi \varphi^{00}(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi^{00}(\sigma)} - m \frac{\overline{\Phi^{00'}(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} + \frac{2i}{\omega'(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial \bar{\sigma}} \right] \quad (11)$$

$$Jm \left[ (1 + \bar{\chi}) \frac{f'(\sigma, t)}{\omega'(\sigma)} + \frac{ic^2}{2} N(\sigma, \bar{\sigma}, t) \right] = \frac{\bar{G}}{G} Jm \left[ (1 + \chi) \frac{\varphi^{00'}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{ic^2}{2} P(\sigma, \bar{\sigma}) \right]$$

где  $Jm$  – мнимая часть выражения; символ " ' " означает производную функции;

$$F'(\sigma, t) = \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{f'(\sigma, t)}{\omega'(\sigma)} \right\};$$

$$\bar{m} = 8(1 - \bar{v})l^2;$$

$l^2 = \frac{G^*}{G}$ ,  $G^*$  - изгибно-сдвиговой модуль. Искомые функции  $f(\sigma, t)$ ,  $g(\sigma, t)$ ,  $N(\sigma, \bar{\sigma}, t)$  представим в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , характеризующего степень отклонения формы выработки от круга по формулам (12):

$$f(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k f_k(\sigma, t), \quad g(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k(\sigma, t), \quad N(\sigma, \bar{\sigma}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k N(\sigma, \bar{\sigma}, t). \quad (12)$$

Мы ограничимся нулевым и первым приближением и получим разложение по формулам (13):

$$\begin{aligned} f(\sigma, t) &= f_0(\sigma, t) + \varepsilon f_1(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(0)}(t) \sigma^{-k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \sigma^{-k}, \\ g(\sigma, t) &= g_0(\sigma, t) + \varepsilon g_1(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(0)}(t) \sigma^{-k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)} \sigma^{-k}, \\ N(\sigma, \bar{\sigma}, t) &= N_0(\sigma, \bar{\sigma}, t) + \varepsilon N_1(\sigma, \bar{\sigma}, t) = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k^{(0)}(t) \sigma^k + \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k^{(1)} \right) K_k(cR) \sigma^k, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $K_k(cR)$  - функция Макдональда 2-го рода  $k$ -го порядка;

$c_k^{(0)}$ ,  $d_k^{(0)}$ ,  $n_k^{(0)}$  - неизвестные коэффициенты для нулевого приближения;

$c_k^{(1)}$ ,  $d_k^{(1)}$ ,  $n_k^{(1)}$  - неизвестные коэффициенты для первого приближения.

В дальнейшем будем считать, что они зависят от времени.

Введем обозначения  $X = 1 - \chi - \chi cR \frac{K_0}{K_1}$  и найдем выражения для классических и моментных напряжений.

1) *Нулевое приближение.*

В результате преобразований функции напряжений для нулевого приближения представим в виде формул (14):

$$\begin{aligned} f_0(\zeta, t) &= -\frac{\Gamma'}{1+F} \frac{\bar{G}}{G} \frac{X}{\bar{X}} \zeta^{-1}, \quad g_0(\zeta, t) = -2\Gamma \frac{\bar{G}}{G} \zeta^{-1} - \frac{\Gamma'}{1+F} \frac{\bar{G}}{G} \frac{\bar{X} - \chi + X - F\bar{X}}{\bar{X}} \zeta^{-1} \\ N_0(\zeta, \bar{\zeta}, t) &= \frac{2\Gamma'}{1+F} \frac{\bar{G}}{G} \frac{\bar{X} - \chi + X - F\bar{X}}{\bar{X}} \frac{K_2(cR\rho)}{cK_1(cR)} \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  - постоянные, характеризующие распределение напряжений на бесконечности, находятся по формулам (15):

$$\Gamma = -\frac{\gamma H(1+\lambda)}{4}, \quad \Gamma' = -\frac{\gamma H(1-\lambda)}{2}. \quad (15)$$

Вычислим напряжения согласно выражениям (16):

$$\sigma_\rho^{(0)}(t) - i\tau_{\rho\theta}^{(0)}(t) = \frac{f'_0}{R} + \frac{\bar{f}'_0}{R} + \frac{ic^2}{2} N_0 - e^{2i\theta} \left\{ \zeta \frac{f''_0}{R} + \frac{g'_0}{R} \frac{m}{R^2} \frac{f'''_0}{R} + \frac{2i}{R^2} N'_0 \right\}. \quad (16)$$

После отделения действительной части получим на контуре единичного круга при  $\rho = 1$  выражение (17):

$$\sigma_\rho^{(0)}(t) = \frac{\gamma H \bar{G}}{2G} \left\{ 1 + \lambda - (1-\lambda) \frac{\bar{X} - \chi + X - F\bar{X}}{\bar{X}(1+F)} \cos 2\theta \right\}. \quad (17)$$

где  $F = \frac{8(1-\nu)}{4+c^2R^2+2cRK_0/K_1}$ . При  $t = 0$  получим выражение (18):

$$\sigma_\rho^{(0)\pi} = \sigma_\rho^{00} = -\frac{\gamma H}{2} \{1 + \lambda - (1-\lambda) \cos 2\theta\}. \quad (18)$$

Напряжения, обусловленные только свойствами ползучести горных пород, вычисляются согласно выражениям (19):

$$\sigma_\rho^{(0)\pi}(t) = -\frac{\gamma H(1+\lambda)}{2} \left(1 - \frac{\bar{G}}{G}\right) \frac{\gamma H(1-\lambda)}{2} \left(1 - \frac{\bar{G}}{G} \frac{\bar{X} - \chi + X - F\bar{X}}{\bar{X}(1+F)}\right) \cos 2\theta. \quad (19)$$

Моментные напряжения вычисляются согласно формуле (20):

$$\mu_{\theta}^{(0)}(t) + i\mu_{\rho}^{(0)}(t) = e^{i\theta} \left\{ \frac{m}{R^2} f_0'' + \frac{2i}{R} N_0' \right\}. \quad (20)$$

После отделения действительной части получим на контуре единичного круга при  $\rho = 1$  выражение для окружного моментного напряжения (21):

$$\mu_{\theta}^{(0)}(t) = \gamma H R (1 - \lambda) \frac{\bar{G}}{G} \frac{F}{1 + F} \cos 2\theta. \quad (21)$$

При  $t = 0$  получим выражение (22):

$$\mu_{\theta}^{(0)}(t) = \gamma H R (1 - \lambda) \frac{F}{1 + F} \left\{ 1 - \frac{\bar{G}}{G} \right\} \cos 2\theta. \quad (22)$$

Моментное напряжение, обусловленное только свойствами ползучести горных пород, вычисляются согласно выражениям (23):

$$\mu_{\theta}^{(0)\pi}(t) = \gamma H R (1 - \lambda) \frac{F}{1 + F} \cos 2\theta. \quad (23)$$

2) *Первое приближение.*

Искомые функции напряжений в первом приближении представлены в виде рядов в формуле (11). Функцию  $N_1(\theta, \bar{\theta}, t)$  найдем из дифференциального уравнения (24):

$$\Delta N_1 - c^2 R^2 N_1 = - \frac{2\Gamma' \bar{G}}{1 + F} \frac{c^2 R^2}{G c K_1(cR)} \frac{\bar{\chi} + F\bar{X} - \chi}{\bar{X}} \frac{K_2(cR\rho)}{\rho^2} \sin 4\theta, \quad (24)$$

где  $K_n(cR\rho)$ -модифицированная функция Бесселя второго рода  $n$ -го порядка от мнимого аргумента (функция Макдональда) [7].

Решение этого уравнения можно представить в виде суммы  $N_1 = N_{11} + N_{12}$ , где  $N_{12}$  - решение однородного уравнения, а  $N_{11}$  - решение уравнения (24) и равно выражению (25):

$$N_{11} = \frac{\Gamma' \bar{G}}{1 + F} \frac{c^2 R^2}{G 6K_1(cR)} \frac{\bar{\chi} + F\bar{X} - \chi}{\bar{X}} K_2(cR\rho) \sin 4\theta. \quad (25)$$

Для облегчения вычислений представим слагаемое  $N_{12}$  в виде ряда (26):

$$N_{12} = n_0^{(1)} K_0(cR) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ n_k^{(1)} \theta^k + \bar{n}_k^{(1)} \theta^{-k} \right\} K_k(cR\rho). \quad (26)$$

Нормальные напряжения на контуре единичного круга при  $\rho = 1$ , обусловленные только свойствами ползучести горных пород, вычисляются согласно выражениям (27):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)\pi}(t) = & -\frac{\gamma H}{2} \left\{ (1 - \lambda) \left( 1 - \frac{\bar{G}}{G} \right) + (1 - \lambda) \frac{\bar{G}}{G} \frac{\bar{\chi} - \chi}{\bar{X}} \frac{cR K_2}{K_1} \cos 2\theta - (1 - \lambda) \left[ 1 - \frac{\bar{G}}{G(1 + F)} \left\langle \frac{X}{\bar{X}} - \right. \right. \right. \\ & -4(1 - v) \left( \frac{R_2 Y}{R_1 \bar{Y}} R_3 K_3 \right) + F \left( \frac{c^2 R^2}{4} - \frac{cR K_0}{2K_1} \right) - \frac{12(1 - v) R_2 \bar{\chi} - \chi}{R_1 \bar{Y}} + \frac{\bar{\chi} - \chi}{\bar{X}} + \\ & \left. \left. \left. + \frac{\bar{\chi} - \chi}{\bar{X} \bar{Y}} \frac{c^3 R^3}{4} (1 + \chi) \left( \frac{K_4 K_4 - 3K_1}{K_3} + \frac{K_2}{2K_1} - \frac{K_2}{K_1} \frac{12}{c^2 R^2} \right) \right] \right\} \cos 4\theta, \quad (27) \end{aligned}$$

где  $R_1 = 1 + \frac{96(1-v)K_3}{c^2 R^2 (K_3 + K_5)}$ ,  $R_2 = \frac{K_1 - \frac{2}{cR} K_2}{K_3 + K_5} + \frac{(\frac{24}{c^2 R^2} - 1) K_3}{K_3 + K_5}$ ,  $R_3 = \frac{1 + \frac{24}{c^2 R^2} (4(1-v) \frac{R_2}{R_1} - 1)}{K_3 + K_5}$ .

Моментное окружное напряжение, обусловленное только свойствами ползучести горных пород, вычисляются согласно выражениям (28):

$$\begin{aligned} \mu_{\theta}^{(1)}(t) = & -\frac{\gamma H R}{2} \left( 1 - \frac{\bar{G}}{G} \right) \frac{F}{1 + F} \times \\ & \times \left\{ 1 - \lambda + 2(1 + \lambda) \cos 2\theta + (1 - \lambda) \left[ 1 + \frac{c^2 R^2 R_2 K_1}{6(K_1 + K_3) R_1} \right] \cos 4\theta \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

3) *Полные напряжения.*

Таким образом, горное давление на контуре жесткой крепи, вызванное обычными упругими и моментными напряжениями, равно сумме нулевого и первого приближения по формулам (29):

$$\begin{cases} Q = Q^{(0)} + \varepsilon Q^{(1)} \\ M = M^{(0)} + \varepsilon M^{(1)} \end{cases} \quad (29)$$

Горное давление на жесткую крепь, вызванное обычными упругими и моментными напряжениями в нулевом и первом приближении при  $\rho = 1$  равно соответственно выражениям в формулах (30):

$$\begin{cases} Q^{(0)} = -\sigma_{\rho}^{(0)\pi}, & Q^{(1)} = -\sigma_{\rho}^{(1)\pi} \\ M^{(0)} = -\mu_{\theta}^{(0)\pi}, & M^{(1)} = -\mu_{\theta}^{(1)\pi}. \end{cases} \quad (30)$$

В заключение расшифруем временные операторы, входящие в выражения (19), (23), (27), (28) по формулам (31):

$$\begin{aligned} \bar{X} &= X \left\{ 1 + \frac{2(1-2\nu)}{X} (1 + cRK_0/K_1) \beta \Theta^*_{\alpha}(-\beta) \right\}, \\ \bar{Y} &= Y \left\{ 1 - \frac{2(1-2\nu)}{Y} (3 - cRK_4/K_3) \beta \Theta^*_{\alpha}(-\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

### Результаты

Численные расчеты для определения напряженно-деформированного состояния горных пород от воздействия обычных и моментных напряжений на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением, проведены при следующих данных:  $E = 0,62 \times 10^{10}$  Мпа,  $\nu = 0,2$ ,  $\alpha = 0,726^\circ$ ,  $\delta = 0,0094 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\lambda = 0,25$ ,  $cR = 3$ . Функции Макдональда второго рода взяты из монографии Ватсона Г.Н. [8]:  $K_0 = 0,0347$ ,  $K_1 = 0,0402$ ,  $K_3 = 0,1222$ ,  $K_4 = 0,3059$ ,  $K_5 = 0,9378$ ,  $K_6 = 3,4318$ . Полярный угол берется в пределах  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , малый параметр  $\varepsilon = 1/3$ .

В таблице 1 показаны результаты расчетов по формулам (18), (26), (28) и (29) для горного давления (полного, в нулевом и первом приближении), вызванного действием обычных напряжений, на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением, при  $\varepsilon = 1/3$ ,  $t = 120$  часов и  $t = 600$  часов.

Таблица 1 – Горное давление, вызванное действием обычных напряжений, на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением.

$\theta$ , градус	$Q^{(0)}/\gamma H$		$Q^{(1)}/\gamma H$		$Q/\gamma H$ при $\varepsilon = 1/3$	
	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.
0	0.1633	0.2042	0.2316	0.2638	0.2405	0.2922
15	0.1928	0.2415	0.2871	0.3404	0.2885	0.3549
30	0.2732	0.3432	0.3830	0.4763	0.4009	0.5019
45	0.3831	0.4821	0.3821	0.4891	0.5105	0.6451
60	0.4931	0.6210	0.2290	0.3020	0.5694	0.7217
75	0.5735	0.7228	0.0204	0.0384	0.5803	0.7355
90	0.6030	0.7600	-0.0763	-0.0849	0.5775	0.7317
105	0.5735	0.7228	0.0204	0.0384	0.5803	0.7355
120	0.4931	0.6210	0.2290	0.3020	0.5694	0.7217
135	0.3831	0.4821	0.3821	0.4891	0.5105	0.6451
150	0.2732	0.3432	0.3830	0.4763	0.4009	0.5019
165	0.1928	0.2415	0.2871	0.3404	0.2885	0.3549
180	0.1633	0.2042	0.2316	0.2638	0.2405	0.2922

Наибольший интерес вызывают распределения горного давления, вызванного действием моментных напряжений, поскольку обычные напряжения подробно описаны в предыдущих работах авторов [9].

В таблице 2 показаны результаты расчетов по формулам (22), (27), (28) и (29) для горного давления (полного, в нулевом и первом приближении), вызванного действием моментных напряжений, на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением, при  $\varepsilon = 1/3$ ,  $t = 120$  часов и  $t = 600$  часов.

Таблица 2 – Горное давление, вызванное действием моментных напряжений, на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением.

$\theta$ , градус	$M^{(0)}/\gamma HR$		$M^{(1)}/\gamma HR$		$M/\gamma HR$ при $\varepsilon = 1/3$	
	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.
0	-0.1197	-0.1506	-0,3191	-0,4015	-0,2261	-0,2844
15	-0.1036	-0.1304	-0,2625	-0,3303	-0,1912	-0,2405
30	-0.0598	-0.0753	-0,1297	-0,1632	-0,1031	-0,1297
45	0.0000	0.0000	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000
60	0.0598	0.0753	0,0698	0,0878	0,0831	0,1046
75	0.1036	0.1304	0,0830	0,1045	0,1313	0,1652
90	0.1197	0.1506	0,0799	0,1005	0,1463	0,1841
105	0.1036	0.1304	0,0830	0,1045	0,1313	0,1652
120	0.0598	0.0753	0,0698	0,0878	0,0831	0,1046
135	0.0000	0.0000	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000
150	-0.0598	-0.0753	-0,1297	-0,1632	-0,1031	-0,1297
165	-0.1036	-0.1304	-0,2625	-0,3303	-0,1912	-0,2405
180	-0.1197	-0.1506	-0,3191	-0,4015	-0,2261	-0,2844

На рисунке 3 представлены эпюры искомого полного, в нулевом и первом приближении моментного горного давления на абсолютно жесткую крепь с учетом ее сцепления с породными стенками при  $\varepsilon = 1/3$  и  $t = 120$ . Для построения графиков использованы возможности построения графиков функций онлайн с помощью инструментов сервиса <http://grafikus.ru/> [10].

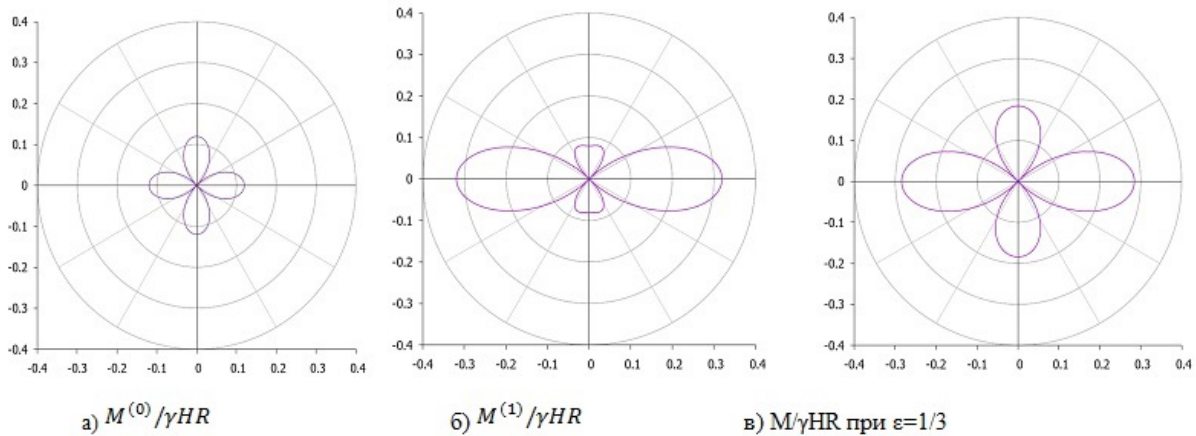


Рисунок 3 – Моментные напряжения при  $t = 120$  часов

На рисунке 4 представлены эпюры искомого полного, в нулевом и первом приближении моментного горного давления на абсолютно жесткую крепь с учетом ее сцепления с породными стенками при  $\varepsilon = 1/3$  и  $t = 600$  часов [10].

### Выводы

Катастрофические проявления могут наступить даже под малым воздействием негативных факторов типа обледенения грунта, каких-либо технологических вблизи подземной конструкции, нарушений эксплуатации таких объектов [11]. Такие неустойчивые зоны требуют еще большего усиления укрепляющих работ, чтобы снизить риск возможных

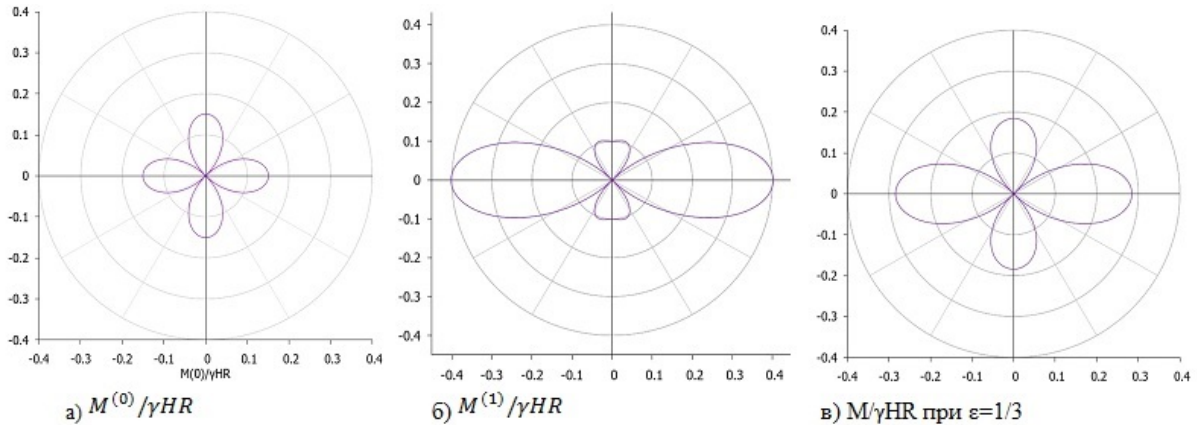


Рисунок 4 – Моментные напряжения при  $t = 600$  часов

несчастных случаев на производстве, которые могут привести как к материальному ущербу, так и к человеческим жертвам.

На рисунках 3 и 4 можно увидеть, что если качественная картина распределения моментных напряжений при  $t = 120$  и  $t = 600$  часов не изменилась, то их количественное изменение находится в пределах от 25% в нижних точках до 28% в верхних точках контура. Это свидетельствует о том, что с течением времени величина давления на крепь усиливается.

Моментные напряжения в нулевом приближении симметричны относительно оси  $OY$ , при  $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ,  $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$ ,  $315^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  массив испытывает растяжение, при  $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ ,  $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$  массив испытывает сжатие. С течением времени они возрастают на 25 – 30%.

Характер распределения моментного горного давления в первом приближении совпадает с распределением обычного горного давления, но массив вначале находится под воздействием деформации растяжения, а затем сжатия. С течением времени величина моментного горного давления в первом приближении возрастает на 25 – 30%.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что полученные результаты могут иметь практическое применение при принятии управленческих решений по усилению кровли штолен и штреков, проведенных в горных массивах и вызывающих нарушение их сплошности и ослабление свойств непрерывности. Угроза обрушений возникает в областях наибольшего горного давления, где подземная выработка испытывает максимальные деформации.

### Вклад каждого автора в работу

Аканова К.М. предложила постановку задачи об определении напряженно-деформированного состояния упруго-ползучего массива с моментными напряжениями вокруг незакрепленной некруговой горизонтальной выработки.

Мырканова А.А. построила алгоритм решения поставленной задачи посредством разложения функции напряжений в числовой ряд по степеням малого параметра, который показывает степень отклонения формы некруговой выработки от круга единичного радиуса.

Ластовецкий А.Л. представил численные результаты по определению напряженного-деформированного состояния горной породы при воздействии обычных и моментных напряжений на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением в условиях ползучести.

Шохинова Ш.М. провела построение эпюр полного обычного и моментного горного давления на абсолютно жесткую крепь в условиях ползучести горного массива с течением времени, а также в нулевом и первом приближении.

## Список литературы

- 1 ГОСТ Р 58871-2020 Горное дело. Крепь горных выработок. Термины и определения.
- 2 Нестерова С.Ю. Основы горного дела. (Общий курс. Строительная геотехнология): курс лекций. - Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2017. - 100 с.
- 3 Ержанов Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. - Алма-Ата: Наука, 1964. - 175 с.
- 4 Попов А.И., Попов И.Ю. Основные уравнения математической физики: Учебное пособие. - СПб: Университет ИТМО, 2020. - 200 с.
- 5 Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. - Москва: Наука, 1977. - 318 с.
- 6 Розовский М.И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. - 1959. - № 5. - С. 109-116.
- 7 Баденко В.Л., Баденко Г.В. Специальные разделы высшей математики. Математическая физика: учеб. пособие, 2014. - 55 с.
- 8 Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. Москва: ИЛ, 1949.
- 9 Kulshat Akanova, Assam Myrkanova, Anar Zhumakhanova. Mathematical and computer modeling of critical areas of loss of stability of complex systems // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. - 2022. - № 14. P. 5376-5386.
- 10 Online charting service. Electronic resource: <http://grafikus.ru/>. Дата обращения: 11.03.2024.
- 11 Murray, Stacey R. The Rise and Fall of Catastrophe Theory. Electronic resource: [www.encyclopedia.com](http://www.encyclopedia.com). Available at: 02.11.2021.

К.М. Аканова<sup>1</sup>, А.М. Мырканова<sup>2</sup>, А.Л. Ластовецкий<sup>3</sup>, А.М. Шохина<sup>4</sup>

<sup>1,2</sup> Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаев, 2, Астана, 010008, Қазақстан

<sup>3</sup> Дублин университетінің колледжі, Belfield, 4, Дублин, Ирландия

<sup>4</sup> Қарағанды Қазтұтынуодағы университеті, Академическая, 9, Қарағанды, Қазақстан

### Моменттік кернеулері бар тау массасындағы абсолютті қатты төсеммен бекітілген эллиптикалық жұмыстың орнықтылығы

**Аннотация:** Жер асты құрылымын қатты тау жыныстары массивінде жүргізу оның үздіксіздік қасиетін бұзады және жұмысшылардың өміріне қауіп төндіретін, сонымен қатар материалдық және қаржылық зиян келтіретін оның құлауына әкелуі мүмкін. Қазіргі уақытта жерасты құрылымдары бар тау жыныстарының кернеулі-деформациялық күйін анықтаудың классикалық мәселесін шешудің көптеген әдістері жасалған. Дегенмен, жер асты жұмыстарының айналасындағы моменттік кернеулері бар тау жыныстарының кернеулі-деформациялық күйін сипаттайтын біртұтас теория жоқ, өйткені тапсырма таужыныс массасының сығылу-кернеу және ығысу сияқты деформацияларын басқа да қиындықтар туындағанда, иілу және айналу деформациясын есептеу үшін қажет болады. Бұл мақалада тау жыныстарының қабырғалары мен қаптамалары бір-бірімен бүкіл контур бойынша қатты байланысатындай абсолютті қатты төсеммен бекітілген сусымалы жағдайда моменттік кернеулері бар тау жынысы массасындағы эллиптикалық шахтаның иілу аймақтарын анықтау мәселесін шешу ұсынылады. Саңылауы бар серпімді жазықтықтың кернеулі-деформациялық күйі саңылаусыз жазықтықтың кернеулі күйінен туындаған негізгі кернеулер мен саңылау болған кезде пайда болатын қосымша кернеулердің қосындысынан тұрады. Бұл ретте бекітілмеген шеңберлі емес горизонталь жұмысының айналасындағы моменттік кернеулері бар серпімді-сұймалы массаның кернеулі-деформациялық күйін анықтау есебінің шеңберлі жұмыс үшін ұқсас есептердің тізбегін кіші параметр әдісімен шешуге әкеледі. Бұл әдістің мәні мынада: кернеулік функциялар шеңберден қазба пішінінің ауытқуын сипаттайтын параметр дәрежесінде сандық қатарға кеңейтіледі. Сусымалы жағдайда адгезиясы бар абсолютті қатты тірекпен бекітілген қазба контурындағы кәдімгі және моменттік кернеулердің әсерінен тау жынысының кернеулі-деформациялық күйін анықтау үшін сандық нәтижелер алынды. Қалыпты және моменттік кернеулерден қазба контурындағы тау жыныстарының қысымын анықтау үшін есептеулер полярлық координаталар бойынша  $t = 120$  сағат және  $t = 600$  сағат уақыт бойынша алевролиттің мінез-құлқын талдау үшін жүргізілді.  $t = 120$  және  $t = 600$  сағатта абсолютті қатты тірекке нөлдік және бірінші жуықтаудағы қалаған қосындының құрастырылған диаграммалары оның уақыт өте келе есетінін көрсетеді, сондықтан максималды өсу аймақтарында оны қажет етеді.

**Түйін сөздер:** кернеулер, деформациялар, тірек, конформды кескіндеу, тау жыныстарының қысымы, жылжуы, құлау.

К.М. Akanova<sup>1</sup>, А.М. Myrkanova<sup>2</sup>, А.Л. Lastovetsky<sup>3</sup>, А.М. Shokhinova<sup>4</sup>

<sup>1,2</sup> L. N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan

<sup>3</sup> University College Dublin - National University of Ireland, Belfield, 4, Dublin, Ireland

<sup>4</sup> Karaganda university of Kazpotreboyz, Academic str., 9, Karaganda, Kazakhstan

### Stability of an elliptical working fixed with absolutely rigid lining in a rock mass with moment stresses

**Abstract:** Conducting an underground structure in a solid rock mass violates its continuity property and can lead to its collapse, which poses a threat to the lives of workers and also causes material and financial damage. To date, many methods have been developed for solving the classical problem of determining the stress-strain state of rocks with underground structures. However, there is no unified theory for describing the stress-strain state of rocks with moment stresses around underground workings, since the task is complicated by the fact that, in addition to such deformations of the rock mass as compression-tension and shear, it becomes necessary to calculate the deformation of bending and rotation. This article proposes a solution to the problem of determining the buckling zones of an elliptical mine in a rock mass with moment stresses under creep conditions, which is fixed with an absolutely rigid lining so that the rock walls

and lining are rigidly linked to each other along the entire contour. The stress-strain state of an elastic plane with a hole consists of the sum of the main stresses caused by the stressed state of the plane without a hole, and additional stresses caused by the presence of a hole. At the same time, the solution of the problem of determining the stress-strain state of an elastic-creeping mass with moment stresses around an unsecured non-circular horizontal working is reduced to solving a sequence of similar problems for a circular working by the small parameter method. This method expands the stress functions are expanded into numerical series in powers of a parameter that characterizes the deviation of the excavation shape from a circle. Numerical results were obtained to determine the stress-strain state of the rock under the influence of ordinary and moment stresses on the contour of the excavation, secured by an absolutely rigid support with adhesion under creep conditions. Calculations were carried out to determine the rock pressure on the excavation contour from normal and moment stresses were carried out to analyze the behavior of siltstone over time  $t = 120$  hours and  $t = 600$  hours in polar coordinates. The constructed diagrams of the desired total, in the zero and first approximation, momentary rock pressure on an absolutely rigid support at  $t = 120$  hours and  $t = 600$  hours show that it increases over time, therefore, in zones of maximum growth it is required to strengthen it to increase stability.

**Keywords:** stresses, deformations, support, conformal mapping, rock pressure, creep, collapse.

## References

- 1 GOST P 58871-2020 Gornoe delo. Krep' gornyh vyrabotok. Terminy i opredeleniya [State standard R. 58871-2020 Mining engineering. Support of mine workings. Terms and definitions] [in Russian].
- 2 Nesterova S.Yu. Osnovy gornogo dela. (Obshnij kurs. Stroitel'naja geotekhnologija): kurs lekcij [Fundamentals of mining. (General course. Construction geotechnology): course of lectures]. Publishing house of Perm. nat. research polytechnic un-ta, 2017. 100 p.
- 3 Yerzhanov Zh.S. Teoriya polzuchesti gornyh porod i ee prilozhenija [The theory of rock creep and its applications]. Alma-Ata, Nauka, 1964. 175 p.
- 4 Popov A.I., Popov I.Yu. Osnovnye uravnenija matematicheskoy fiziki: Uchebnoe posobie [Basic equations of mathematical physics. Tutorial]. St. Petersburg: ITMO University, 2020. 200 p.
- 5 Rabotnov Yu.N. Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdyh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka, 1977. 318 p.
- 6 Rozovsky M.I. Nelineiny integral'no-operatornye polzuchesti I zadacha o kruchenii zilindra pri bolshyh uglah krutki [Nonlinear integral-operator equations of creep and the problem of cylinder torsion at large twist angles], Izv. AN SSSR. Mekhanika i mashinostroenie [Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics and engineering]. 1959. № 5. P. 109-116.
- 7 Badenko V.L., Badenko G.V. Speziak'nye razdely vyshvej matematiki. Matematicheskay fizika: Uchebnoe posobie [Special sections of higher mathematics. Mathematical Physics: Proc. allowance]. 2014. 55 p.
- 8 Watson G.N. Teoriya besselevykh funkcij [Theory of Bessel functions]. Part I. Moscow: IL, 1949.
- 9 Kulshat Akanova, Assem Myrkanova, Anar Zhumakhanova. Mathematical and computer modeling of critical areas of loss of stability of complex systems // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. - 2022. - № 14. P.p. 5376-5386.
- 10 Online charting service Available at: <http://grafikus.ru/> (Accessed: 11.03.2024).
- 11 Murray, Stacey R. "The Rise and Fall of Catastrophe Theory". [www.encyclopedia.com](http://www.encyclopedia.com). Retrieved 2 November, 2021.

### Сведения об авторах:

*Аканова Кульшат Мажитовна* - автор для корреспонденции, кандидат физико-математических наук (Ph.D), доцент (ассоциированный профессор) математики, кафедра Математического и компьютерного моделирования, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан. <https://orcid.org/0000-0002-0474-8708>.

*Мырканова Асем Азамовна* - постдокторант, кафедра Математического и компьютерного моделирования, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан. <https://orcid.org/0000-0002-6378-803X>.

*Ластовецкий Алексей Леонидович* - доктор физико-математических наук, профессор, Школа компьютерных наук, Колледж университета Дублин - Национальный университет Ирландии, Belfield, 4, Дублин, Ирландия. <https://orcid.org/0000-0001-9460-3897>.

*Шохинова Айман Муталиповна* - магистр физических наук, Карагандинский университет Казпотребсоюза, ул. Академическая, 9, Караганда, Казахстан. <https://orcid.org/0009-0004-3433-951X>

### Information about authors:

*Kulshat Akanova* - **Corresponding author**, Candidate (Ph.D) of physical and mathematical sciences, Associate Professor of Mathematics, Mathematical and Computer Modeling Department, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0002-0474-8708>.

*Asema Myrkanova* - postdoctoral fellow, Mathematical and Computer Modeling Department, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0002-6378-803X>.

*Alexey Lastovetsky* - Doctor of physical and mathematical sciences, School of Computer Science, University College Dublin, Belfield str., 4, Dublin, Ireland. <https://orcid.org/0000-0001-9460-3897>.

*Aiman Shokhinova* - Master of Science in Physics, Karaganda University of Kazpotrebsoyuz, Academic str., 9, Karaganda, Kazakhstan. <https://orcid.org/0009-0004-3433-951X>.

**Поступила: 16.06.2023. После редакции: 19.12.2023.**

**Одобрена: 29.03.2024. Доступна онлайн: 30.03.2024.**



МРНТИ: 50.51.15

Д.Е. Курманова

*Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Кажымукана, 13,  
Астана, 010008, Казахстан  
(E-mail: [dikonya89\\_29mail.ru](mailto:dikonya89_29mail.ru))*

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ В ТЕПЛООБМЕННИКАХ ГЕЛИКОИДНОЙ ФОРМЫ

**Аннотация:** Статья посвящена численному моделированию теплообменных процессов в теплообменнике геликоидной формы. Здесь используется интенсифицированный теплообменник. Это теплообменник, представляющий собой закреплённый в спиральношовном корпусе пучок профилированных трубок (в данной статье представлен случай одной трубки для нагреваемого и одной трубки для нагревающего теплоносителей) из коррозионностойкого материала, через стенки которых осуществляется теплопередача от потока греющей среды к потоку нагреваемой. Трубки имеют геликоидный профиль. Основное отличие теплообменников такой конструкции заключается именно в профилированной теплообменной поверхности трубок. В работе применен гибридный подход: получение зависимостей при сложных переходных процессах течения теплоносителя (нефти) с сильно изменяющейся вязкостью из численного эксперимента и построение замкнутой математической модели теплообмена для теплообменника. В работе приведены результаты расчетов температурного поля нефти в зависимости от различных гидродинамических параметров. Численное моделирование динамики нефти решалось в программном комплексе Ansys Fluent, где были использованы стационарные уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу. Численное моделирование течения жидкости и теплопередачи включает численное решение уравнений непрерывности, импульса и переноса энергии в вычислительной области в декартовых координатах. Для дискретизации основных уравнений используется метод конечных объемов на неструктурированных сетках и метод Coupled. Дискретизация невязких потоков осуществляется при помощи схемы MUSCL (Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws), а вязких потоков - центрированная схема 2-го порядка точности. В расчетах используется неравномерная сетка, в которой сгущение ячеек сетки производится около стенок трубы, где градиент температуры нефти является существенным. Чтобы контролировать сходимость итерационного процесса, проверяется уровень расхождения искомых физических величин и соответствие уравнению баланса массы. Исследование чувствительности сетки состоит из запуска одного и того же моделирования с использованием сеток с разным разрешением и анализируется, насколько сильно сходящееся решение меняется с каждой сеткой. Разрешение сетки около стены фиксировано на уровне  $y^+ < 1$ , а количество ячеек сетки в оставшейся части расчетной области (часть области, находящейся вне инфляционного слоя) варьируется. Чувствительность сетки на результат оценивается по распределению температуры в выходном участке трубы. Расчеты завершаются, когда уровень расхождения всех физических величин уменьшается на три порядка, а рассогласование массовых расходов на входной и выходной границах расчетной области становится менее  $10^{-3}$  кг/с.

**Ключевые слова:** теплообмен, численное моделирование, геликоидный теплообменник, нефтепродукт.

**2000 Mathematics Subject Classification: 35.M11**

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Теплообменники используются во многих областях применения, при этом эффективные теплообменники являются основным требованием отрасли. Усилия по увеличению теплопередачи, увеличению скоростей теплопередачи, уменьшению размеров теплообменников и повышению эффективности предпринимаются с начала глобальной индустриализации. Более высокий потенциал теплопередачи спиральных змеевиков представляет интерес для многих исследователей, изучающих динамику жидкости внутри спиральных труб теплообменника, который они обслуживают. Изгиб трубы вызывает приложение центробежной силы, которая приводит к образованию вторичного потока из-за искривления трубы. Жидкости, вытекающие снаружи трубы, движутся с большей скоростью, чем те, что текут внутри трубы, что вызвано кривизной, влияющей на скорость перемещения [1]. В конструкции геликоидных теплообменников применяются профилированные трубки и ребра винтового профиля, приводящие к улучшению условия теплообмена. В работах [2, 3] приводятся моделирование и расчет гидродинамики теплоносителей (вода, нефть), протекающих по гладким трубам. В работе [4] приводится численное моделирование и расчет теплообмена между теплоносителями в теплообменных аппаратах. В работе [5] приводится моделирование влияния параметров на теплопередачу и характеристики потока жидкости в геликоидальных двухтрубных теплообменниках. Работа [6] посвящена параметрическому анализу спиралевидного теплообменника с различными корреляциями параметров.

В работе [7] были проанализированы спиральные змеевики в теплообменниках различной формы и условий эксплуатации и проведено сравнение с прямотрубными теплообменниками, а их производительность и эффективность были проанализированы путем изучения факторов, влияющих на производительность и эффективность спирального теплообменника, таких, как коэффициент кривизны и другие факторы. Спиральный змеевик в теплообменниках обеспечивает более высокие скорости и эффективность теплопередачи, чем прямые трубы и другие теплообменники, благодаря развитию вторичного потока внутри спиральной трубы, в то время как коэффициент теплопередачи увеличивается с увеличением коэффициента кривизны при тех же скоростях потока.

В настоящей работе рассматривается численный расчет теплообменника геликоидного типа. Мы здесь используем интенсифицированный теплообменник. Это теплообменник, представляющий собой закреплённый в спиральношовном корпусе пучок профилированных трубок (в данной статье представлен случай одной трубки для нагреваемого и одной трубки для нагревающего теплоносителей) из коррозионностойкого материала (нержавеющей стали), через стенки которых осуществляется теплопередача от потока греющей среды к потоку нагреваемой. Трубки имеют геликоидный профиль. Основное отличие теплообменников такой конструкции заключается именно в профилированной теплообменной поверхности трубок. Приводятся результаты расчета температуры нефти и теплового потока на выходе из трубы, имеющей на поверхности навивки. При решении данной задачи в качестве входных параметров варьировались число закруток  $N$ , коэффициент теплоотдачи, скорость течения и температура нефти на входе в трубу.

## 2. МЕТОДЫ

Задача решается в программном комплексе Ansys Fluent 2019 R3, где использованы стационарные уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу, (RANS, Reynolds-averaged Navier-Stokes).

В вычислительной процедуре используется алгоритм временного марширования. Интегрирование по времени выполняется методом Рунге-Кутты 3-го порядка. Невязкие потоки дискретизируются с помощью схемы MUSCL (монотонные восходящие схемы для

законов сохранения), а вязкие потоки дискретизируются с помощью центрированной схемы 2-го порядка. Схема MUSCL позволяет увеличить порядок аппроксимации пространственных переменных без потери монотонности решения, удовлетворяет условию TVD (уменьшение общей вариации) и является комбинацией центрированных конечных разностей 2-го порядка и диссипативного члена, переключение между которыми осуществляется ограничителем потока, построенным на основе характеристических переменных. Навивки и закрутки в трубке с холодным теплоносителем задаются в виде граничных условий третьего рода - в тепловом потоке (Thermal Condition) выбирается конвекция (Convection) (на поверхности трубы задавались коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_1$  и температура омывающей жидкости  $T_2$ ). В качестве метода решения выбран Pressure-Velocity Coupling Scheme - Coupled. Этот метод обладает некоторыми преимуществами по сравнению с алгоритмом разделения на основе давления. Связанный алгоритм, основанный на давлении, обеспечивает более надежную и эффективную однофазную реализацию для стационарных потоков.

На входном участке трубы задается массовый расход, а к выходному участку применяются граничные условия свободного истечения. Внешняя труба считается идеально изолированной при задании адиабатических граничных условий на стенке.

Схематически рассчитываемая труба с навивками и расчетной сеткой на ней показана на рисунке 1.

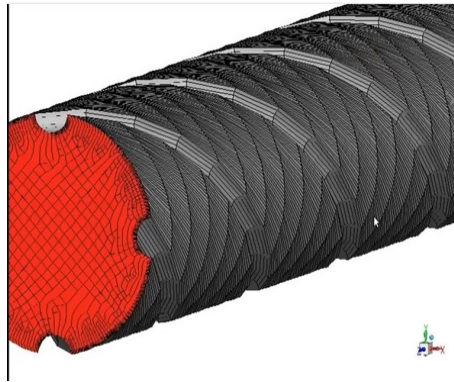


Рисунок 1 – Расчетная сетка трубы с навивками.

Для экономии вычислительных ресурсов (времени и памяти) расчет проводился на четвертой части трубы, так как труба осесимметричная. Используется метод конечных объемов на неструктурированных сетках [8]. Сетка состоит из 705 795 узлов и 657 696 элементов. Сгущение ячеек сетки производится около стенок трубы таким образом, чтобы  $y^+ < 2$ .  $y^+$  - безразмерная пристеночная координата, расстояние от стенки до первого пристеночного узла используется только вблизи стенки.

Для расчета были использованы основные уравнения Навье-Стокса и уравнения  $k - \omega$  SST [9].

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; \tag{1}$$

Уравнение импульса:

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]; \tag{2}$$

Уравнение энергии:

$$v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right]. \tag{3}$$

Здесь  $\rho$  – плотность, а  $v_i$  – составляющая скорости в направлении координат  $x_i$ ,  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\nu_t$  – турбулентная вязкость,  $Pr$ ,  $Pr_t$  – число Прандтля для ламинарного и турбулентного соответственно.

Модель  $k-\omega$  турбулентности включает в себя два дополнительных уравнения переноса. Одно уравнение записано для импульса начала перехода и числа Рейнольдса  $Re_{\theta t}$  (оно включено в корреляцию между местоположением начала перехода и местоположением переходного процесса), а другое уравнение выведено для перемежаемости  $\gamma$  (мера режима течения).

Уравнения переноса для импульсной толщины и числа Рейнольдса и перемежаемости имеют вид:

$$v_j \frac{\partial Re_{\theta t}}{\partial x_j} = P_{\theta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{\theta t} (\nu + \nu_t) \frac{\partial Re_{\theta t}}{\partial x_j} \right]; \quad (4)$$

Уравнение для перемежаемости:

$$v_j \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} = P_\gamma - E_\gamma + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\gamma}) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right]; \quad (5)$$

Здесь  $P_{\theta t}$  – является производным от числа Рейнольдса толщины импульса,  $P_\gamma$  и  $E_\gamma$  – условия образования и диссипации перемежаемости,  $\sigma_{\theta t}$  и  $\sigma_\gamma$  – константы модели.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Так как системы исходных уравнений являются нелинейными, при их численном решении применялся итерационный подход, в котором решались линеаризованные уравнения Навье-Стокса. По результатам расчетов получены среднемассовая температура и тепловой поток нефти на выходе из трубы. Для решения данной задачи использованы следующие исходные параметры: радиус трубы  $R_1 = 0,006$  м, радиус канавки  $R_2 = 0,001$  м, длина трубки  $L_1 = 1$  м, коэффициент теплоотдачи  $\alpha_1 = 1000$  Вт/( $m^2 \cdot K$ ), температура омывающей жидкости (вода)  $T_2 = 423$  К, скорость течения нефти  $v_1 = 4$  м/с, температура нефти на входе в трубу  $T_{in1} = 313$  К. Число навивок на поверхности трубы определяется количеством закруток  $N$ , которые в данной задаче варьировались от 1 до 40 с интервалом в 5.

На рисунке 2а показан график зависимости среднемассовой температуры нефти на выходе из трубы от числа закрутки  $N$ . Как видно из рисунка, с увеличением числа закруток температура нефти на выходе растет, т.е. происходит интенсификация теплообмена между теплоносителями. На рисунке 2б приведен график зависимости от числа закруток  $N$ . Здесь количество теплового потока также растет с увеличением числа закруток на трубе.

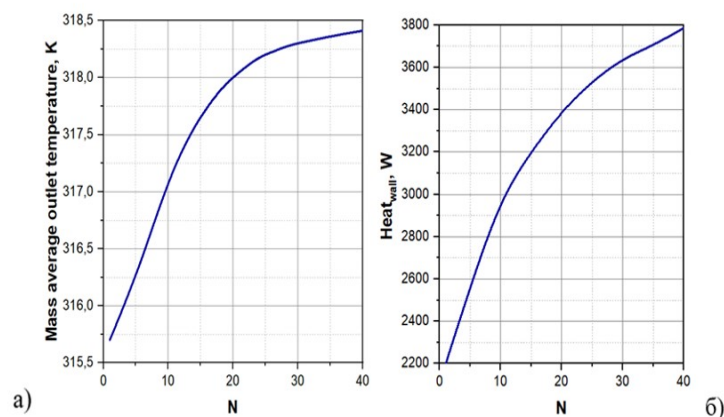


Рисунок 2 – Зависимости среднемассовых температур на выходе из теплообменника а) и теплового потока через поверхность трубы со стороны омывающей жидкости б) от закруток  $N$ .

Далее, задавались коэффициенты теплоотдачи  $\alpha$  в пределах от 1000 Вт/( $m^2 \cdot K$ ) до 6000 Вт/( $m^2 \cdot K$ ) при постоянном числе закруток, равным 10. Так, на рисунке 3а приведен график зависимости среднемассовой температуры нефти на выходе из теплообменника

от коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ . Как видно из рисунка, с увеличением коэффициента теплоотдачи среднemasовая температура на выходе значительно растет.

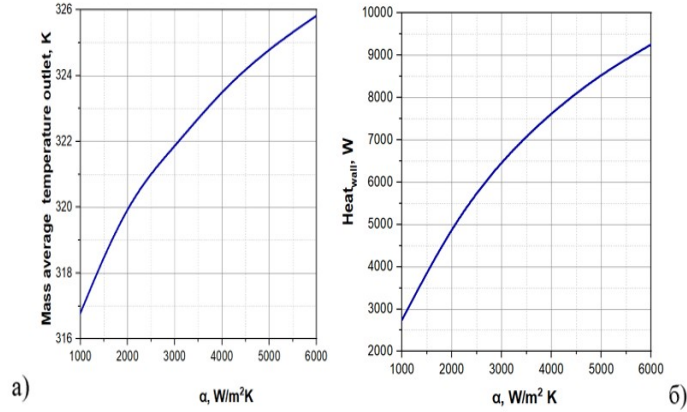


Рисунок 3 – Зависимости среднemasовых температур на выходе из теплообменника а) и теплового потока через поверхность трубы со стороны омывающей жидкости б) от коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ .

На рисунке 3б приводится зависимость от теплоотдачи  $\alpha$ . Как видно из графика, с увеличением коэффициента теплоотдачи тепловой поток существенно возрастает, примерно в 3 раза от начального значения, что показывает интенсификацию теплообмена между теплоносителями.

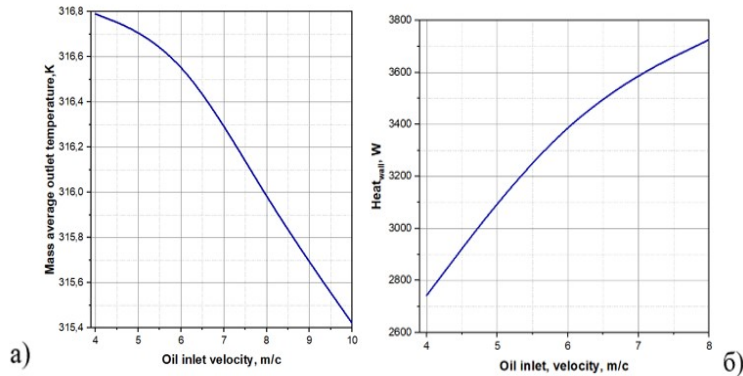


Рисунок 4 – Зависимости среднemasовых температур на выходе из теплообменника а) и теплового потока через поверхность трубы со стороны омывающей жидкости б) от скорости течения нефти на входе.

На рисунках 4а и б приведены графики зависимостей среднemasовой температуры и теплового потока через поверхность от скорости течения нефти  $v$  на входе. Из рисунка видно, что при скорости  $v = 6$  м/с, число Рейнольдса достигает  $Re = 2880$ , где происходит ламинарно-турбулентный переходный режим.

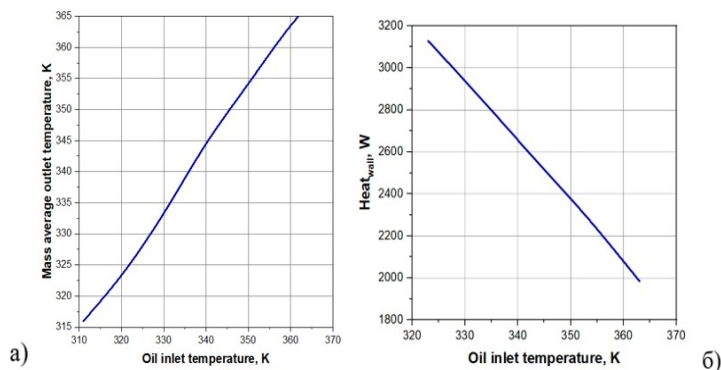


Рисунок 5 – Зависимости среднемассовых температур на выходе из теплообменника а) и теплового потока через поверхность трубы со стороны омывающей жидкости б) от температуры на входе.

Варьируя температуру нефти на входе в трубу от 313K до 363K, получаем рост температуры нефти на выходе из теплообменника, график зависимости которой приведен на рисунке 5а. Из графика видно, что эта зависимость имеет линейный характер. Обратная картина наблюдается на рисунке 5б, где показана зависимость теплового потока на поверхности трубы от температуры на входе. Видно, что с увеличением температуры нефти на входе разность между температурой нефти и температуры омывающей жидкости (тепловой поток) уменьшается.

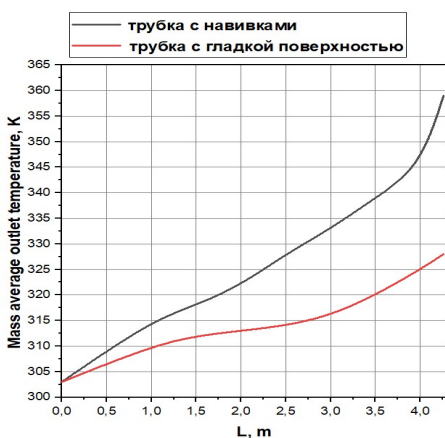


Рисунок 6 – Зависимость среднемассовой температуры нефти на выходе для трубки с гладкой и геликоидной поверхностью с числом закруток  $N=10-40$ .

На рисунке 6 приведены сравнительные графики зависимости среднемассовой температуры нефти на выходе для трубки с гладкой и геликоидной поверхностью с числом закруток  $N$  от 10 до 40 с шагом 10. Как видно из рисунка, для геликоидной трубки теплообмен происходит интенсивнее, это объясняется тем, что за счет навивок увеличивается площадь теплового потока.

В литературе в качестве экспериментальных данных в основном приведена зависимость числа Нуссельта ( $Nu$ ) от числа Рейнольдса ( $Re$ ). У нас же приведена зависимость теплового потока от скорости течения нефти на входе, которую можно пересчитать через число Рейнольдса. Сравнение результатов расчета в виде зависимости чисел ( $Nu$ ) и ( $Re$ ) предполагается осуществить в следующих расчетах и показать эти данные в очередной статье.

#### 4. Выводы

Таким образом, из приведенных результатов можно заключить, что теплообменники с геликоидными формами (на примере трубки с навивками) имеют более лучшие показатели по теплообменным свойствам, чем теплообменники с гладкими трубками. Это связано с тем, что закрученные навивки приводят к турбулизации потока нефти, из-за чего повышается теплообмен между слоями жидкости за счет диффузионного процесса. Также на повышение температуры нефти влияет небольшое увеличение поверхности трубки за счет выемок, что увеличивает поток тепла через поверхность трубки. Исследования показали, что значение среднемаассовой температуры нефти на выходе из трубки в геликоидном теплообменнике в отличие от теплообменника с гладкими трубками интенсивнее, достигает максимального значения, что составляет 9,45%.

#### Список литературы

- 1 Borse D, Bute J.V. A Review on Helical Coil Heat Exchanger // International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology. -2018. -№6. -P.492-497. <https://doi.org/10.22214/ijraset.2018.2070>
- 2 Курманова Д.Е., Джайчибеков Н.Ж., Волков К.Н., Карпенко А.Г. Численный расчет гидродинамики теплоносителей с учетом зависимости вязкости от температуры // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2022.- Том 141. №4. - С.28-41. <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/4.2>
- 3 Курманова Д.Е. Распределение температуры теплоносителей вдоль теплообменного аппарата // Сборник материалов XVII международной научной конференции студентов и молодых ученых "GYLYM JANE BILIM - 2022". -Астана, 2022. - С. 1603-1607. <https://smart.enu.kz/api/serve?path=/general/files/6c96824d-24df-4d98-83a3-67ddd36551e.pdf>
- 4 Kurmanova D.Y., Jaichibekov N. Zh., Karpenko A.G., Volkov K.N.. Numerical modeling and calculation of heat transfer between heat carriers in heat exchangers // Вестник Карагандинского университета. Серия "Физика". - 2023. -Т. 109. -№1. - С. 59-70. DOI 10.31489/2023PH1/59-70
- 5 Mehrabi M., Pesteei S., Pashae G., T. Modeling of heat transfer and fluid flow characteristics of helicoidal double-pipe heat exchangers using Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS) // International Communications in Heat and Mass Transfer. - 2011. -Т. 38. -P. 525-532.
- 6 Pramod S. Purandarea , Mandar M. Leleb , Rajkumar Guptac. Parametric Analysis of Helical Coil Heat Exchanger // International Journal of Engineering Research and Technology. -2012. - Vol. 1. Is. 8.
- 7 Inyang U, Uwa I. Heat Transfer in Helical Coil Heat Exchanger // Advances in Chemical Engineering and Science. -2022. -12. -P. 26-39. doi: 10.4236/aces.2022.121003.
- 8 Волков К.Н., Емельянов В.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа: учебное пособие.- Москва: ФИЗМАТЛИТ. -2012.- 468 с.
- 9 Kurmanova D., Jaichibekov N., Karpenko A., Volkov K. Modelling and Simulation of Heat Exchanger with Strong Dependence of Oil Viscosity on Temperature // Fluids. -2023.-8. -95.-P.1-18. <https://doi.org/10.3390/fluids8030095>

Д.Е.Курманова

*Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Қажымұқан, 13, Астана, 010008, Қазақстан*

#### Геликоидты жылу алмастырғыштағы жылу тасымалдағыш параметрлерін сандық модельдеу

**Аннотация:** Мақала тақырыбында геликоидты жылу алмастырғыштағы жылу алмасу процестерін сандық модельдеуге арналған. Мұнда қарқынды жылу алмастырғыш қолданылады. Бұл коррозияға төзімді материалдан жасалған профильді түтіктердің спираль тәрізді корпусына бекітілген жылу алмастырғыш (бұл мақалада жылытылатын түтікке арналған бір түтік және қыздырғыш салқындатқыштарға арналған бір түтік), олардың қабырғалары арқылы жылыту ортасының ағынынан қыздырылатын түтікке жылу беру жүзеге асырылады. Түтіктердің геликоидты профилі бар. Бұл дизайндағы жылу алмастырғыштардың негізгі айырмашылығы дәл түтіктердің профильді жылу алмасу бетінде жатыр. Жұмыста гибриді тәсіл қолданылады: сандық эксперименттен тұтқырлығы қатты өзгертін жылу тасымалдағыш (мұнай) ағынының күрделі өтпелі процестеріне тәуелділіктерді алу және жылу алмастырғыш үшін жылу алмасудың тұйықталған математикалық моделін құру. Жұмыста әртүрлі гидродинамикалық параметрлерге байланысты мұнайдың температуралық өрісін есептеу

нәтижелері келтірілген. Мұнай динамикасының сандық модельдеуі Ansys Fluent бағдарламалық кешенінде шешілді, онда Рейнольдс бойынша орташа Навье-Стокс стационарлық теңдеулері қолданылды. Сұйықтық ағыны мен жылу беруді сандық модельдеу декарттық координаттары есептеу аймағындағы үздіксіздік, импульс және энергия тасымалдау теңдеулерінің сандық шешімін қамтиды. Негізгі теңдеулерді іріктеу үшін құрылымдалмаған торлардағы шекті көлем әдісі және Coupled әдісі қолданылады. Тұтқыр емес ағындарды іріктеу MUSCL (monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws) схемасы арқылы жүзеге асырылады, ал тұтқыр ағындар - дәлдіктің 2-ші ретті орталықтандырылған схемасы. Есептеулерде біркелкі емес тор қолданылады, онда тор жасушаларының қалыңдауы мұнай температурасының градиенті маңызды болатын құбырдың қабырғаларына жақын жерде жасалады. Итерациялық процестің конвергенциясын бақылау үшін қажетті физикалық шамалардың алшақтық деңгейі және масса балансының теңдеуіне сәйкестігі тексеріледі. Тордың сезімталдығын зерттеу әртүрлі ажыратымдылықтағы торларды қолдана отырып, бірдей модельдеуді жүргізуден тұрады және әр торда конвергентті шешімнің қаншалықты өзгеретіні талданады. Қабырғаға жақын тордың ажыратымдылығы  $y^+ < 1$  деңгейінде бекітілген, ал есеп айырысу аймағының қалған бөлігіндегі тор ұяшықтарының саны (инфляциялық қабаттан тыс аймақтың бөлігі) өзгереді. Нәтижеге арналған тордың сезімталдығы құбырдың шығыс бөлігіндегі температураның таралуы бойынша бағаланады. Есептеулер барлық физикалық шамалардың алшақтық деңгейі үш ретке азайған кезде аяқталады, ал есеп айырысу аймағының кіріс және шығыс шекараларындағы жаппай шығындардың сәйкес келмеуі  $10^{-3}$  кг/с-тан аз болады.

**Түйін сөздер:** жылу алмасу, сандық модельдеу, геликоидты жылу алмастырғыш, мұнай өнімі.

**D.Y. Kurmanova**

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan*

### Numerical modeling of coolant parameters in helicoid heat exchangers

**Abstract:** The article is devoted to the numerical simulation of heat exchange processes in a helicoid heat exchanger. An intensified heat exchanger is used here. The heat exchanger used is an intensified one, consisting of a bundle of profiled tubes fixed in a spiral-seam housing made of corrosion-resistant material. The article presents the case of one tube for heating and one tube for heated heat carriers. Heat transfer occurs from the flow of the heating medium to the flow of the heated one through tubes with a helicoid profile. The main difference between heat exchangers of this design is the profiled heat exchange surface of the tubes. This paper employs a hybrid approach to obtain dependencies for complex transients of the flow of a coolant (oil) with highly variable viscosity from a numerical experiment and constructing a closed mathematical model of heat transfer for a heat exchanger. The paper presents the results of calculations of the oil temperature field depending on various hydrodynamic parameters. Numerical modeling of oil dynamics was solved in the Ansys Fluent software package, where stationary Navier-Stokes equations averaged by Reynolds were used. The numerical simulation of fluid flow and heat transfer includes the numerical solution of the equations of continuity, momentum and energy transfer in the computational domain in Cartesian coordinates. To achieve this, we use the finite volume method on unstructured grids and the Coupled method to discretize the basic equations. The discretization of inviscid flows is carried out using the MUSCL scheme (Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws), and viscous flows are a centered scheme of the 2nd order of accuracy. The calculations use an uneven grid in which the thickening of the grid cells is performed near the walls of the pipe, where the oil temperature gradient is significant. To control the convergence of the iterative process, the level of discrepancy of the desired physical quantities and compliance with the mass balance equation are checked. The grid sensitivity study consists of running the same simulation using grids with different resolutions and analyzing how much the convergent solution changes with each grid. The resolution of the grid near the wall is fixed at  $y^+ < 1$ , and the number of grid cells in the remaining part of



the calculation area (part of the area outside the inflation layer) varies. The sensitivity of the grid to the result is estimated by the temperature distribution in the outlet section of the pipe. Calculations are completed when the level of discrepancy of all physical quantities decreases by three orders of magnitude, and the mismatch of mass expenditures at the input and output boundaries of the calculated area becomes less than  $10^{-3}$  kg/s.

**Keywords:** heat transfer, viscosity, hydrodynamics, petroleum products, numerical modeling, laminar-turbulent transition.

## References

1. Borse, D., Bute, J.V. A Review on Helical Coil Heat Exchanger, International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology. 2018. №6. P. 492-497. Available at: <https://doi.org/10.22214/ijraset.2018.2070>
2. Kurmanova D.Y., Jaichibekov N.Zh., Volkov K.N., Karpenko A.G. Chislenniye raschet gidrodinamiki teplonositelei s uchetom zavisimosti vyazkosti ot temperatury [Numerical calculation of fluid dynamics of heat carriers taking into account the dependence of viscosity on temperature], Vestnik ENU im.L.N.Gumilyova. Matematika. Komp'uternye nauki. Mehanika [Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series]. 2022. Vol. 141. №4. P. 28-41. [in Russian]
3. Kurmanova D.Y. Raspredelenie temperatury teplonositelei vdol' teploobmennogo apparata [Temperature distribution of heat carriers along the heat exchanger], Sbornik materialov XVII Mezhdunarodnoi nauchnoi konferensii studentov i molodyh uchenykh "GYLYM JANE BILIM - 2022". [Collection of materials of the XVII International Scientific Conference of Students and Young Scientists "GYLYM JANE BILIM - 2022"], 2022. P. 1603-1607. [in Russian]
4. Kurmanova D.Y., Jaichibekov N. Zh., Karpenko A.G., Volkov K.N. Numerical modeling and calculation of heat transfer between heat carriers in heat exchangers. Vestnik Karagandinskogo universiteta. Seria "Fizika" [Bulletin of Karaganda University. Physics Series]. 2023. Vol. 109. №1. P. 59-70.
5. Mehrabi M., Pesteei S., Pashae G., T. Modeling of heat transfer and fluid flow characteristics of helicoidal double-pipe heat exchangers using Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS), International Communications in Heat and Mass Transfer. 2011. Vol. 38. P. 525-532.
6. Pramod S. Purandarea, Mandar M. Leleb, Rajkumar Gupta. Parametric Analysis of Helical Coil Heat Exchanger, International Journal of Engineering Research and Technology. 2012. 1 (02).
7. Inyang U. and Uwa I. Heat Transfer in Helical Coil Heat Exchanger, Advances in Chemical Engineering and Science. 12, 26-39. doi: 10.4236/aces.2022.121003.
8. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. Vychislitel'nye tehnologii v zadachah mehaniki zhidkosti i gaza. [Computational technologies in fluid and gas mechanics problems]. (Fizmatlit, 2012, 468p). [in Russian]
9. Kurmanova D., Jaichibekov N., Karpenko A and Volkov K. Modelling and Simulation of Heat Exchanger with Strong Dependence of Oil Viscosity on Temperature, Fluids. 2023. Vol. 95. №8. P. 1-18.

### Сведения об авторе:

*Курманова Динара.* – докторант 3 курса, кафедра Математического и компьютерного моделирования, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Кажымукан, 13, Астана, Казахстан. <https://orcid.org/0009-0009-9787-7426>.

*Kurmanova Dinara* - 3rd-year doctoral student, Department of Mathematical and computer modeling, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan, 13, Astana, Kazakhstan. <https://orcid.org/0009-0009-9787-7426>.

*Поступила: 05.06.2023. После повторной редакции: 29.01.2024.*

*Одобрена: 29.03.2024. Доступна онлайн: 30.03.2024.*

IRSTI: 27.33.15

L.N.Rajabova<sup>1</sup>, F.M.Akhmadov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Tajik National University, Rudaki Ave., 17, Dushanbe, Tajikistan*

<sup>2</sup> *International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan, Borbad str., 48/5,  
Dushanbe, Tajikistan*

(E-mail: <sup>1</sup> [lutfya62@mail.ru](mailto:lutfya62@mail.ru), <sup>2</sup> [farvar90@gmail.com](mailto:farvar90@gmail.com))

### SOLUTION OF A CAUCHY TYPE PROBLEM FOR AN INTEGRAL EQUATION OF VOLTERRA TYPE WITH SINGULAR KERNELS, WHEN THE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATIONS ARE COMPLEX CONJUGATE

**Abstract:** In this paper, we study a two-dimensional integral equation of Volterra type with a singularity and a logarithmic singularity in one variable and a strong singularity in another variable. Solving an integral equation with special kernels in the case when the coefficients of the equation are related to each other reduces to solving one-dimensional integral equations of Volterra type with special kernels. Using the connection between the considered integral equations and ordinary differential equations with singular coefficients, depending on the sign of the coefficients of the equation and the roots of the characteristic equations, explicit solutions of the studied two-dimensional integral equation are obtained.

Note that explicit solutions of a two-dimensional integral equation of Volterra type with a singularity and a logarithmic singularity in one variable and a strong singularity in another variable can contain from one to four arbitrary functions. Cases have also been established when the solution to a two-dimensional integral equation of Volterra type with a singularity and a logarithmic singularity in one variable and a strong singularity in another variable is unique.

If the characteristic equations have complex conjugate roots, then the given integral equation with singular kernels has a unique solution or the explicit solutions contain two or four arbitrary functions. In the latter cases, the correct formulation was clarified and explicit solutions of Cauchy type problems were obtained.

**Keywords:** two-dimensional integral equation, singular line, logarithmic singularity, strongly singular kernel, differential equation, singular coefficients, complex conjugate roots.

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2024/1.3>

**2000 Mathematics Subject Classification: 97E10; 97-02.**

#### INTRODUCTION

One of the well-known ways to study various problems of mathematical physics is the theory of singular integral equations. One-dimensional and multidimensional, linear and nonlinear integral equations of Volterra type with a singular kernel are often encountered in solving various applied problems in mathematics, physics, elasticity theory, and the theory of conformal mappings.

Note that the work of A.P. Soldatov [1] is devoted to the study of the characteristic integral equation with the Cauchy kernel, obtaining the solvability condition and an explicit formula for representing the solution. Singular integral equations with a singularity of logarithmic or power type, also simultaneously with weak and strong singularities in various combinations, were studied in [2]. Works [3-6] are devoted to the study of weakly singular and singular integral equations of various types, the construction and justification of computational schemes for the studied equations.

The works of N. Radjabov [7-8] are devoted to obtaining explicit varieties of solutions and studying boundary value problems of the Cauchy type of integral equations of Volterra type

with a fixed boundary and internal singular, super-singular kernel, as well as integral equations with a logarithmic and singular singularity of the kernel.

Note that in [9-12] explicit manifolds of solutions of a two-dimensional integral equation of Volterra type (1) with a logarithmic and singular singularity in one of the variables and a strong boundary fixed singularity in the other variable were obtained, in the case when the coefficients of the equation are related to each other, also the roots of characteristic equations are real-different, real-equal, complex conjugate. In [13], the solution to the Volterra type integral equation with singular kernels (1) was obtained in the form of generalized functional series.

Note that in [14]-[15] problems of Cauchy type were studied, when the roots of the characteristic equations of a two-dimensional integral equation with singular kernels (1) were real and different, real and equal.

The proposed work is devoted to the formulation and solution of Cauchy type problems for determining arbitrary functions in the resulting solution, when the roots of the characteristic equations of the integral equation (1) are complex conjugate.

Let  $D$  be a rectangle  $D = \{(x, y) : a < x < a_1, b < y < b_1\}$  with boundaries  $\Gamma_1 = \{y = b, a < x < a_1\}$ ,  $\Gamma_2 = \{x = a, b < y < b_1\}$ .

In the domain  $D$  we study an integral equation of Volterra type with special kernels of the form:

$$u(x, y) + \int_a^x \left[ p + q \ln \left( \frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{u(t, y)}{t-a} dt + \int_b^y \left[ \lambda + \mu (\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)) \right] \frac{u(x, s)}{(s-b)^\beta} ds + \int_a^x \left[ p_1 + q_1 \ln \left( \frac{x-a}{t-a} \right) \right] \frac{dt}{t-a} \int_b^y \left[ \lambda_1 + \mu_1 (\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)) \right] \frac{u(t, s)}{(s-b)^\beta} ds = f(x, y), \quad (1)$$

where  $p, q, \lambda, \mu, p_1, q_1, \lambda_1, \mu_1$  — given constants,  $f(x, y)$  — given function,  $u(x, y)$  — sought function,  $\omega_b^\beta(s) = [(\beta - 1)(y - b)^{\beta-1}]^{-1}, \beta > 1$ .

We will look for a solution to the integral equation (1) in the class of functions  $u(x, y) \in C(\overline{D})$  vanishing on  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  with asymptotic behavior:

$$u(x, y) = o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ at } x \rightarrow a, \\ u(x, y) = o[(y - b)^\nu], \quad \nu > 2(\beta - 1) \text{ at } y \rightarrow b.$$

**Problem  $K_1$ .** Need to find a solution integral equation with special kernels (1) from class  $C(\overline{D})$ , vanishing on  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ , subject to the conditions  $p < 0, \lambda < 0, \Delta_1 = p^2 - 4q < 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0, p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$ , also conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[ \left( \frac{|p|}{2} \sin(\Omega(x)) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cos(\Omega(x)) \right) u(x, y) - \sin(\Omega(x)) D_x(u(x, y)) \right] \right\}_{x=a} = A_1(y), \\ \left\{ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[ \left( -\frac{|p|}{2} \cos(\Omega(x)) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \sin(\Omega(x)) \right) u(x, y) + \cos(\Omega(x)) D_x(u(x, y)) \right] \right\}_{x=a} = A_2(y), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[ \left( -\frac{\lambda}{2} \sin(\Theta(y)) - \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \cos(\Theta(y)) \right) u(x, y) - \sin(\Theta(y)) D_y(u(x, y)) \right] \right\}_{y=b} = B_1(x), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[ \left( \frac{\lambda}{2} \cos(\Theta(y)) - \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \sin(\Theta(y)) \right) u(x, y) + \cos(\Theta(y)) D_y(u(x, y)) \right] \right\}_{y=b} = B_2(x), \end{array} \right.$$

where  $B_1(x), B_2(x), A_1(y), A_2(y)$  are given continuous functions,  $\Theta(y) = \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \omega_b^\beta(y), \Omega(x) = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln(x - a)$ .

**Solution to problem  $K_1$ .**

Solution of integral equation (1) at  $p < 0, \lambda < 0, \Delta_1 = p^2 - 4q < 0, \Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0, p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1$ , according to [6], has the form:

$$u(x, y) = (x - a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos(\Omega(x)) \theta_1(y) + \sin(\Omega(x)) \theta_2(y) \right\} + e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left\{ \cos(\Theta(y)) \Phi_1(x) + \sin(\Theta(y)) \Phi_2(x) \right\} + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)], \quad (2)$$

where

$$\Phi_i(x) = \varphi_i(x) + \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}} \times \\ \times \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}} \left[ (p^2-4q) \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) \right] \frac{\varphi_i(x)dt}{t-a},$$

$\varphi_i(x), \theta_i(y), i = 1, 2$  are arbitrary continuous functions of the points  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ ,

$$E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x,y)] = f(x,y) + \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}} \times \\ \times \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}} \left[ (p^2-4q) \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) \right] \frac{f(t,y)}{t-a} dt + \\ + \frac{2}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}} \int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))} \times \\ \times \left[ \left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right) + \frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right) \right] \frac{f(x,s)ds}{(s-b)^\beta} + \\ + \frac{1}{\sqrt{4q-p^2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}} \int_b^y e^{\frac{\lambda}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))} \times \\ \times \left[ \left(\frac{\lambda^2-2\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right) + \frac{\lambda\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))\right) \right] \frac{ds}{(s-b)^\beta} \times \\ \times \int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\frac{|p|}{2}} \left[ (p^2-4q) \sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) - p\sqrt{4q-p^2} \cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right) \right] \frac{f(t,s)}{t-a} dt.$$

Let's represent solution (2) in the form:

$$u(x,y) = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos(\Omega(x))\theta_1(y) + \sin(\Omega(x))\theta_2(y) \right\} + T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)], \quad (3)$$

where

$$T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)] = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left\{ \cos(\Theta(y))\Phi_1(x) + \sin(\Theta(y))\Phi_2(x) \right\} + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x,y)].$$

Differentiating equality (3), then multiplying by  $x-a$ , we obtain:

$$D_x u(x,y) = (x-a) \frac{du(x,y)}{dx} = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{|p|}{2} \cos(\Omega(x)) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \sin(\Omega(x)) \right] \theta_1(y) + \left[ \frac{|p|}{2} \sin(\Omega(x)) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cos(\Omega(x)) \right] \theta_2(y) \right\} + \\ + D_x T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)].$$

From the obtained equalities for defining arbitrary functions  $\theta_1(y)$  and  $\theta_2(y)$  we obtain a linear algebraic system of equations of the form:

$$\begin{cases} \cos(\Omega(x))\theta_1(y) + \sin(\Omega(x))\theta_2(y) = (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} [u(x,y) - T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)]], \\ \left[ \frac{|p|}{2} \cos(\Omega(x)) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \sin(\Omega(x)) \right] \theta_1(y) + \left[ \frac{|p|}{2} \sin(\Omega(x)) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cos(\Omega(x)) \right] \theta_2(y) = \\ = (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} [D_x u(x,y) - D_x T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)]] \end{cases}$$

To determine the unknowns  $\theta_1(y)$  and  $\theta_2(y)$  we use Cramer's method:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\Omega(x)) & \sin(\Omega(x)) \\ \frac{|p|}{2} \cos(\Omega(x)) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \sin(\Omega(x)) & \frac{|p|}{2} \sin(\Omega(x)) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cos(\Omega(x)) \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2},$$

$$\Delta_{\theta_1(y)} = \begin{vmatrix} (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} [u(x,y) - T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)]] & \sin(\Omega(x)) \\ (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} [D_x u(x,y) - D_x T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)]] & \frac{|p|}{2} \sin(\Omega(x)) + \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \cos(\Omega(x)) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \theta_1(y),$$

$$\Delta_{\theta_2(y)} = \begin{vmatrix} \cos(\Omega(x)) & (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} [u(x,y) - T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)]] \\ \frac{|p|}{2} \cos(\Omega(x)) - \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \sin(\Omega(x)) & (x-a)^{-\frac{|p|}{2}} [D_x u(x,y) - D_x T_1[\varphi_1(x), \varphi_2(x), f(x,y)]] \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \theta_2(y).$$

From here we find:

$$\begin{cases} \theta_1(y) = \frac{\Delta_{\theta_1(y)}}{\Delta} = \theta_1(y) \equiv A_1(y), \\ \theta_2(y) = \frac{\Delta_{\theta_2(y)}}{\Delta} = \theta_2(y) \equiv A_2(y). \end{cases}$$

In a similar way, we represent solution (2) in the form:

$$u(x,y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left\{ \cos(\Theta(y)) \Phi_1(x) + \sin(\Theta(y)) \Phi_2(x) \right\} + T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)], \quad (4)$$

where

$$T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)] = (x-a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos(\Omega(x)) \theta_1(y) + \sin(\Omega(x)) \theta_2(y) \right\} + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x,y)].$$

Calculating the derivative by (4), then multiplying by  $(y-b)^\beta$ , we obtain:

$$D_y u(x,y) = (y-b)^\beta \frac{du(x,y)}{dy} = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \times$$

$$\times \left\{ \left[ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \sin(\Theta(y)) - \frac{\lambda}{2} \cos(\Theta(y)) \right] \Phi_1(x) - \left[ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \cos(\Theta(y)) + \frac{\lambda}{2} \sin(\Theta(y)) \right] \Phi_2(x) \right\} +$$

$$+ D_y T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)].$$

From the obtained equalities for determining the functions  $\Phi_1(x)$  and  $\Phi_2(x)$  we obtain a linear algebraic system of equations of the form:

$$\begin{cases} \cos(\Theta(y)) \Phi_1(x) + \sin(\Theta(y)) \Phi_2(x) = e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} [u(x,y) - T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)]], \\ \left[ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \sin(\Theta(y)) - \frac{\lambda}{2} \cos(\Theta(y)) \right] \Phi_1(x) - \left[ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \cos(\Theta(y)) + \frac{\lambda}{2} \sin(\Theta(y)) \right] \Phi_2(x) = \\ = e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} [D_y u(x,y) - D_y T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)]]. \end{cases}$$

To solve the system of equations we use the Cramer method:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(\Theta(y)) & \sin(\Theta(y)) \\ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \sin(\Theta(y)) - \frac{\lambda}{2} \cos(\Theta(y)) & -\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \cos(\Theta(y)) - \frac{\lambda}{2} \sin(\Theta(y)) \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2},$$

$$\Delta_{\Phi_1(x)} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} [u(x,y) - T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)]] & \sin(\Theta(y)) \\ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} [D_y u(x,y) - D_y T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)]] & -\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \cos(\Theta(y)) - \frac{\lambda}{2} \sin(\Theta(y)) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \Phi_1(x),$$

$$\Delta_{\Phi_2(x)} = \begin{vmatrix} \cos(\Theta(y)) & e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} [u(x,y) - T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)]] \\ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \sin(\Theta(y)) - \frac{\lambda}{2} \cos(\Theta(y)) & e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} [D_y u(x,y) - D_y T_2[\theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)]] \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \Phi_2(x).$$

From here we find:

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = \frac{\Delta_{\Phi_1(x)}}{\Delta} = \Phi_1(x) \equiv B_1(x), \\ \Phi_2(x) = \frac{\Delta_{\Phi_2(x)}}{\Delta} = \Phi_2(x) \equiv B_2(x). \end{cases}$$

### MAIN RESULTS

From the above considerations the following statement follows about the solvability of the problem  $K_1$  :

**Theorem 1.** *Let the coefficients in the integral equation (1) satisfy the conditions of the problem  $K_1$ , the right side satisfy the conditions  $f(x, y) \in C(\overline{D})$ ,  $f(a, b) = 0$  with asymptotic behavior on  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  :*

$$\begin{aligned} f(x, y) &= o[(x - a)^\delta], \quad \delta > \frac{|p|}{2} \text{ at } x \rightarrow a, \\ f(x, y) &= o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y - b)^\nu], \quad \nu > 2(\beta - 1) \text{ at } y \rightarrow b. \end{aligned}$$

Then problem  $K_1$  has a unique solution, which is expressed by the equality:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (x - a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos(\Omega(x))A_1(y) + \sin(\Omega(x))A_2(y) \right\} + \\ &+ e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left\{ \cos(\Theta(y))B_1(x) + \sin(\Theta(y))B_2(x) \right\} + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)]. \end{aligned}$$

**Problem  $K_2$ .** Need to find a solution integral equation with special kernels (1) from class  $C(\overline{D})$ , vanishing on  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ , subject to the conditions  $p < 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0$ ,  $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$ ,  $p = p_1$ ,  $q = q_1$ ,  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\mu = \mu_1$ , also conditions:

$$\begin{cases} l \left\{ (x - a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[ \left( \frac{|p|}{2} \sin(\Omega(x)) + \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \cos(\Omega(x)) \right) u(x, y) - \sin(\Omega(x))D_x(u(x, y)) \right] \right\}_{x=a} = A_1(y), \\ \left\{ (x - a)^{-\frac{|p|}{2}} \left[ \left( -\frac{|p|}{2} \cos(\Omega(x)) + \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} \sin(\Omega(x)) \right) u(x, y) + \cos(\Omega(x))D_x(u(x, y)) \right] \right\}_{x=a} = A_2(y), \end{cases}$$

where  $A_1(y)$ ,  $A_2(y)$  – given continuous functions.

To solve problem  $K_2$  using the method for solving problem  $K_1$ , we arrive at the following statement:

**Theorem 2.** *Let the coefficients in the integral equation (1) satisfy the conditions of the problem  $K_2$ , the right side satisfy the conditions  $f(x, y) \in C(\overline{D})$ ,  $f(a, b) = 0$  with asymptotic behavior on  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  :*

$$\begin{aligned} f(x, y) &= o[(x - a)^{\delta_1}], \quad \delta_1 > \frac{|p|}{2} \text{ at } x \rightarrow a, \\ f(x, y) &= o[(y - b)^{\nu_1}], \quad \nu_1 > 2(\beta - 1) \text{ at } y \rightarrow b. \end{aligned}$$

Then problem  $K_2$  has a unique solution, which is expressed by the equality:

$$u(x, y) = (x - a)^{\frac{|p|}{2}} \left\{ \cos(\Omega(x))A_1(y) + \sin(\Omega(x))A_2(y) \right\} + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)].$$

**Problem  $K_3$ .** Need to find a solution integral equation with special kernels (1) from class  $C(\overline{D})$ , vanishing on  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ , subject to the conditions  $p > 0$ ,  $\lambda < 0$ ,  $\Delta_1 = p^2 - 4q < 0$ ,  $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu < 0$ ,  $p = p_1$ ,  $q = q_1$ ,  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\mu = \mu_1$ , also conditions:

$$\begin{cases} \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[ \left( -\frac{\lambda}{2} \sin(\Theta(y)) - \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \cos(\Theta(y)) \right) u(x, y) - \sin(\Theta(y))D_x(u(x, y)) \right] \right\}_{y=b} = B_1(x), \\ \left\{ e^{-\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left[ \left( \frac{\lambda}{2} \cos(\Theta(y)) - \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \sin(\Theta(y)) \right) u(x, y) + \cos(\Theta(y))D_x(u(x, y)) \right] \right\}_{y=b} = B_2(x), \end{cases}$$

where  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$  are given continuous functions.

The statement is true:

**Theorem 3.** *Let the coefficients in the integral equation (1) satisfy the conditions of the problem  $K_3$ , the right side satisfy the conditions  $f(x, y) \in C(\overline{D})$ ,  $f(a, b) = 0$  with asymptotic behavior on  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  :*

$$\begin{aligned} f(x, y) &= o[(x - a)^\varepsilon], \quad \varepsilon > 0 \text{ at } x \rightarrow a, \\ f(x, y) &= o[e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)}(y - b)^{\nu_2}], \quad \nu_2 > 2(\beta - 1) \text{ at } y \rightarrow b. \end{aligned}$$

Then problem  $K_3$  has a unique solution, which is expressed by the equality:

$$u(x, y) = e^{\frac{\lambda}{2}\omega_b^\beta(y)} \left\{ \cos(\Theta(y))B_1(x) + \sin(\Theta(y))B_2(x) \right\} + E_{p,q,\lambda,\mu}^{(x,y)} [f(x, y)].$$

## CONCLUSION

In [9-12], explicit varieties of solutions to a two-dimensional integral equation of Volterra type with special and strongly special fixed boundary lines were obtained, which, depending on the signs of the coefficients of the equation and the roots of the characteristic equations, have from one to four arbitrary functions depending on one variable. The case is highlighted when the solution to a two-dimensional integral equation of Volterra type with singular and strongly singular kernels is unique, coinciding with the classical theory of integral equations with a regular kernel or a kernel with a weak singularity. In this work, in the case where the roots of the characteristic equations are complex conjugate, Cauchy type problems are posed and solved to determine arbitrary functions in the resulting solutions.

### Authors' contribution

The formulation of the problem and the method of solution were proposed by L.N. Rajabova, all calculations performed by F.M. Akhmadov.

## References

- 1 Солдатов А.П. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае // Научные ведомости БелГУ. Серия математика-физика. -2011. -Т. 112. -№17. -С.1-7.
- 2 Плещинский Н.Б. Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре. -Казань: Издательство КФУ, 2018. -160 с.
- 3 Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. -Киев: Наукова думка, 2002. -345 с.
- 4 Расолько Г.А. Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов // -Минск: Изд-во БГУ. -2017. -239 с.
- 5 Байков И.В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений // -Пенза: Изд-во ПГУ. -2004. -297 с.
- 6 Елисеева Т.В. Интегральные уравнения и вариационное исчисление. -Пенза: Изд-во ПГУ, 2008. -102 с.
- 7 Раджабов Н. Об одном классе модельного сверх-сингулярного интегрального уравнения, обобщающий одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверх-сингулярной точкой в ядре // Материалы III международной конференции Проблемы дифференциальных уравнений анализа и алгебры. -Актобе.- 2015.- С. 202-206.
- 8 Раджабов Н. Об одном классе модельного сингулярного интегрального уравнения, обобщающего одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сингулярной точкой в ядре // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук - 2012. - №1. - С. 21-32.
- 9 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук - 2021. - №1. - С.78-89.
- 10 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями // ДНАН РТ. - 2021. - Т.64. - №(5-6). - С.283-290.
- 11 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2021. -Т. 137. -№4. -Р. 6-13.
- 12 Ахмадов Ф.М. Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряженные // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук.-2021.- №4.- С.119-128.
- 13 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М.О явных решениях двумерного интегрального уравнения типа вольтерра с граничными особой и сильно-особой линиями, когда параметры уравнения не связаны между собой // Материалы международной научно-практической конференции, Современные проблемы математики и её приложения, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы. -Душанбе. -ДМТ-20-21 октября. -2022. -С. 176- 179.
- 14 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. Задачи типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничными особыми и сильно-особыми линиями // ДНАН РТ. -2023. -Т.66. -№(3-4). - С.178-186.

15 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. Задача типа Коши для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные // ДМТ-(05 октября). -2023. -С.154-157.

Л.Н. Раджабова <sup>1</sup>, Ф.М. Ахмадов <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Тэҷисқ ӯлттық университеті, Рудақи дағз., 17, Душанбе, Тэҷисқстан*

<sup>2</sup> *Тэҷисқстан халықаралық туризм және кәсіпкерлік университеті, Фирдауси дағз., 48/5, Душанбе, Тэҷисқстан*

**Сипаттамалық теңдеулердің шешімдері комплексі-түйіндес болған жағдайда ерекше ядролы Вольтерра типті интегралдық теңдеулер үшін Коши типті есептің шешімі**

**Аннотация:** Мақалада бірінші айнымалысы бойынша ерекшеліктері және логарифмдік ерекшеліктері, екінші айнымалы бойынша қатты ерекшелігі бар Вольтерра типті екі өлшемді интегралдық теңдеу қарастырылады. Теңдеу шешімдері өзара байланысқан болған жағдайда ерекше ядролы интегралдық теңдеулер ерекше ядролы Вольтерра типті бірөлшемді интегралдық теңдеулерді шешуге әкелінеді. Теңдеудің коэффициенттерінің таңбалары мен сипаттамалық теңдеу шешімдеріне сәйкес қарастырылып отырған интегралдық теңдеулер мен сингулярлы коэффициентті жай дифференциалдық теңдеулер арасындағы байланысты қолдана отырып, екі өлшемді интегралдық теңдеудің айқын шешімдері табылды.

Ерекшеліктері және бірінші айнымалы бойынша логарифмдік, бірінші айнымалысы бойынша ерекшеліктері және логарифмдік ерекшеліктері, екінші айнымалы бойынша қатты ерекшелігі бар Вольтерра типті екі өлшемді интегралдық теңдеудің айқын шешімдері бірден төртке дейін кездейсоқ функцияларды қамтуы мүмкін екендігін атап өтейік. Ерекшеліктері және бірінші айнымалы бойынша логарифмдік, бірінші айнымалысы бойынша ерекшеліктері және логарифмдік ерекшеліктері, екінші айнымалы бойынша қатты ерекшелігі бар Вольтерра типті екі өлшемді интегралдық теңдеудің шешімдері жалғыз болатын жағдайлар да кездесті.

Егер сипаттамалық теңдеулердің комплексті-түйіндес шешімдері бар болса, онда ерекше ядролы интегралдық теңдеудің жалғыз шешімі болады немесе айқын шешімдері екі немесе төрт кездейсоқ функцияны қамтиды. Соңғы жағдайларда есеп қойылымының дұрыстығы анықталып, Коши типті есептің айқын шешімдері алынды.

**Түйін сөздер:** екі өлшемді интегралдық теңдеу, ерекше сызық, логарифмдік ерешелік, күшті-ерекше ядро, дифференциалдық теңдеу, сингулярлы коэффициенттер, комплексі-түйіндес шешімдер.

Л.Н. Раджабова <sup>1</sup>, Ф.М. Ахмадов <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Таджикский национальный университет, пр. Рудақи, 17, Душанбе, Таджикистан*

<sup>2</sup> *Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана, пр. Фирдавси, 48/5, Душанбе, Таджикистан*

**Решение задачи типа Коши для интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами, когда корни характеристических уравнений комплексно-сопряжённые**

**Абстракт:** В данной работе изучается двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью по одной переменной и сильной особенностью по другой переменной. Решение интегрального уравнения с особыми ядрами в случае, когда коэффициенты уравнения связаны между собой, сводится к решению одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми ядрами. Используя связь рассматриваемых интегральных уравнений с обыкновенными дифференциальными уравнениями с сингулярными коэффициентами, в зависимости от знака коэффициентов дифференциального уравнения и корней характеристических уравнений, получены явные решения изучаемого двумерного интегрального уравнения.

Отметим, что явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью по одной переменной и сильной особенностью по другой переменной может содержать от одного до четырех произвольных функций. Также установлены случаи, когда решение двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью по одной переменной и сильной особенностью по другой переменной единственно.

Если характеристические уравнения имеют комплексно-сопряжённые корни, тогда данное интегральное уравнение с особыми ядрами имеет единственное решение или явные решения содержат две или четыре произвольные функции. В последних случаях выяснена корректная постановка и получены явные решения задач типа Коши.

**Ключевые слова:** двумерное интегральное уравнение, особая линия, логарифмическая особенность, сильно-особое ядро, дифференциальное уравнение, сингулярные коэффициенты, комплексно-сопряжённые корни.

## References

- 1 Soldatov A.P. Harakteristicheskoe singuljarnoe integral'noe uravnenie s jadrom Koshi v iskljuchitel'nom sluchae[A characteristic singular integral equation with a Cauchy kernel in an exceptional case], Nauchnye vedomosti BelGU. Serija matematika-fizika[Scientific Bulletin of BelSU. Mathematics-physics series]. 2011. №17(112). P. 1-7.
- 2 Pleshchinsky N.B. Singuljarnye integral'nye uravnenija so slozhnoj osobennot'ju v jadre [Singular integral equations with complex singularity in the core]. Kazan: KFU Publishing House, 2018. 160 p.
- 3 Dovgiy S.A., Lifanov I.K. Metody reshenija integral'nyh uravnenij [Methods for solving integral equations]. Kiev: Naukova dumka [Naukova dumka], 2002. 345 p.
- 4 Rasolko G.A. Chislenoe reshenie nekotoryh singuljarnyh integral'nyh uravnenij s jadrami Koshi metodom ortogonal'nyh mnogochlenov [Numerical solution of some singular integral equations with Cauchy kernels by orthogonal polynomial method]. Minsk.: Publishing House of BSU, 2017. 239 p.

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ Хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика, 2024, Том 146, №1

Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Математика. Компьютерные науки. Механика, 2024, Том 146, №1



- 5 Baykov I.V. Priblizhennyye metody resheniya singuljarnyh integral'nyh uravnenij [Approximate methods for solving singular integral equations]. Penza: Publishing House of PSU, 2004. 297 p.
- 6 Eliseeva T.V. Integral'nye uravnenija i variacionnoe ischislenie [Integral equations and calculus of variations]. Penza.: Publishing House of PSU, 2008. 102 p.
- 7 Rajabov N. Ob odnom klasse model'nogo sverh-singuljarnogo integral'nogo uravnenija, obobshhajushhij odnomernoe integral'noe uravnenie Vol'terra s levoj granichnoj sverh-singuljarnoj tochkoj v jadre [On one class of a model super-singular integral equation generalizing a one-dimensional Volterra integral equation with a left boundary super-singular point in the core], Materialy III mezhdunarodnoj konferencii Problemye differencial'nyh uravnenij analiza i algebrы -Aktobe [Proceedings of the III International Conference of Problems of Differential equations of Analysis and Algebra], Aktobe. 2015. P. 202-206.
- 8 Rajabov N. Ob odnom klasse model'nogo singuljarnogo integral'nogo uravnenija, obobshhajushhego odnomernoe integral'noe uravnenie Vol'terra s levoj granichnoj singuljarnoj tochkoj v jadre [On a class of model singular integral equation generalizing the one-dimensional Volterra integral equation with a left boundary singular point in the core], Vestnik Tadzhijskogo nacional'nogo universiteta. Serija estestvennyh nauk [Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences]. 2012. №1. P. 21-32.
- 9 Radjabova L.N., Akhmadov F.M. K teorii dvumernyh integral'nyh uravnenij tipа Vol'terra s granichnymi osoboj i sil'no-osobymi linijami, kogda korni harakteristicheskix uravnenij veshhestvennye i raznye [On the theory of two-dimensional Volterra-type integral equations with boundary special and strongly special lines when the roots of characteristic equations are real and different], Vestnik Tadzhijskogo nacional'nogo universiteta. Serija estestvennyh nauk [Bulletin of the Tajik National University. Series of Natural Sciences]. 2021. №1. P. 78-89.
- 10 Rajabova L.N., Akhmadov F.M. O nekotoryh sluchajah reshenija dvumernyh integral'nyh uravnenij tipа Vol'terra s granichnoj osoboj i sil'no-osobymi linijami [On some cases of solving two-dimensional Volterra-type integral equations with boundary singular and strongly singular lines], DNAN RT. 2021. Vol.64. №(5-6). P. 283-290.
- 11 Rajabova L.N., Akhmadov F.M. Javnye reshenija dvumernogo integral'nogo uravnenija tipа Vol'terra s granichnoj osoboj i sil'no-osobymi linijami, kogda korni harakteristicheskix uravnenij veshhestvennye, raznye i ravnye [Explicit solutions of a two-dimensional Volterra-type integral equation with boundary singular and strongly singular lines when the roots of the characteristic equations are real, different and equal], Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer science. Mechanics series. 2021. Vol. 137. №4. P. 6-13.
- 12 Akhmadov F.M. Javnye reshenija dvumernogo integral'nogo uravnenija tipа Vol'terra s granichnymi osobymi linijami, kogda korni harakteristicheskix uravnenij kompleksno-soprjazhennye [Explicit solutions of a two-dimensional Volterra-type integral equation with boundary special lines when the roots of the characteristic equations are complex conjugate], Vestnik Tadzhijskogo nacional'nogo universiteta.- Serija estestvennyh nauk [Bulletin of the Tajik National University.- Series of Natural sciences]. 2021. №4. P. 119-128.
- 13 Rajabova L.N., Akhmadov F.M. O javnyh reshenijah dvumernogo integral'nogo uravnenija tipа vol'terra s granichnymi osoboj i sil'no-osobymi linijami, kogda parametry uravnenija ne svjazany mezhdu soboj [On explicit solutions of a two-dimensional Volterra type integral equation with boundary special and strongly special lines when the equation parameters are not interconnected], Materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii, Sovremennyye problemy matematiki i ee prilozhenija, posvjashhjonnoj 20-letiju razvitija estestvennyh, tochnyh i matematicheskix nauk 2020-2040 gody [Materials of the international scientific and practical conference, Modern problems of mathematics and applications, dedicated to the 20th anniversary of the development of natural, exact and mathematical sciences 2020-2040]. Dushanbe. DMT-October 20-21. 2022. P. 176-179.
- 14 Rajabova L.N., Akhmadov F.M. Zadachi tipа Koshi dlja dvumernogo integral'nogo uravnenija tipа Vol'terra s granichnymi osobymi i sil'no-osobymi linijami [Cauchy type problems for a two-dimensional Volterra type integral equation with boundary special and strongly special lines], DNAN RT. 2023. Vol. 66. №(3-4). P. 178-186.
- 15 Rajabova L.N., Akhmadov F.M. Zadacha tipа Koshi dlja dvumernogo integral'nogo uravnenija tipа Vol'terra s osobymi linijami, kogda korni harakteristicheskix uravnenij veshhestvennye i ravnye [A Cauchy type problem for a two-dimensional Volterra type integral equation with special lines when the roots of the characteristic equations are real and equal], DMT-(October 05). 2023. P. 154-157.

**Information about authors:**

*Раджабова Лутфия Нусратовна* – *корреспонденция үшін автор*, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Тэжік ұлттық университеті, Рудаки даңғ., 17, Душанбе, Тэжікстан.

*Ахмадов Фарвариддин Муфазалович* – аға оқытушы, Экономикадағы математика кафедрасы, Тэжікстан халықаралық туризм және кәсіпкерлік университеті, Фирдауси даңғ., 48/5, Душанбе, Тэжікстан.

*Rajabova Lutfyia Nusratovna* – *corresponding author*, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tajik national University, Rudaki ave., 17, Dushanbe, Republic of Tajikistan.

*Ahmadov Farvariddin Mufazalovich* – Senior Lecturer, Department of Mathematics in Economics, International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan, Firdavsi ave., 48/5, Dushanbe, Republic of Tajikistan.

Received: 02.02.2024. After revision: 19.02.2024.  
Approved: 15.03.2024. Available online: 30.03.2024.

ГТАХР: 27.35.27, 89.57.25, 50.41.25, 30.51.33

М.Қ. Бейсембекова<sup>1</sup>, Г.М. Маемерова<sup>2</sup>, З.Б. Ракишева<sup>3</sup>

*Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, әл-Фараби даңғ., 71, Алматы,  
050040, Қазақстан*  
(E-mail: <sup>1</sup> [beisembekova.meruyert@gmail.com](mailto:beisembekova.meruyert@gmail.com), <sup>2</sup> [mayemerova@gmail.com](mailto:mayemerova@gmail.com),  
<sup>3</sup> [zaure.ra@gmail.com](mailto:zaure.ra@gmail.com))

## БАЛҚАШ КӨЛІНДЕГІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ БИІКТІГІН SMB ПАРАМЕТРЛІК ӘДІСІ АРҚЫЛЫ МОДЕЛЬДЕУ

**Абстракт:** Океанография, метеорология және жағалау инженериясы саласында толқын биіктігін талдау және болжау шешуші рөл атқарады. Толқын биіктіктерінің негізінде жатқан статистикалық үлестірімдер толқындардың орташа және ең жоғарғы биіктіктеріне қатысты олардың қалай таралуын сипаттау үшін қажет. Қазақстандағы ірі көлдердің толқын климатын, толқын параметрлерінің өзгеру динамикасын бақылауға арналған бірде-бір зерттеу жұмыстары, нұсқаулықтар мен мақалалар жазылмаған. Сәйкесінше, бұл зерттеудің мақсаты мен өзектілігі, сулы аймақтардың жай-күйін тиімді әдістер мен заманауи технологиялар мүмкіндіктерін қолданып бақылау, зерттеу, талдау және жағажай құрылымы мен құрылысын оңтайландыруға септігін тигізетін нұсқаулықтарға жол ашу. Бұл мақалада таралу функцияларының ішінде өте жиі қолданылатын Вейбулл және Рэлей таралу функциялары белгілі бір уақыт аралығында зерттеліп отырған аймақ үшін қоланылды. SMB, SEM, Wilson параметрлік әдістері арқылы толқын биіктігі модельденіп, жерсеріктік деректердің дұрыстығын тексеру мақсатында жұптық талдауға қолданылды. RADS альтиметриялық ақпараттар қорынан алынған мәліметтер Балқаш көлі үшін статистикалық талданды. Вейбулл және Рэлей таралу функциялары қарастырылып, жеке параметрлері анықталды. Толқынның орташа және максималды биіктігі екі таралу функциясының көмегімен бағаланды және бір бірімен салыстырылды.

**Түйін сөздер:** RADS альтиметриялық мәліметтер базасы, параметрлік әдістер, Вейбулл таралуы, Рэлей таралуы, толқын биіктігі, RStudio, Балқаш көлі.

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2024/1.4>

**2000 Mathematics Subject Classification: 97E10, 97-02.**

### 1. КІРІСПЕ

Орталық Азияның қақ ортасында орналасқан Балқаш көлі ежелден таңданыс пен зерттеу нысаны болған. Қазақстанда орналасқан бұл үлкен ішкі көл геологиялық ғажайып, өмірлік маңызды су ресурсы және бірегей экожүйе болып табылады. Соңғы жылдары альтиметрия деректерін пайдалану көлдегі толқындардың құрылымын, олардың қоршаған ортаға әсерін және әртүрлі қолданбалар үшін маңыздылығын тереңірек түсінуге мүмкіндік береді.

Балқаш көлінің ерекше географиясы, Шығыс және Батыс аймақтарының әр түрлі гидрологиялық және экологиялық жағдайларына әсер етеді. Көлдің шығыс бөлігі тұзды, ал батысы іле өзенінен тұщы су алады. Тұздылық пен судың құрамындағы бұл алшақтық көлдің динамикасына терең әсер етеді. XX-ғасырдың екінші жартысынан бастап терең зерттеле басталған бұл нысан көптеген зерттеушілердің ғылыми мақалаларында көрсетілген. Аталған көлдің құрылымындағы ерекшілікті Д.Г.Сапожников 1951 жылы жарық көрген, Балқаш көліне арналған «Балқаш көлінің геологиясы және заманауи

жауын-шашын көрсеткіші (Современные осадки и геология озера Балхаш)» кітабында үш морфологиялық түрі бар деп атап өткен. Дәл осы туындыда көлдің кезеңдік геологиялық, гидрологиялық, батиметриялық сипаттамалары толық аталып жазылған.

Қазіргі таңда Жерді қашықтықтан зондау (ЖҚЗ) әдісінің альтиметриялық ақпараттарын қолдану көптеген зерттеу жұмыстарына жаңашылдық алып келді. Альтиметриялық ақпараттар сулы аймақты зерттеуге өте қолайлы және тиімді түрі болып табылады. Альтиметриялық деректер толқын биіктігін нақты уақыт режимінде және ұзақ уақыт бойы бақылауға мүмкіндік береді.

Толқын биіктігінің өзгеруін бақылау арқылы біз көлдің динамикасы туралы түсінік беретін заңдылықтарды, тенденцияларды және ауытқуларды анықтай аламыз. Көлдегі су қабаттарын араластыруда толқындар шешуші рөл атқарады. Альтиметрия деректері толқын биіктігінің көлдегі температураның, қоректік заттардың және оттегінің таралуына қалай әсер ететінін түсінуге көмектеседі. Бұл ақпарат Балқаш көлінің су экожүйелерінің жай-күйін бағалау үшін баға жетпес маңызға ие. Балқаш көлі аймақтық климаттық өзгеріске ие, ал көлдегі толқындардың сипаты жергілікті ауа-райына байланысты. Альтиметриялық ақпараттар арқылы толқын биіктігінің өзгеруі ауа-райы жүйесіне, жауын-шашын үлесіне және аймақтағы температураның ауытқуына қалай әсер ететінін зерттеуге көмектеседі. Сонымен қатар көлде жүзу қауіпсіздігін қамтамасыз ету үшін де толқын биіктігінің мониторингісі өте маңызды.

## 2. ӘДІСТЕР

Қазіргі уақытта спутниктік деректер көптеген зерттеулерге көмегін тигізуде. Альтиметриялық деректер мен оптикалық деректер мүмкіндіктерін пайдалана отырып, су аймағының жағдайын анықтау, бақылау және болжау біздің еліміз үшін маңызды зерттеу бағыттарының бірі болып табылады. Қазақстан жеріндегі Балқаш, Алакөл, Зайсан сынды ірі көлдерге арналған зерттеу жұмыстары, мақалалар мен әдістемелік нұсқаулықтар соңғы 30-жыл ішінде жазылмаған, талданбаған, қаралмаған. Бұл зерттеу жұмысының мақсаты заманауи ғылыми зерттеу әдістерін қолданып, аталған аймақтар үшін ең тиімдісін анықтау, болашақ зерттеу жұмыстарына бастама ретінде бағыт-бағдар берер пайдалы нұсқаулыққа айналдыру.

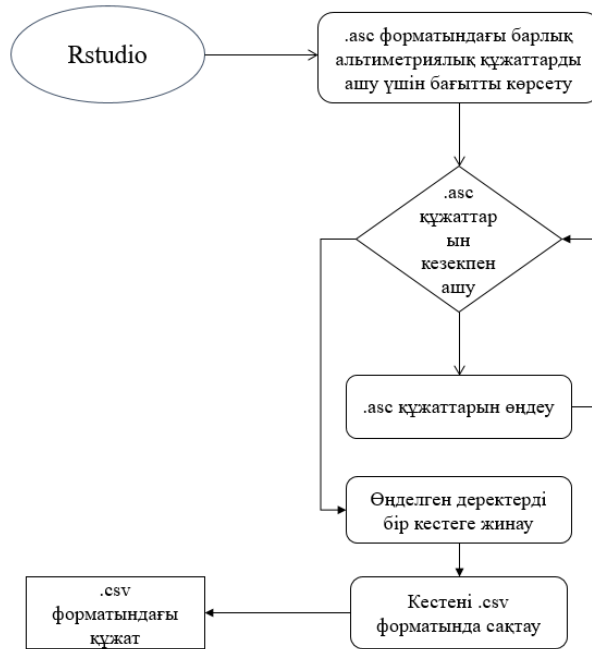
Осы мақалада келтірілген жерсерікті альтиметриялы ақпараттар радиолокациялы альтиметриялы деректер қоры – RADS (Radar Altimeter Database System) жүйесінен алынды (<http://rads.tudelft.nl/rads/data/authentication.cgi>) [1]. Альтиметриялы деректер қорында әртүрлі уақыт аралығы мен фазаларды қамтитын 12 жерсерік бар [2]. Жерсеріктік деректерді талдау үшін біз R-бағдарламалау тілі негізінде жасалған, Rstudio бағдарламалау жасақтамасын қолданамыз. Альтиметриялық ақпараттарды өңдеудің дұрыс алгоритмі осы зерттеу жұмысы барысында құрылды (1-сурет).

RADS деректер қорынан жиналып, өңдеуге дайын ақпараттардан кері шашырау көрсеткіші-13.5 коэффициентінен жоғары болатын деректерді алып тастаймыз, себебі бұл көрсеткіш су бетінің орташа квадраттық көлбеуімен байланысты (mean square slope (mms)). [3]-негізінде жасалған жүйе, кері шашырау көрсеткіші толқынның жоғарғы биіктігін анықтауда ескерілуі қажет көрсеткіштердің бірі екенін байқауға болады. Кері шағылу коэффициенті төмен болса, ол жел жылдамдығының жоғары екендігін білдіретін бір фактор, ал жел жылдамдығы жоғары болса онда сәйкес толқын биіктігінің көрсеткіші жоғары болу ықтималдығы жоғары екендігін білдіреді, сол себепті біз ақпараттарды өңдеу алдында дәл осындай сүзгі жасаймыз.

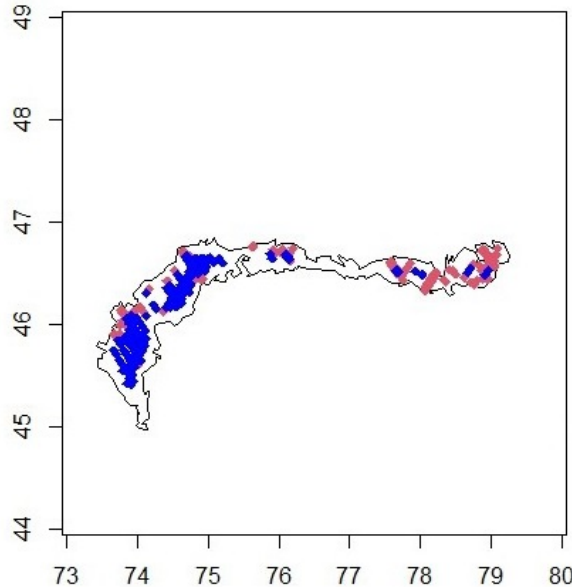
Зерттеу жұмысында Балқаш көліне тиісті көп мөлшерлі ақпаратқа ие Jason спутнигінің деректері алынды (2-сурет), мұндағы көк түс — жерсерік анықтаған сулар, қызыл түс — жағалау мен ұсақ аралдар. Бұл спутник 2002-жылдан бастап қазіргі таңға дейін үздіксіз мәліметтер жинауда.

Жағалау жағдайларына байланысты толқын биіктігінің таралуы, жағалауға қауіп төндіруі мүмкін толқындардың экстремалды биіктігін бағалау үшін өте маңызды [4]. Толқындық қауіптің формасы теңіз деңгейінің және бір уақытта пайда болатын

толқындардың бір мезгілде әсеріне байланысты. Экстремалды толқындар деп орташа толқын биіктігінен шама көрсеткіші жоғары болатын толқындар саналады [5]. Экстремалды толқынның пайда болу ықтималдығы салыстырмалы түрде аз, сондықтан тек эмперикалық өлшеу әдістерін немесе сандық әдістерді қолдана отырып, толқын биіктігін талдау экстремалды толқын биіктігін анықтауға және болжам жасауға мүмкіндік бермейді.



Сурет 1 – Альтиметриялық деректерді Rstudio бағдарламасында өңдеудің алгоритмі



Сурет 2 – Jason-спутнигінің 2002-2022 ж.ж. аралығында Балқаш көлін қамту тығыздығының көрсеткіші. Ендік у-өсінде, бойлық х-өсінде көрсетілген

Балқаш көліне тиісті жергілікті ақпарат тек жел жылдамдығы болғандықтан, толқын биіктігін модельдеп, жерсеріктік деректермен жұптық талдау жасау мақсатында параметрлік әдістер қолданылды. Қазіргі таңда, толқын биіктігін модельдеуге қолданылатын әдістер аз емес, алайда судың морфологиялық ерекшелігі мен құрылымына қарай тиімді әдісті таңдау маңызды. Свердруп Мунк Бретшнайдердің әдістері (SMB) —

бұл жаһандық су айдындарындағы  $H_s$  – толқындарының айтарлықтай биіктігін болжау үшін қолданылған әдіс [6]. Мақала авторлары Индонезия сулары мындаған ұсақ аралдан тұратындығын ескеріп, SMB әдісі арқылы модельденген толқын биіктігін болжам жасау үшін қолданды. Нәтижесінде SMB әдісі 0.05 орташа квадраттық қателік көрсеткішін көрсетсе, басқа қолданылған NLARX и ANN әдістері 0,24 және 0,16 шамаларына ие болды. Ал, Таллин технологиялық университетінің жағалау инженерия профессоры — Tarmo Soomere [7]-мақаласында бұл әдісті толқын климатын жылдам сипаттап, бағалауға мүмкіндік беретін әдіс деп атап кеткен. Suursaar Ulo "2003-2014 аралығындағы Эстония жағалауына қатысты толқындық уақыт қатарын талдау" мақаласында SMB әдісі арқылы жетіспеген ақпараттарды толықтырып, нәтижесінде толқын құрылымының маусымдық ерекшеліктеріне көз жеткізді. Ал, 2016 жылғы мақаласында дәл осы әдіспен ақпараттар қатарын толықтырып, 2100 жылға дейін толқын параметрлеріне болжам жасап, талдады.

Бұл мақалада Балқаш көлінің параметрлерін ескеріп, SMB, CEM, Wilson параметрлік әдістері қолданылды. Толқын биіктігін SMB-әдісі арқылы модельдеу (1)-формуламен есептелінсе, CEM және Wilson әдістеріне (2)-(3) формулалары қоданылады.

$$\frac{gH_s}{U_{10}^2} = 0,283 \tan h(0,0125 \left(\frac{gF}{U_{10}^2}\right)^{0,42}), \quad (1)$$

$$\frac{gH_s}{u_*^2} = 4,13 \times 10^{-2} \left(\frac{gF}{u_*^2}\right)^{0,5}, \quad C_D = 0,001(1,1 + 0,035U_{10}), \quad (2)$$

$$\frac{gH_s}{U_{10}^2} = 0,30 \left[1 - \left[1 + 0,004 \left(\frac{gF}{U_{10}^2}\right)^{0,5}\right]^{-2}\right], \quad (3)$$

мұндағы  $g$  - еркін түсу үдеуі ( $m/c^2$ ),  $F$  - алу ұзындығы ( $m$ ),  $(U_{10})$  - теңіз бетінен 10 м биіктіктегі желдің жылдамдығы ( $m/c$ ),  $u_* = U_{10}(C_D)^{0,5}$  -теңдеумен бағаланатын үйкеліс жылдамдығы ( $m/c$ ),  $C_D$  - фронтальды кедергі коэффициенті.

Модельденген толқын биіктіктері спутниктік ақпараттармен салыстырылды, нәтижесінде SMB әдісімен есептелген толқын биіктіктерінің шамасы салыстырмалы түрде жақын келетінін байқадық. Балқаш көлі ұсақ аралдардан құралғандықтан, әр аймаққа жеке-жеке жергілікті бекет ақпараттарына байланысты модел құрылды.

Жағалау инженериясы саласында толқын биіктігін талдау және болжау шешуші рөл атқарады. Толқын биіктіктерінің негізінде жатқан статистикалық үлестірімдер толқындардың орташа және ең жоғарғы биіктіктеріне қатысты олардың қалай таралуын сипаттау үшін қажет. Бұл зерттеу жұмысында біз толқын параметрлерінің өзгеріс динамикасына болжам жасау мақсатында шекаралық шамаларды анықтау үшін таралудың Вейбулл және Рэлей түрлерін қолдандық (4)-(5). Балқаш көлінің шығыс бөлігі мен батыс бөлігі едәуір айырмашылықтарға ие болғандықтан, таралудың қай түрі тиімді екенін анықтау қажет.

Рэлейдің таралуы – бұл векторлық шамалардың көрсеткішіне нақты қолданылатын және көбінесе толқындық талдау жұмыстарында қолданылатын ықтималдықтың таралуы. Бұл әсіресе толқындық жазбадағы ең жоғары толқындардың үштен бірінің орташа биіктігін білдіретін, толқындардың айтарлықтай биіктігін модельдеуге өте қолайлы. Параметрлер: Вейбуллдың таралуынан айырмашылығы, Рэлейдің таралуында тек бір параметр бар. Ол таралуды немесе таралу ендігін анықтайтын масштаб параметрі -  $a$ . Толқын биіктігінің ықтималдық тығыздығының функциясы туралы математикалық логикаға негізделген негізгі болжамдар Рэлей функциясына негізделген. Рэлей таралу функциясы келесі формуламен анықталады (4):

$$f(h) = \frac{2h}{a^2} \exp - \left(\frac{h}{a}\right)^2, \quad (a, h > 0), \quad (4)$$

мұндағы,  $a$  - масштаб параметрі.

Рэлей таралуындағы масштаб параметрінің көрсеткіші 2-ге тең болатын болса, онда ол Вейбулл таралуының функция болып табылады [6].

Вейбулл таралуының ықтималдық тығыздығын келесі формуламен анықтаймыз (5):

$$f(h) = \frac{b}{a} \left(\frac{h}{a}\right)^{b-1} \exp - \left(\frac{h}{a}\right)^b, \quad (a, b, h > 0), \quad (5)$$

мұндағы,  $a$  - масштаб параметрі,  $b$  - пішін параметрі. Толқындардың экстремалды биіктігін зерттеу жағдайында ол толқындардың максималды немесе орташа мөлшерін анықтайды. Егер  $a$  мәні жоғары болса, онда ол толқынның максималды орташа биіктігін көрсетеді. Пішін параметрі  $b$  - деп белгіленген, және таралу қисығының пішінін анықтайды. Бұл таралу асимметриясы мен таралудың ең жоғарғы шегіне (экссесс) әсер етеді. Атап айтқанда, пішін параметрі таралудың жылдамдығын сипаттайды. Егер  $b < 1$  болса, бұл төменгі биіктіктегі толқындардың жиі кездесетіндігін көрсетеді.  $b = 1$  кезінде үлестіру экспоненциалды ыдырау арқылы жүреді.  $b > 1$  кезінде таралу жылдамдығының жоғарылауына ие, яғни биік толқындар жиі кездесетіндігін білдіреді. Масштаб пен пішін параметрлері бірге айтарлықтай биіктіктегі толқындар үшін Вейбуллдың таралуын анықтайды және таралу формасының орналасуы, таралуы және сипаттамалары туралы ақпарат береді.  $a$  және  $b$  мәндері эмпирикалық деректер негізінде бағаланады немесе бақыланатын толқын биіктігі деректерін Вейбулл таралуына сәйкестендіру үшін статистикалық талдау арқылы алынады. Зерттеу жұмысында RStudio бағдарламалау тілі арқылы сипатталған таралу функцияларының коэффициенттерін анықтаймыз.

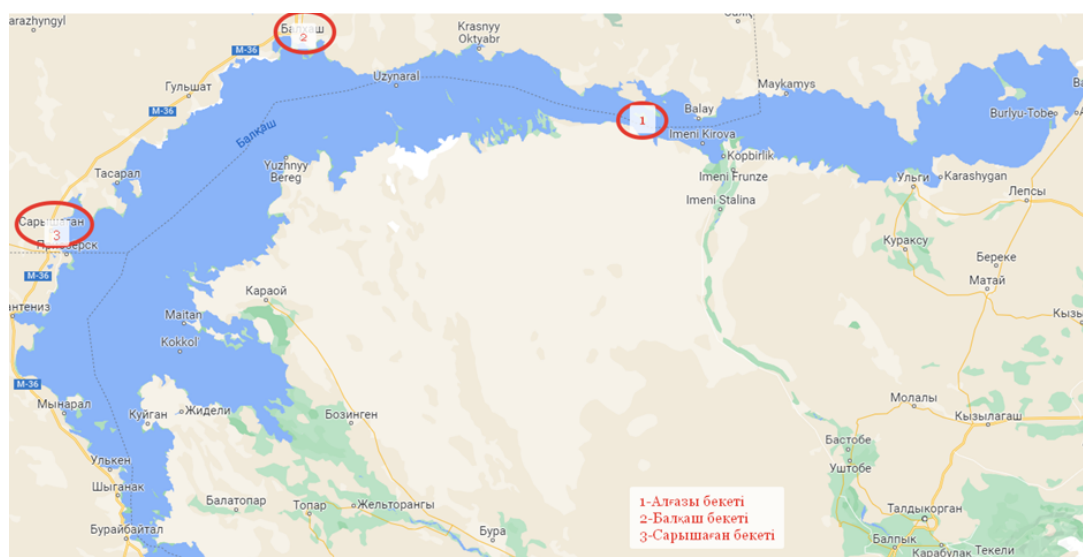
### 3. НӘТИЖЕЛЕР

Жерсеріктік ақпараттардың сенімді екендігіне көз жеткізу үшін деректерге жұптық талдау жасалу қажет (1-кесте). Жұптық талдауға жылдық орташа толқын биіктігі алынды. Моделдеу әдістерінің ішінде SMB параметрлік әдісі жерсерік деректерінің көрсеткішіне жақын келетіндігін байқадық. Жұптық талдауға ақпараттар саны көп болған жылдар таңдалды.

Кесте 1 – Жергілікті деректер мен жерсеріктік деректер арасындағы жұптық талдау

Жерсерік	жылдар												
	1995	2008	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	
1995-2019 жж аралығындағы жерсеріктік альтиметриялы деректерде тіркелген толқын биіктігінің орташа жылдық көрсеткіші													
ERS-1	1.23												
ERS2	1.33												
GFO-1		2.868											
JASON-2		1.82	2.438	2.1269	2	2.149	2.389	2.138	2.4				
ENVISAT-1			3.1	3.06	3.6								
CRYOSAT2				0.83	1.01	0.33	5.06	0.45	2.59	1.39	0.79	3.98	
JASON-3									3.4	3.47	3.55	3.3	
Жергілікті гидрологиялық бекеттерден алынған ақпараттарды қолданып, моделденген толқын биіктігінің орташа жылдық көрсеткіші													
Бекет атауы	Әдіс түрі	1995	2008	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
St.Balkhash	SMB	3.25	3.17	3.09	2.85	2.88	3.09	3.2	2.8	2.92	3.01	2.76	3.49
	CEM	0.70	0.63	0.717	0.69	0.76	0.67	0.7	0.67	0.74	0.72	0.67	0.64
	Wilson	0.58	0.51	0.6	0.58	0.65	0.56	0.59	0.56	0.63	0.62	0.56	0.53
St.Saryshagan	SMB	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.52	3.51	3.68	2.92	3.92
	CEM	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.41	0.46	0.38	0.4	0.38
	Wilson	0.25	0.28	0.54	0.31	0.32	0.29	0.31	0.3	0.34	0.27	0.29	0.28
St.Algazy	SMB	2.9	2.95	3.19	2.5	2.04	2.82	2.3	-	-	-	-	-
	CEM	0.5	0.59	0.78	0.64	0.68	0.72	0.67	-	-	-	-	-
	Wilson	0.4	0.5	0.719	0.54	0.6	0.64	0.59	-	-	-	-	-

Біздің жағдайымызда жергілікті дерек ретінде Балқаш көлінде орналасқан үш гидрологиялық ақпараттардан алынған мәліметтер қолданылды (3-сурет). 1-кестеде жерсеріктер мен жергілікті бекеттерден алынған толқын биіктігінің жылдық орташа көрсеткіші тіркелген. Сары түспен әдістің шама көрсеткіші спутниктік деректердің көрсеткішіне жақын болып келетін сәйкестіктері белгіленген. Жергілікті бекеттерден



Сурет 3 – Балқаш көліне тиісті гидрологиялық бекеттерінің геолокациясы

алынған ақпарат жел жылдамдығы ғана болғандықтан, параметрлік әдістер арқылы толқын биіктігінің шамасы есептелінді. Кестеде тек SMB әдісінің шама көрсеткіші спутниктік деректердің көрсеткішіне жақын келетінін байқауға болады. Дәл осы әдісті алдағы зерттеу жұмыстарына қолданып, толқын параметрлерінің көрсеткіштерін 2030 жылға болжам жасау негізделді.

Балқаш, Сарышаған және Алғазы гидрологиялық бекеттеріне тиісті ақпараттар келесі кестеде көрсетілген (2-кесте).

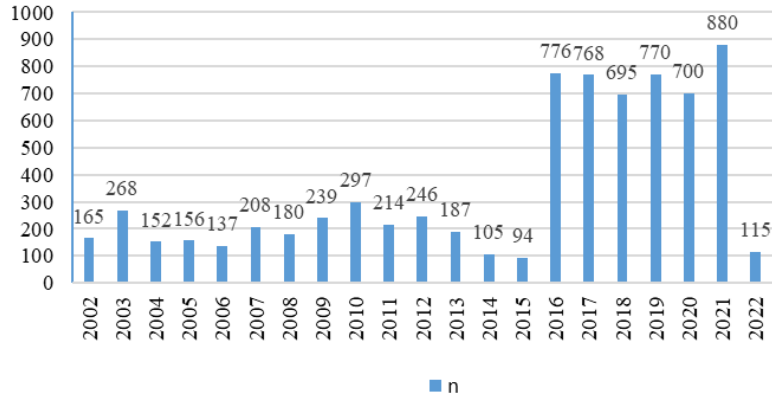
Кесте 2 – Гидрологиялық бекеттердің географиялық орналасу орыны мен жұмыс жасау аралығы

№	Бекет атауы	Ендігі	Бойлығы	Қызмет жасау жылдары	Тиісті ұйым
1	Алғазы	46°32'59.5"N	76°50'23.3"E	1950-2014	ҚАЗГИДРОМЕТ
2	Балқаш	46°50'37.3"N	74°58'45.9"E	1937-қазіргі уақытқа дейін	ҚАЗГИДРОМЕТ
3	Сарышаған	46°07'04.7"N	73°36'38.1"E	1957- қазіргі уақытқа дейін	ҚАЗГИДРОМЕТ

Гидрологиялық бекеттерде тек 10 м жел жылдамдығын өлшеп тұратын болғандықтан, біз Maple бағдарламасын қолданып толқын биіктігін модельдедік. Зерттеуде моделдеуге келесі әдістер қолданылды: SMB, Wilson, SEM. Параметрлік әдістердің көмегімен есептелген толқын биіктігі альтиметриялық деректермен салыстырылып, таралу функцияларының коэффициенттері анықталды (1-кесте). Жергілікті өлшемдер Балқаш көлі бойлық бойынша 73° -80° С. Е.және ендік бойынша 44° -49° ш.б. шекараларын пайдалана отырып, JASON деректерінің толық жиынтығынан таңдалды. Аталмыш жерсерік жиырма жылда Балқаш көлі бойынша 7352 мәлімет жинаған (4-сурет).

Талдау нәтижелерінің дұрыс болуы үшін алдымен жергілікті бекеттерден алынған ақпараттар көмегімен модельденген толқын биіктігі мен жерсеріктен алынған толқын биіктігі туралы ақпараттар бір құжатқа біріктірілді. Жергілікті бекеттер жел жылдамдығын күнделікті өлшеп тұрса, жерсерік айына бір рет кей айларда оннан аса ақпаратқа ие болған. Осындай сәйкессіздік орын алғандықтан, алдымен ақпараттарда сәйкес күндер анықталып, жиналды. R бағдарлау тілінің көмегімен, үлкен ақпараттар бір жүйеге келтіріліп, талданды [8]. Гидрологиялық бекеттер: Балқаш бекеті, Сарышаған бекеті және Алғазы бекетінен алынған толқын биіктігінің таралу функция

Әр жыл үшін пайдаланылған JASON бақылауларының саны



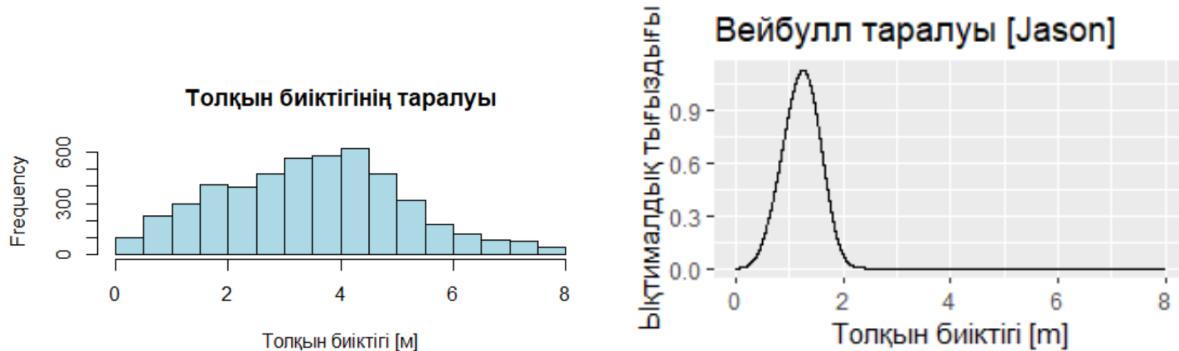
Сурет 4 – JASON жерсерігінің Балқаш көлі бойынша әр жылда жинаған деректер көрсеткіші

коэффициенттері мен жерсерігінен алынған толқын биіктігінің таралу коэффициенттері анықталды (3-кесте).

Кесте 3 – Вейбулл мен Рэлейдің таралу функциясының коэффициенттері

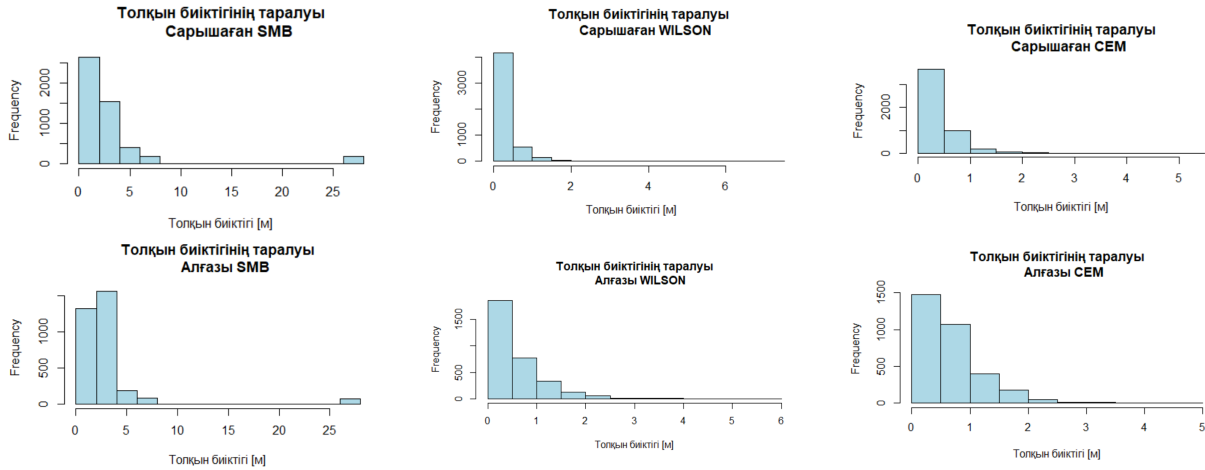
	Әдістер	Вейбулл		Рэлей
		a	b	$R_a$
Жерсерік 2002-2022		1.27	3.57	3.13
Balkhash	SMB	1.08	3.16	3.62
Balkhash	Wilson	1.46	0.625	0.49
Balkhash	CEM	1.85	0.761	0.55
Saryshagan	SMB	0.638	1.95	3.86
Saryshagan	Wilson	0.941	0.297	0.45
Saryshagan	CEM	1.2	0.427	0.45
Жерсерік 2002-2014		1.01	3.12	2.95
Algazy	SMB	0.785	2.29	3.5
Algazy	Wilson	0.95	0.53	0.59
Algazy	CEM	1.22	0.67	0.61

Анықталған коэффициенттерден, егер Вейбулл пішін параметрін талдасақ, онда 2002-2022 ж.ж. аралығында биіктігі 4-5 метрге жуық толқындардың көбірек екендігін байқауға болады (5-сурет). Вейбулл таралу функциясындағы пішін көрсеткішінен де жоғарғы биіктіктегі толқындардың көп екендігін байқауға болады. Келтірілген кесте нәтижесін визуалды түрде байқасақ, жергілікті бекеттерден алынған деректерді қолданып модельденген толқын биіктіктерінің көрсеткіші едәуір төмен екендігін байқауға болады (6-сурет).



Сурет 5 – 2002-2022 ж.ж. аралығындағы Jason жерсерігінің толқын биіктігі бойынша көрсеткіші





Сурет 6 – Балқаш, Сарышаған, Алғазы гидрологиялық бекеттерінің деректері бойынша толқын биіктігінің таралуы

Вейбулл және Рэлей таралуларының шама көрсеткіші болжам жасау барысында шекаралық шама көрсеткіштер ретінде қолданылады. Толқын биіктігін 2030 жылға дейін моделдеу кезінде осы коэффициенттерді ескеру маңызды рөл атқарады.

6-суретте жергілікті бекеттерден алынған деректер бойынша модельденген толқын биіктіктерінің 1991-2022 ж.ж. аралығындағы орташа толқын биіктігінің шама көрсеткіші бейнеленген.

#### 4. ҚОРЫТЫНДЫ

Мақала өзектілігі мен қажеттілігі еліміздің ірі көлдерін альтиметриялық деректер арқылы бақылап, әлемдік деңгейде қолданыста бар әдістердің Балқаш көлі үшін тиімді түрін анықтау болғандықтан, Балқаш көліне тиісті альтиметриялық жерсеріктік деректері қолданылып, жергілікті гидрологиялық бекеттерден алынған деректер моделденіп, салыстырылды. Зерттеу жұмысы кезінде SMB параметрлік әдістің шама көрсеткіші жерсеріктік деректерге жақын екені анықталды. Вейбулл және Рэлей таралу функцияларының ықтималдық коэффициенттері анықталып, кескіндері көрсетілді. Көрсетілген жылдар аралығында  $H_{Smax}=8$  м болса, ең төменгі толқын биіктігі  $H_{Smin}=0.023$  м. Экстремалды толқын биіктігі  $H_{ext}=1/3 H_{Smax}$  екенін ескеретін болсақ, онда Балқаш көліндегі көрсеткіш  $H_{ext}=2.6$  м болды. Вейбулл таралуының сызбасы кестедегі көрсеткішке сәйкес екені байқалды. Экстремалды толқын биіктігінің пайыздық ықтималдық көрсеткіші 5% - 3.73 м, 50% - 7.5 м, 90% - 8.63 м. Яғни, 100 жыл ішінде ең қауіпті, жоғарғы толқын биіктігі 8 метрден асатын толқын биіктігі болатын ықтималдық жоғары екенін байқауға болады, ал 3 метрден асатын толқын биіктігі экстремалды болады деген болжам өте төменгі көрсеткішке ие болса, 7.5 метрлік толқын биіктігі 50% ықтималдықты көрсетті. Анықталған ықтималдық коэффициенттері толқын климатының толқындық моделін жасау кезінде ескеріліп, жағажай қауіпсіздігі мен құрылысына септігін тигізеді.

**Алғыс.** Ғылыми жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетінің қаржылық қолдауымен жүзеге асырылды (AP14871838 – «Серіктік альтиметрия мәліметтерін қолдана отырып Қазақстан су тоғандарының толқындық климатын зерттеу»).

#### Авторлардың қосқан үлесі:

Бейсембекова М.К. – RADS альтиметриялық деректер қорынан жерсеріктертік деректерді жинау, RStudio бағдарламасы арқылы деректерді өңдеу, ақпараттарды сүзгіден

өткізіліп, талдау. Жергілікті модельденген деректермен жұптық талдау жасау. Таралу функцияларының параметрлік көрсеткіштерін анықтау, салыстыру.

Мамерова Г.М. – «Казгидромед» РМК арқылы Балқаш көлінің бойында орналасқан үш жергілікті бекеттерден ақпараттарды жинау, желдің орташа жылдамдығына қатысты жергілікті ақпараттарды қолданып, Maple бағдарламасында толқынның орташа биіктік көрсеткішін есептеп, модельдеу.

Ракишева З.Б. – мәтін жазу және оның мазмұнын сыни тұрғыдан қайта қарау, жариялау үшін мақаланың соңғы нұсқасын бекіту, жұмыстың барлық аспектілері үшін жауапты болуға келісім беру, деректердің дұрыстығына немесе мақаланың барлық бөліктерінің тұтастығына байланысты мәселелерді дұрыс зерттеу және шешу.

## Әдебиеттер тізімі

- 1 Radar Altimeter Database System (RADS). [Electr. res.] – URL: <http://rads.tudelft.nl/rads/rads.shtml> (Accessed: 25.09.2023).
- 2 Бейсембекова М.К. Сравнение данных спутниковой альтиметрии с местными гидрологическими данными по озеру Балхаш // Вестник КазАТК. – 2022. – Т. 121. № 2. – С. 337-347. DOI: <https://doi.org/10.52167/1609-1817-2022-121-2-337-347>.
- 3 Jelenak Z. Altimeter wave and wind data for mariners and scientific community. [Electr. res.] -URL: <https://resources.eumetrain.org/data/4/486/mw2018> (Accessed: 05.10.2023).
- 4 Сапожников Д.Г. Современные осадки и геология озера Балхаш. – Москва, 1951. – 218 с.
- 5 Muraleedharan G., Rao A.D., Kurup P.G., Unnikrishnan N., Mourani S. Modified Weibull distribution for maximum and significant wave height simulation and prediction // Coastal Engineering. – 2007. – Vol. 54. №8. – С. 630-638. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2007.05.001>.
- 6 Aulia S.A., Syamsul A., Wimala L.D. Sverdrup Munk Bretschneider modification (SMB) for significant wave height prediction in Java Sea // British Journal of Applied Science and Technology. – 2016. – Т. 16. №2. – С. 1-8. DOI: <https://doi.org/10.9734/BJAST/2016/19669>.
- 7 Soomere T. Numerical simulations of wave climate in the Baltic Sea: a review // Oceanologia. – 2023. – Vol. 65. №1. – P. 117-140. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceano.2022.01.004>
- 8 Izaguirre C., Mendez F.J., Menendez M., Luceno A., Losada I.J. Extreme wave climate variability in southern Europe using satellite data // J. Geophys. Res. – 2010. – Vol. 115. №C4. – P. 357–366. DOI: <https://doi.org/10.1029/2009JC005802>.
- 9 Alves G.M., Young I.R., 2004. On estimating extreme wave heights using combined Geosat, Topex/Poseidon and ERS1 altimeter data // Applied Ocean Research. – 2003. – Vol. 25. №4. – P. 167–186. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apor.2004.01.002>.
- 10 Vanem E., Fazeres-Ferradosa T. A truncated, translated Weibull distribution for shallow water sea states // Coastal Engineering. – 2022. – Vol. 172. – P. 1-8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2021.104077>.
- 11 Prevosto M., Krogstad H.E., Robin, A. Probability distributions for maximum wave and crest heights // Coastal Engineering. – 2000. – Vol. 40. №4. – P. 329–360. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(00\)00017-X](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(00)00017-X).

М.К. Бейсембекова, Г.М. Мамерова, З.Б. Ракишева

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, 71, Алматы, 050040, Казахстан

### Моделирование высот волн озера Балхаш параметрическим методом SMB

**Аннотация:** В области океанографии, метеорологии и береговой инженерии анализ и прогноз высот волн играют ключевую роль. Понимание статистических распределений, лежащих в основе этих высот волн, необходимо для характеристики их поведения, особенно в отношении максимальных и значительных высот волн. На данный момент отсутствуют исследовательские работы, методические рекомендации и статьи по мониторингу волнового климата и динамики изменения параметров волнения крупных озер Казахстана. Соответственно, целью и актуальностью данного исследования является мониторинг, изучение, анализ состояния водно-болотных угодий с использованием эффективных методов и возможностей современных технологий, а также открытие пути к рекомендациям, которые помогут оптимизировать структуру и строительство пляжей. В этой статье сравниваются две часто используемые функции, функции распределения Вейбулла и Рэлея, для подбора измеренного распределения вероятности высот волны в заданном месте за определенный период. Использовались параметрические методы SMB, SEM и Wilson при моделировании высот волн и попарного анализа для проверки точности спутниковых данных. Данные, среднее значение высот волн, полученные из базы альтиметрических данных RADS были статистически проанализированы для озера Балхаш. Определены функции распределения вероятностей Вейбулла и Рэлея и идентифицированы их параметры. Средняя и максимальная высоты волн были оценены с использованием обеих функций распределения и сравнены между собой.

**Ключевые слова:** альтиметрическая база данных RADS, параметрические методы, распределение Вейбулла, распределение Рэлея, высота волны, RStudio, озеро Балхаш.

М.К. Beisembekova, G.M. Mayemerova, Z.B. Rakisheva  
Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi Ave., 71, Almaty, 050040, Kazakhstan

**Modeling wave heights of Lake Balkhash using the parametric SMB method**

**Abstract:** In the fields of oceanography, meteorology and coastal engineering, wave height analysis and prediction play a key role. Understanding the statistical distributions underlying these wave heights is necessary to characterize their behavior, especially with respect to maximum and significant wave heights. At the moment, there are no research works, methodological recommendations and articles on monitoring the wave climate and the dynamics of changes in wave parameters of large lakes in Kazakhstan. Accordingly, the purpose and relevance of this study is to monitor, study, analyze the condition of wetlands using effective methods and the capabilities of modern technologies, as well as open the way to recommendations that will help optimize the structure and construction of beaches. This paper compares two commonly used functions, the Weibull and Rayleigh distribution functions, to fit the measured probability distribution of wave height at a given location over a specified period. SMB, CEM and Wilson parametric methods were used in wave height modeling and pairwise analysis to verify the accuracy of satellite data. Average wave height data obtained from the RADS altimetry database was statistically analyzed for Lake Balkhash. Weibull and Rayleigh probability distribution functions are determined and their parameters are identified. The mean and maximum wave heights were estimated using both distribution functions and compared with each other.

**Keywords:** RADS altimetric database, parametric methods, Weibull distribution, Rayleigh distribution, wave height, RStudio, lake Balkhash.

## References

- 1 Radar Altimeter Database System (RADS). [Electronic resource] Available at: <http://rads.tudelft.nl/rads/rads.shtml> (Accessed: 25.09.2023).
- 2 Beysembekova M.K. Sravneniye dannykh sputnikovoy al'timetrii s lokal'nymi gidrologicheskimi dannymi na ozere Balkhash], Vestnik KazATK []. 2022. Vol. 121. Is. 2. P. 337-347. DOI: <https://doi.org/10.52167/1609-1817-2022-121-2-337-347> [in Russian]
- 3 Jelenak Z. Altimeter wave and wind data for mariners and scientific community. [Electronic resource]. Available at: <https://resources.eumetrain.org/data/4/486/mw2018> (Accessed: 05.10.2023).
- 4 Sapozhnikov D.G. Sovremennyye otlozheniya i geologiya ozera Balkhash. Moscow, 1951. 218 p. [in Russian].
- 5 Muraleedharan G., Rao A.D., Kurup P.G., Unnikrishnan N., Mourani S. Modified Weibull distribution for maximum and significant wave height simulation and prediction, Coastal Engineering. 2007. Vol. 54. Is. 8. P. 630-638. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2007.05.001>.
- 6 Aulia S.A., Syamsul A., Wimala L.D. Sverdrup Munk Bretschneider modification (SMB) for significant wave height prediction in Java Sea, British Journal of Applied Science and Technology. 2016. Vol. 16. Is. 2. P. 1-8. DOI: <https://doi.org/10.9734/BJAST/2016/19669>.
- 7 Soomere T. Numerical simulations of wave climate in the Baltic Sea: a review, Oceanologia. 2023. Vol. 65. Is. 1. P. 117-140. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceano.2022.01.004>.
- 8 Izaguirre C., Mendez F.J., Menendez M., Luceo A., Losada I.J. Extreme wave climate variability in southern Europe using satellite data, J. Geophys. Res. 2010. Vol. 115. Is. C4. P. 357-366. DOI: <https://doi.org/10.1029/2009JC005802>.
- 9 Alves G.M., Young I.R., 2004. On estimating extreme wave heights using combined Geosat, Topex/Poseidon and ERS1 altimeter data, Applied Ocean Research. 2003. Vol. 25. Is. 4. P. 167-186. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apor.2004.01.002>.
- 10 Vanem E., Fazeres-Ferradosa T. A truncated, translated Weibull distribution for shallow water sea states, Coastal Engineering. 2022. Vol. 172. P. 1-8. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2021.104077>.
- 11 Prevosto M., Krogstad H.E., Robin, A. Probability distributions for maximum wave and crest heights, Coastal Engineering. 2000. Vol. 40. Is. 4. P. 329-360. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(00\)00017-X](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(00)00017-X)

### Авторлар туралы мәлімет:

Бейсембекова Меруерт Кыдырхановна – *байланыс үшін автор*, механика кафедрасының оқытушысы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, әл-Фараби даңғ., 71, Алматы, 050040, Қазақстан.

Маемерова Гульнара Маратовна – PhD, механика кафедрасының аға оқытушысы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, әл-Фараби даңғ., 71, Алматы, 050040, Қазақстан.

Ракишева Зауре Баяновна – ф.-м.ғ.к., механика кафедрасының профессор м.а., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, әл-Фараби даңғ., 71, Алматы, 050040, Қазақстан.

Beisembekova Meruyert Kudyrkhanovna – *corresponding author*, lecturer at the Department of Mechanics, Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi Ave., 71, Almaty, 050040, Kazakhstan.

Mayemerova Gulnara Maratovna – PhD, senior lecturer at the Department of Mechanics, Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi Ave., 71, Almaty, 050040, Kazakhstan.

Rakisheva Zaure Bayanovna – candidate of physical and mathematical sciences, project manager, acting professor at the Department of Mechanics, Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi Ave., 71, Almaty, 050040, Kazakhstan.

*Редакцияға түсті: 02.12.2023. Түзетілген нұсқа: 17.01.2024.*

*Түзетілген нұсқа: 29.03.2024. Мақұлданды: 29.03.2024. Онлайн қолжетімді: 30.03.2024.*

Бас редактор:

Н. Темірғалиев

Жауапты редактор:

А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің  
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.  
- 2024. 1(146). - Астана: ЕҰУ. 44-б. Басуға қол қойылды: 30.03.2024.  
Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,  
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті  
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды