ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№2(143)/2023

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады
Published 4 times a year
Выходит 4 раза в год

Астана, 2023
Astana, 2023

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.
№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.
Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.
Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.
Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, №2(143)/2023**

**Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer science. Mechanics series, №2(143)/2023**

**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, №2(143)/2023**

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2023, Vol. 143, №2, P.6-12
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: **27.39.25**

I.A. Kukharchuk

Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Vorobyovy Gory, 1, Moscow, 119991, Russia
(E-mail: vbk-vbk@mail.ru)

UNIFORMLY CONVEX SUBSPACES OF MEASURES WITH THE KANTOROVICH NORM

Abstract: In this paper, we consider signed Borel measures on a compact metric space. We study the uniform convexity of the Kantorovich norm on subspaces of the whole space of signed measures. We construct an example of an infinite-dimensional subspace of measures on which the Kantorovich norm is uniformly convex. We also obtain an example of an infinite compact set (X, ρ) such that all uniformly convex subspaces of the space of measures on X are finite-dimensional.

Keywords: Kantorovich norm, uniformly convex space, subspace of measures, borel signed measures.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/2.1

2000 Mathematics Subject Classification: 28A33

1. Introduction

The main object of this paper is the Kantorovich norm, so we start with its definition. Let (X, ρ) be a metric space. Consider the linear space $\mathcal{M}_0(X)$ of all signed Borel measures σ on X such that $\sigma(X) = 0$ and the function $x \to \rho(x, x_0)$ is integrable with respect to the total variation $|\sigma|$ of σ for all $x_0 \in X$.

Definition 1. The Kantorovich norm is the norm $\|\cdot\|_K$ on the space $\mathcal{M}_0(X)$ defined by

$$\|\mu\|_K = \sup\left\{\int_X f d\mu \colon f \in Lip^1(X)\right\}, \quad \mu \in \mathcal{M}_0(X),$$

where

$$Lip^1(X) = \left\{f \colon X \to \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)\ \forall x, y \in X\right\}.$$

In this paper we consider the uniform convexity of the Kantorovich norm on subspaces of the space $\mathcal{M}_0(X)$. First, we show that in general the Kantorovich norm on all of $\mathcal{M}_0(X)$ is not uniformly convex. Next, we prove that in case of measures on an interval the Kantorovich norm is uniformly convex on some infinite-dimensional subspace of the space of measures. Finally, we give an example of an infinite compact set for which the Kantorovich norm is not uniformly convex on any infinite-dimensional subspace of measures.

Let us mention an important result on isometric embeddings (see Corollary 1 on p. 311 in [2]), which we will use below.

Theorem 1. *If $1 \leq p \leq q \leq 2$, then the space $L^q[0,1]$ is isometric to a subspace in $L^p[0,1]$.*

Let us also state two classical results on uniform convexity.

Theorem 2. *If $1 < p < \infty$, then the space $L^p[0,1]$ is uniformly convex.*

Theorem 3 (Milman–Pettis)**.** *Every uniformly convex Banach space is reflexive.*

2. MAIN RESULTS

We note that $\mathcal{M}_0(X)$ with the Kantorovich norm is not, in general, a uniformly convex space. This follows obviously from the lemma below. This lemma also gives a necessary condition for the strict convexity of a subspace of measures. Intuitively, this condition means that the subspace should not contain measures with supports that are "far" from each other.

Lemma 1. *Let two measures $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0(X)$ be given. Suppose that there are two balls $B_{r_1}(a)$ and $B_{r_2}(b)$ in X such that $supp(\mu) \subset B_{r_1}(a), supp(\nu) \subset B_{r_2}(b)$ and $\rho(a,b) > 3(r_1 + r_2)$. Then*

$$\|\mu\|_K + \|\nu\|_K = \|\mu + \nu\|_K.$$

P r o o f. Take $f_k \in Lip^1(B_{r_1}(a))$ and $g_k \in Lip^1(B_{r_2}(b))$ such that

$$\left|\int_{B_{r_1}(a)} f_k d\mu - \|\mu\|_K\right| < \frac{1}{k}$$

and

$$\left|\int_{B_{r_2}(b)} g_k d\nu - \|\nu\|_K\right| < \frac{1}{k}.$$

We can assume that $\min_X f_k = 0$, since f_k can be replaced by $f_k - c$ and the integral

$$\int_X f_k d\mu$$

does not change. Then, due to the Lipschitz property, we have $\left|\max_X |f_k| - 0\right| \leq 2r_1$.

Similarly, $\left|\max_X |g_k|\right| \leq 2r_2$. Then for for all $x \in B_{r_1}(a)$ and all $y \in B_{r_2}(b)$ we have

$$\left|f_k(x) - g_k(y)\right| \leq \left|f_k(x)\right| + \left|g_k(y)\right| \leq 2r_1 + 2r_2 < \rho(a,b) - \rho(a,x) - \rho(b,y) \leq \rho(x,y).$$

Next we use the Tietze extension theorem and construct a function $h_k \in Lip^1(X)$ such that for all $x \in B_{r_1}(a)$ we have $h_k(x) = f_k(x)$ and for all $y \in B_{r_2}(b)$ we have $h_k(y) = g_k(y)$.

Hence

$$\left|\int_X h_k d(\mu + \nu) - \|\mu\|_K - \|\nu\|_K\right| < \frac{2}{k}.$$

Therefore, we have

$$\|\mu + \nu\|_K \geq \sup_{h \in Lip^1(X)} \int_X h d(\mu + \nu) \geq \int_X h_k d(\mu + \nu) \geq \|\mu\|_K + \|\nu\|_K - \frac{2}{k}.$$

If we let $k \to \infty$, then we get

$$\|\mu + \nu\|_K \geq \|\mu\|_K + \|\nu\|_K$$

which completes the proof.

We now consider our question for an interval and show that for measures on it there exists an infinite-dimensional uniformly convex subspace. However, first we make a remark about the calculation of the Kantorovich norm in case of measures on an interval.

Remark 1. The Kantorovich norm for measures $\mu \in \mathcal{M}_0[a,b]$ can be calculated as the L^1-norm for their distribution functions.

Indeed, we use the formula (see [2])

$$d_K(P_1, P_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Phi_{P_1}(t) - \Phi_{P_1}(t)\right| dt,$$

which is valid for probability distributions P_1, P_2 and their distribution functions Φ_{P_1}, Φ_{P_2}. We have the Jordan decomposition of $\mu \in \mathcal{M}_0[a,b]$ into positive and negative parts. Using it and, if necessary, normalizing its components, we obtain

$$\|m\|_K = \|m_+ - m_-\|_K = \int_{[a,b]} \big|m_+[a,t] - m_-[a,t]\big| dt = \int_{[a,b]} \big|m[a,t]\big| dt.$$

Theorem 4. *There exists an infinite-dimensional subspace in the space $\mathcal{M}_0[0,1]$ that is uniformly convex in the Kantorovich norm.*

P r o o f. By Theorem 1 there exists a space $Y \subset L^1[0,1]$ isometric to $L^p[0,1]$ if $1 \le p \le 2$. By Theorem 2 the space Y is uniformly convex. It follows from Remark 1 that it suffices to take any linear subspace spanned by vectors from Y regarded as distribution functions for the required space of measures.

So, we have an example of a compact set for which there exists a uniformly convex infinite-dimensional subspace of the space of measures. Of course, not all compacts have this property. For example, for finite compact sets, the space of measures is finite-dimensional and, therefore, cannot contain any infinite-dimensional subspaces. However, there is a stronger counterexample. But before constructing it, we make one more useful remark about the Kantorovich norm.

Remark 2. Let $Y \subset X$. Then $\mathcal{M}_0(Y)$ is isometrically embedded into $\mathcal{M}_0(X)$.

Indeed, by definition, we have

$$\|\mu\|_{K,X} = \sup\left\{ \int_X f d\mu \colon f \in Lip^1(X) \right\}.$$

Consider an arbitrary function $f \in Lip^1(X)$. Since $\mu \in \mathcal{M}_0(Y)$, we have

$$\int_X f d\mu = \int_Y f d\mu.$$

Using the fact that $f\big|_Y \in Lip^1(Y)$ we get

$$\|\mu\|_{K,Y} = \sup\left\{ \int_Y f d\mu \colon f \in Lip^1(Y) \right\} \ge \sup\left\{ \int_Y f\big|_Y d\mu \colon f \in Lip^1(X) \right\} \tag{1}$$

and

$$\sup\left\{ \int_Y f\big|_Y d\mu \colon f \in Lip^1(X) \right\} = \|\mu\|_{K,X}.$$

In fact, in expression (1), the equality holds. This is true, since by the Tietze theorem any Lipschitz function on Y can be extended to a Lipschitz function on X.

Theorem 5. *There is a compact space (X,ρ) with an infinite-dimensional space $\mathcal{M}_0(X)$ such that every infinite-dimensional closed subspace $Y \subset \mathcal{M}_0(X)$ is not uniformly convex.*

P r o o f. For X we take the following subset of the real line:

$$\left\{ -\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Then any measure $\mu \in \mathcal{M}_0(X)$ has the form

$$\mu = \left(\sum_{n=1}^{\infty} k_n \delta_{-\frac{1}{n}} \right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} k_n \right) \delta_0,$$

where k_n are constant coefficients such that the first moment is finite, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{i} < \infty,$$

and the measure is well-defined by the series

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i < \infty.$$

The Kantorovich norm is calculated using Remarks 1 and 2, because

$$\|\mu\|_K = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left|\sum_{i=1}^{n} k_i\right|.$$

Consider the mapping $F\colon \mathcal{M}_0(X) \to l_1$ defined as follows:

$$F(\mu) = \big(a_1, a_2 \dots a_n \dots\big),$$

where

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right).$$

By definition, the mapping F is an isometric embedding of the metric space $\mathcal{M}_0(X)$ into l_1. Thus, it suffices to show that there are no infinite-dimensional closed uniformly convex subspaces in l_1.

Let $Y \subset l_1$ be a uniformly convex closed subspace. Then, by the Milman–Pettis theorem, Y is reflexive. This means that the closed unit ball B_Y is weakly compact, and hence sequentially weakly compact. Since weak convergence in l^1 implies convergence in norm, our ball B_Y is compact in the norm of l^1, and hence Y is finite-dimensional.

Now let us construct an example of a strictly convex infinite-dimensional subspace "by bear hands". For this purpose, we are going to prove an auxiliary lemma.

Lemma 2. *There are two measures $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0[a,b]$ on the interval $[a,b]$ whose linear span is a strictly convex space with the Kantorovich norm.*

P r o o f. Without loss of generality, we can assume that we are solving the problem for the interval $[-3,3]$ (to obtain the general case, it is enough to shift and scale the interval). Consider the measures μ_1 and μ_2 given by their distribution functions as follows:

$$F_1(x) = \begin{cases} x+3 & \text{if } x \in [-3,-2] \\ -x-1 & \text{if } x \in [-2,0] \\ x-1 & \text{if } x \in [0,2] \\ -x+3 & \text{if } x \in [2,3] \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [-3,-2] \\ x+2 & \text{if } x \in [-2,-1] \\ -x & \text{if } x \in [-1,1] \\ x-2 & \text{if } x \in [1,2] \\ 0 & \text{if } x \in [2,3]. \end{cases}$$

We will prove that the span of these two measures is strictly convex. It suffices to check the strict triangle inequality for two non-proportional linear combinations μ_1 and μ_2. In other words, it follows from Remark 1 that for linear combinations $k_1\mu + k_2\nu$ and $l_1\mu + l_2\nu$ it is necessary to verify the following inequality:

$$\int_{[-3,3]} |k_1F_1 + k_2F_2| + |l_1F_1 + l_2F_2| - |(k_1+l_1)F_1 + (k_2+l_2)F_2|dx > 0.$$

This inequality holds if the following is true on a set of nonzero measure:

$$|k_1F_1 + k_2F_2| + |l_1F_1 + l_2F_2| - |(k_1+l_1)F_1 + (k_2+l_2)F_2|dx > 0. \tag{2}$$

The last inequality turns into the equality only if the signs of the expressions $k_1F_1 + k_2F_2$ and $l_1F_1 + l_2F_2$ coincide.

Let us find the zeros of $k_1F_1 + k_2F_2$. We have

$$\left[\begin{array}{lll} \text{for } x \in [-3,-2]: & k_1(x+3) = 0 & \iff \quad x = -3; \\ \text{for } x \in [-2,-1]: & k_1(-x-1) + k_2(x+2) = 0 & \iff \quad x = -1 - \dfrac{k_2}{k_2 - k_1}; \\ \text{for } x \in [-1,0]: & k_1(-x-1) - k_2 x = 0 & \iff \quad x = -\dfrac{k_1}{k_1 + k_2}; \\ \text{for } x \in [0,1]: & k_1(x-1) - k_2 x = 0 & \iff \quad x = \dfrac{k_1}{k_1 - k_2}; \\ \text{for } x \in [1,2]: & k_1(x-1) + k_2(x-2) = 0 & \iff \quad x = 1 + \dfrac{k_2}{k_1 + k_2}; \\ \text{for } x \in [2,3]: & k_1(3-x) = 0 & \iff \quad x = 3. \end{array}\right.$$

It is clear from these expressions that for non-proportional pairs (k_1, k_2) and (l_1, l_2) there is an interval on which the signs of $k_1F_1 + k_2F_2$ and $l_1F_1 + l_2F_2$ are different. So, we obtain that (2) is satisfied on this interval, which proves our claim.

Lemma 3. *Let μ_n be a sequence of measures such that $\mu_n \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R})$ and*

$$\mu_n\big|_{(a,b)} = 0$$

for some interval (a, b).
If the sequence of measures μ_n converges to the measure $\mu \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R})$ in the Kantorovich norm, then $\mu\big|_{(a,b)} = 0$.

P r o o f. The restrictions of the distribution functions of measures μ_n to the interval (a, b) are equal to constants.The sequence of constants converges to a constant in the L_1-norm. Thus, the lemma follows from Remark 1.

Theorem 6. *There exists a countable family of measures μ_n on the interval $[0, 1]$ such that their closed linear span is a strictly convex space with the Kantorovich norm.*

P r o o f. Consider the family of intervals

$$A_k = \big[a_k, b_k\big] = \left[\frac{1}{4^k} - \frac{1}{10 \cdot 4^k}, \frac{1}{4^k} + \frac{1}{10 \cdot 4^k}\right].$$

Using Lemma 2, we construct measures α_k and β_k such that $supp(\alpha_k) \subset A_k$, $supp(\beta_k) \subset A_k$ and the linear span of these measures is a strictly convex space with the Kantorovich norm.

We now construct the desired family of measures μ_n. To this end, we take a bijection s between unordered pairs (n, l) of different indices of measures μ_n and even indices $2k$ of the intervals A_{2k}. Then we set

$$\mu_n = \gamma_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{s(n,i)} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \beta_{s(n,i)},$$

where γ_n is defined as

$$\gamma_n = \delta_{a_{2n-1}} - \delta_{b_{2n-1}}.$$

Consider any measure μ lying in the closed linear span of μ_n. We prove that the measure μ has the form

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu_i, \tag{3}$$

where the series converges to μ in the Kantorovich norm.

Since the measure μ lies in the closed linear span of μ_n, for every ε there is a linear combination $c_1\mu_1 + \cdots + c_j\mu_j$ such that:

$$\|\mu - (c_1\mu_1 + \cdots + c_j\mu_j)\| < \varepsilon$$

Lemma 3 implies the equality

$$\mu\big|_{(b_{k-1}, a_k)} = 0 \tag{4}$$

for each k.

Using (4), we successively apply Lemma 1 to restrict the measure μ to the intervals $[0, b_2]$ and $[a_1, b_1]$, then to the intervals $[0, b_3]$ and $[a_2, b_2]$, ..., $[0, b_{k+1}]$ and $[a_k, b_k]$ etc. Thus, we have:

$$\|\mu\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|m_j\|, \tag{5}$$

where m_j is the restriction of μ to $[a_j, b_j]$.

Consider the interval A_{2k+1}. On it, the restrictions of our measures form a one-dimensional space, which enables us to determine the coefficient c_k in representation (3).

Let us prove that for any ν and μ lying in the closed linear span of μ_n and $\nu \neq c\mu$ the inequality $\|\nu\| + \|\mu\| > \|\nu + \mu\|$ is true. Consider a pair of indices $i < j$ for which the measures μ_i and μ_j enter the expansion (see (3)) of the measures ν and μ with non-proportional pairs of coefficients (a, b) and (c, d), respectively. Then from (5) we have

$$\|\nu\| = \|\nu - a\alpha_{s(i,j)} - b\beta_{s(i,j)}\| + \|a\alpha_{s(i,j)} + b\beta_{s(i,j)}\|$$

and

$$\|\mu\| = \|\mu - c\alpha_{s(i,j)} - d\beta_{s(i,j)}\| + \|c\alpha_{s(i,j)} + d\beta_{s(i,j)}\|.$$

Using the strict convexity of the linear span of the measures $\alpha_{s(i,j)}$ and $\beta_{s(i,j)}$ we have

$$\|a\alpha_{s(i,j)} + b\beta_{s(i,j)}\| + \|c\alpha_{s(i,j)} + d\beta_{s(i,j)}\| > \|(a+c)\alpha_{s(i,j)} + (b+d)\beta_{s(i,j)}\|.$$

So, applying the triangle inequality, we obtain what is required.

3. CONCLUSION

In this work, we study the existence of infinite-dimensional uniformly convex subspaces of the space of measures with the Kantorovich norm on a compact set. We show that in case of an interval there are such subspaces. However, an example of a compact set is given for which there are no such subspaces. A restriction necessary for the existence of such subspaces is also established: they must not contain measures with supports that are “far” from each other. Furthermore, a constructive example is given of an infinite-dimensional space of measures that is strictly convex.

References

1 Bogachev V. I. Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 2018.

И.А. Кухарчук

М.В. Ломоносов Мәскеу мемлекеттік университетінің механика-математика факультеті, Воробьевы Горы, 1 үй, Мәскеу, 119991, Ресей

Канторович нормалы бірқалыпты дөңес өлшемдер ішкі кеңістіктері

Аннотация: Мақалада компактты метрикалық кеңістіктегі борелдік өлшемдер қарастырылады. Барлық өлшемдер жиынының жиыншаларында Канторович нормасының бірқалыпты дөңестігі қарастырылады. Канторович нормасы бірқалыпты дөңес болатындай шексіз өлшемді өлшемдердің ішкі кеңістігі құрылды. Барлық бірқалыпты дөңес өлшемдер кеңістігінің ішкі кеңістіктері X -та ақырлы өлшемді болатындай (X, ρ) ақырсыз компактының мысалы алынды.

Түйін сөздер: Канторович нормасы, бірқалыпты дөңес кеңістік, өлшемдер жиыншасы, борелдік өлшемдер.

И.А. Кухарчук

Факультет математики и механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Воробьевы Горы, д. 1, 119991, Москва, Россия

Равномерно выпуклые подпространства мер с нормой Канторовича

Аннотация: В работе рассматриваются борелевские меры на компактном метрическом пространстве. Изучается равномерная выпуклость нормы Канторовича на подпространствах всего пространства мер. Построен пример бесконечномерного подпространства мер на котором норма Канторовича равномерно выпукла. Также получен пример бесконечного компакта (X, ρ) такого, что все равномерно выпуклые подпространства пространства мер на X конечномерны.

Ключевые слова: Норма Канторовича, равномерно выпуклое пространство, подпространство мер, борелевские меры.

References

1 Bogachev V. I. Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 2018.

Information about author:

Кухарчук Иван Андреевич – математика бөлімінің 5 курс студенті, М.В. Ломоносов Мәскеу мемлекеттік университетінің механика-математика факультеті, Воробьевы Горы, 1 үй, Мәскеу, 119991, Ресей.

Kukharchuk Ivan A. – 5^{th} year student of mathematics department, Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Vorobyovy Gory, 1, Moscow, 119991, Russia.

Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2023, Vol. 143, №2, P.13-20
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

ХҒТАР: 27.17.19

Б.А. Дуйсенгалиева, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Қажымұқан көш., 13, Астана, 010008, Қазақстан
(E-mail: bibinur959@gmail.com, altyngul.82@mail.ru)

Рангі екіге тең еркін дуалды Лейбниц алгебраларының қолды автоморфизмдері

Аннотация: Мақалада алгебралардың $\circ$-көпбейнесінің анықтамасы келтірілген және дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болатыны дәлелденген. [Алимбаев А.А., Науразбекова А.С., Козыбаев Д.Х. Рангі екіге тең еркін алгебралардың автоморфизмдерінің сызықтылануы мен дифференциалдауының триангулярлануы//Сібір электронды математикалық жаңалықтары. 2019. Т. 16. Б. 1133-1146] жұмысында $\circ$-көпбейнесінің рангі екіге тең еркін алгебраларының автоморфизмдерінің сызықтылануына және дифференциалдауының триангулярлануына қатысты бірқатар нәтижелер алынған. Сол жұмыстың нәтижелерінің салдарлары ретінде біз келесі нәтижелерді аламыз: екі айнымалыдан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы амальгамирленген еркін көбейтіндінің құрылымын қабылдайды, сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдерінің кез келген редуктивті группасы сызықтыланады және осы алгебраның кез келген локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланады.

Түйін сөздер: дуалды Лейбниц алгебрасы, автоморфизм, амальгамирленген еркін көбейтінді, сызықтылану, триангулярлану.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/2.2

2000 Mathematics Subject Classification: 17A50б 17D99, 17A32

1. Кіріспе

$k[x,y]$ көпмүшелер алгебрасының автоморфизмдері қолды екені белгілі [1,2]. Сонымен қатар осы алгебраның $Aut(k[x,y])$ автоморфизмдер группасы амальгамирленген еркін көбейтінді құрылымын қабылдайды [2,3], яғни

$$Aut(k[x,y]) = A *_C B,$$

мұндағы A – аффинді автоморфизмдердің ішкі группасы, B – үшбұрышты автоморфизмдердің ішкі группасы және $C = A \cap B$. Осы нәтиженің аналогы еркін ассоциативті алгебралар [4, 5], оң симметриялы алгебралар [6] және сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған еркін Пуассон алгебралары [7] үшін де алынды. Оған қоса, еркін ассоциативті алгебралар мен еркін Пуассон алгебраларының автоморфизмдер группасы көпмүшелер алгебрасының автоморфизмдер группасына изоморфты.

1979 жылы Т. Камбаяши [8] $Aut(k[x,y])$ автоморфизмдер группасының амальгамирленген еркін көбейтіндісінің құрылымын пайдаланып, $Aut(k[x,y])$ автоморфизмдер группасының кез келген алгебралық ішкі группасы сызықты немесе үшбұрышты автоморфизмдердің ішкі группасына түйіндес екенін дәлелдеді. Бұдан кез келген редуктивті группаның k^n-ге, мұндағы $n = 2$, әрекеті сызықтыланатыны шығады.

Т. Камбаяши бұл нәтиже барлық $n > 2$ үшін де орындалады деген болжам айтты. Бұл болжам редуктивті группалар әрекеті үшін сызықтылану гипотезасы деген атау алды. $n \geq 4$ болған кезде бұл гипотеза дұрыс болмай шықты. Мысалы, 1989 жылы Г. Шварц [9] k^4-ке O_2 ортогоналды группасының және k^7-ге Sl_2 группасының әрекеті сызықтыланбайтын қарсы мысал құрастырды. [10, 11] жұмыстарда ақырлы группалардың әрекеттері сызықтыланбайтын алғашқы мысалдар құрастырылды.

1968 жылы Р. Ренчлер [12] сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан тәуелді көпмүшелер алгебрасының локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатынын дәлелдеді. Х. Басс [13] сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған үш айнымалыдан тәуелді көпмүшелер алгебрасының триангулярланбайтын локальді-нильпотентті дифференциалдауының мысалын келтірді.

$x \cdot y$ бисызықты амалы анықталған k өрісінде тұрғызылған A сызықты кеңістігі *дуалды Лейбниц алгебрасы* деп аталады, егер кез келген $x, y, z \in A$ үшін келесі тепе-теңдік орындалса:

$$(xy)z = x(yz) + x(zy).$$

Дуалды Лейбниц алгебрасын шетелдік әдебиеттерде кейде Zinbiel (Leibniz деген сөз керісінше ретпен жазылған) алгебрасы деп те атайды. Ж.-Л. Лодей дуалды Лейбниц алгебра түсінігін анықтады [14]. Оған қоса, $a \circ b = ab + ba$ симметриясына қатысты кез келген A дуалды Лейбниц алгебрасы ассоциативті және коммутативті алгебра болады [14].

Ж.-Л. Лодей [14] жақшалары оң жаққа нормаланып орналасқан барлық ассоциативті емес сөздер еркін дуалды Лейбниц алгебрасының базисін құрайтынын дәлелдеді. Еркін дуалды Лейбниц алгебралары дәл шафл көбейтіндісі бар алгебра болатыны көрсетілді [15]. А. Науразбекова [16] сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған еркін дуалды Лейбниц алгебралары симметриялы көбейтіндіге қатысты ассоциативті-коммутативті алгебра (бірлік элементі жоқ) болатынын дәлелдеді және оның туындаушыларын тапты; сондай-ақ ол екі туындаушыдан тұратын еркін дуалды Лейбниц алгебрасының ішкі алгебрасы рангі саналымды еркін дуалды Лейбниц алгебрасы болатын мысалдар құрастырды. А. Джумадильдаев пен К. Туленбаев [17] дуалды Лейбниц алгебралары үшін Нагата-Хигман теоремасының [18] аналогын дәлелдеді (әрбір дуалды Лейбниц ниль-алгебрасы нильпотентті). Сондай-ақ олар алгебралық тұйық өрісте тұрғызылған әр ақырлы өлшемді дуалды Лейбниц алгебрасы комплекс сандар өрісінде шешілетінін және нильпотентті екенін дәлелдеді. А. Науразбекова және У. Умирбаев [19] өрістің сипаттамасы нөлге тең болған жағдайда дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесінің әр меншікті ішкі көпбейнесі нильпотентті және, салдар ретінде, дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі шпехтті, ал базистік рангі бірге тең екенін дәлелдеді. Д.А. Тауэрс [20] кез келген өрісте тұрғызылған әр ақырлы өлшемді дуалды Лейбниц алгебрасы шешілетінін көрсеткен басқа авторлардың нәтижелерін кеңейтіп, олардың нильпотентті екенін көрсетті. Соңғы жылдары дуалды Лейбниц алгебраларын зерттеуге деген қызығушылық жоғары (мысалы, [21–25] жұмыстарды қараңыз).

[6] жұмыста алгебралардың $\circ$-көпбейнелерінің класы анықталған және өрісте тұрғызылған алгебралардың әр $\circ$-көпбейнесінің рангі екіге тең еркін алгебраларының қолды автоморфизмдер группасы амальгамирленген еркін көбейтінді құрылымын қабылдайтыны дәлелденген. Оған қоса, өрістің сипаттамасы нөлге тең болған жағдайда осы алгебралардың қолды автоморфизмдерінің редуктивті группасы сызықтыланатыны және локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатыны дәлелденген.

Осы жұмыс еркін дуалды Лейбниц алгебраларының қолды автоморфизмдері мен дифференциалдауларын зерттеуге арналған. Екінші бөлімде дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болатыны дәлелденеді. Үшінші бөлім шолу сипатына ие. Бұл бөлімде жоғарыда көрсетілген нәтижелердің салдарлары ретінде екі айнымалыдан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы амальгамирленген еркін көбейтіндінің құрылымын қабылдайтыны көрсетіледі. Сонымен қатар сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдерінің кез келген редуктивті группасы сызықтыланатыны және осы алгебраның кез келген локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатыны көрсетіледі.

2. Алгебралардың $\circ$-көпбейнесі

Айталық k кез келген өріс және $\mathfrak{M}$ k өрісінде тұрғызылған алгебралардың кез келген біртекті көпбейнесі болсын. $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ арқылы осы көпбейненің $x_1, x_2, \ldots, x_n$ айнымалыларынан тәуелді еркін алгебрасын белгілейік. $\deg$ арқылы $\mathfrak{M}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ еркін алгебрасындағы стандартты дәреже функциясын белгілейік, яғни кез келген i үшін $\deg(x_i) = 1$.

$\mathfrak{M}$ көпбейнесін $\circ$-*көпбейне* деп атайды, егер кез келген нөлдік емес $h \in \mathfrak{M}\langle x_1, x_2\rangle$ және кез келген нөлдік емес $f \in \mathfrak{M}\langle x\rangle$ үшін келесі шарт орындалса:

$$\deg(f(h)) = \deg(f) \cdot \deg(h).$$

Алгебралардың $\circ$-көпбейнесінің айқын мысалдары:

1. Ассоциативті-коммутативті алгебралар көпбейнесі,
2. Ассоциативті алгебралар көпбейнесі [26],
3. Пуассон алгебраларының көпбейнесі [7].

А.А. Алимбаев, А.С. Науразбекова, Д.Х. Козыбаев [6] оң симметриялы алгебралардың, ассоциативті емес алгебралардың, коммутативті алгебралардың көпбейнелері $\circ$-көпбейне болатынын дәлелдеді.

Бұл бөлімде біз дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болатынын көрсетеміз.

$x \cdot y$ бисызықты амалы анықталған k өрісінде тұрғызылған A сызықты кеңістігі *дуалды Лейбниц алгебрасы* деп аталады, егер кез келген $x, y, z \in A$ үшін келесі тепе-теңдік орындалса:

$$(xy)z = x(yz) + x(zy). \qquad (1)$$

Дуалды Лейбниц алгебрасының бірлік элементі болмайтынын тексеру қиын емес.

Айталық $DL\langle X\rangle$ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ еркін туындаушылар жиынымен берілген сипаттамасы нөлге тең k өрісінде тұрғызылған еркін дуалды Лейбниц алгебрасы болсын. X^* арқылы жақшалары оң жаққа нормаланып орналасқан X алфавитіндегі барлық ассоциативті емес сөздер жиынын, яғни $x_{i_1}(x_{i_2}(\ldots(x_{i_{m-1}}x_{i_m})\ldots))$ түріндегі сөздер жиынын белгілейік, мұндағы $x_{i_j} \in X$. Ж.-Л. Лодей [14] X^* жиыны $DL\langle X\rangle$ алгебрасының сызықты базисін құрайтынын дәлелдеді. Дәрежесі ≥ 2 болатын әр u ассоциативті емес сөзі u_1u_2 түрінде бірмәнді жазылады, мұндағы $\deg(u_1), \deg(u_2) < \deg(u)$.

Кез келген $0 \neq f \in DL\langle X\rangle$ элементі келесі түрде бірмәнді жазылады:

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_s, \quad 0 \neq f_i \in DL_i\langle X\rangle,$$

мұндағы $DL_i\langle X\rangle$ – $\deg(u_i) = i$ болатын u_i мономдарынан туындайтын k-сызықты қабықша. f_s элементі $\deg$ дәреже функциясына қатысты f элементінің *жоғары біртекті бөлігі* деп аталады. Әр $0 \neq f \in DL\langle X\rangle$ элементі үшін $\deg(f) = \deg(f_s)$ деп алатын боламыз.

Лемма 1. *Айталық u, v X^* жиынының кез келген элементтері болсын және* $\deg(u) = s$, $\deg(v) = t$ *болсын. Онда $uv \neq 0$, uv натурал коэффициенттермен берілген X^* элементтерінің сызықты комбинациясы болып табылады және* $\deg(uv) = s + t$.

Д э л е л д е у і. $\deg(u) + \deg(v)$ бойынша индукция жүргізу арқылы дәлелдейік. Егер $\deg(u) = 1$ болса, онда $u = x_i$, $uv = x_iv$, $uv \in X^*$ және $\deg(x_iv) = 1 + t$. Енді $\deg(u) > 1$ және $u = x_iw$ деп алайық. Онда $\deg(w) = s - 1$. (1) тепе-теңдігінен

$$uv = (x_iw)v = x_i(wv + vw)$$

формуласы шығады. Индукция болжамы бойынша wv , vw натурал коэффициенттермен берілген X^* элементтерінің сызықты комбинациясы болады. Олай болса, $wv + vw$ және $uv = x_i(wv + vw)$ натурал коэффициенттермен берілген X^* элементтерінің сызықты комбинациясы болады. Сонымен қатар индукция болжамы бойынша $\deg(wv) = \deg(vw) = s + t - 1$ болғандықтан

$$\deg(uv) = \deg(wv) + 1 = s + t - 1 + 1 = s + t.$$

Осылайша, deg дәреже функциясы $DL\langle X\rangle$ алгебрасының келесі түрдегі градуировкасын анықтайды:

$$DL\langle X\rangle = DL_1\langle X\rangle \oplus DL_2\langle X\rangle \oplus \ldots$$

[16] жұмысындағы салдар 2.1-ден тура шығады

Салдар 1. $DL\langle X\rangle$ алгебрасының кез келген нөлдік емес f және g элементтері үшін $fg \neq 0$.

Лемма 2. *$DL\langle X\rangle$ алгебрасының кез келген нөлдік емес f және g элементтері үшін $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.*

Д э л е л д е у і. Айталық $f, g \in DL\langle X\rangle$ және

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_s,\ \ f_i \in DL_i\langle X\rangle\,,\ \ f_s \neq 0,$$

$$g = g_1 + g_2 + \ldots + g_t,\ \ g_j \in DL_j\langle X\rangle\,,\ \ g_t \neq 0$$

болсын. Онда

$$fg = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} f_i g_j.$$

$DL\langle X\rangle$ алгебрасының градуировкасы бойынша барлық i, j үшін $f_i g_j \in DL_{i+j}\langle X\rangle$. Ал салдар 1 бойынша $f_s g_t \neq 0$. Сондықтан

$$\deg(fg) = \deg(f_s g_t) = \deg(f_s) + \deg(g_t) = \deg(f) + \deg(g).$$

Лемма 3. *Айталық $0 \neq f \in DL\langle y\rangle$ және $0 \neq h \in DL\langle x, y\rangle$ болсын. Онда*

$$\deg(f(h)) = \deg(f) \cdot \deg(h).$$

Д э л е л д е у і. Айталық $f(y) = \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_{m-1} y^{m-1} + \alpha_m y^m$ болсын. Онда $\deg(f) = m$,

$$f(h) = \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots + \alpha_{m-1} h^{m-1} + \alpha_m h^m.$$

Лемма 2 бойынша барлық i үшін

$$\deg(\alpha_i h^i) = i \cdot \deg(h).$$

Сондықтан $\deg(f(h)) = m \cdot \deg(h) = \deg(f) \cdot \deg(h)$.

Сөйлем 1. *Дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$ -көпбейне болады.*

3. Қолды автоморфизмдер группасы және локальді-нильпотентті дифференциалдаулар

Айталық k кез келген өріс болсын. Айталық $\mathfrak{M}$ k өрісінде тұрғызылған дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі болсын және $A = \mathfrak{M}\langle x, y\rangle$ осы көпбейненің x, y екі айнымалысынан тәуелді еркін алгебрасы болсын. Сонымен қатар айталық $Aut(A)$ A алгебрасының автоморфизмдер группасы болсын. $\varphi = (f_1, f_2)$ арқылы A алгебрасының $\varphi(x) = f_1$, $\varphi(y) = f_2$ болатын автоморфизмдерін белгілейік. Келесі түрдегі автоморфизмдер

$$\sigma(1, a, f) = (ax + f(y), y),$$

$$\sigma(2,a,g)=(x,ay+g(x)),$$

мұндағы $0\neq a\in k, f(y)\in\mathfrak{M}\langle y\rangle, g(x)\in\mathfrak{M}\langle x\rangle$, *элементар автоморфизмдер* деп аталады. $Aut(A)$ группасының барлық элементар автоморфизмдерінен туындалған $T(A)$ ішкі группасы *қолды автоморфизмдердің ішкі группасы* деп аталады. Қолды емес автоморфизмдер *жабайы автоморфизмдер* деп аталады.

Егер

$$\theta=(f_1,f_2),\varphi=(g_1,g_2)$$

болса, онда $Aut(A)$ группасында көбейтінді келесі формуламен анықталады:

$$\theta\circ\varphi=(g_1(f_1,f_2),g_2(f_1,f_2)).$$

Айталық $Af_2(A)$ A алгебрасының аффинді автоморфизмдер группасы, яғни келесі түрдегі автоморфизмдер группасы болсын:

$$(a_1x+b_1y+c_1,a_2x+b_2y+c_2),$$

мұндағы $a_i,b_i,c_i\in k, a_1b_2\neq a_2b_1$, ал $Tr_2(A)$ A алгебрасының үшбұрышты автоморфизмдер группасы, яғни келесі түрдегі автоморфизмдер группасы болсын:

$$(ax+f(y),by+c),$$

мұндағы $0\neq a,b\in k, c\in k, f(y)\in\mathfrak{M}\langle y\rangle$, және де $C=Af_2(A)\cap Tr_2(A)$ болсын.

Айталық G кез келген группа, ал G_0,G_1,G_2 G группасының ішкі группалары болсын, сонымен қатар $G_0=G_1\cap G_2$ болсын. G группасы G_0 ішкі группасымен біріктірілген G_1 және G_2 ішкі группаларының *еркін көбейтіндісі* деп аталады және $G=G_1*_{G_0}G_2$ деп белгіленеді, егер

(a) G группасы G_1 және G_2 ішкі группаларымен туындалса;
(b) G группасының анықтаушы қатынастары тек қана G_1 және G_2 ішкі группаларының анықтаушы қатынастарынан тұрса.

[6] жұмыста алгебралардың $\circ$-көпбейнелерінің екі айнымалыдан тәуелді еркін алгебраларының қолды автоморфизмдер группасы мен локальді-нильпотентті дифференциалдауларына қатысты бірқатар нәтижелер алынған.

Теорема 1. *[6] Айталық $\mathfrak{M}$ алгебралардың кез келген $\circ$-көпбейнесі болсын және $A=\mathfrak{M}\langle x,y\rangle$ k өрісінде тұрғызылған x,y екі айнымалысынан тәуелді осы көпбейненің еркін алгебрасы болсын. A алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы $C=Af_2(A)\cap Tr_2(A)$ ішкі группасымен біріктірілген $Af_2(A)$ аффинді автоморфизмдердің ішкі группасы мен $Tr_2(A)$ үшбұрышты автоморфизмдердің ішкі группасының еркін көбейтіндісі болады, яғни*

$$T(A)=Af_2(A)*_C Tr_2(A).$$

$V\neq 0$ G-модулі *келтірілмейтін* немесе *жай* деп аталады, егер онда меншікті нөлдік емес G-ішкі модульдері болмаса. V G-модулі *айтарлықтай келтірілетін* немесе *жартылай жай* деп аталады, егер $V=W\oplus W'$ болатындай V G-модулінің әр W G-ішкі модулі үшін толықтыратын V G-модулінің W' G-ішкі модулі бар болса. $Aut(A)$ группасының G алгебралық ішкі группасы (сызықты) *редуктивті* деп аталады, егер әр ақырлы G-модулі айтарлықтай келтірілетін болса.

$f\in Aut(A)$ автоморфизмі *сызықтыланады* деп аталады, егер

$$\varphi^{-1}f\varphi\in Af_2(A)$$

болатын $\varphi\in Aut(A)$ автоморфизмі бар болса.

Салдар 2. [6] $\circ$-көпбейнесінің сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан туындайтын A еркін алгебрасының қолды автоморфизмдерінің кез келген редуктивті группасы сызықтыланады.

$A = \mathfrak{M}\langle x, y\rangle$ алгебрасының d дифференциалдауы *локальді-нильпотентті* деп аталады, егер әр $f \in A$ үшін $d^n(f) = 0$ болатын $n \in \mathbb{N}$ саны бар болса. Егер d локальді-нильпотентті дифференциалдау болса, онда келесі бейнелеу

$$exp\, d : A \to A$$

автоморфизм болады және *экспоненциалды автоморфизм* деп аталады.

A алгебрасының келесі түрдегі d дифференциалдауы *үшбұрышты* деп аталады:

$$d = a_1(y)\partial_x + a_2\partial_y,$$

мұндағы $a_1(y) \in \mathfrak{M}\langle y\rangle$ және $a_2 \in k$. A алгебрасының d дифференциалдауы *триангулярланатын* деп аталады, егер $\varphi^{-1}d\varphi$ үшбұрышты болатындай A алгебрасының φ автоморфизмі бар болса.

Теорема 2. *[6] $\circ$-көпбейнесінің сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған екі айнымалыдан туындайтын A еркін алгебрасының $exp\, D \in T(A)$ болатын кез келген D локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатын болады.*

Сөйлем 1 бойынша дуалды Лейбниц алгебраларының көпбейнесі $\circ$-көпбейне болатындықтан [6] жұмыстың жоғарыда келтірілген нәтижелерінен келесі салдарлар шығады.

Салдар 3. Айталық $A = DL\langle x, y\rangle$ k өрісінде тұрғызылған x, y екі айнымалысынан тәуелді еркін дуалды Лейбниц алгебрасы болсын. A алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$ ішкі группасымен біріктірілген $Af_2(A)$ аффинді автоморфизмдердің ішкі группасы мен $Tr_2(A)$ үшбұрышты автоморфизмдердің ішкі группасының еркін көбейтіндісі болады, яғни

$$T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

Салдар 4. Сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған $A = DL\langle x, y\rangle$ екі айнымалыдан туындайтын еркін дуалды Лейбниц алгебрасының қолды автоморфизмдерінің кез келген редуктивті группасы сызықтыланады.

Салдар 5. Сипаттамасы нөлге тең өрісте тұрғызылған $A = DL\langle x, y\rangle$ екі айнымалыдан туындайтын еркін дуалды Лейбниц алгебрасының $exp\, D \in T(A)$ болатын кез келген D локальді-нильпотентті дифференциалдауы триангулярланатын болады.

Әдебиеттер тізімі

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math. – 1942. – Vol. 184. – P. 161–174.

2 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wiskunde. – 1953. – Vol. 1, No. 3. – P. 33–41.

3 Shafarevich I.R. On some infinite dimensional algebraic groups // Rend. Mat. e Appl. – 1966. – Vol. 25, No. 5. – P. 208–212.

4 Czerniakiewicz A.G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II, Trans // Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 160. – P. 393-401; – 1972. – Vol. 171. – P. 309–315.

5 Макар-Лиманов Л.Г. Об автоморфизмах свободной алгебры с двумя образующими // Функциональный анализ и его приложения. – 1970. – Т. 4, № 3. – С. 107-108.

6 Алимбаев А.А., Науразбекова А.С., Козыбаев Д.Х. Линеаризация автоморфизмов и триангуляция дифференцирований свободных алгебр ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1133–1146.

7 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // Journal of Algebra. – 2009. – Vol. 322, No. 9. – P. 3318–3330.

8 Kambayashi T. Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group actions on affine space // Journal of Algebra. – 1979. – Vol. 60. – P. 439–451.

9 Schwarz G. Exotic algebraic group actions // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1989. – Vol. 309. – P. 89–94.

10 Moser-Jauslin L., Masuda M. and Petrie T. The equivariant Serre Problem for abelian groups // Topology. – 1996. – Vol. 35, No. 2. – P. 329–334.

11 Masuda M., Moser-Jauslin L. and Petrie T. Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Application // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1991. – Vol. 88. – P. 9065–9066.

12 Rentschler R. Operations du groure additif sur le plan // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1968. – Vol. 267. – P. 384–387.
13 Bass H. A non-triangular action of G_a on A^3 // J. of Pure and Appl. Algebra. – 1984. – Vol. 33, No. 1. – P. 1–5.
14 Loday J.-L. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras // Math. Scand. – 1995. – Vol. 77, No. 2. – P. 189–196.
15 Loday J.-L. On the algebra of quasi-shuffles // Manuscripta mathematica. – 2007. – Vol. 123. – P. 79-93.
16 Naurazbekova A.S. On the structure of free dual Leibniz algebras // Eurasian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 10, No. 3. – P. 40–47.
17 Dzhumadildaev A., Tulenbaev K. Nilpotency of Zinbiel algebras // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2005. – Vol. 11, No. 2. – P. 195–213.
18 Higman G. On a conjecture of Nagata // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1956. – Vol. 52. – P. 1–4.
19 Naurazbekova A., Umirbaev U. Identities of dual Leibniz algebras // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 1, No. 1. – P. 86–91.
20 Towers D.A. Zinbiel algebras are nilpotent. arXiv:2202.12026v1 (2022).
21 Covez S., Farinati M., Lebed V., Manchon D. Bialgebraic approach to rack cohomology // Algebraic and Geometric Topology. – 2023. – Vol. 23, No. 4. – P. 1551–1582.
22 Chapoton F. Zinbiel algebras and multiple zeta values. arXiv:2109.00241 (2021).
23 Ikonicoff S., Pacaud Lemay J.-S. Cartesian Differential Comonads and New Models of Cartesian Differential Cate-gories. arXiv:2108.04304 (2023).
24 Alvarez M.A., Castillo de Mello T., Kaygorodov I. Central extensions of 3-dimensional Zinbiel algebras. arXiv:2104.03429 (2021).
25 Alvarez M.A., Jnior R.F., Kaygorodov I. The algebraic and geometric classification of Zinbiel algebras. arXiv:2206.00315 (2022).
26 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. – 1964. – Vol. 56. – P. 618–632.

Б.А. Дуйсенгалиева, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан

Ручные автоморфизмы свободной дуальной алгебры Лейбница ранга два

Аннотация: В статье дается определение $\circ$-многообразия алгебр и доказывается, что многообразие дуальных алгебр Лейбница является $\circ$-многообразием. В работе [Алимбаев А.А., Науразбекова А.С., Козыбаев Д.Х. Линеаризация автоморфизмов и триангуляция дифференцирований свободных алгебр ранга 2//Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 1133-1146.] получены результаты, касающиеся линеаризации автоморфизмов и триангуляции дифференцирований свободных алгебр ранга два $\circ$-многообразия. Как следствие результатов этой работы мы показали следующее: группа ручных автоморфизмов свободной дуальной алгебры Лейбница от двух переменных допускает структуру амальгамированного свободного произведения, любая редуктивная группа ручных автоморфизмов свободной дуальной алгебры Лейбница от двух переменных над полем нулевой характеристики линеаризуема и любое локально-нильпотентное дифференцирование этой алгебры триангулируемо.

Ключевые слова: дуальная алгебра Лейбница, автоморфизм, амальгамированное свободное произведение, линеаризация, триангуляция.

B.A. Duisengaliyeva, A.S. Naurazbekova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Astana, 010008, Kazakhstan

Tame Automorphisms of a Free Dual Leibniz Algebra of Rank Two

Abstract: The article gives a definition of $\circ$-variety of algebras and proves that the variety of dual Leibniz algebras is a $\circ$-variety. In [Alimbaev A.A., Naurazbekova A.S., Umirbaev U. Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of a free algebras of rank 2, Siberian Electronic Mathematical Reports. 2019. Vol. 16. P. 1133-1146.], the results concerning the linearization of automorphisms and the triangulation of derivations of free algebras of rank two $\circ$-varieties are obtained. As a consequence of the results of this work, we have shown the following: the group of tame automorphisms of a free dual Leibniz algebra in two variables admits the structure of an amalgamated free product, any reductive group of tame automorphisms of a free dual Leibniz algebra in two variables over a field of characteristic zero is linearizable, and any locally nilpotent derivation of this algebra is triangulable.

Keywords: dual Leibniz algebra, automorphism, amalgamated free product, linearization, triangulation.

References

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. 1942. Vol. 184. P. 161–174.
2 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wiskunde. 1953. Vol. 1, №. 3. P. 33–41.
3 Shafarevich I.R. On some infinite dimensional algebraic groups, Rend. Mat. e Appl. 1966. Vol. 25, No. 5. P. 208–212.

4 Czerniakiewicz A.G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II, Trans, Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 160. P. 393-401; 1972. Vol. 171. P. 309–315.
5 Makar-Limanov L. Ob avtomorfizmah svobodnoj algebry s dvumya obrazuyushchimi [The automorphisms of the free algebra of two generators], Funksional. Anal. i Prilozhen. 1970. Vol. 4, №. 3. P. 107–108; English translation: in Functional Anal. Appl. 1970. Vol. 4. P. 262–263. [in Russian]
6 Alimbaev A.A., Naurazbekova A.S., Umirbaev U. Linearizaciya avtomorfizmov i triangulyaciya differencirovanij svobodnyh algebr ranga 2 [Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of a free algebras of rank 2], Siberian Electronic Mathematical Reports. 2019. Vol. 16. P. 1133–1146. [in Russian]
7 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, Journal of Algebra. 2009. Vol. 322, No. 9. P. 3318–3330.
8 Kambayashi T. Automorphism group of a polynomial ring and algebraic group actions on affine space, Journal of Algebra. 1979. Vol. 60. P. 439–451.
9 Schwarz G. Exotic algebraic group actions, C.R. Acad. Sci. Paris. 1989. Vol. 309. P. 89–94.
10 Moser-Jauslin L., Masuda M. and Petrie T. The equivariant Serre Problem for abelian groups, Topology. 1996. Vol. 35, №. 2. P. 329–334.
11 Masuda M., Moser-Jauslin L. and Petrie T. Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Application, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1991. Vol. 88. P. 9065–9066.
12 Rentschler R. Operations du groure additif sur le plan, C.R. Acad. Sci. Paris. 1968. Vol. 267. P. 384–387.
13 Bass H. A non-triangular action of G_a on A^3 , J. of Pure and Appl. Algebra. 1984. Vol. 33, №. 1. P. 1–5.
14 Loday J.-L. Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras, Math. Scand. 1995. Vol. 77, №. 2. P. 189–196.
15 Loday J.-L. On the algebra of quasi-shuffles, Manuscripta mathematica. 2007. Vol. 123. P. 79-93.
16 Naurazbekova A.S. On the structure of free dual Leibniz algebras, Eurasian Mathematical Journal. 2019. Vol. 10, №. 3. P. 40–47.
17 Dzhumadildaev A., Tulenbaev K. Nilpotency of Zinbiel algebras, Journal of Dynamical and Control Systems. 2005. Vol. 11, №. 2. P. 195–213.
18 Higman G. On a conjecture of Nagata, Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. Vol. 52. P. 1–4.
19 Naurazbekova A., Umirbaev U. Identities of dual Leibniz algebras, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. 2010. Vol. 1, №. 1. P. 86–91.
20 Towers D.A. Zinbiel algebras are nilpotent. arXiv:2202.12026v1 (2022).
21 Covez S., Farinati M., Lebed V., Manchon D. Bialgebraic approach to rack cohomology, Algebraic and Geometric Topology. 2023. Vol. 23, №. 4. P. 1551–1582.
22 Chapoton F. Zinbiel algebras and multiple zeta values. arXiv:2109.00241 (2021).
23 Ikonicoff S., Pacaud Lemay J.-S. Cartesian Differential Comonads and New Models of Cartesian Differential Cate-gories. arXiv:2108.04304 (2023).
24 Alvarez M.A., Castillo de Mello T., Kaygorodov I. Central extensions of 3-dimensional Zinbiel algebras. arXiv:2104.03429 (2021).
25 Alvarez M.A., Jnior R.F., Kaygorodov I. The algebraic and geometric classification of Zinbiel algebras. arXiv:2206.00315 (2022).
26 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras, Proc. London Math. Soc. – 1964. – Vol. 56. – P. 618–632.

Авторлар туралы мәліметтер:

Дүйсенгалиева Б.А. – ***байланыс үшін автор,*** PhD, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Алгебра және геометрия кафедрасының аға оқытушысы, Қажымұқан көшесі 13, Астана, 010008, Қазақстан.

Науразбекова А.С. – PhD, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Алгебра және геометрия кафедрасың доценті, Қажымұқан көшесі 13, Астана, 010008, Қазақстан.

Duisengaliyeva B.A. – ***corresponding author,*** PhD, Senior Lecturer of the Department of Algebra and Geometry L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Astana, 010008, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – PhD, Assosiate Professor of the Department of Algebra and Geometry L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Astana, 010008, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 11.05.2023

Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2023, Vol. 143, №2, P.21-33
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.37.17**

К.С. Мусабеков

Кокшетауский университет имени Ш. Уалиханова, ул. Абая, д. 76, Кокшетау, 020000, Казахстан
(E-mail: it.kgu@mail.ru)

МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ В ХИМИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ

Аннотация: В работе рассматривается задача оптимального управления процессом в неадиабатическом трубчатом реакторе используемом в химической технологии. В реактор подается газ, который подвергается экзотермической реакции первого порядка. Реактор имеет внешнюю оболочку - кожух. Через кожух течет охлаждающая реактор жидкость. В свою очередь реактор изменяет температуру в кожухе.

В качестве функции управления принимается скорость подачи охлаждающей жидкости в кожух. Подаваемая в кожух жидкость имеет постоянную температуру. Поэтому функция управления зависит лишь от времени.

Величины температура реактора, концентрации реагирующей смеси меняются по протяженности реактора и времени реакции. Математическая модель реактора состоит из дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующих краевых, начальных условий. При этом на температуру в реакторе и на управляющую функцию накладываются соответствующие ограничения. Ограничение на температуру в реакторе учитывается при помощи введения в целевом функционале (в качестве слагаемой) штрафной функции имеющего тип линейной срезки. Такой тип функции штрафа в математическом программировании обычно приводит к точному выполнению ограничении. Ограничения на управляющую функцию заданы в форме неравенств.

В качестве целевого функционала принимается суммарное за фиксированный промежуток времени количество не прореагировавшего вещества на выходе реактора. Как отмечено выше, в целевой функционал добавляется функция штрафа. Целью управления является минимизация этого функционала.

В работе доказывается теорема существование оптимального управления в такой задаче. В ходе доказательства используется ограниченность решений системы дифференциальных уравнений в частных производных в гельдеровских нормах. Это позволяет воспользоваться критерием Арцеля о компактности множества непрерывных функций. В ходе доказательства также используется слабая компактность множества функций управления в пространстве $L_2(0,T)$. При неограниченном увеличении штрафного коэффициента доказана сходимость к нулю функции штрафа, т.е. показана выполнимость, в пределе, фазового ограничения на температуру в реакторе. Получены также некоторые, необходимые в дальнейшем, свойства слагаемых целевого функционала.

Ключевые слова: математическая модель, химический реактор, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, существование оптимального управления, штрафная функция.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/2.3

2000 Mathematics Subject Classification: 49J20

1. Введение

В математической теории оптимальных процессов [1] часто встречаются задачи содержащие фазовое ограничение. Решение таких задач, даже в случае систем с сосредоточенными параметрами, сопряжено с определенными трудностями как в теоретическом исследовании свойств оптимальных процессов, так и в разработке практических алгоритмов численного решения. В случае же системы с распределенными параметрами, процесс решения таких задач становится достаточно трудной проблемой.

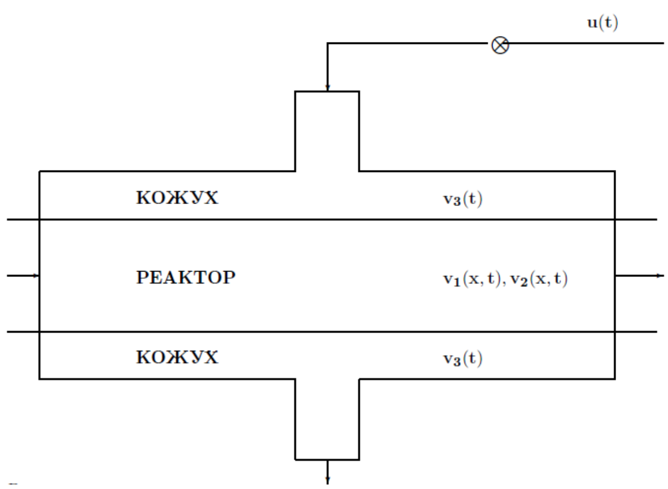
При разработке алгоритмов численного решения задачи оптимального управления активно используется необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [1]. Если для систем с сосредоточенными параметрами имеется общая теория принципа максимума [1], то для систем с распределенными параметрами, в силу сложности проблемы, о такой общей теории говорить не приходится. В работе [2] предлагается общая схема вывода необходимого условия оптимальности, но это не облегчает проблемы поиска оптимального управления, поскольку в этом случае возникает необходимость учета мер множеств на которых фазовые переменные выходят на границу допустимых областей своего изменения.

Для учета фазового ограничения часто используется так называемый метод "штрафных функций". Метод штрафных функций широко используется в теории математического программирования. Описание метода, решение ряда экстремальных задач посредством этого метода приведены в работах [3-5]. В [6-8] метод штрафов используется при решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. В работе [8] штрафная функция, по терминологии работы [5], имела тип функции квадратичной срезки, при нарушении ограничения на температуру реактора.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления процессом в неадиабатическом трубчатом реакторе, в котором роль фазового ограничения исполняет верхняя граница допустимого изменения температуры в реакторе. Учет такого ограничения осуществляется посредством метода штрафных функций, причем в качестве штрафной функций используется линейная функция типа срезки. Такой тип функции штрафа часто приводит к точному выполнению фазового ограничения. В работе устанавливается существование оптимального управления в такой задаче со штрафом и доказывается сходимость метода штрафов при неограниченном увеличении штрафного коэффициента.

2. Математическая модель неадиабатического трубчатого реактора

Рассматривается неадиабатический трубчатый реактор [9]:



В реактор подается газ, который подвергается экзотермической реакции первого порядка. Реактор имеет внешнюю оболочку (кожух). Через кожух течет жидкость.

Жидкость в кожухе охлаждает реактор. В свою очередь реактор изменяет температуру жидкости в кожухе.

По протяженности кожуха окружающего реактор, охлаждающая жидкость хорошо размешивается и поэтому считается, что по протяженности кожуха температура охлаждающей жидкости будет одинаковой во всех внутренних точках кожуха. Следовательно, температура охлаждаюшей жидкости меняется лишь во времени, т.е. $v_3 = v_3(t)$.

Охлаждающая жидкость может подаваться в кожух с различной степенью интенсивности, т.е. с различной скоростью. Отработавшая жидкость отводится из кожуха. Это влечет за собой изменение температуры в кожухе, что в свою очередь влияет на температуру в реакторе.

Известно, что увеличение температуры в реакторе влечет за собой более активное течение реакции (т.е. ускоряется процесс изменения концентрации). Поэтому, умение управлять температурой в реакторе является важным моментом в управлении ходом работы реактора. Роль такого управляющего параметра здесь исполняет функция $u(t)$ являющаяся скоростью подачи охлаждающей жидкости в кожух.

При составлении математической модели реактора предполагалось выполнение следующих условий:

1. Концентрация $v_1(x,t)$, температура реактора $v_2(x,t)$, температура охлаждающей жидкости в кожухе $v_3(t)$, скорость $u(t)$ подачи в кожух охлаждающей жидкости являются переменными, а все остальные параметры модели $a, b, c, ...$ являются постоянными числами.

2. Объем охлаждающей жидкости во внешнем кожухе является постоянной величиной.

3. Температурные потери через стенки реактора являются ничтожными, что ими можно пренебречь.

При выполнении этих трех условий, на основе учета баланса масс и температуры, в работе [9] была предложена математическая модель неадиабатического трубчатого реактора.

Пусть $\Omega = \{x : 0 < x < 1\}$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T-$ фиксированное число. В области Q_T математическая модель неадиабатического трубчатого реактора записывается в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - cv_1 f(v_2), \\ \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = b\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + kv_1 f(v_2) + g(v_3(t) - v_2(x,t)), \\ \frac{dv_3(t)}{dt} = p(\int\limits_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t)) + u(t)(E - v_3(t)) \end{array}\right\} \tag{1}$$

с граничными

$$\left.\begin{array}{l} a\frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \frac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0, \\ b\frac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \frac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

и начальными условиями

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), v_2(x,0) = v_{20}(x), v_3(0) = v_{30}, \tag{3}$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$; a, b, c, Γ, k, g, p, E, $v_{30}-$ константы, положительные параметры системы; $u(t)$ — управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора и температуры охладителя соответственно.

3. Постановка задачи

В работе будут использованы обозначения функциональных пространств, принятые в работах [10],[11]. Приведем еще некоторые обозначения:

$C_1[0,T]$ — банахово пространство непрерывных функций $v(t)$, заданных на $[0,T]$ и удовлетворяющих условию Липшица, с нормой

$\|v\|_{C_1} = \sup\limits_{0\le t\le T} |v(t)| + \sup\limits_{t',t''\in[0,T],t'\neq t''} \frac{|v(t')-v(t'')|}{|t'-t''|}$;

Множество допустимых управлений

$U_\partial = \{u(t) : 0 \le u(t) \le u_0 = const,\ u(t)$ — измеримая функция, $0 \le t \le T\}$.

При соответствующей гладкости начальных данных и выполнении условия согласования начальных и граничных данных

$$a \cdot \frac{dv_{10}(0)}{dx} - v_{10}(0) = -1,\ \frac{dv_{10}(1)}{dx} = 0,\ b \cdot \frac{dv_{20}(0)}{dx} - v_{20}(0) = -1,\ \frac{dv_{20}(1)}{dx} = 0$$

в работах [12,13] была доказана теорема существования и единственности решения

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}), v_3(t) \in C_1[0,T],\ 0 < \alpha < 1$$

системы (1)-(3) при произвольной функции $u(t) \in U_\partial$.

Решения системы (1)-(3), при $u(t) \in U_\partial$, удовлетворяют следующим условиям [12]: если $0 \le v_{10}(x) \le 1$, $0 < v_{20}(x) \le b_3$, $v_{30} > 0$ для любой точки $x \in \bar{\Omega}$, то

$$0 \le v_1(x,t) \le 1, \delta \le v_2(x,t) \le b_1, \delta_1 \le v_3(t) \le b_2, \tag{4}$$

для любой точки $(x,t) \in \overline{Q_T}$, где $\delta, \delta_1, b_1, b_2, b_3$ -некоторые положительные постоянные числа, зависящие лишь от параметров системы и начальных условий задачи.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u) = \int\limits_0^T v_1(1,t)dt, \tag{5}$$

т.е. суммарного за время T количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях (1)-(3) и следующих ограничениях на управление $u(t)$ и функцию $v_2(x,t)$:

$$u(t) \in U_\partial, \tag{6}$$

$$v_2(x,t) \le v_2^* = const. \tag{7}$$

Таким образом имеем следующую задачу оптимального управления.

Задача 1. Задача с фазовым ограничением.

Среди всех измеримых управлений удовлетворяющих условию (6), найти такое $u(t)$, при котором для соответствующего решения $v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(t)$ системы (1)-(3), выполняется условие (7) и функционал (5) достигает минимального значения.

В работе [12] доказано существование оптимального управления в задаче 1.

Для удобства учета фазового ограничения (7) функционал (5) заменяется функционалом

$$J_{A,1}(u) = \int\limits_0^T v_1(1,t)dt + A\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt, \tag{8}$$

где A - положительная постоянная величина (штрафной коэффициент), $\Phi_1(v_2)$ - штрафная функция,

$$\Phi_1(v_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } v_2(x,t) \le v_2^* \\ v_2(x,t) - v_2^*, & \text{если } v_2(x,t) > v_2^*. \end{cases}$$

Теперь рассматриваемая задача оптимального управления химическим реактором может быть сформулирована следующим образом.

Задача 2. Задача со штрафом.

Среди всех измеримых управлений удовлетворяющих условию (6), найти такое $u(t)$, при котором для соответствующего решения $v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(t)$ системы (1)-(3) функционал (8) достигает минимального значения.

4. Существование оптимального управления в задаче со штрафом

Рассмотрим теорему существования оптимального управления в задаче 2.

Теорема 1. Существует оптимальное управление являющееся решением задачи 2, т.е. существует измеримая функция $u^0(t) \in U_\partial$ для которой соответствующее решение $v_1^0(x,t)$, $v_2^0(x,t)$, $v_3^0(t)$ системы (1)-(3) доставляет минимум функционалу $J_{A,1}(u)$,

$$J_{A,1}(u^0) = \min_{u \in U_\partial} J_{A,1}(u).$$

Доказательство. При каждом $u(t) \in U_\partial$ в силу [13], система (1)-(3) имеет единственное решение

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}), v_3(t) \in C_1[0,T],$$
$$\|v_i\|_{2+\alpha}^{Q_T} \le c_1, i=1,2, \; \|v_3\|_{\frac{\alpha}{2}}^{[0,T]} \le c_2 \tag{9}$$

Здесь и далее через c_1, c_2 будем обозначать различные постоянные величины, зависящие лишь от параметров системы, начальных условий, и точные значения которых для нас не существенны.

Рассмотрим теперь множество всех решений v_1, v_2, v_3 системы (1)-(3) при различных $u(t) \in U_\partial$. Поскольку все решения системы (1)-(3) равномерно ограничены при $u(t) \in U_\partial$, то существует

$$\inf_{u \in U_\partial} J_{A,1}(u) = m_1, \; m_1 = const > 0.$$

Пусть $\{u^n(t)\} \subset U_\partial$ минимизирующая последовательность (при $0 \le t \le T$), так что $J_{A,1}(u^n) \to m_1$ (при $n \to \infty$), монотонно убывая. При этом, для каждого $u^n(t)$ имеем

$$v_1^n(x,t), v_2^n(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}), v_3^n(t) \in C_1[0,T]$$

являющихся решениями системы (1)-(3), и $\|v_i^n\|_{2+\alpha}^{Q_T} \le c_1, (i=1,2)$, $\|v_3^n\|_{\frac{\alpha}{2}}^{[0,T]} \le c_2$,

$$v_3^n(t) = v_{30} + \int_0^t [p(\int_0^1 v_2^n(x,s)dx - v_3^n(s)) + u^n(s)(E - v_3^n(s))]ds. \tag{10}$$

Последовательность $\{v_3^n(t)\}$ равностепенно непрерывна. Действительно, если $t_1, t_2 \in [0,T]$, $|t_1 - t_2| < \delta$, то

$$|v_3^n(t_1) - v_3^n(t_2)| \le c_2 |\int_{t_2}^{t_1} ds| \le c_2 \delta = \epsilon,$$

для всех $n \in N$. Следовательно, последовательность $v_3^n(t)$ компактна в $C[0,T]$.

Первое из неравенств (9) запишем в виде

$$\max_{\overline{Q_T}} |v_i^n| + \max_{\overline{Q_T}} |D_x v_i^n| + \max_{\overline{Q_T}} |D_x^2 v_i^n| + \max_{\overline{Q_T}} |D_t v_i^n|$$
$$+ \sup_{(x,t),(x',t) \in \overline{Q_T}} \frac{|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t)|}{|x-x'|^\alpha} + \sup_{(x,t),(x',t) \in \overline{Q_T}} \frac{|D_x^2 v_i^n(x,t) - D_x^2 v_i^n(x',t)|}{|x-x'|^\alpha}$$
$$+ \sup_{(x,t),(x,t') \in \overline{Q_T}} \frac{|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}} + \sup_{(x,t),(x,t') \in \overline{Q_T}} \frac{|D_x v_i^n(x,t) - D_x v_i^n(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{1+\alpha}{2}}}$$
$$+ \sup_{(x,t),(x,t') \in \overline{Q_T}} \frac{|D_x^2 v_i^n(x,t) - D_x^2 v_i^n(x,t')|}{|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}} \le c_1, i=1,2. \tag{11}$$

Из неравенства (11) следует равномерная ограниченность последовательностей $\{v_i^n\}$, $\{D_x v_i^n\}$, $\{D_x^2 v_i^n\}$, $\{D_t v_i^n\}$, $i=1,2$.

Покажем их равностепенную непрерывность. Для этого рассмотрим точки $P(x,t), R(x',y') \in \overline{Q_T}$ и введем обозначение $d(P,R) = |x-x'|^\alpha + |t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}$. Из (11) следует, что

$$|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t)| \le c_1 |x-x'|^\alpha, \; |D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x,t')| \le c_1 |t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t')| \le |D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t)| + |D_t v_i^n(x',t) - D_t v_i^n(x',t')|$$

$$\leq c_1(|x-x'|^\alpha + |t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}) = c_1 d(P,R),$$

т.е.

$$|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t')| \leq c_1 d(P,R),\ i=1,2. \tag{12}$$

Совершенно аналогично получим, что

$$|D_x^2 v_i^n(x,t) - D_x^2 v_i^n(x',t')| \leq c_1 d(P,R),\ i=1,2. \tag{13}$$

Чтобы показать выполнимость аналогичных неравенств для $v_i^n(x,t)$ воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа

$$v_i^n(x,t) - v_i^n(x',t) = D_x v_i^n(x'+\theta_i(x-x'))(x-x'),\ (0<\theta_i<1),\ i=1,2.$$

Тогда, в силу формулы (11) имеем

$$|v_i^n(x,t) - v_i^n(x',t)| \leq c_1|x-x'| = c_1|x-x'|^\alpha|x-x'|^{1-\alpha} \leq c_1|x-x'|^\alpha,$$

так как $x,x' \in (0,1)$, $|x-x'|^{1-\alpha} < 1$, $i=1,2$. Аналогично

$$|v_i^n(x,t) - v_i^n(x,t')| \leq c_1|t-t'| = c_1|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}|t-t'|^{\frac{2-\alpha}{2}} \leq c_1 T^{\frac{2-\alpha}{2}}|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}},$$

так как $t,t' \in (0,T)$, $|t-t'|<T$, $i=1,2$. Обозначая $c_3 = \max\{1, T^{\frac{2-\alpha}{2}}\}$ имеем

$$|v_i^n(x,t) - v_i^n(x',t')| \leq c_1 c_3 d(P,R),\ i=1,2. \tag{14}$$

Снова пользуясь формулой Лагранжа, получим

$$|D_x v_i^n(x,t) - D_x v_i^n(x',t)| = |D_x^2 v_i^n(x'+\theta_i(x-x'))||(x-x')| \leq c_1|x-x'| = c_1|x-x'|^\alpha|x-x'|^{1-\alpha}$$
$$\leq c_1|x-x'|^\alpha,\ i=1,2;\ 0<\theta_i<1.$$

Таким образом имеем

$$|D_x v_i^n(x,t) - D_x v_i^n(x',t)| \leq c_1|x-x'|^\alpha,\ i=1,2. \tag{15}$$

Чтобы получить соответствующую оценку приращения $D_x v_i^n(x,t)$ по переменной t, через $|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}$ воспользуемся неравенством (11)

$$|D_x v_i^n(x,t) - D_x v_i^n(x,t')| \leq c_1|t-t'|^{\frac{1+\alpha}{2}} = c_1|t-t'|^{\frac{1}{2}}|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}} < c_1\sqrt{T}|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}},\ i=1,2,$$

т.е.

$$|D_x v_i^n(x,t) - D_x v_i^n(x,t')| \leq c_1\sqrt{T}|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}},\ i=1,2.$$

Обозначим $c_4 = \max\{1, \sqrt{T}\}$. Тогда из неравенства (15) и последнего неравенства получим

$$|D_x v_i^n(x,t) - D_x v_i^n(x',t')| \leq c_1 c_4 d(P,R).\ i=1,2. \tag{16}$$

Обозначим $c_5 = \max\{c_1, c_1c_3, c_1c_4\} = c_1\max\{1, T^{\frac{2-\alpha}{2}}, \sqrt{T}\}$. Из неравенств (12)-(14), (16) следуют, что последовательности $\{v_i^n(x,t)\}, (i=1,2)$ являются равностепенно непрерывными со всеми производными 1-го и 2-го порядков по x и 1-го порядка по t. Действительно, рассмотрим произвольное $\epsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\epsilon}{c_5}$. Тогда из $d(P,R) \leq \delta$ следует, что

$$|D_t v_i^n(P) - D_t v_i^n(R)| \leq c_5\delta = \epsilon,\ |D_x^2 v_i^n(P) - D_x^2 v_i^n(R)| \leq \epsilon,\ |v_i^n(P) - v_i^n(R)| \leq \epsilon,$$
$$|D_x v_i^n(P) - D_x v_i^n(R)| \leq \epsilon, (i=1,2).$$

Таким образом, последовательности $\{v_i^{(n)}(x,t)\}$, $i=1,2$ компактны в $C^{2,1}(\overline{Q_T})$. Выберем из $\{u^n(t)\}$ подпоследовательность управлений (которую снова обозначим через $u^n(t)$) так, чтобы $v_3^n(t) \to v_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$ и $v_i^n(x,t) \to v_i^0(x,t)$, $i=1,2$ по норме $C^{2,1}(\overline{Q_T})$, при $n \to \infty$. Тогда имеем

$$f(v_2^n) \to f(v_2^0), \int_0^t \int_0^1 v_2^n(x,\tau)dxd\tau \to \int_0^t \int_0^1 v_2^0(x,\tau)dxd\tau,$$
$$|v_1^n f(v_2^n) - v_1^0 f(v_2^0)| \leq f(v_2^n)|v_1^n - v_1^0| + v_1^0|f(v_2^n) - f(v_2^0)| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Последовательность $\{u^n(t)\} \subset U_\partial \subset L_2(0,T)$, поэтому в силу [14], $\{u^n(t)\}$ слабо компактна в $L_2(0,T)$, т.е. из последовательности $\{u^n(t)\}$ можно выбрать подпоследовательность (которую снова обозначим через $u^n(t)$) так чтобы $u^n(t) \to u^0(t)$ слабо в $L_2(0,T)$, при $n \to \infty$. Для этой последовательности $\{u^n(t)\}$ рассмотрим соответствующее решение $\{v_1^n(x,t)\}$, $\{v_2^n(x,t)\}$, $\{v_3^n(t)\}$ системы (1)-(3).

Доказательство принадлежности $u^0(t) \in U_\partial, 0 \le t \le T$ проведем аналогично [1]. Имеем $u^n(t) \le u_0 = const$. Покажем, что $u^0(t) \le u_0$. Обозначим $K = \{t | t \in [0,T], u^0(t) > u_0\}$. Пусть $\chi(t)$ -характеристическая функция множества K. Эта функция измерима и ограничена, т.е. $\chi(t) \in L_2(0,T)$. В силу слабой сходимости последовательности $\{u^n(t)\}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \chi(t)[u^0(t) - u^n(t)]dt = 0.$$

Так как $u^0(t) - u^n(t) > 0$ на K, то $mesK = 0$. Итак, для почти всех $t \in [0,T]$ имеем $u^0(t) \le u_0$. Аналогичные рассуждения проводим и для другого конца отрезка $[0,u_0]$. В итоге имеем $0 \le u^0(t) \le u_0$ для почти всех $t \in [0,T]$. Переопределим $u^0(t)$ на соответствующем множестве меры нуль так, чтобы $0 \le u^0(t) \le u_0$ для всех $t \in [0,T]$.

Далее имеем

$$|\int_0^t (E - v_3^n(s))u^n(s)ds - \int_0^t (E - v_3^0(s))u^0(s)ds| \le |\int_0^t (v_3^0(s) - v_3^n(s))u^n(s)ds|$$

$$+|\int_0^t (E - v_3^0(s))(u^n(s) - u^0(s))ds| \to 0, n \to \infty.$$

Таким образом, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим из (10)

$$v_3^0(t) = v_{30} + \int_0^t [p(\int_0^1 v_2^0(x,s)dx - v_3^0(s)) + u^0(s)(E - v_3^0(s))]ds. \tag{17}$$

В уравнении (17) $v_3^0(t)$-непрерывная функция, а интеграл в правой части -абсолютно непрерывная функция. Поэтому и $v_3^0(t)$ -абсолютно непрерывная функция.

Мы показали, что функции v_1^0, v_2^0, v_3^0, u^0 удовлетворяют системе уравнений (1)-(3). Имеем

$$J_{A,1}(u^n) = \int\limits_0^T v_1^n(1,t)dt + A\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \to \int\limits_0^T v_1^0(1,t)dt + A\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^0(x,t))dxdt$$

$$= m = J_{A,1}(u^0), n \to \infty,$$

$u^0(t)$-измеримое оптимальное управление, $0 \le u^0(t) \le u_0$. В силу работы [13] существует решение

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}), v_3(t) \in C_1[0,T]$$

системы (1)-(3), соответствующее управлению $u^0(t)$. Тогда в силу единственности решения системы (1)-(3), соответствующее управлению $u^0(t)$, имеем

$$v_1(x,t) = v_1^0(x,t), v_2(x,t) = v_2^0(x,t), v_3(t) = v_3^0(t), (x,t) \in \overline{Q_T}.$$

Теорема 1 доказана.

5. Сходимость метода штрафов

Установим взаимосвязи между задачами 1 и 2. Для каждого конечного A в задаче 2 по теореме 1 существует оптимальное управление. Покажем, что при увеличении A решение задачи 2 сходится в определенном смысле к решению задачи 1. Для этого рассмотрим положительную и монотонно возрастающую последовательность чисел $\{A_n\}$ и такую, что $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Минимизируемый функционал в задаче 2 запишем в виде

$$J_{A_n,1}(u) = \int\limits_0^T v_1(1,t)dt + A_n\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt, \tag{18}$$

$n=1,2,....$ Для каждого $A_n<\infty$ обозначим через

$$(v_1^n(x,t),v_2^n(x,t),v_3^n(t),u^n(t))\in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})\times H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})\times C_1[0,T]\times U_\partial$$

оптимальный процесс в задаче 2.

Взаимосвязь между задачами 1 и 2 устанавливается следующим утверждением.

Теорема 2. Пусть существует оптимальный процесс в задаче 1.

Тогда

1.последовательность оптимальных управлений $\{u^n(t)\}$ в задаче 2, при $n\to\infty$ сходится слабо в $L_2(0,T)$ к $u^0(t)$;

2.последовательности $\{v_1^n(x,t)\}$, $\{v_2^n(x,t)\}$ сходятся соответственно к $v_1^0(x,t)$, $v_2^0(x,t)$ по норме $C^{2,1}(\overline{Q_T})$;

3.последовательность $\{v_3^n(t)\}$ сходится к $v_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$ и процесс $\{v_1^0(x,t),v_2^0(x,t),v_3^0(t),\ u^0(t)\}$ будет оптимальным в задаче 1.

Доказательство. Пусть m -минимальное значение функционала $J(u)$ в задаче 1. В силу теоремы 1 для каждого конечного $A_n\in\{A_n\}$ существует оптимальное управление $u^n(t)$ задачи 2 и значение $J_{A_n,1}(u^n)$-конечное число. При этом

$$J_{A_n,1}(u^n)\le m, \tag{19}$$

$n=1,2,....$ Действительно, если бы оказалось, что $J_{A_n,1}(u^n)>m$, то управление $u^n(t)$ не было бы оптимальным для задачи 2, поскольку существует оптимальный процесс в задаче 1, на котором значение функционала (18) окажется равным m.

Пусть $u(t)$ - произвольное допустимое управление, $v_1(x,t),v_2(x,t),v_3(t)$ - соответствующее решение системы (1)-(3). Рассмотрим функционал (18). Отсюда видно, что $J_{A_n,1}(u^n)<J_{A_n,1}(u)$. Если $u=u^{n+1}(t)$ -оптимальное управление для $A=A_{n+1}$, то

$$J_{A_n,1}(u^n)\le\int\limits_0^T v_1^{n+1}(1,t)dt+A_n\int\limits_0^T\int\limits_0^1\Phi_1(v_2^{n+1}(x,t))dxdt=J_{A_n,1}(u^{n+1}).$$

Далее, так как $A_n<A_{n+1}$, то

$$J_{A_n,1}(u^{n+1})\le\int\limits_0^T v_1^{n+1}(1,t)dt+A_{n+1}\int\limits_0^T\int\limits_0^1\Phi_1(v_2^{n+1}(x,t))dxdt=J_{A_{n+1},1}(u^{n+1}).$$

Из последних двух неравенств имеем

$$J_{A_n,1}(u^n)\le J_{A_n,1}(u^{n+1})\le J_{A_{n+1},1}(u^{n+1}). \tag{20}$$

Таким образом, последовательность $\{J_{A_n,1}(u^n)\}$ ограничена сверху числом m и монотонно возрастает. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}J_{A_n,1}(u^n)=m_1, \tag{21}$$

где $m_1\le m$.

Поскольку функции $v_1^n(x,t),v_2^n(x,t),v_3^n(t)$ равномерно ограничены в норме пространства

$$H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})\times H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})\times C_1[0,T],$$

а для функции $u^n(t)$ выполняются неравенства $0\le u^n(t)\le u_0=const,$ для п.в. $t\in[0,T]$, то повторяя элементы доказательства теоремы 1, можно показать, что $u^n(t)\to u^0(t)$, слабо в $L_2(0,T)$, $v_i^n(x,t)\to v_i^0(x,t)$ по норме $C^{2,1}(\overline{Q_T})$, $i=1,2$, $v_3^n(t)\to v_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$ при $n\to\infty$. Поэтому

$$f(v_2^n)\to f(v_2^0),\ \int_0^t\int_0^1 v_2^n(x,\tau)dxd\tau\to\int_0^t\int_0^1 v_2^0(x,\tau)dxd\tau,\ v_1^nf(v_2^n)\to v_1^0f(v_2^0)$$

при $n\to\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^T v_1^n(1,t)dt=\int\limits_0^T v_1^0(1,t)dt.$$

Вернемся к неравенству (19):

$$\int\limits_0^T v_1^n(1,t)dt + A_n \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \le m.$$

Отсюда следует

$$A_n \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \le m.$$

Следовательно

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \le \frac{m}{A_n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Поскольку $\Phi_1(v_2^n(x,t)) \ge 0$ для всех $(x,t) \in \overline{Q_T}$, $n \in N$, то из последнего неравенства следует

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \to 0, \tag{22}$$

при $n \to \infty$. Поскольку $v_2^n(x,t) \to v_2^0(x,t)$ по норме $C^{2,1}(\overline{Q_T})$, то

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \to \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^0(x,t))dxdt \tag{23}$$

при $n \to \infty$. Поэтому из (22)-(23) имеем

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^0(x,t))dxdt = 0. \tag{24}$$

Отсюда, поскольку $\Phi_1(v_2^0(x,t)) \ge 0$, то в силу работы [15] имеем $\Phi_1(v_2^0(x,t)) = 0$ п.в. на $\overline{Q_T}$. Функция $\Phi(v_2^0(x,t))$ непрерывна на $\overline{Q_T}$, поэтому

$$\Phi_1(v_2^0(x,t)) \equiv 0, \tag{25}$$

для $(x,t) \in \overline{Q_T}$.

Если допустить противное, т.е. считать, что существует точка $B(x_0,t_0) \in \overline{Q_T}$, в которой

$$\Phi_1(v_2^0(x_0,t_0)) > 0, \tag{26}$$

то в силу непрерывности $\Phi_1(v_2^0(x,t))$ существует окрестность $O_\epsilon(B)$ точки B, в которой окажется, что $\Phi_1(v_2(x,t)) > 0$. Но тогда получим $\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^0(x,t))dxdt > 0$ т.е. нарушается равенство (24). Следовательно, предположение (26) неверно, поэтому выполняется тождество (25). Но это означает, что

$$v_2^0(x,t) \le v_2^*$$

для всех $(x,t) \in \overline{Q_T}$ т.е. выполняется условие (7).

Таким образом, на рассматриваемой последовательности оптимальных управлений $\{u^n(t)\}$ предел соответствующей последовательности решений $\{v_1^n, v_2^n, v_3^n\}$ системы (1)-(3) удовлетворяет неравенству (7), при этом

$$\lim_{n\to\infty} J_{A_n,1}(u^n) = \lim_{n\to\infty} (J(u^n) + A_n \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt) = m_1, \tag{27}$$

где $J_{A_n,1}(u^n) \to m_1$, возрастая. Поэтому

$$J_{A_n,1}(u^n) = J(u^n) + A_n \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \leq m_1. \tag{28}$$

Лемма 1. Если в условиях задачи 2 числам A_n и A_{n+1} соответствуют оптимальные управления $u^n(t)$, $u^{n+1}(t) \in U_\partial$, причем $A_n < A_{n+1}$, то $J(u^n) \leq J(u^{n+1})$.

Утверждение леммы 1 непосредственно следует из свойства 1, приведенного в конце параграфа.

Из леммы 1 следует, что последовательность $\{J(u^n)\}$ является возрастающей и ограниченной сверху числом m. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} J(u^n) = m_2,$$

где $m_2 \leq m$. Если считать, что $m_2 < m$, то имеем противоречие с первоначальным допущением, что

$$\min_{u\in U_\partial} J(u) = m,$$

поскольку

$$\lim_{n\to\infty} v_2^n(x,t) = v_2^0(x,t) \leq v_2^*.$$

Следовательно, здесь будет случай равенства $m_2 = m$.

Учитывая неравенство (28), имеем $m_2 \leq m_1$. Упорядочивая все числа m_1, m_2, m в виде неравенств, имеем $m = m_2 \leq m_1 \leq m$. Следовательно $m = m_1 = m_2$.

Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to\infty}[A_n \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt] = \lim_{n\to\infty}[J_{A_n,1}(u^n) - J(u^n)] = 0$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}[A_n \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt)] = 0.$$

Факт принадлежности $u^0(t) \in U_\partial$ доказывается, как и в случае теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Приведем некоторые свойства слагаемых функционала (8). Для этого введем обозначение $\gamma = \frac{1}{A}$, при $A > 0$. Тогда $\gamma > 0$ и $\gamma \to 0$ при $A \to \infty$. Теперь функционал (8), с учетом обозначения функционала (5), примет вид

$$J_{\frac{1}{\gamma},1}(u) = J(u) + \frac{1}{\gamma} \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt,$$

или отсюда

$$\gamma J_{\frac{1}{\gamma},1}(u) = \gamma J(u) + \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt. \tag{29}$$

Обозначим $I(u,\gamma) = \gamma J_{\frac{1}{\gamma},1}(u)$. Теперь функционал (29) запишется в виде

$$I(u,\gamma) = \gamma J(u) + \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt.$$

Рассмотрим числа A_1, A_2, удовлетворяющие неравенствам $0 < A_1 < A_2$. Тогда здесь имеем $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$, где $\gamma_i = \frac{1}{A_i}, i = 1,2$. Пусть оптимальные процессы v_1^i, v_2^i, v_3^i, u^i соответствуют числам $A_i, i = 1,2$.

Свойство 1. Если $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$, то $J(u^1) \leq J(u^2)$.

Доказательство. Имеют место следующие неравенства:

$$\gamma_1 J(u^1)+\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt \le \gamma_1 J(u^2)+\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt,$$

$$\gamma_2 J(u^2)+\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt \le \gamma_2 J(u^1)+\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt. \qquad (30)$$

Складывая последние два неравенства, получим $(\gamma_1-\gamma_2)(J(u^1)-J(u^2)) \le 0$. Следовательно $J(u^1)\le J(u^2)$. Свойство 1 доказано.

Таким образом, из свойства 1 следует, что $J(u^1)\le J(u^2)$ при $A_1<A_2$.

Свойство 2. Если $\gamma_1>\gamma_2>0$, то $\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt \ge \int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt.$

Доказательство. Неравенство (30) запишем в следующем виде:

$$\gamma_2[J(u^2)-J(u^1)] \le \int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt.$$

Отсюда в силу свойства 1 имеем

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt \ge 0.$$

Свойство 2 доказано.

Из свойства 2 следует, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt \le \int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt$$

при $A_1<A_2$.

Список литературы

1 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. -Москва: Наука, 1961.

2 Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений //Журн. вычисл. математики и мат. физики.1965. Т.5, №3. с.395–453.

3 Фиако А., Мак - Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. -Москва: Мир, 1972.

4 Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -Москва: Наука, 1980.

5 Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. -Новосибирск: Наука, 1981.

6 Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. -Москва: Мир, 1972.

7 Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. -Москва: Наука, 1981.

8 Мусабеков К.С. Метод штрафных функций в одной задаче оптимального управления с фазовым ограничением //Вестник Новосибирского гос ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. -2013. -Т.13. -Вып. 2. -С. 86-98.

9 Georgakis C., Aris R., Amundson N.R. Studies in the control of Tubular Reactors //Chemical Engineering Sience. -1977. -Vol. 32. №11. -P. 1359–1387.

10 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. -Москва: Наука, 1967.

11 Белоносов В.С., Зеленяк Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. -Новосибирск: НГУ, 1975.

12 Мусабеков К.С. Теоремы существования решения в одной задаче оптимального управления химическим реактором // Управляемые процессы и оптимизация. Управляемые системы. Новосибирск. -1982. -Вып. 22. -С. 30–50.

13 Мусабеков К.С. Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением //Вестник Новосибирского гос ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. -2010. -Т.10. -Вып. 2. -С. 54–67.
14 Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. -Москва: Мир, 1979.
15 Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. -Москва: Наука, 1974.

К.С. Мусабеков

Ш.Уәлиханов атындағы Көкшетау университеті, Абай көш., 76, Көкшетау, 020000, Қазақстан

Химиялық реактордағы тиімді басқару есебіндегі айыптық функциялар әдісі

Аннотация: Жұмыста химиялық технологияда қолданатын адиабатты емес құбырлы реактордағы процесті тиімді басқару мәселесі қарастырылған. Реакторға бірінші ретті экзотермиялық реакцияға түсетін газ беріледі. Реактордың сыртқы қабығы - қаптамасы бар. Қаптама арқылы реакторды салқындататын сұйықтық ағады. Өз кезегінде реактор қаптамадағы температураны өзгертеді.

Басқару функциясы ретінде қаптамаға берілген салқындатқыш сұйықтықтың жылдамдығы алынады. Қаптамаға берілетін сұйықтықтың температурасы тұрақты. Сондықтан басқару функциясы тек уақытқа тәуелді.

Реактор температурасының мәндері, әрекеттесуші қоспаның концентрациясы реактордың ұзақтығы мен реакция уақыты бойынша өзгереді. Реактордың математикалық моделі дербес туындылардағы дифференциялдық теңдеулерден және сәйкес шекаралық шарттармен, бастапқы шарттардан тұрады. Бұл жағдайда реактордағы температураға және басқару функциясына тиісті шектеулер қойылады. Реактордағы температураны шектеу мақсаттық функцияға қосылғыш ретінде сызықтық кесік түрінің айыптық функциясын енгізу арқылы есепке алынады. Математикалық бағдарламалаудағы айыппұлдық функциясының бұл түрі әдетте шектеудің дәл орындалуына әкеледі. Басқару функциясына шектеулер теңсіздіктер түрінде беріледі.

Мақсатты функция ретінде реактордың шығысындағы белгілі бір уақыт аралығында әрекеттеспеген заттардың жалпы мөлшері алынады. Жоғарыда айтылғандай, мақсатты функцияға айыптық функциясы қосылады. Басқарудың мақсаты - осы функцияны азайту.

Бұл жұмыста мұндай есепте тиімді басқарудың болуы туралы теорема дәлелденген. Дәлелдеу барысында гельдерлік нормадағы дербес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің шектілігі қолданылады. Бұл үздіксіз функциялар жиынының Арцельдің компактылық критерийін қолдануға мүмкіндік береді. Дәлелдеу барысында сонымен қатар $L_2(0,T)$ кеңістігіндегі басқару функциялар жиынның әлсіз компактылығы пайдаланылады. Айыппұл коэффициентінің шектеусіз өсуіне байланысты айыптық функциясының нөлге ұмтылуы дәлелденді, яғни реактордағы температураның күйлік шектеулігі орындалатындығы көрсетілген. Келесіде қажет болатын, мақсаттық функция қосылғышының кейбір қасиеттері келтірілген.

Түйін сөздер: химиялық реактор, математикалық модель, тиімді басқару, Понтрягиннің максимум принципі, тиімді басқарудың бар болуы, айыптық функция.

K.S. Mussabekov

Ualikhanov University, 76,Abay str., Kokshetau, 020000, Kazakhstan

Method of Penalty Functions in One Problem of Optimal Control of a Process In a Chemical Reactor

Abstract: The paper considered the problem of optimal control of a process in a nonadiabatic tubular reactor used in chemical technology. Gas feeds the reactor that undergoes a first order exothermic reaction. The reactor has an outer jacket - casing. Through the casing flows reactor coolant liquid. In turn, the reactor changes the temperature in the casing. As a control function, the coolant supply rate to the casing is taken. The liquid supplied to the casing has a constant temperature. So the control function depends only on time. The values of the reactor temperature, the concentration of the reacting mixture vary along the length of the reactor and the reaction time. The mathematical model of the reactor consists of differential equations in partial derivatives and the corresponding boundary, initial conditions. In this case, appropriate restrictions are imposed on the temperature in the reactor and on the control function. The restriction on the temperature in the reactor is taken into account by introducing in the objective functional (as a term) a penalty function of the type of a linear cutoff. This type of penalty function in mathematical programming is usually driven to meet the constraints exactly. Constraints on the control function are given in the form of inequalities. As the target functional, the total amount of unreacted substance at the reactor outlet for a fixed period of time is taken. As noted above, a penalty function is added to the objective functional. The aim of the control is to minimize this functional.

The paper proves a theorem on the existence of an optimal control in such a problem. In the course of the proof, the boundedness of solutions of the system of partial differential equations in the H?lder norms is used. This allows us to use Arzel's criterion on the compactness of a set of continuous functions. The proof also uses the weak compactness sets of control functions in the space $L_2(0,T)$. With an unlimited increase in the penalty coefficient, the convergence to zero of the penalty function is proved, i.e. the feasibility, in the limit, of the phase limitation on the temperature in the reactor is shown. We also obtain some properties of the terms of the objective functional, which will be necessary in what follows.

Keywords: mathematical model, chemical reactor, optimal control, Potryagin's maximum principle, the existence of optimal control, penalty function.

References

1 Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov [Mathematical theory of optimal processes]. (Science, Moscow, 1961).

2 Dubovitsky A.Ya., Milyutin A.A. Zadachi na ekstremum pri nalichii ogranichenij [Extremum problems in the presence of restrictions], Journal of Comput. mathematics and mathematical Physics. 1965. Vol. 5. №3. P. 395-453.
3 Fiaco A., Mac-Cormick G. Nelinejnoe programmirovanie. Metody posledovatel'noj bezuslovnoj minimizacii [Nonlinear programming. Methods of sequential unconditional minimization]. (Mir, Moscow, 1972).
4 Vasiliev F.P. CHislennye metody resheniya ekstremal'nyh zadach [Numerical methods for solving extremal problems]. (Science, Moscow, 1980).
5 Grossman K., Kaplan A.A. Nelinejnoe programmirovanie na osnove bezuslovnoj minimizacii [Nonlinear programming based on unconstrained minimization]. (Nauka, Novosibirsk, 1981).
6 Lyons J.L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi [Optimal control of systems described by partial differential equations]. (Mir, Moscow, 1972).
7 Vasiliev F.P. Metody resheniya ekstremal'nyh zadach [Methods for solving extremal problems]. (Science, Moscow, 1981).
8 Musabekov K.S. Metod shtrafnyh funkcij v odnoj zadache optimal'nogo upravleniya s fazovym ogranicheniem [The method of penalty functions in one optimal control problem with a phase constraint], Bulletin of the Novosibirsk State University. Series: Mathematics, mechanics, computer science. 2013. T.13. Vol. 2. P. 86-98.
9 Georgakis C., Aris R., Amundson N.R. Studies in the control of Tubular Reactors, Chemical Engineering Sience. 1977. Vol. 32. №11. P. 1359-1387.
10 Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linejnye I kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. (Science, Moskov, 1967).
11 Belonosov V.S., Zelenyak T.I. Nelokal'nye problemy v teorii kvazilinejnyh parabolicheskih uravnenij [Nonlocal problems in the theory of quasilinear parabolic equations]. (NSU, Novosibirsk, 1975).
12 Musabekov K.S. Teoremy sushchestvovaniya resheniya v odnoj zadache optimal'nogo upravleniya himicheskim reaktorom [Existence theorems for a solution in one problem of optimal control of a chemical reactor], Controlled processes and optimization. Managed systems. Novosibirsk. 1982. Vol. 22. P. 30-50.
13 Musabekov K.S. Sushchestvovanie optimal'nogo upravleniya v odnoj regulyarizovannoj zadache s fazovym ogranicheniem [The existence of optimal control in one regularized problem with a phase constraint], Bulletin of the Novosibirsk State University. Series: Mathematics, mechanics, computer science. 2010. Vol. 10. №2. P. 54–67.
14 Riess F., Szekefalvi-Nagy B. Lectures on functional analysis [Lectures on functional analysis]. (Mir, Moscow, 1979).
15 Nathanson I.P. Theory of functions of a real variable [Theory of functions of a real variable]. (Science, Moscow, 1974).

Авторлар туралы мәліметтер:

Мусабеков Калимулла Султанович – к.ф.-м.н., ассоциированный профессор кафедры Физики, математики и информатики, НАО "Кокшетауский университет имени Ш. Уалиханова", ул. Абая, д. 76, Кокшетау, Казахстан.

Mussabekov Kalimulla – cand. of phys.-math, sci., assoc. prof., Ualikhanov University, 76, Abay str., Kokshetau, 020000, Kazakhstan

Поступила в редакцию 12.09.2022

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2023. 2(143)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 34-б. Басуға қол қойылды: 30.09.2022.
Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: http://bulmathmc.enu.kz/
Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген: http://bulmathmc.enu.kz/

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды