

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№3(144)/2023

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2023
Astana, 2023

БАС РЕДАКТОРЫ

Темірғалиев Н., ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Жұбанышева А.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.

Алексеева Л.А.

PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР БҰҒҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Алимхан Килан

Балтаева У.

Бекенов М.И.

Гогинава У.

PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

ф.-м.ғ.д., Мамун Хорезм академиясы, Хорезм, Өзбекстан

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

ф.-м.ғ.д., проф., Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет)
Долгопрудный, Ресей

Зунг Динь

ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам
ұлттық университеті, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

Иосевич А.

Кобельков Г.М.

ф.-м.ғ.д., проф., Тула мемлекеттік университеті, Тула, Ресей

PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Курина Г.А.

Марков В.В.

ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей

ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей

Мейрманов А.М.

ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Омарбекова А.С.

Смелянский Р.Л.

т.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Умирбаев У.У.

Холщевникова Н.Н.

ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ

ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.

Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.

№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,

тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410).

EDITOR-IN-CHIEF

Nurlan Temirgaliyev

Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Aksaule Zhubanysheva

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Nurlan Nauryzbayev

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Editorial board:

Evgueni Abakumov

*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee
Paris, France*

Lyudmila Alexeyeva

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling Ministry of Education
and Science Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

Alexander Iosevich

PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA

Alimhan Keylan

PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Umida Baltaeva

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Khorezm Mamun Academy, Khorezm,
Uzbekistan*

Makhsut Bekenov

*Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof.
L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

Ushangi Goginava

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.
Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

Boris Golubov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and
Technology (State University)
Dolgoprudnyi, Russia*

Dũng Dinh

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute,
Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*

Valerii Ivanov

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, Russia

Georgii Kobel'kov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Galina Kurina

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh,
Russia*

Vladimir Markov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical
Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Anvarbek Meirmanov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Com-
munications and Informatics, Moscow, Russia*

Asel Omarbekova

Cand. of Tech. Sci., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ruslan Smelyansky

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Ualbay Umirbaev

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.,
Wayne State University, Detroit, USA*

Natalya Kholshchevnikova

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State
Technological University "Stankin", Moscow, Russia*

Hans-Juergen Schmeisser

*Dr. habil., Prof., Friedrich-Schiller University
Jena, Germany*

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.

Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate
№ KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

© L.N. Gumilyov Eurasian National University

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Темиргалиев Н., д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Зам. главного редактора

Жубанышева А.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Зам. главного редактора

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алексеева Л.А.

д.ф.-м.н., проф., Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Алимхан Килан

PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Балтаева У.

д.ф.-м.н., Хорезмская академия Маъмуна, Хорезм, Узбекистан

Гогинава У.

д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

д.ф.-м.н., проф., Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Зунг Динь

д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, Тула, Россия

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США

Кобельков Г.М.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Курина Г.А.

д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Марков В.В.

д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Мейрманов А.М.

д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Омарбекова А.С.

к.т.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Смелянский Р.Л.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Умирбаев У.У.

д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США

Холщевникова Н.Н.

д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402

Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.

Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, №3(144)/2023

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer science. Mechanics series, №3(144)/2023

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, №3(144)/2023

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

<i>Мейрманов А.М.</i> Су суспензиясындағы май тамшылары динамикасы <i>Meirmanov A.</i> Dynamics of an oil drop in an aqueous suspension <i>Мейрманов А.М.</i> Динамика капли нефти в водной суспензии	6
<i>Украинец В.Н., Гирнис С.Р., Горшкова Л.В., Жуkenова Г.А.</i> Таяз төсеу тоннеліне қалыпты және жанама көлік жүктемелерінің әсері <i>Ukrainets V.N., Girnis S.R., Gorshkova L.V., Zhukenova G.A.</i> The impact of normal and tangential loads on a shallow tunnel <i>Украинец В.Н., Гирнис С.Р., Горшкова Л.В., Жуkenова Г.А.</i> Действие 12 нормальной и касательной транспортных нагрузок на тоннель мелкого заложения	
<i>Қызырқанов А.Е., Атанов С.К., Альджаварнех Ш.А., Турсынова Н.А., Сейтбатталов Ж.Е.</i> Автономды мобильді роботтар тобын басқару алгоритмі <i>Kyzyrkanov A.E., Atanov S.K., Aljawarneh Sh.A., Tursynova N.A., Seitbat- talov Zh.E.</i> The algorithm of the formation control of a swarm of autonomous mobile robots <i>Қызырқанов А.Е., Атанов С.К., Альджаварнех Ш.А., Турсынова Н.А., Сейтбатталов Ж.Е.</i> Алгоритм управления формированием роя автономных мобильных роботов	23
<i>Арыстангалиқызы А.</i> Дәл емес ақпарат бойынша Пуассон тендеуінің шешімдерін дискретизациялау <i>Arystangalikyzy A.</i> Discretization of solutions of Poisson equation by inaccurate information <i>Арыстангалиқызы А.</i> Дискретизация решений уравнений Пуассона по неточной информации	39

МРНТИ: 27.35.21

А.М. Мейрманов, Ж. Жантаев

*Институт ионосферы, Садоводческое товарищество «Ионосфера», д.117, 050020,
Алматы, Казахстан
(E-mail: anvarbek@list.ru)*

ДИНАМИКА КАПЛИ НЕФТИ В ВОДНОЙ СУСПЕНЗИИ¹

Аннотация: Настоящая рукопись является первой из публикаций, посвященных динамике вытеснения нефти водной эмульсией. Предполагается, что обе жидкости разделены неизвестной поверхностью и их динамика описывается системой уравнений Стокса для вязких сжимаемых жидкостей. Одна из жидкостей (нефть) является каплей, окруженной другой жидкостью (водной эмульсией). На границе раздела двух жидкостей выполнены стандартные условия непрерывности перемещений и напряжений и дополнительное условие того, что область занятая каждой из жидкостей является индивидуальным объемом, то есть состоит из одних и тех же частиц. Следуя идеям О. Ладыженской, Н. Уральцевой и В. Солонникова исходная задача разбивается на ряд последовательно решаемых задач, первой из которых является модельная задача дифракции для системы Стокса для двух полупространств. В ней необходимо получить решение в явном виде некоторые сингулярных интегралов. Далее для произвольного интервала времени $[0, T]$ решается задача дифракции, когда форма капли есть заданная гладкая замкнутая ограниченная поверхность и, наконец, решается исходная нелинейная задача об определении формы капли в процессе ее движения.

Ключевые слова: Задачи со свободными границами, задача дифракции для системы уравнений Стокса, представление решений в канонических областях в форме сингулярных интегралов, метод Ньютона-Канторовича.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/3.1>

2000 Mathematics Subject Classification: 35.M11

ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Задача о вытеснении нефти водной эмульсией в горных породах является основной при создании гидродинамического симулятора нефтяного месторождения. Естественным является предположение о том, что соответствующая математическая модель должна базироваться на постулатах классической механики Ньютона сплошных сред [1], [2]. С другой стороны, во всех существующих гидродинамических симуляторах нефтяных месторождений ("Эклипс" и "Black Oil" фирмы Schlumberger, "Tempest" фирмы "Rohar", "VIP" фирмы Landmark и "TimeZY" фирмы "Standard Oil and Trust") базовой математической моделью является математическая модель Баклея-Левеверетта [3], которая, по своей сути, является набором постулатов, никак не связанных с классической механикой Ньютона. Следуя R. Burridge, J. B. Keller [4] и E. Sanchez-Palencia [5],

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проект №AP19676964)

для точного математического моделирования физических процессов в горных породах в первую очередь необходимо описать физический процесс законами классической механики Ньютона на микроскопическом уровне (характерный размер- десятки микрон), которые проверены опытом в течении столетий. Но такое точное описание совершенно бесполезно с практической точки зрения, поскольку любые численные реализации точных моделей потребуют месяцы и месяцы вычислений. Поэтому следующим шагом в методе этих авторов стал процесс усреднения (гомогенизации), позволяющий на основе соответствующей микроскопической модели точно описать физический процесс уже на макроскопическом уровне (характерный размер- десятки сантиметров или метров). Метод усреднения позволил построить точные модели для многих физических процессов, когда микроструктура сплошной среды заранее известна. Но в случае задачи вытеснения нефти суспензией никакого прогресса не произошло. Во-первых, не было соответствующей математической модели на микроскопическом уровне и, во-вторых, если она бы и была, не было методов решения задач с неизвестными (свободными) границами и, тем более, методов усреднения таких задач. Задачи со свободными границами являются одними из наиболее трудных задач в теории дифференциальных уравнений с частными производными [6], [7]. Как мы уже отмечали выше, наша основная задача разбивается на ряд последовательно решаемых задач:

I-модельная задача дифракции для уравнений Стокса в полупространствах;

II-доказательство существования классического решения задачи дифракции для уравнений Стокса в областях с заданной гладкой границей S раздела областей Ω_o , содержащей нефть, и Ω_s , содержащей суспензию.

III-доказательство существования классического решения движения капли нефти в водной суспензии в малом по времени (метод Ньютона-Канторовича).

IV-доказательство существования классического решения движения капли нефти в водной суспензии в целом по времени (сведение исходной задачи к канонической задаче в полупространствах с помощью метода декомпозиции).

V-усреднение.

В настоящей публикации мы ограничимся этапами *I* – *IV*.

Исходная нелинейная задача дифракции для искомой (свободной) границы $\Gamma(t)$ раздела двух вязких жидкостей состоит в нахождении вектора скорости $\mathbf{v}_o$, вектора перемещений $\mathbf{w}_o$ и давления p_o нефти и вектора скорости $\mathbf{v}_s$, вектора перемещений $\mathbf{w}_s$ и давления p_s суспензии, и самой границы $\Gamma(t)$ по следующим уравнениям

$$\nabla \cdot (\alpha_{\mu,j} \mathbb{D}(x, \mathbf{v}_j) - p_j \mathbb{I}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{c_{f,j}^2} \frac{\partial p_j}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0 \quad (2)$$

в областях $Q_{f,j} = \bigcup_{t=0}^{\infty} \Omega_{f,j}(t)$, $j = o, s$, граничным условиям

$$(\mu_o \mathbb{D}(x, \mathbf{v}_o) - p_o \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n} = (\mu_s \mathbb{D}(x, \mathbf{v}_s) - p_s \mathbb{I}) \cdot \mathbf{n}, \quad (3)$$

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{w}_s, \quad \frac{\partial \mathbf{w}_j}{\partial t} = \mathbf{v}_j, \quad j = o, s \quad (4)$$

на искомой границе $\Gamma(t)$ и начальным условиям

$$\mathbf{w}_j(x; 0) = \mathbf{w}_j^0(x), \quad p_j(x; 0) = p_j^0(x), \quad j = o, s, \quad \Gamma(0) = \Gamma^0. \quad (5)$$

Очевидно, что траектории $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\xi, t)$ транспортного уравнения

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}_j(\mathbf{X}; t), \quad \mathbf{X}(\xi; 0) = \xi, \quad \xi \in \Omega_j(0), \quad j = o, s, \quad (6)$$

которые начинаются в точке $\xi \in \Omega_{f,j}(0)$, будут находиться $\Omega_{f,j}(t)$, $j = o, s$ для всех $t > 0$.

То есть, мы можем определить $\Gamma(t)$ как поверхность

$$\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \mathbf{X}_0(\xi; t), \quad \xi \in \Gamma^0\}, \quad \frac{d\mathbf{X}_0}{dt} = \mathbf{v}_j(\mathbf{X}_0; t), \quad \mathbf{X}_0(\xi; 0) = \xi, \quad \xi \in \Gamma^0. \quad (7)$$

В (1) – (7) $\mathbb{D}(x, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^* \mathbf{u})$ есть симметрический градиент вектор-функции $\mathbf{u}$, $\mathbb{I}$ единичный тензор второго порядка, $\alpha_{\mu,j}$ и $c_{f,j}$, $j = o, s$ безразмерные вязкости и безразмерные скорости звука соответственно в нефти и суспензии.

Введем следующие обозначения [8]:

$$G_2(\mathbf{x}'; \mathbf{y}') = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 + y_2|^2} \quad (8)$$

-функция Грина оператора Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^2$ и

$$G_3(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} (|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'| + |x_3 - y_3|)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} (|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'| + |x_3 + y_3|)^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

-функция Грина оператора Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^3$.

По построению функции Грина бесконечно дифференцируемы при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и

$$G_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = G_k(\mathbf{y}; \mathbf{x}), \quad \nabla_x G_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \nabla_y G_k(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \quad k = 1, 2.$$

Кроме того положим

$$I_2(u)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} G_2(\mathbf{x}'; \mathbf{y}') u(\mathbf{y}') dy', \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2,$$

$$I_3(U)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} G_3(\mathbf{x}; \mathbf{y}', 0) U(\mathbf{y}') dy',$$

$$J_j(f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}_j^3} G_3(\mathbf{x}; \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) dy, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad j = o, s, \quad (10)$$

$\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3), |\mathbf{x}|^2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2) < \infty\}$, $\mathbb{R}_o^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, x_3 > 0\}$, $\mathbb{R}_s^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, x_3 < 0\}$, $\mathbf{x}' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $|\mathbf{x}'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Теорема. Функции

$$u_o(\mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_3} I_3(U_o)(\mathbf{x}) + J_o(f_o)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_o^3, \quad (11)$$

$$u_s(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_3} I_3(U_s)(\mathbf{x}) + J_s(f_s)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_s^3 \quad (12)$$

являются решениями задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u_j = f_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_j^3, \quad u_j(\mathbf{x}', 0) = U_j(\mathbf{x}'), \quad j = o, s \quad (13)$$

в полупространствах $\mathbb{R}_j^3$, $j = o, s$.

В частности,

$$\frac{\partial}{\partial x_3} I_3(U_o)(\mathbf{x}', 0) = -u_o(\mathbf{x}', 0) = -U_o(\mathbf{x}'), \quad \frac{\partial}{\partial x_3} I_3(U_s)(\mathbf{x}', 0) = u_s(\mathbf{x}', 0) = U_s(\mathbf{x}'). \quad (14)$$

Если $f_j \in C_\infty^\alpha(\mathbb{R}_j^3)$ и $U_j \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ то $u_j \in C_\infty^{2+\alpha}(\mathbb{R}_j^3)$, $j = o, s$ [10].

Мы используем обозначения функциональных пространств и норм в них, принятых в [10] и в [11]. Через $C_\infty^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$, $k = 0, 1, 2, \dots$ мы обозначаем пространство $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap L_\infty(\bar{\Omega})$.

Теорема. [8] Функция

$$u(\mathbf{x}') = \int_{\mathbb{R}^2} G_2(\mathbf{x}'; \mathbf{y}') f(\mathbf{y}') dy' \equiv I_2(f)(\mathbf{x}') \quad (15)$$

является решением уравнения Пуассона

$$\Delta' u = f(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2 \quad (16)$$

во всем пространстве $\mathbb{R}^2$.

Если $f \in C_\infty^\alpha(\mathbb{R}^2)$, то $u \in C_\infty^{2+\alpha}(\mathbb{R}^2)$ [10].

Теорема. Функции

$$u_o(\mathbf{x}) = -I_3(H_o)(\mathbf{x}) + J_o(f_o)(\mathbf{x}) \quad (17)$$

и

$$u_s(\mathbf{x}) = I_3(H_s)(\mathbf{x}) + J_s(f_s)(\mathbf{x}) \quad (18)$$

являются решениями задачи Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta u_j = f_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_j^3, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_3}(\mathbf{x}', 0) = H_j(\mathbf{x}'), \quad j = o, s. \quad (19)$$

Если $f_j \in \mathbb{C}_\infty^{1+\alpha}(\mathbb{R}_j^3)$, то $u_j \in \mathbb{C}_\infty^{2+\alpha}(\mathbb{R}_j^3)$, $j = o, s$ на произвольном интервале времени $[0, T]$ [10].

Теорема. Задача (1) – (6) имеет единственное классическое решение $\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_j \in \mathbb{C}_\infty^{2+\alpha}(\mathbb{R}_j^3)$ и $p_j \in \mathbb{C}_\infty^{1+\alpha}(\mathbb{R}_j^3)$, $j = o, s$ на произвольном интервале времени $[0, T]$.

Теорема. Задача (1) – (7) имеет единственное классическое решение $\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_j \in \mathbb{C}_\infty^{2+\alpha}(\overline{\Omega_{f,j}(t)})$ и $p_j \in \mathbb{C}_\infty^{1+\alpha}(\overline{\Omega_{f,j}(t)})$, $j = o, s$ на произвольном интервале времени $[0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теорем – достаточно сложное и требует подробных вычислений, что не позволяет формат нашей статьи. Поэтому ограничимся идеями доказательств. Основные идеи доказательства состоят в замене краевого условия (7) на свободной границе транспортными уравнениями

$$\frac{d\alpha_{\mu,j}}{dt} \equiv \frac{\partial \alpha_{\mu,j}}{\partial t} + \nabla \alpha_{\mu,j} \cdot \mathbf{v}_j = 0, \quad \alpha_{\mu,j}(\mathbf{x}; 0) = \mu_j, \quad j = o, s, \quad (20)$$

решение задачи дифракции в полупространствах и представление решения в виде сингулярных интегралов, использовании метода Ньютона-Канторовича [9] для доказательства существования классического решения задачи в малом по времени [9] и применение принципа декомпозиции, предложенного в работах [10] и [11] О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой и В. А. Солонникова, для исследования дифференциальных свойств в целом по времени классических решений задачи дифракции для системы уравнений Стокса в заданных областях.

А именно, с помощью разбиения единицы исходная задача сводится к решению конечного числа задач в малых областях с центром в точках $\mathbf{x}_k \in \gamma_k$. Далее для каждой малой области участок границы выпрямляется переходом к новым локальным координатам $\mathbf{y}$ и задача в каждой малой области сводится к канонической задаче дифракции (1) – (6) с заданной правой частью $\mathbf{f}_j \in \mathbb{C}_\infty^\alpha(\mathbb{R}_j^3)$ для новых искомых функций $\mathbf{u}_j(\mathbf{y}; t) = \mathbf{v}_j(\mathbf{x}; t)$, $q_j(\mathbf{y}; t) = p_j(\mathbf{x}; t)$ в полупространствах $\mathbb{R}_j^3$ с границей раздела $\Gamma = \{y_3 = 0\}$:

Решение последней дается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o &= -\frac{\partial}{\partial y_3} I_3(\mathbf{U}) + \mathbf{f}_o, \quad \mathbf{u}_s = \frac{\partial}{\partial y_3} I_3(\mathbf{U}) + \mathbf{f}_s, \\ U_3(\mathbf{y}'; t) &= \frac{1}{2} I_3 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{o,3}}{\partial y_3} + \frac{\partial \mathbf{f}_{s,3}}{\partial y_3} \right) (\mathbf{y}'; t), \\ U_1 &= I_3 \left(-\Delta' I_3(U_1) + \frac{\partial \mathbf{f}_{s,1}}{\partial y_3} \right), \quad U_2 = I_3 \left(-\Delta' I_3(U_2) + \frac{\partial \mathbf{f}_{s,2}}{\partial y_3} \right), \\ I_3(U_3) &= \frac{1}{2} I_2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{s,3}}{\partial y_3} + \frac{\partial \mathbf{f}_{o,3}}{\partial y_3} \right), \\ I_3(U_1) &= \frac{\partial}{\partial y_1} I_2(U_3) + \frac{\nu_o}{\nu_o + \nu_s} I_2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{o,1}}{\partial y_3} + \frac{\partial \mathbf{f}_{o,3}}{\partial y_1} \right) - \frac{\nu_s}{\nu_o + \nu_s} I_2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{s,1}}{\partial y_3} + \frac{\partial \mathbf{f}_{s,3}}{\partial y_1} \right) \\ I_3(U_2) &= \frac{\partial}{\partial y_2} I_2(U_3) + \frac{\nu_o}{\nu_o + \nu_s} I_2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{o,2}}{\partial y_3} + \frac{\partial \mathbf{f}_{o,3}}{\partial y_2} \right) - \frac{\nu_s}{\nu_o + \nu_s} I_2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{s,2}}{\partial y_3} + \frac{\partial \mathbf{f}_{s,3}}{\partial y_2} \right), \quad (21) \end{aligned}$$

$$q_j(\mathbf{y}; t) = q_j^0(\mathbf{y}) \exp\left(-\frac{c_{f,j}^2}{\nu_j} t\right), \quad j = o, s. \quad (22)$$

Здесь $U_k(\mathbf{y}'; t) = u_{s,k}(\mathbf{y}', 0; t) = u_{o,k}(\mathbf{y}', 0; t)$, $\mathbf{f}_j = J_j(\mathbf{f}_j)$, $j = o, s$ и $\mathbf{f}_o(\mathbf{x}', 0; t) = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}', 0; t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}'; t)$.

Обращаясь к [10] заключаем, что

$$\max_{k=1,2,3} |U_k|_{\mathbb{R}_j^3}^{2+\alpha} \leq M \max_{k=1,2,3} |f_k|_{\mathbb{R}_j^3}^\alpha, \quad (23)$$

где постоянная M не зависит от T и $\mathbf{f}$.

References

- 1 Meirmanov A. Mathematical models for poroelastic flow. -Paris: Atlantis Press, 2014.
- 2 Овсянников Л.В. Введение в механику сплошных сред, Часть I, II. -Новосибирск: Новосибирский Государственный Университет, 1977.
- 3 Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacements in sands, Transactions of the AIME. 1942. -Vol. 146. -P. 107-116.
- 4 Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure// J. Acoust. Soc. Am. 1981. -Vol. 70. Is. 4. -P. 1140-1146.
- 5 Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. -Москва: Мир, 1984.
- 6 Мейрманов А. Задача Стефана. -Новосибирск: Наука, 1986.
- 7 Мейрманов А. О классическом решении макроскопической модели подземного выщелачивания редких металлов// Известия РАН. 2022. -Vol. 86. №4. -P. 116-161.
- 8 Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения второго порядка. -Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.
- 9 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -Москва: Наука, 1972.
- 10 Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - Москва: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1967 г.
- 11 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. -Москва: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1967 г.

А.М. Мейрманов, Ж. Жантаев

Ионосфера институты, «Ионосфера» серіктестігі, 117 үй, 050020, Алматы, Қазақстан

Су суспензиясындағы май тамшылары динамикасы

Аннотация: Бұл қолжазба су эмульсиясымен мұнай ығысуының динамикасына арналған басылымдардың алғашқысы болып табылады. Екі сұйықтық та белгісіз бетпен бөлінген және олардың динамикасы тұтқыр сығылатын сұйықтықтарға арналған Стокс теңдеулері жүйесімен сипатталады деп болжанады. Сұйықтықтардың бірі (мұнай) басқа сұйықтықпен (сулы эмульсиямен) қоршалған тамшы. Екі сұйықтың арасындағы шекарада орын ауыстырулар үздіксіздігі мен кернеудің стандартты шарттары және сұйықтардың әрқайсысы алатын ауданы жеке көлем, яғни бірдей бөлшектерден тұратындығын білдіретін қосымша шарты орындалады. О.Ладыженская, Н.Уральцева және В.Солонниковтың идеяларына сүйене отырып, бастапқы мәселе бірінен кейін бірі тізбектеле шешілетін бірнеше есептерге бөлінеді. Олардың біріншісі - кейбір сингулярлық интегралдардың айқын шешімін алуды қажет ететін екі жарты кеңістікке арналған Стокс жүйесі үшін моделді дифракциялық есебі. Әрі қарай, $[0, T]$ еркін уақыт аралығы үшін тамшы пішіні берілген тегіс тұйық шенелген бет болғандағы дифракция мәселесі, соңында оның қозғалыс кезіндегі тамшы пішінін анықтайтын бастапқы сызықтық емес есеп шешіледі.

Түйін сөздер: Еркін шекаралы есептер, Стокс теңдеулер жүйесі үшін дифракциялық есеп, канондық облыстардағы шешімдерді сингулярлық интеграл түрінде көрсету, Ньютон-Канторович әдісі.

A. Meirmanov, Zh. Zhantayev

Institute of Ionosphere, Gardening Association "Ionosphere", 117, 050020, Almaty, Kazakhstan

Dynamics of an oil drop in an aqueous suspension

Аннотация: The proposed manuscript is the first of articles, devoted to the dynamics of oil displacement by aqueous suspension in the pore space of a solid skeleton. We assume that the liquids are separated by some unknown interface. The solid skeleton has a given periodic structure with a dimensionless pore size $\varepsilon \ll 1$. It is a free boundary problem, since in the microscopic description the interface between oil and suspension must be determined. Such problems are among the most difficult problems in the theory of partial differential equations, and, as a rule, existence results are possible only locally in time. We will obtain global in time result by reducing the free boundary problem to the problem of finding the viscosity of liquids, which will be described by the transport equation. The main purpose of this article is to describe the joint motion of a single oil drop in the surrounding water suspension.

Keywords: free boundary problems, diffraction problems for Stokes equations, representation of solutions in half-spaces in terms of singular integrals, Newton-Kantorovich method.

References

- 1 Meirmanov A. Mathematical models for poroelastic flow, Paris, Atlantis Press, 2014.
- 2 Ovsianikov L.V. Vvedenie v mekhaniku sploshnyh sred [Introduction to continuum mechanics], Parts I, II (Novosibirsk State University, Novosibirsk, 1977).
- 3 Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacements in sands, Transactions of the AIME, 1942. Vol. 146. P. 107-116.
- 4 Burridge R., Keller J.B. Poroelasticity equations derived from microstructure, J. Acoust. Soc. Am., 1981. Vol. 70, issue 4. P. 1140-1146.
- 5 Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory, Lecture Notes in Phys., 127, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- 6 Meirmanov A. The Stefan Problem, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.
- 7 Meirmanov A. On the classical solutions of the macroscopic model of in-situ leaching of rare metals, Izvestiya Mathematics. 2022. Vol. 86. №4. P. 116-161.
- 8 Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.
- 9 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Introductory real analysis, Dover Publications, INC., New York, 1975.
- 10 Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. Linear and quasilinear elliptic equations, Academic Press, New York and London, 1968.
- 11 Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type, Transl. Math. Monogr. 1968. Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968.

Сведения об авторе:

Мейрманов Анварбек Мукалович – **автор для корреспонденции**, главный научный сотрудник, Институт ионосферы, Садоводческое товарищество «Ионосфера», д.117, 050020, Алматы, Казахстан.

Жантаев Жумабев – главный научный сотрудник, Институт ионосферы, Садоводческое товарищество «Ионосфера», д.117, 050020, Алматы, Казахстан.

Anvarbek Meirmanov – **corresponding author**, senior researcher, Institute of Ionosphere, Gardening Association "Ionosphere", 117, 050020, Almaty, Kazakhstan.

Zhumabek Zhantayev – senior researcher, Institute of Ionosphere, Gardening Association "Ionosphere", 117, 050020, Almaty, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 27.08.2023

МРНТИ: 27.35.33, 30.19.17

В.Н. Украинец, С.Р. Гирнис, Л.В. Горшкова, Г.А. Жукенова

*Торайғыров университеті, Ак. Шөкин көш., 139, Павлодар, Қазақстан
(E-mail: vitnikukr@mail.ru, girnis@mail.ru, gorshkova_larisa@mail.ru,
gulnara-home@mail.ru)*

ТАЯЗ ТӨСЕУ ТОННЕЛІНЕ ҚАЛЫПТЫ ЖӘНЕ ЖАНАМА КӨЛІК ЖҮКТЕМЕЛЕРІНІҢ ӘСЕРІ

Аннотация: Жылжымалы цилиндрлік және декарттық координаттар жүйелерінде жүктемелердің қалыпты және параллель осі бойымен біркелкі қозғалатын ұзын жұқа қабырғалы дөңгелек серпімді қабықтың ішкі бетіне әсер ету мәселесі шешілді. Қабық көлденең шекарасы қабық осіне параллель болатын серпімді жартылай кеңістікте (массивте) орналасқан. Жүктемелердің қозғалыс жылдамдығы массивтегі жылжу толқындарының таралу жылдамдығынан кем қабылданады. Жүктеме функциялары бұрыштық координатадағы Фурье қатарына және осьтік координатадағы Фурье интегралына ыдырауы мүмкін. Қабықтың қозғалысы қабық теориясының классикалық теңдеулерімен, ал серпімді жартылай кеңістік - Ламе потенциалдары арқылы көрсетілген қозғалыстардағы серпімділік теориясының теңдеулерімен сипатталады. Шешім үшін интегралды Фурье түрлендіру әдісі қолданылады. Массив серпімді кеңістік түрінде ұсынылатын мұндай жұмыстардан айырмашылығы мұнда мәселені шешу кезінде жүктемелердің қозғалысы кезінде пайда болатын жартылай кеңістік шекарасымен шағылысқан толқындардың массивіне әсері ескеріледі. Бұл мәселе осы типтегі жүктемелерге ұшыраған жағдайда жұқа қабырғалы қаптамамен бекітілген таяз төсеу тоннелінің динамикасын зерттеу кезінде модельді болып табылады. Белгілі бір аралықта біркелкі қолданылатын және тұрақты жылдамдықпен қозғалатын ось-симметриялық қалыпты жүктеме (қозғалатын объектіден қысым тоннелін қаптауға әсер ету) және ось-симметриялық жанама жүктеме (қозғалатын объектіден үйкеліс күштерінің тоннелін қаптауға әсер ету) кезінде тау жыныстарының массивінің кернеулі-деформацияланған күйін (КДК) бейнелейтін сандық эксперименттің нәтижелері келтірілген.

Түйінді сөздер: тоннель, серпімді жартылай кеңістік, цилиндрлік қабық, тасымалдау жүктемесі, кернеулі деформацияланған күй.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/3.2>

2000 Mathematics Subject Classification: 74-10

1. Кіріспе

Көлік тоннельдері, магистральдық газ құбырлары және мұнай құбырлары, әртүрлі жүктерді тасымалдауға арналған құбырлар сияқты жерасты құрылыстарын пайдалану тәжірибесі көлік жүктемелерінің динамикалық әсерінен (осы құрылыстарда қозғалатын объектілердің жүктемелері) оларда пайда болатын тербелістердің салдарынан болатын көптеген зақымданулар мен бұзылуларды көрсетеді. Жүктемелердің қозғалыс жылдамдығы артқан кезде діріл деңгейі артады және осы құрылымдар үшін белгіленген рұқсат етілген нормалардан асып кетуі мүмкін. Оларда резонанстық құбылыстардың пайда болу қаупі бар. Сондықтан, соңғы жылдары жерасты құрылыстарына әсер ететін көлік жүктемелері жылдамдығының өсуіне байланысты (атап айтқанда, қозғалатын тоннелішілік көліктен түсетін жүктемелер), осы жүктемелердің әсерінен олардың динамикалық күй-өзгерістерін зерттеу өзекті болып отыр. Зерттеу барысында

құрылымның құрылымдық ерекшеліктеріне ерекше назар аудару керек. Сонымен қатар, оның орналасу тереңдігі үлкен маңызға ие [1].

Көлік жүктемелерінің әсеріне тоннельдің біртекті цилиндрлік қаптамасымен нығайтылған динамикалық есептеу кезінде оның есептік схемасы әдетте серпімді ортада ұзартылған цилиндрлік қабық түрінде ұсынылады. Қабықтың ішкі бетіне оның осі бойымен қозғалатын жүктеме (көлік жүктемесі) әсер етеді. Тоннельді терең төсеу кезінде қабық шексіз ортада (серпімді кеңістікте), таяз төсеу кезінде – жазықтықпен (серпімді жартылай кеңістікте) қабықтың осіне параллель шектелген ортада қарастырылады. Серпімді кеңістіктегі дөңгелек цилиндрлік қабыққа қозғалатын ось-симметриялық қалыпты жүктеменің әрекеті туралы есеп (терең тоннельге арналған модельдік таспырма) [2] мақалада шешілген. Ось-симметриялық емес жылжымалы жүктеме қабығына әсер етудегі ұқсас тапсырма [3] мақалада және басқа еңбектерде қарастырылады.

Неғұрлым күрделі мәселе – бұл таяз төсеу тоннельдің динамикалық әрекетін модельдейтін серпімді жартылай кеңістіктегі қабыққа қозғалатын жүктеменің әсері. Осы бағытта жарияланған ғылыми еңбектердің саны аз және негізінен соңғы жылдарды қамтиды, атап айтқанда [4 – 8]. Бұл жұмыстарда сандық эксперименттер жүргізу кезінде серпімді жартылай кеңістікте орналасқан жұқа қабырғалы немесе қалың қабырғалы біртекті серпімді дөңгелек цилиндрлік қалыпты қозғалмалы жүктеме қабығына түсетін әсер қарастырылды.

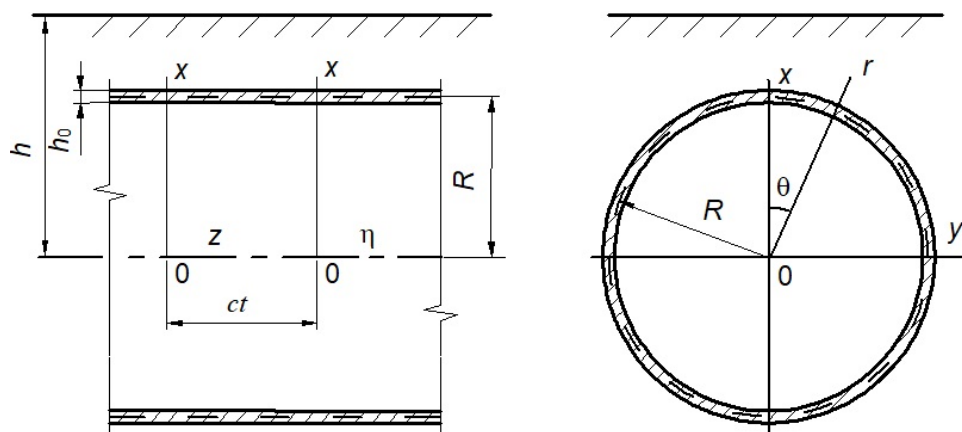
Үйкеліс арқылы оның бетіне қалыпты қысым жүктемесін беретін тоннель арқылы қозғалатын объект осьтік тангенс жүктемесін де беретіндіктен, бұл жүктеме әсерінің массивтың кернеулі-деформацияланған күйіне (КДК) әсерін зерттеуге қызығушылық тудырады.

2. Әдістер

Зерттеуде серпімділік теориясының модельдерін тарта отырып математикалық модельдеу әдісі қолданылады.

Мәселенің қойылуы және шешілуі

Тоннельдің есептік схемасы ретінде цилиндрлік r, θ, z және декарттық x, y, z координаттар жүйелерінде кеңістікте тұрақты қалыбы бар, сызықтық серпімді жартылай кеңістік болып табылатын біртекті және изотропты ортаны (массивті) қарастырамыз. Көлденең шекарасы жүктемелерден бос жартылай кеңістікте радиусы R болатын шексіз ұзын дөңгелек цилиндрлік қуыс бар, оның осі осы шекараға параллель z оське сәйкес келеді. Координаталық ось x жартылай кеңістіктің 4 шекарасына перпендикулярлы: $x \leq h$ ($h > R$), мұндағы h - тоннель төсеу тереңдігі (1-сурет). Қуыс қалыңдығы h_0 болатын серпімді жұқа қабырғалы қабықпен (қаптамамен) бекітілген. Қабық жұқа қабырғалы болғандықтан, оның радиусы R қуыс радиусына тең болатын ортаңғы бет бойындағы массивпен жанасады деп есептейміз. Қабықтың массивпен жұптасуы қатты қабылданады.



СУРЕТ 1 – Серпімді жартылай кеңістіктегі жұқа қабырғалы қабық

Массив пен қабық материалдарының физика-механикалық сипаттамалары үшін біз келесі белгілерді қолданамыз. Пуассон коэффициенті: ν (массив үшін), ν_0 (қабық үшін); ығысу модулі: μ (массив үшін), μ_0 (қабық үшін); тығыздығы: ρ (массив үшін), ρ_0 (қабық үшін). Қабықтың ішкі беті бойымен c тұрақты жылдамдықпен z ось бағытында жалпы қолдану нүктелері және бірдей қалыпты жүктеме және z осіне параллельді жанама жүктемесі қозғалады. Біз массивтың ҚДК анықтаймыз.

Мәселені шешу үшін біз жылжымалы координаттар жүйесін қолданамыз: цилиндрлік $(r, \theta, \eta = z - ct)$ және декарттық $(x, y, \eta = z - ct)$. Бұл координаттар жүйелерінде массив пен қабықтың қозғалысын, сәйкесінше, (1) және (2) теңдеулерімен сипаттаймыз [3, 4]:

$$(M_p^{-2} - M_s^{-2}) \text{grad div } \mathbf{u} + M_s^{-2} \nabla^2 \mathbf{u} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial \eta^2, \quad (1)$$

мұнда $M_p = c/c_p$, $M_s = c/c_s$ – Мах сандары; $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$, $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – массивтегі ығысу толқындарының тарату және кеңейю-сығылу жылдамдықтары, $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$; ∇^2 – Лаплас операторы, $\mathbf{u}$ – массив нүктелерінің ығысу векторы.

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} &= \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\eta - q_\eta), \\ \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-\nu_0)}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} &= -\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} q_\theta, \\ \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0r} + \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} &= -\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_r - q_r), \end{aligned} \quad (2)$$

мұнда q_j және u_{0j} – массивтың және қабықтың орташа бетіндегі нүктелердің жылжу реакциялары ($r = R$ -де $q_j = \sigma_{rj}$, мұнда σ_{rj} – массив нүктелеріндегі кернеулер), $j = \eta, \theta, r$; $P_\eta(\theta, \eta)$ және $P_r(\theta, \eta)$ – жанама жүктеменің қарқындылығы және қалыпты жүктеменің қарқындылығы.

Мәселенің тұжырымына сәйкес, жартылай кеңістік пен қуыс бетінің шекаралық шарттары сәйкесінше (3) және (4) көрініске ие болады:

$$\sigma_{xx}|_{x=h} = \sigma_{xy}|_{x=h} = \sigma_{x\eta}|_{x=h} = 0, \quad (3)$$

$$u_j|_{r=R} = u_{0j}, \quad j = \eta, \theta, r. \quad (4)$$

Мұнда u_j – $\mathbf{u}$ вектордың компоненттері.

$\mathbf{u}$ -ді $\varphi_j (j = 1, 2, 3)$ Ламе потенциалдары арқылы білдіреміз [9]

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot}(\varphi_2 \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta), \quad (5)$$

мұнда $\mathbf{e}_\eta$ – η осінің орты.

(1)-ден және (5)-тен ілеседі:

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \partial^2 \varphi_j / \partial \eta^2, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Мұнда $M_1 = M_p$, $M_2 = M_3 = M_s$.

Массивтың ҚДК компоненттерін φ_j Ламе потенциалдары арқылы көрсетеміз:

(5) декарттық (7) және цилиндрлік (8) жылжымалы координаттар жүйелерінде $\mathbf{u}$ вектордың компоненттері:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial \eta}, \\ u_y &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial \eta}, \\ u_\eta &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + m_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial r}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial \theta}, \\ u_\eta &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + m_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Гук заңын пайдаланып, (7), (8) ескере отырып кернеулер тензор компоненті үшін декарттық (9) және цилиндрлік (10) координаттарда өрнектерді табамыз

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= (2\mu + \lambda M_p^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu m_s^2 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{xx} &= \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{x\eta} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \\ \sigma_{\eta y} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{m_s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y \partial \eta} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= (2\mu + \lambda M_p^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu m_s^2 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial \eta} \right), \\ \sigma_{rr} &= \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial r^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{r\eta} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \\ \sigma_{\eta\theta} &= \mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_s^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \theta \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} - \frac{m_s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

(6) теңдеулерге η бойынша Фурье түрленуін қолдана отырып, шығарамыз

$$\nabla_2^2 \varphi_j^* - m_j^2 \xi^2 \varphi_j^* = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (11)$$

мұнда $\varphi_j^*(r, \theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(r, \theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$, $m_j^2 = 1 - M_j^2$, $m_1 \equiv m_p$, $m_2 = m_3 \equiv m_s$, ∇_2^2 – Лапласстың жазық операторы.

(7) – (10)-ға η бойынша Фурье түрленуін қолдана отырып декарттық ($l, m = x, y, \eta$) және цилиндрлік ($l, m = r, \theta, \eta$) координаттар жүйелерінде φ_j^* арқылы ұсынылған u_l^* ығысулар мен σ_{lm}^* кернеулердің трансформанттары үшін өрнектерді шығарамыз.

Массивтегі толқындарының таралу жылдамдығынан кем деп есептей отырып, жүктемелердің қозғалу жылдамдығына шектеу енгізейік, яғни $c < c_s$. Сонда, $M_s < 1$ ($m_2 = m_3 = m_s > 0$). Бұл жағдайда (11) теңдеулердің шешімдерін келесі түрде ұсынамыз:

$$\varphi_j^* = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}. \quad (12)$$

Мұнда, $\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r) e^{in\theta}$, $\Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) d\zeta$, $K_n(kr)$ – Макдональд функциялары, $k_j = m_j \xi$; a_{nj} , $g_j(\xi, \zeta)$ – анықтауға жататын коэффициенттер мен функциялар, $j = 1, 2, 3$.

Декарттық координаттар жүйесінде (12) трансформант потенциалдары үшін өрнектер келесі түрге айналады:

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (13)$$

Мұнда, $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}$, $\Phi_{nj} = \left(\frac{\zeta + f_j}{k_j}\right)^n$, $j = 1, 2, 3$.

$g_j(\xi, \zeta)$ көрсеткішін a_{nj} ($j = 1, 2, 3$) коэффициенттер арқылы білдіреміз. Ол үшін (13) ескере отырып, σ_{xx}^* , σ_{xy}^* , $\sigma_{x\eta}^*$ үшін қайта жазылған (3) шекаралық шарттарды қолданамыз. $e^{iy\zeta}$ жанындағы коэффициенттерді белгілеп және оларды нөлге теңестіріп (y еріктілігінің күшін ескере отырып), үш теңдеулер жүйесін шығарамыз. Осы теңдеулер жүйесінен анықтаймыз:

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta_*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}. \quad (14)$$

мұнда $\Delta_* = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}$,

$$\Delta_{11}^* = \frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}} - \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}}, \quad \Delta_{12}^* = -2\zeta(2\rho_*^2 - \beta^2), \quad \Delta_{13}^* = 2\xi(2\rho_*^2 - \beta^2)\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{21}^* = -\frac{M_s^2}{m_s^2} \Delta_{12}^*, \quad \Delta_{22}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \quad \Delta_{23}^* = -4\xi\zeta \frac{M_s^2}{m_s^2} \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{31}^* = -\frac{\Delta_{13}^*}{m_s^2 \xi^2}, \quad \Delta_{32}^* = \frac{\Delta_{21}^*}{\beta^2}, \quad \Delta_{33}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}} + \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}},$$

$$\alpha = M_p \xi, \quad \beta = M_s \xi, \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2, \quad \Delta_{**} = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_{**}^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\rho_{**}^2 = \xi^2 + (2/m_s^2 - 1)\zeta^2.$$

$c < c_R$ шартында $\Delta_*(\xi, \zeta)$ - нөлге айналмайтын Рэлей детерминанты екенін дәлелдеу қиын емес, мұнда c_R – Рэлейдің жартылай кеңістіктегі беткі толқындарының жылдамдығы [9].

$c < c_R$ -де, (14) өрнектерді ескере отырып, (13) ара салмақтар келесі түріне айналады

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (15)$$

Декарттық ($l, m = x, y, \eta$) координаттар жүйесінде ұсынылған u_l^* және σ_{lm}^* үшін өрнектерге (15)-ті алмастырып, шығарамыз

$$u_l^* = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left(T_{lj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + T_{lj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta,$$

$$\frac{\sigma_{lm}^*}{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left(S_{lmj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + S_{lmj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta.$$

Мұнда: $l = x, y, \eta$, $m = x, y, \eta$;

$$\begin{aligned}
 F_{nj}^{(1)} &= \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_{nj} \Phi_{nj}, \quad F_{nj}^{(2)} = e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_n a_{nk} \Phi_{nk}, \\
 T_{x1}^{(1)} &= -T_{x1}^{(2)} = -f_1, \quad T_{x2}^{(1)} = T_{x2}^{(2)} = -\zeta, \quad T_{x3}^{(1)} = -T_{x3}^{(2)} = f_3 \xi, \\
 T_{y1}^{(1)} &= T_{y1}^{(2)} = i\zeta, \quad T_{y2}^{(1)} = -T_{y2}^{(2)} = if_2, \quad T_{y3}^{(1)} = T_{y3}^{(2)} = -i\xi\zeta, \\
 T_{\eta 1}^{(1)} &= T_{\eta 1}^{(2)} = i\xi, \quad T_{\eta 2}^{(1)} = T_{\eta 2}^{(2)} = 0, \quad T_{\eta 3}^{(1)} = T_{\eta 3}^{(2)} = -im_s^2 \xi^2, \\
 S_{xx1}^{(1)} &= S_{xx1}^{(2)} = n_2 + 2(f_1^2 - \xi^2 m_p^2), \quad S_{xx2}^{(1)} = -S_{xx2}^{(2)} = 2\zeta f_2, \quad S_{xx3}^{(1)} = S_{xx3}^{(2)} = -2f_3^2 \xi, \\
 S_{yy1}^{(1)} &= S_{yy1}^{(2)} = n_2 - 2(\zeta^2 + \xi^2 m_p^2), \quad S_{yy2}^{(1)} = -S_{yy2}^{(2)} = -2f_2 \zeta, \quad S_{yy3}^{(1)} = S_{yy3}^{(2)} = 2\xi \zeta^2, \\
 S_{\eta\eta 1}^{(1)} &= S_{\eta\eta 1}^{(2)} = n_2 - 2n_1, \quad S_{\eta\eta 2}^{(1)} = S_{\eta\eta 2}^{(2)} = 0, \quad S_{\eta\eta 3}^{(1)} = S_{\eta\eta 3}^{(2)} = 2m_s^2 \xi^3, \\
 S_{xy1}^{(1)} &= -S_{xy1}^{(2)} = -2f_1 \zeta i, \quad S_{xy2}^{(1)} = S_{xy2}^{(2)} = -(f_2^2 + \zeta^2) i, \quad S_{xy3}^{(1)} = -S_{xy3}^{(2)} = 2f_3 \xi \zeta i, \\
 S_{\eta y 1}^{(1)} &= S_{\eta y 1}^{(2)} = -2\xi \zeta, \quad S_{\eta y 2}^{(1)} = -S_{\eta y 2}^{(2)} = -\xi f_2, \quad S_{\eta y 3}^{(1)} = S_{\eta y 3}^{(2)} = n_2 \zeta, \\
 S_{x\eta 1}^{(1)} &= -S_{x\eta 1}^{(2)} = -2f_1 \xi i, \quad S_{x\eta 2}^{(1)} = S_{x\eta 2}^{(2)} = -\xi \zeta i, \quad S_{x\eta 3}^{(1)} = -S_{x\eta 3}^{(2)} = n_2 f_3 i, \\
 n_1 &= (1 + m_p^2) \xi^2, \quad n_2 = (1 + m_s^2) \xi^2.
 \end{aligned}$$

(12) трансформант потенциалдарын цилиндрлік координаттар жүйесінде ұсыну үшін біз [10] қатынасын қолданамыз

$$\exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(kr) e^{in\theta} \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k^2}}{k}\right)^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k^2}}.$$

Мұнда $I_n(kr)$ – Бессельдің модификацияланған функциялары.

Сонда

$$\varphi_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_j r) + I_n(k_j r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-hf_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

$c < c_R$ -те бұл өрнектер, (14) ескере отырып мынадай түріне айналады,

$$\varphi_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_j r) + b_{nj} I_n(k_j r)) e^{in\theta}, \quad (16)$$

мұнда $b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}$, $A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\zeta$.

Цилиндрлік $(l, m = r, \theta, \eta)$ координаттар жүйесінде ұсынылған u_l^* және σ_{lm}^* үшін өрнектерге (16)-ны алмастырып, шығарамыз

$$\begin{aligned}
 u_l^* &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[T_{lj}^{(1)}(K_n(k_j r)) a_{nj} + T_{lj}^{(2)}(I_n(k_j r)) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}, \\
 \frac{\sigma_{lm}^*}{\mu} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[S_{lmj}^{(1)}(K_n(k_j r)) a_{nj} + S_{lmj}^{(2)}(I_n(k_j r)) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}.
 \end{aligned}$$

Мұнда, $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$;

$$\begin{aligned}
 T_{r1}^{(1)} &= k_1 K'_n(k_1 r), \quad T_{r2}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_2 r), \quad T_{r3}^{(1)} = -\xi k_3 K'_n(k_3 r), \\
 T_{\theta 1}^{(1)} &= \frac{n}{r} K_n(k_1 r) i, \quad T_{\theta 2}^{(1)} = -k_2 K'_n(k_2 r) i, \quad T_{\theta 3}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n(k_3 r) i, \\
 T_{\eta 1}^{(1)} &= \xi K_n(k_1 r) i, \quad T_{\eta 2}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta 3}^{(1)} = -k_3^2 K_n(k_3 r) i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{rr1}^{(1)} &= 2 \left(k_1^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda M_p^2 \xi^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r) - \frac{2k_1 K_n'(k_1 r)}{r}, S_{rr2}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_2 r) - \frac{2k_2 K_n'(k_2 r)}{r}, \\
 S_{rr3}^{(1)} &= -2\xi \left(k_3^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_3 r) + \frac{2\xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r}, \\
 S_{\theta\theta1}^{(1)} &= -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda M_p^2 \xi^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r) + \frac{2k_1 K_n'(k_1 r)}{r}, S_{\theta\theta2}^{(1)} = -\frac{2n K_n(k_2 r)}{r^2} + \frac{2n k_2 K_n'(k_2 r)}{r}, \\
 S_{\theta\theta3}^{(1)} &= \frac{2\xi n^2 K_n(k_3 r)}{r^2} - \frac{2\xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r}, \\
 S_{\eta\eta1}^{(1)} &= -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda M_p^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r), \quad S_{\eta\eta2}^{(1)} = 0, S_{\eta\eta3}^{(1)} = 2m_3^2 \xi^3 K_n(k_3 r), \\
 S_{r\theta1}^{(1)} &= \left(-\frac{2n K_n(k_1 r)}{r^2} + \frac{2n k_1 K_n'(k_1 r)}{r} \right) i, S_{r\theta2}^{(1)} = \left(-\left(k_2^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_2 r) + \frac{2k_2 K_n'(k_2 r)}{r} \right) i, \\
 S_{r\theta3}^{(1)} &= \left(\frac{2n \xi K_n(k_3 r)}{r^2} - \frac{2n \xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r} \right) i, \\
 S_{\theta\eta1}^{(1)} &= -\frac{2n \xi K_n(k_1 r)}{r}, \quad S_{\theta\eta2}^{(1)} = \xi k_2 K_n'(k_2 r), \quad S_{\theta\eta3}^{(1)} = \frac{n \xi^2 (1 + m_3^2) K_n(k_3 r)}{r}, \\
 S_{r\eta1}^{(1)} &= 2\xi k_1 K_n'(k_1 r) i, \quad S_{r\eta2}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_2 r) i}{r}, \quad S_{r\eta3}^{(1)} = -\xi^2 k_3 (1 + m_3^2) K_n'(k_3 r) i; \\
 K_n'(kr) &= \frac{dK_n(kr)}{d(kr)}; \quad T_{lj}^{(2)}, \quad S_{lmj}^{(2)} \quad T_{lj}^{(1)}, \quad S_{lmj}^{(1)} \text{ -ден } K_n(k_j r) \text{ -ны } I_n(k_j r) \text{ -ге ауыстыру} \\
 &\text{арқылы алынады.}
 \end{aligned}$$

u_l^* ығысулар мен σ_{lm}^* кернеулердің трансформанттары үшін өрнектеріне кіретін a_{nj} ($j = 1, 2, 3$) белгісіз коэффициенттерді анықтау мақсатында келесі түрде ұсынылған (4) шекаралық шарттарын пайдаланамыз:

$$u_j^*|_{r=R} = u_{0j}^*, j = \eta, \theta, r. \quad (17)$$

Мұнда, $u_{0j}^*(\theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{0j}(\theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$.

(2)-ге η бойынша Фурье түрлендіруін қолданып және θ бойынша Фурье қатарында $P_j^*(\theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$ және $u_{0l}^*(\theta, \xi)$ ($j = \eta, r, l = \eta, \theta, r$) функцияларын ыдыратумен, шығарамыз:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + \nu_* n \xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_0 \xi_0 u_{0nr} &= G_0 (P_{n\eta} - q_{n\eta}), \\
 \nu_* n \xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2in u_{0nr} &= -G_0 q_{n\theta}, \\
 2i\nu_0 \xi_0 u_{0n\eta} + 2in u_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} &= G_0 (P_{nr} - q_{nr}),
 \end{aligned}$$

мұнда

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^2 &= \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \xi_0 = \xi R, \\
 \alpha_0^2 &= 2\xi_0^2 + \nu_{**} n^2, \quad \beta_0^2 = \nu_{**} \xi_0^2 + 2n^2, \quad \gamma_0^2 = \chi^2 (\xi_0^2 + n^2)^2 + 2, \quad \varepsilon_0^2 = \nu_{**} \xi_0^2 M_{s0}^2, \\
 \nu_{**} &= 1 - \nu_0, \quad \nu_* = 1 + \nu_0, \quad M_{s0} = c/c_{s0}, \quad c_{s0} = \left(\frac{\mu_0}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad \chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}, \quad G_0 = -\frac{\nu_{**} R^2}{\mu_0 h_0};
 \end{aligned}$$

P_{nj} және u_{0nl} - ($r = R, j = \eta, r, l = \eta, \theta, r$)-де, $q_{nl} = (\sigma_{rl}^*)_n$ шартында, θ бойынша Фурье қатарында $P_j^*(\theta, \xi)$ и $u_{0l}^*(\theta, \xi)$ ыдырату коэффициенттері.

u_{0nl} ($l = \eta, \theta, r$) қатысты соңғы теңдеулерді шеше отырып, шығарамыз:

$$u_{0n\eta} = G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{\eta j}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}),$$

$$u_{0n\theta} = G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{\theta j}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}),$$

$$u_{0nr} = G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{rj}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj})$$

Мұнда,

$$\delta_n = \delta_{|n|} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 - (\varepsilon_3 \xi_3)^2 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3,$$

$$\delta_{\eta 1} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2} = \xi_1 \xi_2 - \xi_3 \varepsilon_3^2, \quad \delta_{\eta 3} = i(\varepsilon_2^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_3),$$

$$\delta_{\theta 1} = \delta_{\eta 2}, \quad \delta_{\theta 2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \quad \delta_{\theta 3} = i(\varepsilon_1^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3),$$

$$\delta_{r1} = -\delta_{\eta 3}, \quad \delta_{r2} = -\delta_{\theta 3}, \quad \delta_{r3} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2,$$

$$\xi_1 = 2n, \quad \xi_2 = 2\nu_0 \xi_0, \quad \xi_3 = \nu_* \xi_0 n; P_{n1} = P_{n\eta}, P_{n2} = P_{n\theta} = 0, P_{n3} = P_{nr}, q_{n1} = q_{n\eta}, q_{n2} = q_{n\theta}, q_{n3} = q_{nr}.$$

Тиісті өрнектерді (17) алмастырып, $e^{in\theta}$ шартында, Фурье-Бессель қатарларының коэффициенттерін теңестіре отырып, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ әр мән үшін сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шығарамыз, егер оның анықтаушы $\Delta_n(\xi, c) \neq 0$ болса, оның жалғыз шешімі болады. Бұл теңдеулер жүйелерінен a_{nj} ($j = 1, 2, 3$) коэффициенттерін шығарамыз. Содан кейін, Фурьенің кері түрленуін қолданып массивтегі u_l ығысулары мен σ_{lm} кернеулерін ($l, m = r, \theta, \eta$) есептейміз. Сондай-ақ, егер $c < c_{(n)*}$ (мұнда $c_{(n)*}$ – қабықтағы резонанстық құбылыстар пайда болатын жүктемелердің сындарлы жылдамдығы), кез келген сандық әдісін қолдануға болады. n санына тәуелді $c_{(n)*}$ мәндер $\Delta_n(\xi, c) = 0$ теңдеулерден анықталады. Осы теңдеулердің зерттелуімен жүктеменің ең төмен сындарлы жылдамдығы $n = 0$ -ге, яғни $\min c_{(n)*} = c_0$ сәйкес келетіні анықталды.

3. Нәтижелер мен талқылау

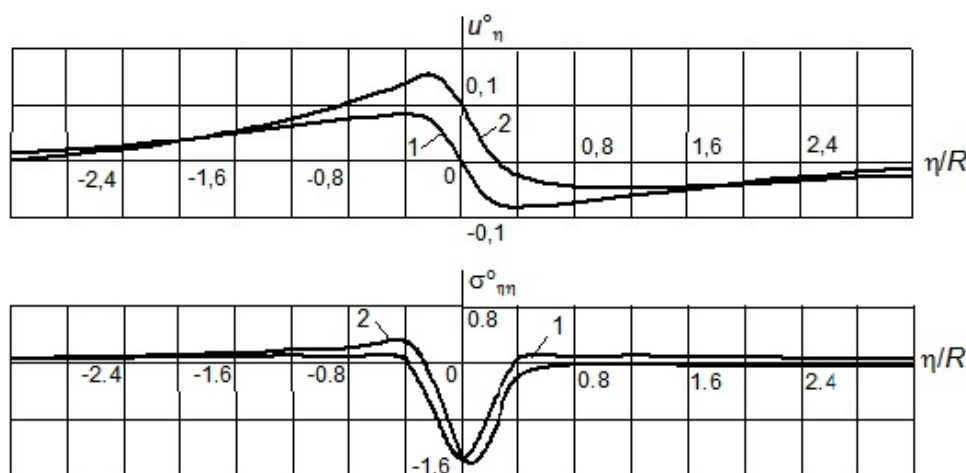
Шығарылған шешімді асыл тұқымды массивтің жұқа қабырғалы қаптамамен бекітілген маңайда тоннельдің радиусы $R = 1$ м және тереңдігі $h = 2R$ КДК есептеу үшін қолданамыз ($\nu = 0, 2$, $\mu = 2,532 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_s = 1006,4$ м/с, $c_R = 917$ м/с) ($h_0 = 0,02$ м; $\nu_0 = 0,2$, $\mu_0 = 12,1 \cdot 10^9$ Па, $\rho_0 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³). Тоннель бойы η осі бағытында $|\eta| \leq l_0 = 0,2R$ интервалында біркелкі тіркелген p қарқындылығымен ось-симметриялық P_r қалыпты жүктеме (тоннель қаптамасына әсер ететін жылжымалы объектінің қысымы) және $0,2p$ қарқындылығымен P_η ось-симметриялық жанама жүктеме (тоннель қаптамасына әсер ететін жылжымалы объектінің үйкеліс күші) жылжып келе жатыр. Жүктемелердің жылжу жылдамдығы $c = 100$ м/с. p қарқындылығын $2l_0$ жүктеу учаскесінің барлық ұзындығы бойынша жалпы қалыпты жүктемесі $P^{\circ\circ}$ (Н/м) қарқындылығымен, яғни $p = P^{\circ\circ}/2l_0$ баламалы топталған қалыпты айнала жүктемесіне тең болғандай таңдалуы тиіс. $u_\eta^\circ = u_\eta \mu / P^\circ$ (м), $\sigma_{\eta\eta}^\circ = \sigma_{\eta\eta} / P^\circ$ белгілерін енгіземіз, мұнда $P^\circ = P^{\circ\circ} / \mu$ (Па).

ηx ($y = 0$) координаттық жазықтықтағы 2, 3 суреттерде u_η° ығысулар мен $\sigma_{\eta\eta}^\circ$ кернеулердің ($x = R$) қуысының беті бойынша (2-сурет) және ($x = h$) жер беті бойынша (3-сурет) өзгерістер ауытқымасы көрсетілген. 1 ауытқымалары тоннельге әсер ету жағдайдың тек P_r қалыпты көліктік жүктемесіне, 2 ауытқымалары – тоннельге P_r қалыпты және P_η жанама көліктік жүктемелерге сәйкес келеді.

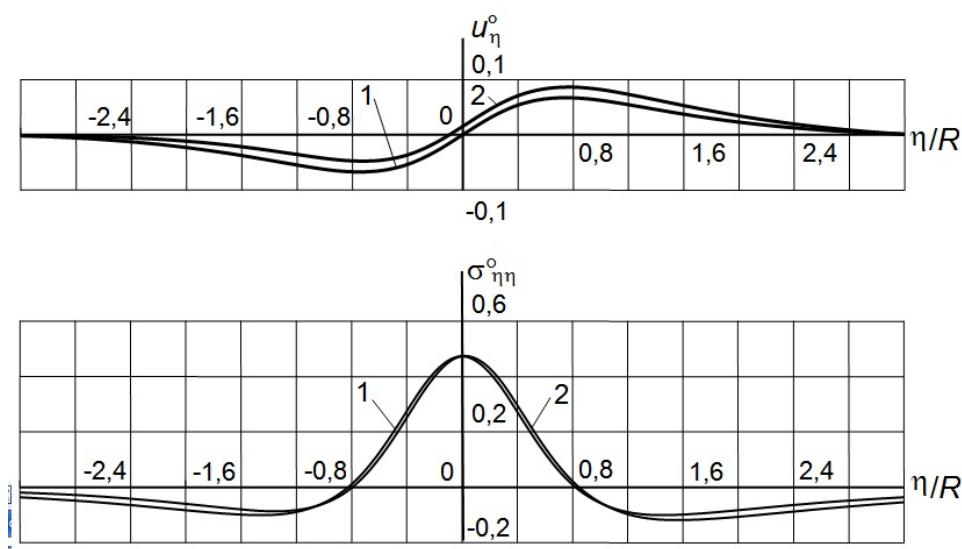
Суреттерден тоннельге тек P_r қалыпты көліктік жүктеменің әсер етуінің жағдайында u_η° және $\sigma_{\eta\eta}^\circ$ кестелері $\eta = 0$ тік осіне қатысты, сәйкесінше, қиғаш симметриялық және симметриялық түрде болады, ал P_r және P_η көліктік жүктемелердің біріккен әсерінде олар мұндай болмайды.

Қуыс бетінде $x = R$ -де (2-сурет) P_η үйкеліс күштер u_η° ығысулардың экстремалды мәндеріне анағұрлым әсер етеді. Егер $\eta < 0$, жоғарғы u_η° ұлғаяды, егер $\eta > 0$, жоғарғы $|u_\eta^\circ|$ азаяды. Бұл жағдайда $|\sigma_{\eta\eta}^\circ|$ максималды кернеу шамалы өседі.

Жер бетіндегі $x = h$ (3-сурет) $\sigma_{\eta\eta}^\circ$ (1, 2 ауытқымалар) айтарлықтай ерекшеленбейді. Тек P_r көліктік жүктемесінің әсеріндегі абсолюттық шамалар бойынша бірдей болатын u_η° экстремалдық ығысулар P_η үйкелесу күштерін ескерген кезде әртүрлі болады. Көліктік



СҮРЕТ 2 – ηx ($y = 0, x = R$) координаттық қуыстағы бет бойынша u_{η}^0 ығысулар мен $\sigma_{\eta\eta}^0$ кернеулердің өзгеруі.



СҮРЕТ 3 – ηx ($y = 0, x = h$) координаттық қуыстағы жер беті бойынша u_{η}^0 ығысулар мен $\sigma_{\eta\eta}^0$ кернеулердің өзгеруі.

жүктемелерін қолдану учаскесінің алдында жоғарғы u_{η}^0 ұлғаяды, ал артындағы жоғарғы $|u_{\eta}^0|$ азаяды. Серпімді жартылай кеңістікте (массивте) орналасқан ұзын жұқа қабырғалы дөңгелек цилиндрлік қабықтың ішкі бетіне оның қалыпты осі бойымен қозғалатын және осы жанама жүктеме осіне параллель әрекет ету мәселесі шешілді. Мұндай әрекет жүктерді жерасты құбыры арқылы тасымалдау кезінде немесе көліктің тоннель арқылы қозғалысы кезінде туындайтын үйкеліс күштерін есепке алу кезінде орын алады

4. Қорытындылар

Серпімді жартылай кеңістікте (массивте) орналасқан ұзын жұқа қабырғалы дөңгелек цилиндрлік қабықтың ішкі бетіне оның қалыпты осі бойымен қозғалатын және осы жанама жүктеме осіне параллель әрекет ету мәселесі шешілді. Мұндай әрекет жүктерді жерасты құбыры арқылы тасымалдау кезінде немесе көліктің тоннель арқылы қозғалысы кезінде туындайтын үйкеліс күштерін есепке алу кезінде орын алады. Мәселені шешкен кезде жүктемелердің қозғалыс жылдамдығы дыбысқа дейінгі болып қабылданады, яғни жартылай кеңістіктегі толқындарының жылдамдығы аз болады. Бұл жылдамдыққа шектеулер енгізіледі: ол жартылай кеңістіктегі Рэлей толқындарының жылдамдығынан кем және жүктеме қозғалысының маңызды жылдамдығынан кем болуы керек. Массив серпімді кеңістік түрінде ұсынылатын мұндай еңбектерден айырмашылығы, мұнда

мәселені шешу кезінде жүктемелердің қозғалысы кезінде пайда болатын жартылай кеңістік шекарасымен шағылысқан толқындардың массивіне тиетін әсері ескеріледі.

Алынған шешімді пайдалану кезінде жұқа қабырғалы қаптамамен нығайтылған шағын тоннельдің маңындағы тау жыныстарының КДК-ы зерттелді. Тоннельге біркелкі қозғалатын цилиндрлік қалыпты жүктеме (қозғалатын объектіден қысым тоннель қаптамасына әсер ету) және цилиндрлік жанама жүктемесі (қозғалатын объектіден үйкеліс күштерінің тоннель қаптамасына әсер ету) әсер етеді. Зерттеу нәтижелерінен белгілі бір аралықта оның қаптамасына тұрақты қысым көрсететін объектінің тоннелі бойымен біркелкі қозғалу кезінде оның және қаптаманың арасындағы үйкеліс күштері осьтік қозғалыстарға және тау жыныстарындағы қалыпты кернеулерге тек осы жүктемелерді қолдану аймағының маңында айтарлықтай әсер ететіндігі шығады.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Sheng X. A review on modelling ground vibrations generated by underground trains // International Journal of Rail Transportation. – 2019. – № 7 (4). – P. 241 – 261, doi: 10.1080/23248378.2019.1591312.
- 2 Пожуев В.И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 1. – С. 44 – 48.
- 3 Гирнис С.Р. Влияние геометрических параметров обделки на напряженно-деформированное состояние заглубленного тоннеля // Вестник Бурятского университета. – Улан-Удэ. – 2009. – Вып. 3. – С. 132 – 139.
- 4 Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // International Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45. – № 9. – P. 75-85.
- 5 Coskun I., Enginb H., Ozmutluc A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity // Journal of Shock and Vibration. – Hindawi Limited. – 2011. – Vol. 18. – P. 827-838, doi: 10.3233/SAV-2010-0602.
- 6 Coskun I. & Dolmaseven D. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space // Journal of Engineering. – Hindawi Limited. – 2017. – Vol. 2017. – 12 p., doi: 10.1155/2017/6145375.
- 7 Yuan Z., Bostrom A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space // Journal of Sound and Vibration. – Elsevier. – 2017. – Vol. 387. – p. 177-193, doi: 10.1016/j.jsv.2016.10.016.
- 8 Zhou Sh. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems. – Academic Press, 2019. – 276 p.
- 9 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
- 10 Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Каз. ССР, 1989. – 240 с.

В.Н. Украинец, С.Р. Гирнис, Л.В. Горшкова, Г.А. Жуконова

Торайгыров университет, ул. Ак. Чокина, 139, Павлодар, Казахстан

Действие нормальной и касательной транспортных нагрузок на тоннель мелкого заложения

Аннотация: В подвижных цилиндрической и декартовой системах координат решена задача о действии на внутреннюю поверхность протяженной тонкостенной круговой упругой оболочки равномерно движущихся вдоль ее оси нормальной и параллельной этой оси касательной нагрузок. Оболочка расположена в упругом полупространстве (массиве), горизонтальная граница которого параллельна оси оболочки. Скорость движения нагрузок принимается меньше скорости распространения волн сдвига в массиве. Функции нагрузок могут быть разложены в ряд Фурье по угловой координате и интеграл Фурье по осевой координате. Движение оболочки описываются классическими уравнениями теории оболочек, а упругого полупространства – уравнениями теории упругости в перемещениях, которые выражаются через потенциалы Ламе. Для решения используется метод интегрального преобразования Фурье. В отличие от подобных работ, где массив представляется в виде упругого пространства, здесь при решении задачи учитывается воздействие на массив отраженных границей полупространства волн, возникающих при движении нагрузок. Данная задача является модельной при исследовании динамики подкрепленного тонкостенной обделкой тоннеля мелкого заложения в случае воздействия на него нагрузок указанного типа. Представлены результаты численного эксперимента, которые иллюстрируют напряженно-деформированное состояние (НДС) породного массива при действии на тоннель равномерно приложенных в определенном интервале и движущихся с постоянной скоростью осесимметричной нормальной нагрузки (действие на обделку тоннеля давления от движущегося объекта) и осесимметричной осевой касательной нагрузки (действие на обделку тоннеля сил трения от движущегося объекта).

Ключевые слова: тоннель, упругое полупространство, цилиндрическая оболочка, транспортная нагрузка, напряженно-деформированное состояние.

V.N. Ukrainets, S.R. Girnis, L.V. Gorshkova, G.A. Zhukenova

Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan

The impact of normal and tangential loads on a shallow tunnel

Abstract: The problem of the action of uniformly moving normal and tangential loads on the inner surface of an elongated thin-walled circular elastic shell along its axis has been solved in moving cylindrical and Cartesian coordinate systems. The shell is located in an elastic half-space (medium) where the horizontal boundary is parallel to the axis of the shell. It is assumed that the moving loads have a lower velocity than the shear wave propagation in the medium. The load functions can be decomposed into a Fourier series by angular coordinate and a Fourier integral by axial coordinate. The motion of the shell is described by the classical equations of shell theory, while the elastic half-space is described by the equations of elasticity theory in displacements, which are expressed in the Lamé potentials. The method of integral Fourier transform is used for solving. In contrast to similar works where the mass is considered as an elastic space, this problem's solution takes into account the effect of waves reflected from the boundary of the half-space, which arise during the movement of loads. This problem serves as a model for studying the dynamics of a shallowly embedded tunnel with a thin lining under the influence of the specified type of loads. The results of a numerical experiment are presented, which illustrate the stress-strain state (SSS) of the rock mass under the influence of uniformly distributed and steadily moving axisymmetric normal (the action of pressure from a moving object on the tunnel lining) and axial tangential (the action of frictional forces from a moving object on the tunnel lining) loads on the tunnel.

Keywords: tunnel, elastic half-space, cylindrical shell, transport load, stress-strain state.

References

- 1 Xiaozhen Sheng. A review on modelling ground vibrations generated by underground trains. *International Journal of Rail Transportation*, 7 (4), 241-261, (2019).
- 2 Pozhuev V.I. Dejstvie podvizhnoj nagruzki na cilindricheskuyu obolochku v uprugoy srede [The action of a moving load on a cylindrical shell in an elastic medium]. *Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzhenij* [Construction mechanics and calculation of structures], 1, 44-48 (1978).
- 3 Girnis S.R. Vliyanie geometricheskikh parametrov obdelki na naprjazhjonno-deformirovannoe sostojanie zaglubennogo tonnelja [The influence of the geometric parameters of the lining on the stress-strain state of the buried tunnel]. *Vestnik Burjatskogo universiteta* [Bulletin of the Buryat University], Ulan-Ude, 3, 132-139 (2009).
- 4 Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads. *International Applied Mechanics*, 45 (9), 75-85 (2009).
- 5 Coskun I., Enginb H., Ozmutluc A.. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity. *Journal of Shock and Vibration*. Hindawi Limited, 18, 827-838 (2011).
- 6 Coskun Э. & Dolmasev D. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space. *Journal of Engineering*. Hindawi Limited, 2017, 12 p. (2017).
- 7 Yuan Z., Bostrom A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space. *Journal of Sound and Vibration*. Elsevier, 387, 177-193 (2017).
- 8 Zhou Sh. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems. (Academic Press, 2019. 276p.).
- 9 Novackij V. Teorija uprugosti [Theory of elasticity] (Moscow, Mir, 1975. 872p.).
- 10 Erzhanov Zh.S., Ajtaliev Sh.M., Alekseeva L.A. Dinamika tonnelej i podzemnyh truboprovodov [Dynamics of tunnels and underground pipelines] (Alma-Ata, Nauka, 1989. 240p.) [in Russian].

Авторлар туралы мәліметтер:

Украинец Виталий Николаевич – *Байланыс үшін автор*, техника ғылымдарының докторы, «Өнеркәсіптік азаматтық және көлік құрылысы» кафедрасының профессоры, Торайғыров университеті, Ак. Шөкин к-сі 139, Павлодар, Қазақстан.

Гирнис Светлана Римонтасовна – Техникалық ғылымдарының кандидаты, «Өнеркәсіптік азаматтық және көлік құрылысы» кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Торайғыров университеті, Ак. Шөкин к-сі 139, Павлодар, Қазақстан.

Горшкова Лариса Владимировна – Техникалық ғылымдарының кандидаты, «Өнеркәсіптік азаматтық және көлік құрылысы» кафедрасының профессоры, Торайғыров университеті, Ак. Шөкин к-сі 139, Павлодар, Қазақстан.

Жуконова Гюльнара Абаевна – PhD, «Өнеркәсіптік азаматтық және көлік құрылысы» кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Торайғыров университеті, Ак. Шөкин к-сі 139, Павлодар, Қазақстан.

Ukrainets Vitalii – *Corresponding author*, Doctor of Technical Sciences, professor Department of Industrial Civil and Transport Construction, Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan. .

Girnis Svetlana – Candidate of Technical Sciences, associate professor Department of Industrial Civil and Transport Construction, Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan.

Gorshkova Larisa – Candidate of Technical Sciences, professor Department of Industrial Civil and Transport Construction, Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan.

Zhukenova Gulnara – PhD, associate professor Department of Industrial Civil and Transport Construction Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 07.09.2023

МРНТИ: 28.23.27

А.Е. Кызырканов^{1,2}, С.К. Атанов¹, Ш.А. Альджаварнех³, Н.А. Турсынова¹,
Ж.Е. Сейтбатталов¹

¹ *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Пушкина, 11, Астана, 020000, Казахстан*

² *Астана ИТ Университет, пр. Мангилик Ел, 55/11, Астана, 010000, Казахстан*

³ *Иорданский университет науки и технологии, P.O.Box 3030, Ирбид, 22110, Иордания*
(E-mail: abzzall@gmail.com, atanov5@mail.ru, saaljawarneh@just.edu.jo,
ntursynova000@gmail.com, sbtl.jeks@gmail.com)

Алгоритм управления формированием роя автономных мобильных роботов

Аннотация: Одной из важнейших проблем роевой робототехники является координация движения. Здесь необходимо одновременно найти решение нескольких проблем, таких как избежание столкновений друг с другом или с препятствиями, нахождение оптимального пути достижения цели и т.п. Одним из наиболее распространенных методов решения таких проблем является движение с сохранением определенной геометрической структуры (управление формированием). При правильном управлении формированием можно получить множество преимуществ, например, сокращение стоимости системы, увеличение надежности и эффективности системы, обеспечив при этом способность к реконфигурации и гибкость структуры системы.

В данной статье предоставлен алгоритм управления формированием роя автономных мобильных роботов. Также в рамках данной работы с помощью программного продукта, написанного на языке Python, смоделировано движение роя с девятью автономными роботами. Предоставлены результаты экспериментального исследования движения роя роботов с использованием алгоритма, описанного в статье.

Ключевые слова: робототехника, движение строем, групповая робототехника, групповое управление, децентрализованное управление, управление движением, алгоритмы управления, лидер-последователь, виртуальный лидер

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/3.3>

2000 Mathematics Subject Classification: 93A16

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время робототехника сильно развивается. Использование роботов особенно актуальны в тех сферах жизни, где деятельность людей либо затруднена, либо невозможна вообще, например, в боевых условиях, исследованиях на дне океанов или в космосе.

В ходе развития робототехники было предложено много различных подходов для оптимизации действий роботов и решения специфических проблем робототехники, таких как создание навигационной системы для внутренних помещений [1], автоматическое управление автомобилем [2], подходы к обеспечению соединения [3, 4], разработка облегченных алгоритмов шифрования для решения проблемы нехватки ресурсов на IoT-устройствах [5] и так далее. Одним из таких подходов является использование нескольких простых роботов для одной задачи. Этот подход называется групповой робототехникой.

Групповая робототехника основывается на социальных животных, таких как, например, пчелы и муравьи. Здесь могут использоваться не только роботы обычного размера, но и нанороботы, сопоставимые по размеру с молекулами с размерами меньше одного нанометра. Этот способ может давать очень большой эффект, упрощая процесс

разработки и позволяя роботам решать проблемы, которые они не могли бы решать в одиночку. Теоретические проблемы возникают главным образом в связи с тем, что агенты должны координироваться и контролироваться для достижения своей цели совместно, без централизованного координатора, в то время как они имеют ограниченные возможности в области зондирования и вычислений. Идея решения сложных проблем с помощью нескольких сравнительно простых систем – роботов или агентов – давно находится в центре внимания исследователей. Первые результаты в виде реальных проектов в области групповой робототехники появились около тридцати лет назад [6]. В настоящее же время к примерам применения групповой робототехники относятся, например, мобильные роботы, беспилотные летательные аппараты, спутники, сети датчиков, электросети и т.д.

В последнее время большинство исследований сконцентрированы на роевой робототехнике – в простейшем типе групповой робототехники, которая ориентирована на группу или несколько групп однородных роботов, разработанных для решения одной задачи. Более того, если речь идет о большом количестве роботов, то задачи организации взаимодействия этих роботов так или иначе сводятся к задачам организации взаимодействия однородных роботов, так как создание большого количества разновидностей роботов для единственной задачи не имеет смысла.

Возможность и эффективность роя роботов во многом зависят от деятельности отдельного робота и координации этих роботов. В практике, чтобы скоординировать движение роботов в системе, используется метод управления формированием. Управление формированием – это метод управления, при котором группа роботов строит и поддерживает определенную геометрическую структуру. Здесь роботы могут двигаться не сталкиваясь, одновременно сохраняя дистанцию между собой, и таким образом улучшая производительность всей системы.

Если правильно управлять формированием, можно получить множество преимуществ, например, сократить стоимость системы, увеличить надежность и эффективность системы, обеспечив при этом способность к реконфигурации и гибкость структуры системы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основной целью данного исследования является разработка комплексного алгоритма для координации и управления движением роя интеллектуальных мобильных роботов с сохранением желаемой геометрической формы. Для достижения этой цели поставлены следующие задачи:

- Разработка метода "лидер-последователь" с использованием виртуального лидера для обеспечения сохранения желаемой формации.
- Разработка подхода на основе поведения для управления движением роевой роботизированной системы и разработка уравнений для определения скоростей соответствующих моделей поведения.
- Проведение экспериментальных исследований для оценки эффективности предложенного алгоритма путем моделирования движения роя автономных мобильных роботов.

Алгоритм, основанный на модели поведения. Основная идея алгоритма, основанного на модели поведения, заключается в том, что роботы двигаются в зависимости от нескольких требуемых моделей. Здесь требуемыми моделями поведения роботов могут быть [7]:

- избегание столкновения между собой (коллизия);
- избегание столкновения с преградой;
- поиск и/или достижение цели.

Основным преимуществом данного подхода является то, что здесь решаются вопросы не только перемещения, можно также одновременно решать и другие вопросы, достаточно добавить модель поведения для каждой проблемы. Например, в нашем случае можно

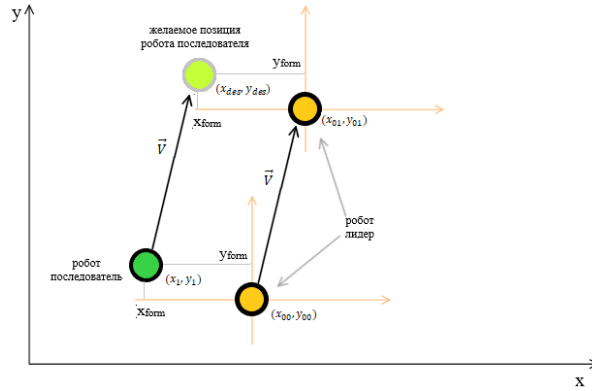


Рисунок 1 – Представление робота лидера и робота последователя как материальных точек

добавить модель поведения “последовать за виртуальным лидером”. Классический вид алгоритма, основанного на модели поведения, можно описать по формуле:

$$\vec{V} = \sum_{b \in B} w_b * \vec{V}_b \quad (1)$$

здесь $\vec{V}$ – вектор движения робота в определенный момент времени, B – набор требуемых моделей поведения, $\vec{V}_b$ – вектор движения для поддержки модели поведения b , w_b – вес модели поведения b . В этой формуле значения $\vec{V}_b$ зависят от текущего состояния робота и вычисляются с помощью данных, полученных от датчика, а w_b – настраиваемый параметр, который соответствует относительной важности этой модели поведения. Например, если робот очень близок к преграде, то поведение «избежание столкновения с преградой» имеет больше веса, чем если преграда на большом расстоянии, при этом если робот не видит преграду, то эта модель поведения в данном промежутке времени не учитывается.

Метод “Лидер-последователь”. Основная идея метода “Лидер последователь” заключается в том, что робот-лидер движется по определенному заранее маршруту, а роботы-последователи стараются сохранить дистанцию. Математическую основу данного алгоритма составляет расчет вектора движения роботов последователей [11]. Представляя роботов как материальные точки в плоскости и зная координаты каждой точки, можно назначать относительные координаты рядовых роботов в отношении лидера (x_{form}, y_{form}) и стараться удерживать ее во время движения (Рисунок 1). Скорость движения лидера можно рассчитать по формуле:

$$\vec{V}_l = (x_{00} - x_{01}, y_{00} - y_{01}) \quad (2)$$

где (x_{00}, y_{00}) и (x_{01}, y_{01}) координаты начальной и конечной точек в единичном временном отрезке. А желаемая позиция, к которому стремится робот:

$$x_{des} = x_L + x_{form} \quad (3)$$

$$y_{des} = y_L + y_{form} \quad (4)$$

Сравнивая расстояния в начале и в конце временного отрезка, можно формировать команду на выполнение движений роботов последователей.

Однако у данного метода есть один большой недостаток: если робот лидер выходит из строя, то вся система перестает работать. Для решения проблемы можно назначать виртуального лидера и поддерживать расстояние относительно этого лидера [12]. Координаты виртуального лидера можно определить как центр в геометрической фигуре.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Для геометрической структуры определяется позиция виртуального лидера и для каждого робота определяются координаты, относительные данного лидера. Роботы начинают двигаться, обновляя свой вектор движения с некоторой частотой.

В каждый промежуток времени сначала определяются координаты лидера, потом рассчитывается вектор движения для каждой требуемой модели поведения и, подставляя значения этих векторов в формулу (1), рассчитывают итоговый вектор движения для каждого робота. В нашем случае роботы соблюдают два типа поведения: движение к цели и поддержание рядности.

Координаты виртуального лидера рассчитываются по формуле:

$$x_l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{iform}) \quad (5)$$

$$y_l = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{iform}) \quad (6)$$

Здесь N количество роботов, (x_i, y_i) – координаты i -го робота, (x_{iform}, y_{iform}) – координаты i -го робота относительно виртуального лидера. Если учитывать, что виртуальный лидер расположен в центре геометрической фигуры, по этим формулам можно увидеть, что координаты виртуального лидера можно было определить как арифметическую среднюю координат роботов в рое, но вычитание x_{iform} и y_{iform} нужно для того, чтобы поддерживать строй при сбое некоторых роботов.

Далее рассчитывается вектор движения для каждой требуемой модели поведения. В нашем случае роботы соблюдают два типа поведения: движение к цели и поддержание рядности.

Для движения к цели вектор движения рассчитывается по формуле:

$$\vec{V}_{\text{движение к цели}} = \begin{cases} \frac{1}{d} * \begin{pmatrix} x_g - x_L \\ y_g - y_L \end{pmatrix}, & \text{если } d > b \\ \frac{b}{d} * \begin{pmatrix} x_g - x_L \\ y_g - y_L \end{pmatrix}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (7)$$

Здесь (x_L, y_L) – координаты виртуального лидера, (x_g, y_g) – координаты цели, b – длина шага движения робота, а d – расстояние между роботом и цели, который рассчитывается по формуле:

$$d = \sqrt{(x_L - x_g)^2 + (y_L - y_g)^2} \quad (8)$$

Для поддержания геометрической структуры для каждого робота вектор движения рассчитывается по формуле:

$$\vec{V}_{\text{сохранение формирования}} = \begin{cases} \frac{1}{d} * \begin{pmatrix} x_{des} - x \\ y_{des} - y \end{pmatrix}, & \text{если} \\ \frac{b}{d} * \begin{pmatrix} x_{des} - x \\ y_{des} - y \end{pmatrix}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (9)$$

Здесь (x, y) – координаты робота в текущий момент времени, b – длина шага движения робота, (x_{des}, y_{des}) – желаемая позиция робота, который рассчитывается по формуле (3) и (4).

В обоих случаях значение длины шага b должно быть меньше, чем $\frac{1}{w}$ чтобы роботы не перепрыгнули целевую позицию.

Используя эти две скорости, вычисляют скорость каждого робота по формуле:

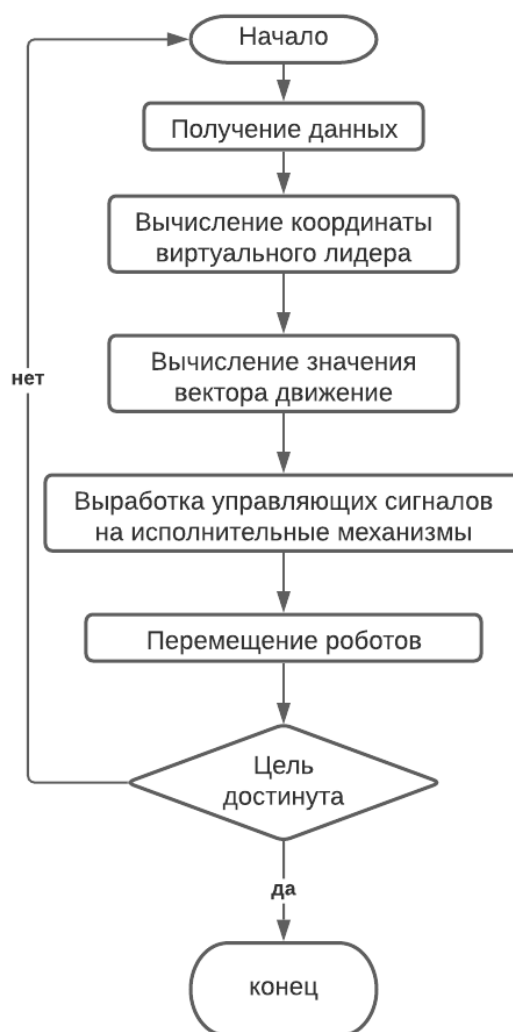


Рисунок 2 – Алгоритм координации и контроля движения

$$\vec{V} = w_1 * \vec{V}_{\text{сохранение формирования}} + w_2 * \vec{V}_{\text{движение к цели}} \quad (10)$$

Здесь w_1 – вес скорости сохранения строя, w_2 – вес скорости движения к цели. Блок схема полного алгоритма представлена в рисунке 2.

ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для исследования описанного в данной статье алгоритма были произведены эксперименты с роем, состоящим из девяти роботов. Движение роя было смоделировано на программе, разработанной на языке Python. Для визуализации использовалась библиотека Pygame.

Расположение роботов в геометрической форме и координаты роботов относительно виртуального лидера показаны на рисунке 3.

Работу программы можно увидеть на рисунках 4, 5 и 6. В симуляторе роботы отмечены фиолетовыми кружочками. Красным отмечена цель, а звездочкой отмечен виртуальный лидер.

Начальное расположение роя и координаты роботов можно увидеть на рисунке 4.

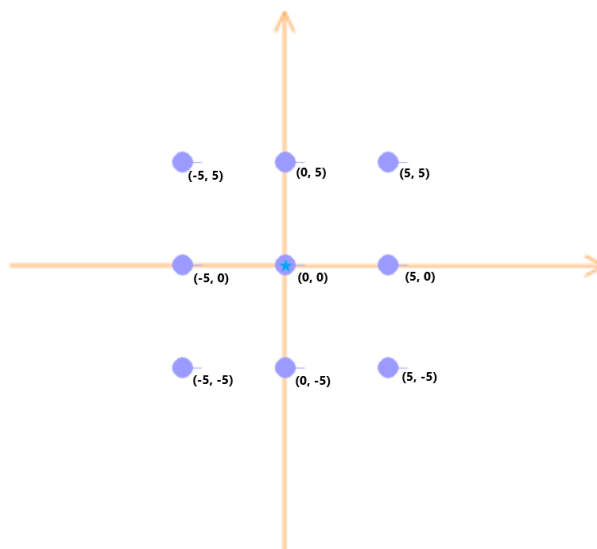


Рисунок 3 – Расположение роботов в геометрической форме и координаты роботов относительно виртуального лидера

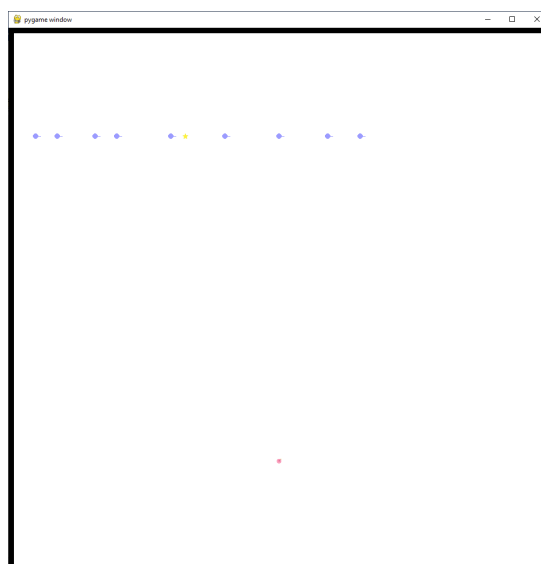


Рисунок 4 – Работа программы: начальное состояние роя роботов

Сначала роботы располагаются по линии (Рисунок 4). При движении роботы двигаются к цели, формируя необходимую геометрическую фигуру (Рисунок 5). Симуляция завершается при достижении цели и завершении формирования геометрической фигуры (Рисунок 6).

Экспериментальное исследование было проведено относительно весов моделей поведения с 0.1 до 10-и. Было рассмотрено движение роя при сбое некоторых роботов. Наблюдались три значения: количество шагов достижения цели, количество шагов формирования требуемой геометрической фигуры. Также было исследовано изменение позиции виртуального лидера, так как от позиции виртуального лидера сильно зависят значение и направление скорости сохранения строя и скорости движения к цели.

Результаты и обсуждение. Для наблюдения изменений позиций виртуального лидера смоделировано движение роя без скорости движения к цели, так как эта скорость для всех роботов действует одинаково и никак не может повлиять на расположение виртуального лидера.

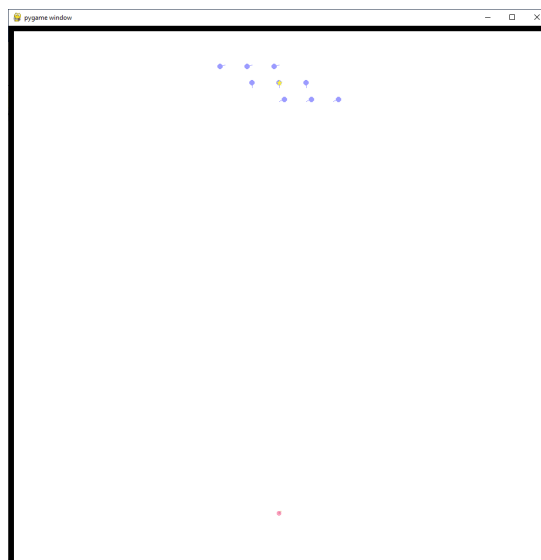


Рисунок 5 – Работа программы: движение роботов

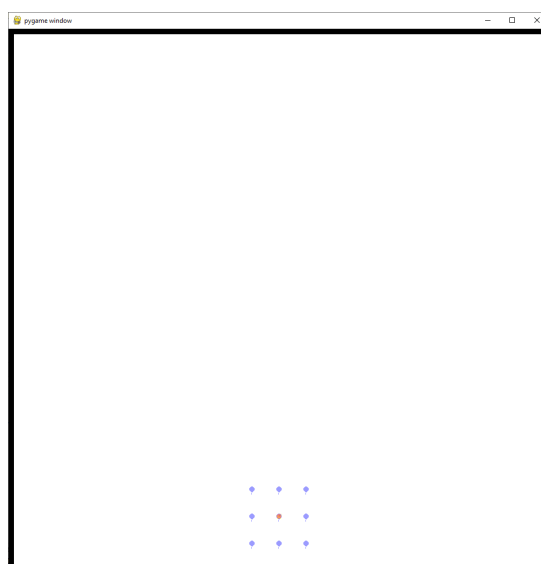


Рисунок 6 – Работа программы: роботы достигли цель

Резкие движения виртуального лидера наблюдаются только в начале движения и со временем становятся стабильными. На рисунке 7 представлен график изменений расстояний, на которые сдвигается виртуальный лидер. Можно заметить, что позиция виртуального лидера становится более изменчивой при малом значении веса скорости сохранения строя.

Изменение расположения виртуального лидера сильно зависит от начального расположении роя. Например, для роя с начальной позицией роботов как на рисунке 8, расположение виртуального лидера совсем не менялось.

Результаты исследования при отказе некоторых роботов показали, что изменчивость расположения виртуального лидера зависит от количества сбитых роботов. При сбое от 1-го до 5-и роботов позиция виртуального лидера становится более изменчивой, при сбое 6-и роботов она становится менее изменчивой, при сбое 7-и и 8-и роботов она становится стабильной.

Результаты исследования показывают, что количество шагов формирования геометрической фигуры зависит от веса скорости сохранения строя. При этом данное значение никак не зависит от веса скорости достижения цели. Это связано с тем,

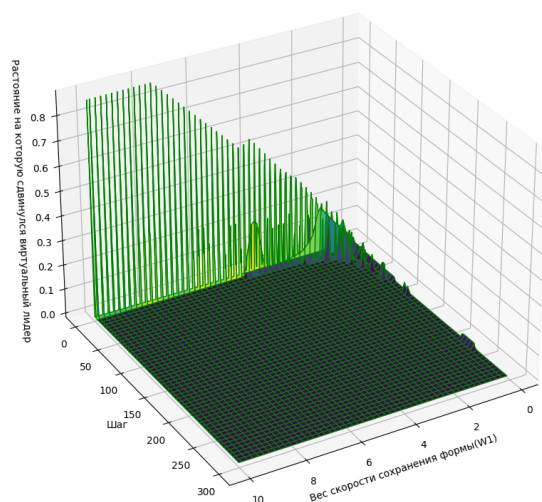


Рисунок 7 – График изменений расстояний, на которое сдвинулся виртуальный лидер

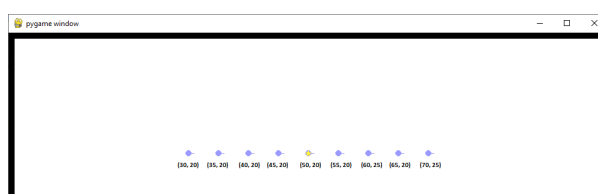


Рисунок 8 – Начальные позиции роботов

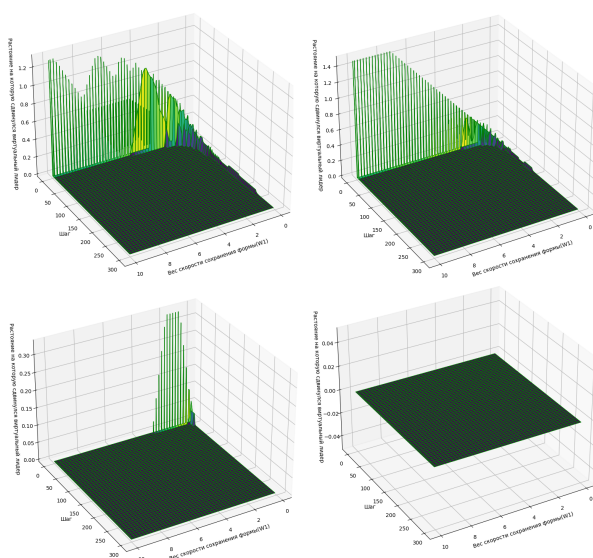


Рисунок 9 – График изменений расстояний, на которое сдвинулся виртуальный лидер при сбое 2-х, 4-х, 6-и и 8-роботов

что скорость движения к цели для всех роботов одинаковая и направлена от позиции виртуального лидера к цели. Зависимость количества шагов формирования строя представлена на рисунке 12.

Результаты исследования при отказе части роботов показаны на рисунке 13. При отказе одного-двух роботов количество шагов формирования геометрической фигуры остается одинаковой (только в некоторых случаях могут отличаться на один-два шага, что незаметно на графике), при этом в некоторых случаях рой двигается по разной траектории,

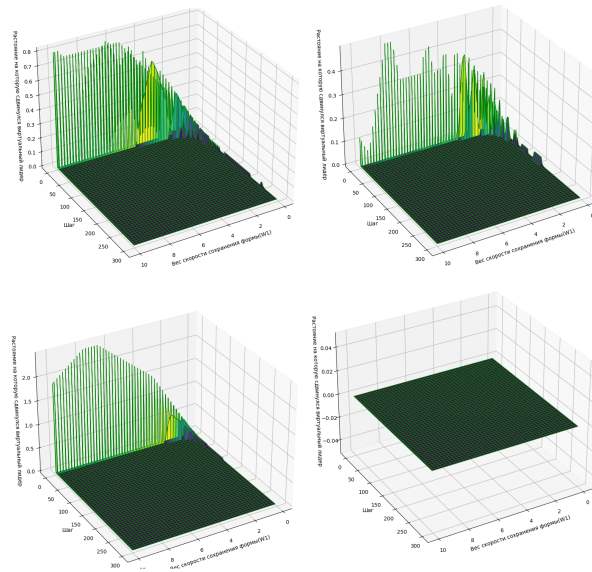


Рисунок 10 – График изменений расстояний, на которое сдвинулся виртуальный лидер при сбое 1-го, 3-х, 5-и и 7-и роботов

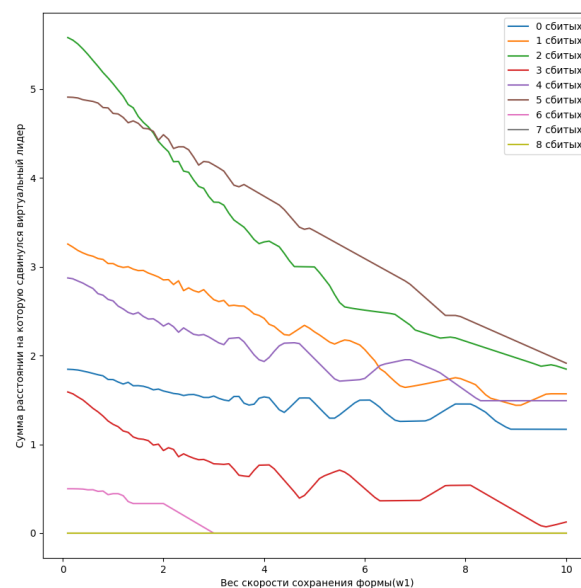


Рисунок 11 – График изменений длины траектории виртуального лидера

так как начальная позиция виртуального лидера меняется. При сбое более двух роботов количество шагов формирования строя заметно уменьшается.

Количество шагов достижения цели во многом зависит от веса скорости достижения цели. Влияние веса скорости сохранения строя во многом зависит от начальной позиции роя роботов. Например, для роя с начальными позициями роботов как на рисунке 18, вес скорости сохранения строя не влияет на количество шагов достижения цели (график на рисунке 15), а для роя с начальными позициями роботов как на рисунке 4, вес скорости сохранения строя влияет в случае $w_1 < 2$ (График на рисунке 14).

Но изучая глубже, можно увидеть, что данное влияние не сильное как кажется на первый взгляд. На самом деле для всех случаев рой достигает цели вовремя вне зависимости от скорости сохранения формы, но в некоторых случаях (при меньших значениях веса скорости сохранения строя), когда геометрическая фигура еще не сформирована, роботы роя продолжают двигаться от воздействия скорости сохранения строя (Рисунок 17).

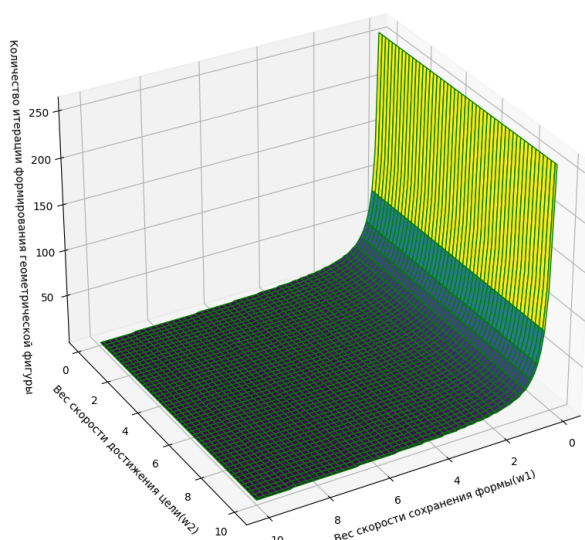


Рисунок 12 – График изменений количества шагов формирования геометрической формы

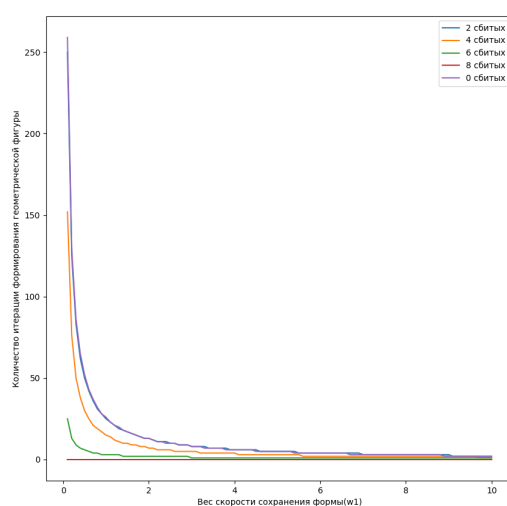


Рисунок 13 – График изменения количества шагов формирования геометрической формы при отказе некоторых роботов

Например, при значениях веса скорости достижения цели $w_1 = 5$ и веса скорости сохранения строя $w_2 = 0.1$ цель будет приближена за десять шагов, но под влиянием веса скорости сохранения строя будет меняться расположение лидера, что хорошо видно на графике изменения расстояния виртуального лидера и цели в зависимости от времени (шага) и веса скорости сохранения строя (Рисунок 16).

При сбое части роботов роя общая тенденция изменения количества шагов достижения цели сильно не меняется. Здесь также влияет в основном только вес скорости достижения цели. Меняется только влияние скорости сохранения строя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Групповая деятельность мобильных роботов обладает рядом преимуществ, таких как масштабируемость, отказоустойчивость и возможность самоорганизации и саморегулирования, чего нельзя достичь при работе с одним центральным роботом. Для организации действия роботов в группе и облегчения управления передвижением

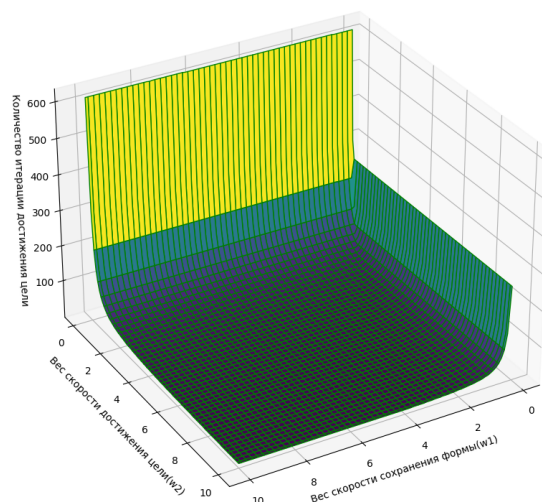


Рисунок 14 – График изменения количества шагов достижения цели

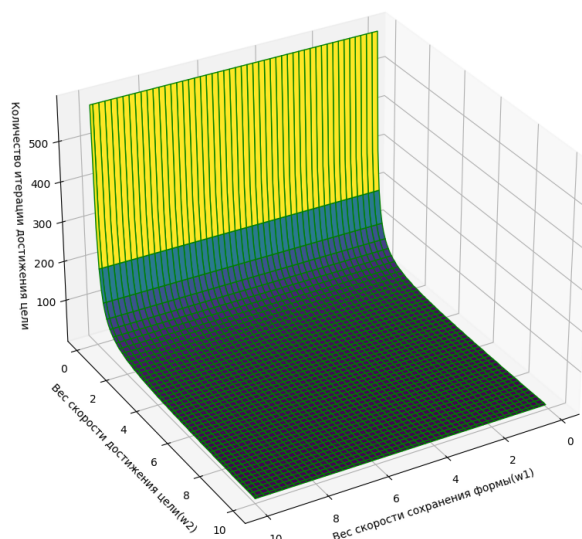


Рисунок 15 – График изменения количества шагов достижения цели для роя с начальными позициями (как на рисунке 8) роботов

группы нужно организовать движение образуя некую геометрическую фигуру из роботов в группе – строй роботов или граф системы.

Движение строем применяется широко в практике. Так, группы беспилотных летательных аппаратов и беспилотных подводных лодок двигаются, образуя геометрическую структуру для выполнения военной миссии.

В данной работе был представлен алгоритм координации и контроля движения, который позволяет переместит группу роботов сохраняя геометрическую фигуру. Для координации движения роботов использовался метод, основанный на модели поведения. Этот метод позволяет организовать движение группы роботов без использования центра управления, что увеличивает отказоустойчивость. А для поддержки геометрической структуры был предложен метод “Лидер-последователь”, который является одним из простейших алгоритмов для понимания и реализации. Для того чтобы состояние системы не зависело от состояния одного робота – лидера было предложено использовать метод виртуальный лидер, что также делает систему более отказоустойчивой.

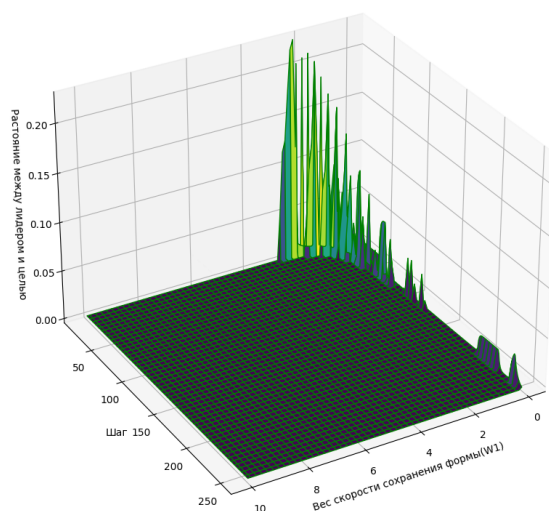


Рисунок 16 – График изменения расстояния виртуального лидера и цели в зависимости от времени (шага) и веса $w_2 = 5$ начиная с шага 10.

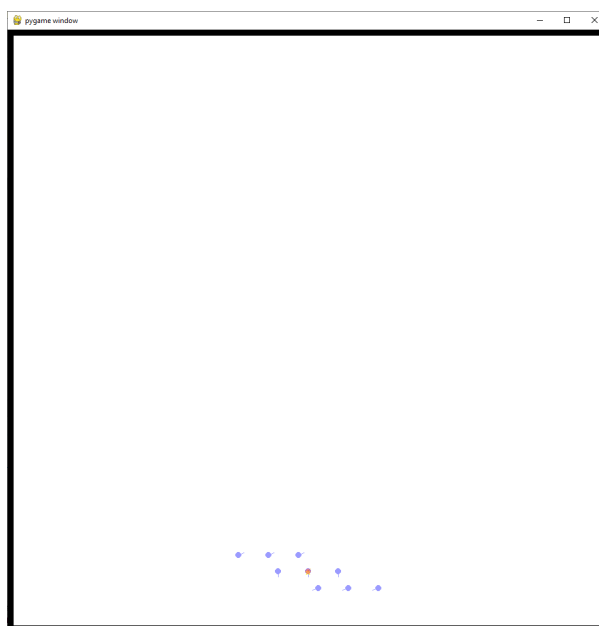


Рисунок 17 – Движение роботов, когда рой достиг цели, но не успел сформировать требуемую геометрическую фигуру

Смоделировано движение роя с 9 роботами с использованием представленного алгоритма. Исследовано изменение количества шагов достижения цели, количество шагов формирования геометрической фигуры.

По результатам исследования количество шагов формирования геометрической формы зависит только от веса скорости сохранения строя и не зависит от веса скорости движения цели. Это связано с тем, что значение скорости движения к цели одинакова для всех роботов. Следовательно позиция виртуального робота также изменяется с этой же равномерной скоростью, в результате чего позиция виртуального лидера остается неизменной относительно позиции каждого робота. Поскольку желаемая геометрическая форма достигается за счет изменения позиции каждого робота, можно сделать вывод, что скорость достижения цели не влияет на формирование геометрической формы.

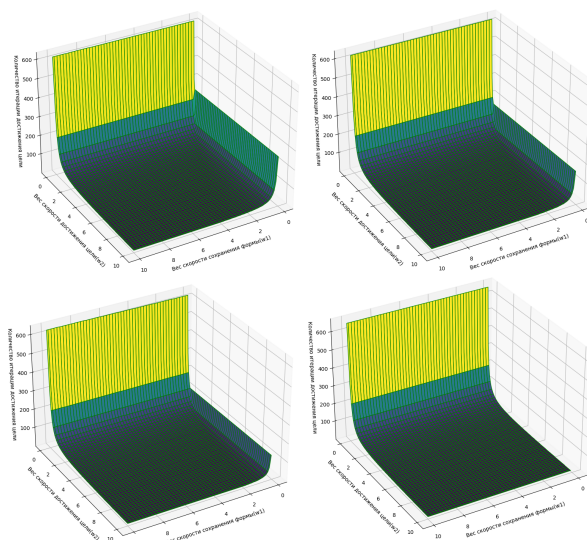


Рисунок 18 – График изменения количества шагов достижения цели при отказе 1-го, 3-х, 5-и и 7-и роботов

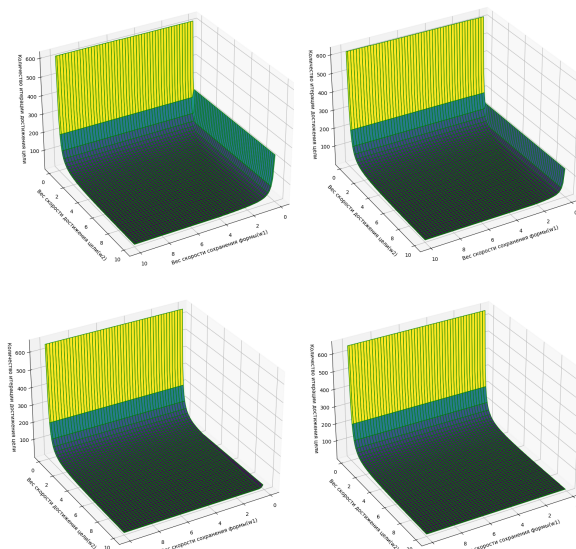


Рисунок 19 – График изменения количества шагов достижения цели при отказе 2-х, 4-х, 6-и и 8-и роботов

Количество шагов достижения цели также в основном зависит от веса скорости движения к цели, вес скорости сохранения строя влияет только косвенно, меняя траекторию виртуального лидера.

При отказе некоторых роботов в рое тенденция не меняется. При сбое одного-двух роботов количество шагов формирования геометрической фигуры остается одинаковым, при этом в некоторых случаях траектория роя меняется, так как начальная позиция виртуального лидера меняется. При сбое более двух роботов количество шагов формирования строя заметно уменьшается.

Список литературы

- 1 Kereyev A.K., Atanov S.K., Aman K.P., Kulmagambetova Z.K., Kulzhagarova B.T. Navigation system based on bluetooth beacons: Implementation and experimental estimation //Journal of Theoretical and Applied Information Technology. –1998. –№8. –P.1187-1200.

- 2 Baimukhamedov M.F., Moldamurat K., Akgul M.K. Optimal control model of the automobile transport. //Transport Means-Proceedings of the International Conference. –2019. –P.1312-1316.
- 3 Yassein M. B., Aljawarneh S., Al-Sadi A. Challenges and features of IoT communications in 5G networks. //2017 International Conference on Electrical and Computing Technologies and Applications (ICECTA). – 2017. –P.1-5.
- 4 Mardini W., Aljawarneh S., Al-Abdi A. Using multiple RPL instances to enhance the performance of new 6G and Internet of Everything (6G/IoE)-based healthcare monitoring systems //Mobile Networks and Applications. –2021. –Vol. 26. –№3. –P.952-968.
- 5 Al-Husainy M. A. F., Al-Shargabi B., Aljawarneh S. Lightweight cryptography system for IoT devices using DNA //Computers and Electrical Engineering. –2021. –Vol. 95. –P.107418.
- 6 Карпов В.Э. Модели социального поведения в групповой робототехнике// Управление большими системами: сборник трудов. -2016. -Т. 59. -С. 165-232.
- 7 Xu D., Zhang X., Zhu Z., Chen C., Yang P. Behavior-based formation control of swarm robots. //mathematical Problems in Engineering. –2014.
- 8 Vidal-Calleja T. A., Berger C., Sol J., Lacroix S. Large scale multiple robot visual mapping with heterogeneous landmarks in semi-structured terrain //Robotics and Autonomous Systems. –2011. –Vol. 59. –№9. –P.654-674.
- 9 Mellinger D., Shomin M., Michael N., Kumar V., Martinoli A., Mondada F., Correll N., Mermoud G., Egerstedt M., Hsieh A. Parker L.E. Distributed Autonomous Robotic Systems//Springer Tracts in Advanced Robotics. –2013. –Vol. 83. –P.545-558.
- 10 Brooks R. A robust layered control system for a mobile robot //IEEE journal on robotics and automation. –1986. –Vol. 2. –№1. –P.14-23.
- 11 Ильичев К. В., Манцеров, С. А.. Разработка масштабируемой мобильной робототехнической системы роевого взаимодействия// Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. -2017. -Т. 21. -С. 91-108.
- 12 Su H., Wang X., Lin Z. Flocking of multi-agents with a virtual leader //IEEE transactions on automatic control. –2009. –Vol. 54. –№2. –P.293-307.

А.Е. Қызырқанов^{1,2}, С.К. Атанов¹, Ш.А. Альджаварнех³, Н.А. Турсынова¹,
Ж.Е. Сейтбатталов¹

¹ Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Пушкин көш., 11, Астана, 020000, Қазақстан

² Астана ИТ Университет, Мәңгілік ел даңғ., 55/11, Астана, 010000, Қазақстан

³ Йордания ғылым және технология университеті, P.O. Box 3030, Ирбид, 22110, Йордания

Автономды мобильді роботтар тобын басқару алгоритмі

Аннотация: Үйірлі робототехниканың маңызды мәселелерінің бірі қозғалысты үйлестіру. Бұл жерде бір уақытта бірнеше мәселені шешуге тура келеді, мысалы бөгеттермен немесе өзара соқтығысудан сақтану, тағы сол сияқты. Бұндай проблемаларды шешудің кеңінен қолданылатын бір жолы - белгілі бір геометриялық пішінді сақтай отырып қозғалу. Егер сондай қозғалысты дұрыс ұйымдастыра білсек, мысалы: жүйенің шығындарын азайту, жүйе жұмысының сенімділігі мен тиімділігін арттыру, қайта конфигурациялау мүмкіндігін және жүйе құрылымының икемділігін қамтамасыз ету сияқты көптеген артықшылықтарға қол жеткізе аламыз.

Бұл мақалада автономды мобильді роботтар тобын басқару алгоритмі берілген. Сондай-ақ, осы жұмыс аясында Python бағдарламалау тілінде жазылған бағдарламалық өнімді пайдаланып, тоғыз автономды роботтары бар үйірдің қозғалысы моделденді. Осы мақалада сипатталған алгоритмді қолдана отырып, роботтардың осы тобының қозғалысын эксперименталды зерттеу нәтижелері ұсынылған.

Түйін сөздер: робототехника, пішінмен қозғалу, топтық робототехника, топтық басқару, орталықтандырылмаған басқару, қозғалысты басқару, басқару алгоритмдері, көшбасшы-ізбасар, виртуалды көшбасшы.

A.E. Kyzyrkanov^{1,2}, S.K. Atanov¹, Sh.A. Aljawarneh³, N.A. Tursynova¹, Zh.E. Seitbattalov¹

¹ L. N. Gumilyov Eurasian National University, Pushkin str, 11, 020000, Kazakhstan

² Astana IT University, Mangilik El ave., 55/11 Astana, 010000, Kazakhstan

³ Jordan University of Science and Technology, P.O. Box 3030, Irbid, 22110, Jordan

The algorithm of the formation control of a swarm of autonomous mobile robots

Abstract: One of the most important problems in swarm robotics is coordination of the movement. Several problems have to be solved simultaneously here, such as avoiding collisions with each other or with an obstacle, etc. One of the most common methods for solving such problems is to move while maintaining a certain geometric pattern, or, in short, to form control. If formation control is done properly, many benefits can be obtained, such as system cost reduction, increased system robustness and efficiency, while providing the reconfigurability and flexibility of the system structure.

This paper presents an algorithm for controlling the formation of a swarm of autonomous mobile robots. Also within the framework of this work, using a software application written in the Python programming language, the motion of the swarm with nine autonomous robots was simulated. The results of the experimental research of the movement of this swarm of robots using the algorithm described in this paper are given.

Keywords: robotics, movement in formation, group robotics, group control, decentralized control, motion control, control algorithms, leader-follower, virtual leader.

References

- 1 Kereyev A.K., Atanov S.K., Aman K.P., Kulmagambetova Z.K., Kulzhagarova B.T. Navigation system based on bluetooth beacons: Implementation and experimental estimation, Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 1998. №8. P. 1187-1200.
- 2 Baimukhamedov M.F., Moldamurat K., Akgul M.K. Optimal control model of the automobile transport, Transport Means-Proceedings of the International Conference. 2019. P. 1312-1316.
- 3 Yassein M.B., Aljawarneh S., Al-Sadi A. Challenges and features of IoT communications in 5G networks, 2017 International Conference on Electrical and Computing Technologies and Applications (ICECTA). 2017. P. 1-5.
- 4 Mardini W., Aljawarneh S., Al-Abdi A. Using multiple RPL instances to enhance the performance of new 6G and Internet of Everything (6G/IoE)-based healthcare monitoring systems, Mobile Networks and Applications. 2021. Vol. 26. №3. P. 952-968.
- 5 Al-Husainy M. A. F., Al-Shargabi B., Aljawarneh S. Lightweight cryptography system for IoT devices using DNA, Computers and Electrical Engineering. 95. 107418(2021).
- 6 Karpov V. E. Modeli social'nogo povedeniya v gruppovoy robototekhnike[Models of social behavior in group robotics] Upravlenie bol'shimi sistemami: sbornik trudov. 2016. Vol. 59. P. 165-232.
- 7 Xu D., Zhang X., Zhu Z., Chen C., Yang P. Behavior-based formation control of swarm robots, Mathematical Problems in Engineering. 2014.
- 8 Vidal-Calleja T. A., Berger C., Sol J., Lacroix S. Large scale multiple robot visual mapping with heterogeneous landmarks in semi-structured terrain, Robotics and Autonomous Systems. 2011. Vol. 59. №9. P. 654-674.
- 9 Mellinger D., Shomin M., Michael N., Kumar V., Martinoli A., Mondada F., Correll N., Mermoud G., Egerstedt M., Hsieh A. Parker L.E. Distributed Autonomous Robotic Systems, Springer Tracts in Advanced Robotics. 2013. Vol. 83. P. 545-558.
- 10 Brooks R. A robust layered control system for a mobile robot, IEEE journal on robotics and automation. 1986. Vol. 2. №1. P. 14-23(1986).
- 11 Il'ichev K. V., Mancero S. A. Razrabotka masshtabiruemoj mobil'noj robototekhnicheskoy sistemy roevogo vzaimodejstviya[Development of scalable mobile robotic system of swarm interaction] Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Jeлектrotehnika, informacionnye tehnologii, sistemy upravleniya. 2017. Vol. 21. P. 91-108.
- 12 Su H., Wang X., Lin Z. Flocking of multi-agents with a virtual leader, IEEE transactions on automatic control. 2009. Vol. 54. №2. P. 293-307.

Сведения об авторах:

Кызырканов Абзал Ермекбайұлы – автор для корреспонденции, докторант Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, сеньор-лектор Астана ИТ Университет, ул. Пушкина, 11, Астана, 020000, Казахстан.

Атанов Сабыржан Кубейсинович – профессор Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, ул. Пушкина, 11, Астана, 020000, Казахстан.

Альджаварнех Шади Абдел Рахман – профессор Иорданского университета науки и технологии, Ирбид, Иордания.

Турсынова Назира Абдижаппаровна – преподаватель Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, ул. Пушкина, 11, Астана, 020000, Казахстан.

Сейтбатталов Жексен Ермекович – докторант Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, ул. Пушкина, 11, Астана, 020000, Казахстан.

Kyzyrkanov Abzal – **corresponding author**, doctoral student of L.N. Gumilyov Eurasian National University, senior-lector of Astana IT University, Pushkin str., 11, Astana, 020000, Kazakhstan.

Atanov Sabyrzhan – full-professor of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Pushkin str., 11, Astana, 020000, Kazakhstan.

Shadi Abdel Rahman Aljawarneh – full-professor of Jordan University of Science and Technology, Irbid, Jordan

Tursynova Nazira – teacher of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Pushkin str., 11, Astana, 020000, Kazakhstan.

Seitbattalov Zhexen – doctoral student of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Pushkin str., 11, Astana, 020000, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 31.05.2023

IRSTI: 27.25.19

A. Arystangalikyzy

K. Zhubanov Aktobe Regional University, A.Moldagulova ave., 34, Aktobe, Kazakhstan
(E-mail: arystangalikyzy_a@mail.ru)

DISCRETIZATION OF SOLUTIONS OF POISSON EQUATION BY INACCURATE INFORMATION

Abstract: Partial differential equations, along with the function, derivative, and integral, are among the basic mathematical models. Their solutions, even when expressed explicitly through series or integrals, are in fact again inaccessible to direct computer calculations infinite objects. Therefore, the problem of approximating them with finite objects arises, the mathematical formulation of which is contained in the definition of the Computational (numerical) diameter.

In the article the problem of discretization by inaccurate information of solutions of Poisson equations with right-hand side f belongs to the anisotropic Korobov classes $E^{r_1, \dots, r_s}$ is considered. There are obtained upper bound of error of discretization by innacurate information from values at point of f in uniform metric. Wherein, the boundaries of inaccurate information which keep the order of discretization by accurate information are obtained. Computational aggregates constructed by optimal Korobov quadrature formulas with equal weights and nodes, which found by algorithms based on divisor theory.

Keywords: Poisson equation, discretization of solutions, optimal computational aggregate, inaccurate information, Computational (numerical) diameter, anisotropic Korobov classes.

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2023/3.4>

2000 Mathematics Subject Classification: 41A99

INTRODUCTION

In the article is considered the problem of discretization of solutions of Poisson equation

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(x)$$

by inaccurate information from $f \in E^{r_1, \dots, r_s}$ in the sense of Computational (numerical) diameter -2 problem. Let at first consider the definition of Computational (numerical) diameter problem (denoted by C(N)D).

In C(N)D the initial definition is (see, for example, [1]- [3])

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in D_N} \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y$$

where

$$\begin{aligned} & \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y \equiv \\ & \equiv \sup_{f \in F, |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau=1, \dots, N)} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N^{(1)}; \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N^{(N)}; \cdot)\|_Y. \end{aligned}$$

Here, a *mathematical model* is given by the operator $T : F \rightarrow Y$. X and Y are the normalized spaces of functions defined on Ω_X and Ω_Y respectively, $F \subset Y$ is a class of functions. Numerical information $l^{(N)} \equiv l^{(N)}(f) = (l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f))$ of volume $N (N = 1, 2, \dots)$ about f from class F is taken by linear functionals $l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f)$ (in general, not necessarily

linear). An *information processing algorithm* $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot) : C^N \times \Omega_X \rightarrow C$ is a correspondence, which for every fixed $(z_1, \dots, z_N) \in C^N$ as a function of $(\cdot)$ is an element of Y . The record $\varphi_N \in Y$ means that φ_N satisfies all the conditions listed above, and $\{\varphi_N\}_Y$ is a set composed of all $\varphi_N \in Y$. Further, $(l^{(N)}; \varphi_N)$ is a *computational aggregate* of recovery from accurate information for the function $f \in F$ acting according to the rule $\varphi_N(l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}; \cdot)$.

The recovery of Tf by inaccurate information is proceeding as follows. At first the boundaries of the inaccuracy are set: a vector $\varepsilon_N = (\varepsilon_N^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{(N)})$ with non-negative components. Then, the accurate values $l_N^{(\tau)}(f)$ are replaced with a given accuracy $\varepsilon_N^{(\tau)} \geq 0$ by approximate values $z_\tau \equiv z_\tau(f)$, $|z_\tau - l_N^{(\tau)}(f)| \leq \varepsilon_N^{(\tau)}$ ($\tau = 1, \dots, N$), numbers $z_\tau \equiv z_\tau(f)$ ($\tau = 1, \dots, N$) are processed using the algorithm φ_N up to the function $\varphi_N(z_1(f), \dots, z_N(f); \cdot)$, which will constitute the computational aggregate $(l^{(N)}; \varphi_N) \equiv \varphi_N(z_1(f), \dots, z_N(f); \cdot)$ constructed according to information of the precision $\varepsilon_N = (\varepsilon_N^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{(N)})$.

Let $D_N \equiv D_N(F)_Y$ be a given set of complexes $(l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}; \varphi_N) \equiv (l^N, \varphi_N)$, we emphasize, operators of recovery by accurate information.

Notations $A \ll B (B \geq 0)$ and $A \succ \prec B (A, B \geq 0)$, for $A \equiv A_n$ and $B \equiv B_n$ respectively mean $|A_n| \leq cB_n (c > 0, n = 1, 2, \dots)$ and simultaneous execution $A \ll B$ and $B \ll A$.

Within the framework of given notations and definitions, the problem of optimal recovery by inaccurate information, framed under the name *Computational (numerical) diameter*, according to the [1]- [3], consists in a collective sense in sequential solution of the following three tasks: C(N)D-1, C(N)D-2 and C(N)D-3.

For given $T; F; Y; D_N$:

C(N)D-1: an order of $\succ \prec \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$ is found with the construction of a specific computational aggregate $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ from $D_N \equiv D_N(F)_Y$ supporting ordering

$$\succ \prec \delta_N(0; D_N)_Y;$$

C(N)D-2: for $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ is considered the problem of existence and finding a sequence $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(D_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y$ with non-negative components such that

$$\delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \equiv$$

$$\equiv \sup\{\|Tf(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)\|_Y : f \in F, |\bar{l}_\tau(f) - z_\tau| \leq \tilde{\varepsilon}_N^{(\tau)} (\tau \in \{1, \dots, N\})\}.$$

with simultaneous satisfying the following expression

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) :$$

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty;$$

C(N)D-3: *massiveness* of limiting error $\tilde{\varepsilon}_N$ is set: as huge as possible set $M_N(\bar{l}^{(N)}; \bar{\varphi}_N)$ from D_N (usually associated with the structure of the $(\bar{l}^{(N)}; \bar{\varphi}_N)$ of computational aggregates $(l^{(N)}, \varphi_N)$ is found, such that for each of them the following relation holds

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \rightarrow +\infty) :$$

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

In the article is considered the following concretization of Computational (numerical) diameter. $Tf(x) \equiv u(x, f)$ – the solution of Poisson equations $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f(x) \quad (1)$$

which satisfies zero boundary conditions on the unit cube $[0, 1]^s$. $f \in F = E^{r_1, \dots, r_s}$ – anisotropic Korobov class, Y are uniform metric.

The problem of discretization by accurate information of solutions of Poisson equation whose right-hand side belongs to a Korobov class $E_s^r \equiv E^{r, \dots, r}$ was considered in [4]- [8]. N. Korobov

proved [4] that if $a_1, \dots, a_s$ are the optimal coefficients modulo N and β index (necessary definitions see in [4]), then the following estimate holds ($N_1 = \sqrt{N} \ln^{-\frac{\beta}{2}} N$):

$$\sup_{f \in E_s^r} \sup_{x \in [0,1]^s} \left| u(x, f) - \frac{1}{4\pi^2 N} \sum_{k=1}^N f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \sum_{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s < N_1}^* \frac{e^{2\pi i(m_1(x_1 - \frac{a_1 k}{N}) + \dots + m_s(x_s - \frac{a_s k}{N}))}}{m_1^2 + \dots + m_s^2} \right| << \frac{(\ln N)^{\frac{r\beta}{2} + s}}{N^{\frac{r}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{s}}}, \quad (2)$$

here and everywhere below the asterisk over the sum symbol means that $m = (0, \dots, 0)$ is dropped in the summation.

E. Bailov and N. Temirgaliyev in [5] were obtained sharp estimates in the power scale for the discretization error, which is almost doubled in the power scale in comparison with (2). In [6] by S. Kudaibergenov and S. Sabitova is obtained a sharp discretization error estimate on the power scale with the application of Smolyak grid nodes. The problem of discretization by accurate information of solutions of the Poisson equations whose right-hand side belongs to a anisotropic Korobov class $F = E^{r_1, \dots, r_s}$ was considered by Tashatov [7] and E. Bailov [8].

The aim of this article is discretization by innacurate information of solutions of the Poisson equations with right-hand side from the anisotropic Korobov classes $E^{r_1, \dots, r_s}$.

1. NECESSARY DEFINITIONS AND STATEMENTS

The anisotropic Korobov class [4] $E^{r_1, \dots, r_s}$ ($r_1 > 1, \dots, r_s > 1$) consists of all 1-periodic in each variable functions $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, which trigonometric Fourier-Lebesgue coefficients satisfy the condition

$$|\widehat{f}(m)| = \left| \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m, x)} dx \right| \leq \prod_{j=1}^N \overline{m}_j^{-r_j} (m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s),$$

here and everywhere below $\overline{m}_j = \max\{1, |m_j|\}$ and $(m, x) = m_1 x_1 + \dots + m_s x_s$.

By renumbering the coordinates of vector $r = (r_1, \dots, r_s)$ (if necessary), we will assume that the vector $r = (r_1, \dots, r_s)$ has the form $r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_s$.

Set for $R \geq 1$,

$$\Gamma_R(\beta) = \{m = (m_1, \dots, m_s) : m \in Z^s, \prod_{j=1}^N \overline{m}_j^{\beta_j} \leq R\},$$

where $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$, $1 = \beta_1 = \dots = \beta_\nu < \beta_{\nu+1} \leq \dots \leq \beta_s$.

Lemma (Y. Bailov, [8]). Let is given a vector $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ such that $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu$ and $\gamma_j > 1$ for $j = \nu + 1, \dots, s$. Then for any $R \geq 1$ satisfies

$$\sum_{m \in \Gamma_R(\gamma)} \frac{1}{(\overline{m}_1 \cdot \dots \cdot \overline{m}_s)^\alpha} \ll \begin{cases} c(s, \alpha), & \text{if } \alpha > 1, \\ \ln^s R, & \text{if } \alpha = 1, \\ R^{1-\alpha} \ln^\nu R, & \text{if } \alpha < 1. \end{cases}$$

Let F be some class of $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ functions, which are 1-periodic in each variable, whose trigonometric Fourier-Lebesgue series converges absolutely.

Assume that $\widehat{f}(0) \neq 0$. It is easy to verify (see, for example, [4]) that, for any boundary condition, there exists a function $\omega(x)$ depending on this condition such that $\omega(x)$ is continuous on $[0, 1]^s$ and $\Delta\omega \equiv 1$ on $[0, 1]^s$. Moreover, the solution of (1) has the form

$$u_\omega(x, f) = \omega(x) \cdot \widehat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s}^* \frac{\widehat{f}(m)}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x)} \quad (3)$$

If $f(x_1, \dots, x_s)$ is odd with respect to each of its variables, then the function

$$u(x, f) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s}^* \frac{\widehat{f}(m)}{(m, m)} e^{2\pi i(m, x)} \quad (4)$$

is a solution of (1) with zero boundary conditions on $[0, 1]^s$.

In [9]- [10] N. Temirgaliyev applied algebraic number theory to find the $a_1, \dots, a_s$ such that the corresponding quadrature formula with the Korobov grids

$$\left\{ \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \right\}_{k=1}^N$$

is optimal in the problem of numerical integration of functions belongs to Korobov classes E_s^r .

The algorithm for finding a prime p and integers $a_1, \dots, a_s$ is as follows (necessary definitions and notations see in [9]- [10] and bibliography therein):

Let are given a prime number $l = s + 1 (3 \leq l \leq 19)$,

$$E = \Gamma_R(\beta) = \{m = (m_1, \dots, m_s) : m \in Z^s, \prod_{j=1}^s \overline{m}_j^{\beta_j} \leq R\}$$

where $1 = \beta_1 = \dots = \beta_\nu < \beta_{\nu+1} \leq \dots \leq \beta_s$.

1. Find the smallest prime $p, p \equiv 1(mod l)$ such that does not divided $\prod_{m \in \Gamma_R(\beta)} N(m)$.
2. By searching through all integers $n_j, |n_j| \leq Bp^{\frac{1}{s}} (j = 1, \dots, s)$ find $n = n_1\omega_1 + \dots + n_s\omega_s \in A_s(\omega_j = \theta^{j-1}, j = 1, \dots, s)$ such that for the main ideal $\mathfrak{R} = (n)$ satisfies $N\mathfrak{R} = p$.
3. Write a matrix

$$d' = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{s1} \\ . & . & . \\ s_{1s} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix}$$

from the relations

$$\gamma_k = n\omega_k = (n_1 + n_2\theta + \dots + n_s\theta^{s-1})\theta^{k-1} = c_{k1} + c_{k2}\theta + \dots + c_{ks}\theta^{s-1}.$$

4. Write the basis $\gamma_k'' = \sum_{j=1}^s \nu_{kj}\omega_j (k = 1, \dots, s)$ of $\mathfrak{R}$ with triangular matrix $(\nu_{kj})_{k,j=1}^s$. From the equality $p = |\nu_{11}\dots\nu_{ss}|$ there is a number j_0 such that $|\nu_{j_0 j_0}| = p$.
5. Write the coefficients

$$a_k = (-1)^{k+j_0} M_{j_0,k} \text{sgndet} d'(k = 1, \dots, s),$$

where $M_{j_0,k}$ is additional element minor $c_{j_0,k}$ of matrix d' .

Also, everywhere below we denote by $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ a vector whose components are defined by the equalities $\gamma_j = r_j/r_1 (j = 1, \dots, s)$. It's clear that $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_s$.

Theorem B (Y. Bailov, [8]). Let $l = s + 1 (3 \leq l \leq 19)$ – prime and $r_1 > 1$. Then for any $T > c(l)$ there are exist prime $p, p \equiv 1(mod l), p \leq c(s)Rln^\nu R = T$ and integers $a_1, \dots, a_s$, for finding which according to Algorithm 1-5, it suffices to perform $<< TlnlnT$ elementary arithmetic operations, such that

$$\sup_{f \in E^{r_1, \dots, r_s}} \sup_{x \in [0,1]^s} \left| u_\omega(x, f) - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p f \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \cdot \left(\omega(x) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in \Gamma_{R_1}(\gamma)} \frac{1}{(m, m)} e^{2\pi i \sum_{j=1}^s m_j \left(x_j - \frac{a_j k}{p} \right)} \right) \right| << b_s(T) \cdot \frac{(lnT)^{\frac{\nu(r_1+1)}{2r_1}(r_1+\frac{2}{s}-1)}}{T^{\frac{r_1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{s}}},$$

where $R_1 \asymp \sqrt{T}(lnT)^{-\frac{\nu(r_1+1)}{2r_1}}$, and $b_s(T)$ is equal to lnT if $s = 2$ and to $ln^{\nu-1}T$ if $s > 2$.

2. MAIN RESULTS

In the next theorem is considered odd with respect to each of its variables functions $f(x_1, \dots, x_s)$.

Theorem. Let $l = s + 1 (3 \leq l \leq 19)$ – prime and $r_1 > 1$. Then for any $T > c(l)$ there are exist prime $p, p \equiv 1(mod l), p \leq c(s)Rln^\nu R = T(p) \equiv T$ and integers $a_1, \dots, a_s$, for finding which according to Algorithm 1-5, it suffices to perform $<< TlnlnT$ elementary arithmetic operations, such that for the sequence

$$\tilde{\varepsilon}_T \equiv \tilde{\varepsilon}_{T(p)} \asymp \begin{cases} \frac{(\ln T)^{\frac{r_1}{2}(r_1+\frac{2}{s}-1)\frac{r_1+1}{r_1}-(s-1)}}{T^{\frac{r_1}{2}+\frac{1}{s}-\frac{1}{2}}}, & \text{if } s = 2, \\ \frac{(\ln T)^{\frac{r_1}{2}(r_1+1)-1}}{T^{\frac{r_1}{2}}}, & \text{if } s > 2 \end{cases}$$

satisfies

$$\sup_{f \in E^{r_1, \dots, r_s}} \sup_{x \in [0, 1]^s, |\gamma_p^{(k)}| \leq 1 (k=1, \dots, p)} \left| u(x, f) - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \left(f \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) + \tilde{\varepsilon}_T \gamma_p^{(k)} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(-\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in \Gamma_{R_1}(\gamma)} \frac{1}{(m, m)} e^{2\pi i \sum_{j=1}^s m_j \left(x_j - \frac{a_j k}{p} \right)} \right) \right| < b_s(T) \cdot \frac{(\ln T)^{\frac{v(r_1+1)}{2r_1}(r_1+\frac{2}{s}-1)}}{T^{\frac{r_1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{s}}},$$

where $R_1 \asymp \sqrt{T}(\ln T)^{-\frac{\nu(r_1+1)}{2r_1}}$, and $b_s(T)$ is equal to $\ln T$ if $s = 2$ and to $\ln^{\nu-1} T$ if $s > 2$.

CONCLUSION

In the article is obtained upper bound of error of discretization by inaccurate informations of solutions of Poisson equations with right-hand side $f(x_1, \dots, x_s) \in E^{r_1, \dots, r_s}$ is odd with respect to each of its variables functions. Theorem shows that if in computational aggregates accurate numerical informations $f \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right)$ replaced with inaccurate informations $f \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) + \tilde{\varepsilon}_T \gamma_p^{(k)} \left(|\gamma_p^{(k)}| \leq 1 (k = 1, 2, \dots, p) \right)$ then the order of error of approximation by accurate information is keeping.

References

- 1 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. - No3. -С. 8-88
- 2 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery // Russian Math. (Iz. VUZ). -2019. -Vol. 63. -№1. -P. 79–86.
- 3 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2015. -Vol.55. -№9. -P.1432-1443. <https://doi.org/10.1134/S0965542515090146>
- 4 Коробов Н.М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. -Москва: Физматлит, 1963. -112. стр.
- 5 Bailov E.A., Temirgaliev N. Discretization of the solutions to Poisson's equation // Comput. Math. Math. Phys. -2006. -Vol. 49. №9. P. 1515–1525.
- 6 Kudaibergenov S.S., Sabitova S.G. Discretization of solutions to Poisson's equation in the Korobov class // Comput. Math. Math. Phys. -2103. -Vol. 53. №7. -P. 896–907.
- 7 Ташатов Н.Н. Приближенное восстановление функций и решений уравнения Пуассона с правой частью из анизотропных классов E и SW: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. -Караганда, 2002.
- 8 Баилов Е.А. Приближенные интегрирование и восстановление функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. -Алматы, 1998.
- 9 Temirgaliev N. Application of the theory of divisors to the approximate reconstruction and integration of periodic functions in several variables // Dokl. Math. -1990. -Vol. 41. №1. P. 160–164.
- 10 Temirgaliev N. Application of the divisors theory to numerical integration of periodic functions in several variables // Math. USSR-Sb. -1991. -Vol. 69. №2. -P. 527–542.

А. Арыстанғалиқызы

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, А. Молдағұлова даңғ., 34, Ақтөбе, Қазақстан

Дәл емес ақпарат бойынша Пуассон теңдеуінің шешімдерін дискретизациялау

Аннотация: Дербес туындылы дифференциалдық теңдеу шешімдері функция, туынды, интегралмен қатар негізі математикалық объектілер қатарына жатады. Олардың шешімдері, тіпті айқын түрде қатар және интегралдар арқылы берілген жағдайлардың өзінде, тікелей компьютерлік есептеулер жүргізуге мүмкін емес шексіз объектілер болып табылады. Сол себепті, ақырлы объектілермен жуықтау есебі туындайды, бұл есептің математикалық қойылымы Компьютерлік (есептеуші) диаметр анықтамасына енеді.

Мақалада оң жағы f анизотропты Коробов классында $E^{r_1, \dots, r_s}$ жататын Пуассон теңдеуінің шешімдерін дәл емес мәлімет бойынша жуықтау қарастырылады. Бірқалыпты метрикада f функциясының нүктедегі дәл емес мәндері бойынша шешімін жуықтау қателігінің жоғарыдан бағалауы алынды. Дәл мәлімет бойынша жуықтау қателігін сақтайтын дәл емес ақпараттың шекаралары анықталды. Мақаладағы есептеу агрегаттары Коробовтың бірдей салмақты және дивизорлар теориясына негізделген алгоритмдерді қолданып есептелген торлар арқылы құрылған.

Түйін сөздер: Пуассон теңдеуі, шешімдерді дискретизациялау, оптималды есептеу агрегаты, дәл емес ақпарат, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, анизотропты Коробов класстары.

А. Арыстанғалиқызы

Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, пр. А. Молдагуловой, 34, Актөбе, Қазақстан

Дискретизация решений уравнений Пуассона по неточной информации

Аннотация: Уравнения в частных производных наряду с функцией, производной, интегралом относятся к основным математическим моделям. Их решения, даже в случае явного выражения посредством рядов или интегралов, фактически опять же представляют собой недоступные к прямым компьютерным вычислениям бесконечные объекты. Здесь снова возникает задача приближения конечными объектами, математическая формулировка которой содержится в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника.

В статье изучается задача дискретизации решений уравнения Пуассона с правой частью f из анизотропных классов Коробова $E^{r_1, \dots, r_s}$ по неточной информации. Получены оценки сверху погрешности в равномерной метрике дискретизации по информации, составляющих значения функции f в точках, вычисленных с ошибкой. При этом указаны границы неточности информации, сохраняющие порядки убывания погрешности восстановления, вычисленных по точной информации. Вычислительные агрегаты построены по оптимальным квадратурным формулам Коробова с равными весами и узлами, основанным на теории дивизоров алгоритмам.

Ключевые слова: Уравнение Пуассона, дискретизация решений, оптимальный вычислительный агрегат, неточная информация, Компьютерный (вычислительный) поперечник, анизотропные классы Коробова.

References

- 1 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Teoriya priblizhenij, Vychislitelnaya matematika i Chislennyj analiz v novoj koncepcii v svete Kompyuternogo (vychislitelnogo) poperechnika [Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter], Vestnik Evrazijskogo nacionalnogo universiteta imeni L.N.Gumileva. Seriya Matematika. Informatika. Mehanika. [Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series], 2018. Vol. 124. №3. P. 8-88 [in Russian]
- 2 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Math. (Iz. VUZ). 2019. Vol. 63. №1. P. 79–86.
- 3 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol.55. №9. P.1432-1443. <https://doi.org/10.1134/S0965542515090146>
- 4 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis] (Fizmatlit, Moscow, 1963, 1963, 112 p.).
- 5 Bailov E.A., Temirgaliev N. Discretization of the solutions to Poisson's equation, Comput. Math. Math. Phys. 2006. Vol. 49. №9. P. 1515–1525.
- 6 Kudaibergenov S.S., Sabitova S.G. Discretization of solutions to Poisson's equation in the Korobov class, Comput. Math. Math. Phys. 2013. Vol. 53. №7. P. 896–907.
- 7 Tashatov N.N. Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravneniya Puassona s pravoj chast'yu iz anizotropnyh klassov E i SW [Approximate recovery of functions and solutions of the Poisson equation with initial condition from anisotropic classes E and SW]: diss. ... cand. of phys.-math. sci. Karaganda, 2002.
- 8 Bailov E.A. Priblizhennyye integrirovaniye i vosstanovlenie funkcij iz anizotropnyh klassov i vosstanovlenie reshenij uravneniya Puassona [Approximative integration and restoration of the functions from anisotropic classes and restoration of the solutions of the Poisson equation]: diss. ... cand. of phys.-math. sci. Almaty, 1998.
- 9 Temirgaliev N. Application of the theory of divisors to the approximate reconstruction and integration of periodic functions in several variables, Dokl. Math. 1990. Vol. 41. №1. P. 160–164.
- 10 Temirgaliev N. Application of the divisors theory to numerical integration of periodic functions in several variables, Math. USSR-Sb. 1991. Vol. 69. №2. P. 527–542.

Information about author:

Арыстанғалиқызы Ақмарал – PhD студент, Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, А. Молдағұлова даңғ., 34, Ақтөбе, Қазақстан.

Arystangalikyzy Akmaral – PhD student, K. Zhubanov Aktobe Regional University, A.Moldagulova ave., 34, Aktobe, Kazakhstan.

Received 02.05.2023

Бас редактор:

Н. Темірғалиев

Жауапты редактор:

А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2023. 3(144)- Астана: ЕҰУ. 45-б. Басуға қол қойылды: 30.09.2023.
Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды