

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№4(141)/2022

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2022
Astana, 2022

БАС РЕДАКТОРЫ

Темірғалиев Н., ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Жұбанышева А.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алексеева Л.А.

ф.-м.ғ.д., проф., ҚР БҰҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Алимхан Қилан

PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Балтаева У.

ф.-м.ғ.д., Мамун Хорезм академиясы, Хорезм, Өзбекстан

Бекенов М.И.

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Гогинава У.

ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

ф.-м.ғ.д., проф., Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет) Долгопрудный, Ресей

Зунг Динь

ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам ұлттық университеті, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

ф.-м.ғ.д., проф., Тула мемлекеттік университеті, Тула, Ресей

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ

Кобельков Г.М.

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Курина Г.А.

ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей

Марков В.В.

ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей

Мейрманов А.М.

ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Омарбекова А.С.

т.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Астана, Қазақстан

Смелянский Р.Л.

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Умирбаев У.У.

ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ

Холщевникова Н.Н.

ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.

Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.

№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,

тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

EDITOR-IN-CHIEF

Nurlan Temirgaliyev

Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Aksaule Zhubanysheva

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Nurlan Nauryzbayev

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Editorial board:

Evgueni Abakumov

*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee
Paris, France*

Lyudmila Alexeyeva

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling Ministry of Education
and Science Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

Alexander Iosevich

PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA

Alimhan Keylan

PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Umida Baltaeva

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Khorezm Mamun Academy, Khorezm,
Uzbekistan*

Makhsut Bekenov

*Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof.
L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan*

Ushangi Goginava

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.
Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

Boris Golubov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and
Technology (State University)
Dolgoprudnyi, Russia*

Dũng Dinh

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute,
Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*

Valerii Ivanov

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, Russia

Georgii Kobel'kov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Galina Kurina

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh,
Russia*

Vladimir Markov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical
Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Anvarbek Meirmanov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Com-
munications and Informatics, Moscow, Russia*

Asel Omarbekova

Cand. of Tech. Sci., L.N. Gumilyov ENU, Astana, Kazakhstan

Ruslan Smelyansky

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Ualbay Umirbaev

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.,
Wayne State University, Detroit, USA*

Natalya Kholshchevnikova

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State
Technological University "Stankin", Moscow, Russia*

Hans-Juergen Schmeisser

*Dr. habil., Prof., Friedrich-Shiller University
Jena, Germany*

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Astana, Kazakhstan, 010008.

Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

© L.N. Gumilyov Eurasian National University

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Темиргалиев Н., д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Зам. главного редактора

Жубанышева А.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Зам. главного редактора

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алексеева Л.А.

д.ф.-м.н., проф., Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Алимхан Килян

PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Балтаева У.

д.ф.-м.н., Хорезмская академия Маъмуна, Хорезм, Узбекистан

Гогинава У.

д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

д.ф.-м.н., проф., Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Зунг Динь

д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, Тула, Россия

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США

Кобельков Г.М.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Курина Г.А.

д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Марков В.В.

д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Мейрманов А.М.

д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Омарбекова А.С.

к.т.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

Смелянский Р.Л.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Умирбаев У.У.

д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США

Холщевникова Н.Н.

д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 402

Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). *E-mail:* vest_math@enu.kz

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.

Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, №4(141)/2022

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer science. Mechanics series, №4(141)/2022

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, №4(141)/2022

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

- Есенғалиев А.Г., Муканов А.Б.* Ковариациялық матрица болжамымен жоғары дәлдіктегі қозғалыс болжамы
Yessengaliyev A.G., Mukanov A.B. High-precision satellite orbit propagation with estimation of the covariance matrix
Есенғалиев А.Г., Муканов А.Б. Высокоточный прогноз движения КА с прогнозом ковариационной матрицы 6
- Курманова Д.Е., Джайчибеков Н.Ж., Волков К.Н., Карпенко А.Г.* Тұтқырлықтың температураға тәуелділігін ескере отырып, жылу тасымалдағыштардың гидродинамикасының сандық есебі
Kurmanova D.Y., Jaichibekov N.Dzh., Volkov K.N., Karpenko A.G. Numerical calculation of the hydrodynamics of heat carriers, taking into account the dependence of viscosity on temperature
Курманова Д.Е., Джайчибеков Н.Ж., Волков К.Н., Карпенко А.Г. 28
Численный расчет гидродинамики теплоносителей с учетом зависимости вязкости от температуры
- Темірғалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Жұбанышева А.Ж.* Гильберттік Соболев кеңістіктерінің икемді шкаласындағы Радон түрлендіруінің Планшерель формуласы
Temirgaliyev N., Taugynbayeva G.E., Zhubanysheva A.Zh. Plancherel's formula for the Radon transform in the flexible scale of Sobolev Hilbert spaces
Темірғалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Жұбанышева А.Ж. Формула Планшереля 42
для преобразования Радона в гибкой шкале гильбертовых пространств Соболева

GRNTI: 30.15.31; 27.41.19; 89.21.45

A.G. Yessengaliyev¹, A.B. Mukanov²

¹ *Ghalam LLP, Turan avenue, 89, Astana, Kazakhstan*

² *Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, Kazhymukan str. 11, Astana, Kazakhstan*

(E-mail: arman.gibatovich@gmail.com, mukanov.askhat@gmail.com)

High-precision satellite orbit propagation with estimation of the covariance matrix¹

Abstract: In this paper is proposed to use a model of high-precision propagation of the satellite position, in which the disturbing accelerations are determined, and the obtained numerical results are presented.

All disturbing forces acting on the satellite are modeled, the up-to-date data of the parameters of the atmospheric drag model, as well as the parameters IERS, EOP are used. The developed software for satellite orbit propagation is applicable to support the flight control of the satellite, while ensuring the accuracy of the level of 10-15 meters along the position vector of the satellite over a weekly time interval.

With a given model of satellite motion and known statistical characteristics of orbit determination errors, the covariance matrix is predicted along with the state vector, which has found application in many applied tasks for support of Flight dynamics activities.

Keywords: Satellite, Orbit Propagator, Orbit Determination, Low Earth Orbit, orbit estimation, perturbing forces, numerical integration, Runge-Kutta methods, Covariance Matrix.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/4.1>

2000 Mathematics Subject Classification: 65L05, 70F15

1. Introduction. The main purpose of this work is to build a model for high-precision propagation of the satellite position, taking into account the main disturbing accelerations acting on a satellite in low-Earth orbit (LEO). For Satellite missions with a Payload in LEO, a high accuracy of propagation the position in the satellite orbit is required to solve most of the tasks of ballistic and navigation support of the orbit control flight to fulfill the target mission of the satellite.

The state vector of the satellite can be represented as a six-dimensional vector consisting of a position vector and a velocity vector of the satellite, or as a more extended vector, including in addition the specified coefficient of reflectivity C_R and atmospheric drag coefficient C_D .

For a satellite mission in LEO, the maximum value of the norm of the discrepancy vector between the propagated and the true (reference) vector of the satellite state over one week interval characterizes the accuracy of propagation the position in the satellite orbit. Under the high-precision propagation of the position in the orbit of the satellite, the value of 100 m is assumed along the position vector and along the velocity vector of 0.02 m/s.

¹This research is funded by the Aerospace Committee of the Ministry of Digital Development, Innovations and Aerospace Industry of the Republic of Kazakhstan (№ BR109018/0221/PTF).

Methods of propagation the position of the satellite are widely known, which uses semi-analytical and analytical methods (for example, SGP4, Brower-Lyddane theory, PPT3), as well as more accurate ones using numerical methods.

There are many products on the world market that solve similar problems in propagation the orbit of a satellite. An overview of large products, which include a module for propagation the position of the satellite in orbit using numerical integration of the equations of motion, is presented in Table 1.

TABLE 1 – Software that includes a module for satellite orbit propagation

Organization	Software	Integration model or method
Analytical Graphics Inc.	STK	Runga Kutta, Gauss-Jackson
NASA/JPL(1990)	GIPSY/OASIS II Real-Time GIPSY	High-order Adams predictor-corrector
NASA/GSFC(1975)	GTDS	4th-order Runga Kutta, Cowell Adams predictor-corrector
NRL (1996)	OCEANS	Cowell 4th-order Runga Kutta, 9th order Predictor-corrector
TRACE	Aerospace Corp. (Air Force)	10th-order Gauss-Jackson w/ regularized time option
NASA and other	GMAT ¹	Runge-Kutta ,Runge-Kutta89, Runge-Kutta-Fehlberg ⁵⁶

Also among the large and developing products are the following: FreeFlyer² (ai-solutions), Goddard Trajectory Determination System (GTDS), Java Astrodynamics Toolkit(JAT)³, focusSuite (GMV)⁴, Quartz(Airbus)⁵, ORSA⁶. However, most of them represent commercial products with a high price, some with limited functionality, and an annual paid license is required for support. At the same time, most of the products distributed for free, built on simplified models, give errors of several hundred meters or more at an interval of 3 days or more.

The OPT software developed by us for high-precision propagation of the satellite orbit can be used for the mission of domestic remote sensing satellite for use in routine operation of the satellite, while reducing the need to purchase expensive foreign software. The developed OPT software has a number of functional features and advantages:

- Portability: The design and technology stack guarantees the portability of the product to various operating systems and simplifies the deployment of the product;
- Modularity and extensibility: The software is designed as modular and extensible;
- Adaptability: applicable for satellite missions in low Earth orbit, as well as for other types of orbits;
- High accuracy of propagation the position of the satellite in orbit;
- Multithreading;
- Rich graphical user interface.

Section 2 describes numerical integration methods and describes a dynamic model of disturbing forces. The main method that reduces the error of calculations is the method of numerical integration of differential equations describing the motion of the satellite. We consider the Runge-Kutta method with the Dormand-Prince modification (DOPRI 8(7)) [1]. In section

¹General Mission Analysis Tool, Software Package, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, 2007, URL: <http://gmat.gsfc.nasa.gov>

²FreeFlyer, a.i. solutions Inc. FreeFlyer. URL: <https://ai-solutions.com/freeflyer/>.

³Java Astrodynamics Toolkit

⁴focusSuite (GMV), <https://www.gmv.com/en/products/space/focussuite>

⁵Quartz(Airbus Defence and Space flight dynamics software), www.airbus.com

⁶Orbit Reconstruction, Simulation and Analysis. Pasquale Tricarico. ORSA. <http://orsa.sourceforge.net/>

3, a brief description of the software developed for high-precision propagation of the satellite position is given, the modeling input data with which calculations were performed, and the results of calculations are given. Section 4 provides conclusions based on the results of calculations.

2. Mathematical formulation of the problem

2.1. Dynamic model

The propagation of the satellite state vector in orbit is based on a dynamic model of forces, including the Earth's gravity, polar and ocean tides, lunar-solar disturbances, atmospheric drag and solar radiation pressure, as well as relativistic effects.

Some perturbed accelerations are represented using precise analytical (semi-analytical) formulas or using numerical methods.

A dynamic model for propagation satellite motion is described by a system of the second-order ODEs (Ordinary differential equations) that is solved numerically with the method of integrating the Runge-Kutta with the Dormand-Prince modification. In this case, the components of the velocity vector and the components of the acceleration vector of perturbing forces are contained on the right-hand side of the system of equations.

It is assumed that the vectors $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ determining the position and velocity of the satellite, are set in an Earth Centered Inertial coordinate system (ECI J2000 frame). The equations of motion of the satellite have the form:

$$f(x, t) = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{a} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{a}_{Earth} + \vec{a}_{asp} + \vec{a}_{tide} + \vec{a}_{3Bodies} + \vec{a}_{drag} + \vec{a}_{PNeff} + \vec{a}_{other}, \quad (2)$$

where $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – acceleration equal to the sum of all accelerations [2, p. 525] due to the action of disturbing forces on the satellite, and the terms from the right part describe disturbances caused by the gravitational field of the Earth, solid and ocean tides, disturbances of the Sun and Moon, solar radiation pressure, atmospheric drag effects, Post-Newtonian corrections. The remaining shortcomings of the force models are compensated by empirical accelerations, which are corrected together with other parameters on orbit determination process.

Earth Gravity Models. It is convenient to determine the potential of the Earth's gravitational field in a geocentric equatorial coordinate system rotating with the Earth. The potential of the Earth's gravitational field is expressed in the form of expansion by spherical harmonic functions in a geocentric Earth-fixed reference frame [3]:

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{\mu}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) P_{n,m}(\sin \varphi) \right) \quad (3)$$

where μ – Gravitational Parameter of Earth; $\mu = G \cdot M = 398,6005 \cdot 10^{12} \text{ м}^3/\text{с}^2$;

G – the universal gravitational constant of the Earth;

M – Earth mass;

r – the distance from the center of mass of the Earth to the point in space where the potential is calculated;

R_{\oplus} – the average radius of the Earth;

φ, λ – geocentric coordinates of the satellite (latitude, longitude of a spacecraft mass point);

$C_{n,m}, S_{n,m}$ – the gravitational coefficients of sectorial harmonics at $n = m$ and tesseral harmonics at $n \neq m$;

$P_{n,m}(\sin \varphi)$ – the associated Legendre functions of degree n and order m , which are calculated by recurrence relations.

Imagine U in the form: $U = U_0 + U_1$, where

$$U_0 = \frac{\mu}{r},$$

$$U_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n u_{nm}$$

$$u_{nm} = \frac{\mu}{r} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) P_{n,m}(\sin \varphi).$$

The components of acceleration due to a nonspherical central body are partial derivatives of the geopotential U in geocentric Cartesian coordinates x, y, z :

$$(\vec{a}_{Earth})'_x = -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial x},$$

$$(\vec{a}_{Earth})'_y = -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial y},$$

$$(\vec{a}_{Earth})'_z = -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{\partial U_1}{\partial z},$$

To describe the Earth's gravitational field, we use the models *EarthGravityModel96(EGM96)* and *EarthGravityModel2008(EGM2008)* [4]. The software implements models of the earth's gravitational field *EGM96/EGM2008* in the form of expansion in a series of spherical functions, providing accounting for the full number of harmonics up to 71 degrees inclusive with the possibility of selective accounting of harmonics. But it is possible to use the maximum degree and order of 2190x2190, but at the same time a significant decrease in performance (long computing time) does not pay off with a significant improvement in accuracy compared to non-simulated perturbations.

Rotations corresponding to Precession, Nutation and Pole movement of Earth's rotation axis are taken into account on coordinate transformations between Celestial to Terrestrial reference frames.

Solid and ocean tides. The tides of the Earth (solid and oceanic) are given by the k_{20} , model considered in [5].

Perturbations from tidal deformations of the central body make a noticeable contribution to the composition of perturbing accelerations.

The gravitational influence of the Sun, Moon and large planets causes deformations of the Earth, as a result of which its gravitational field changes. The simplest model for representing the potential of the forces acting on the satellite due to tidal deformations of the Earth is the Love model [6] or the model of solid tides. More accurate models take into account the influence of tidal deformations occurring in the ocean and in the Earth's atmosphere. Then the influence of tides can be modeled through corrections to the coefficients of the Earth's geopotential S_{nm} , C_{nm} .

Solar radiation pressure. The disturbance due to a solar radiation is given by the formula [2, p. 574]:

$$\vec{a}_{srp} = -\rho_{SR} \frac{c_R A_{\odot}}{m} \frac{\vec{r}_{sat-Sun}}{|\vec{r}_{sat-Sun}|} \quad (4)$$

where

- ρ_{SR} – is the initial solar radiation, depending on the season and the intensity of solar activity;
- $\rho_{SR} = \frac{P_0}{C}$, where P_0 – is the power of solar radiation acting on 1 cm of the Earth's surface (1358–1373 W/m²);
- the coefficient of reflectivity C_R determines the reflective and absorbing characteristics of the satellite body material;

- A_{\odot} – the cross-sectional area of the satellite perpendicular to the direction of solar radiation (depends on the mode of operation of the satellite, constantly changes depending on the configuration of the satellite);
- $\vec{r}_{sat-Sun}$ - vector in the direction from the satellite to the Sun;
- m is the satellite's mass.

Lunar-solar disturbances. In the inertial coordinate system associated with the Earth, the acceleration of the satellite caused by the attraction of a body P of point mass M is expressed as follows [7]:

$$\vec{a}_{3Bodies} = \ddot{\vec{r}} - GM \left(\frac{\vec{b} - \vec{r}}{|\vec{b} - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^3} \right) \quad (5)$$

where r and b – are the geocentric coordinates of the satellite and the body P .

To calculate the positions and velocities of the Sun, Moon and major planets, we use high-precision ephemerides *DE440* and *DE441* distributed by NASA's JPL Laboratory. These ephemerides are obtained by numerical methods and give coordinates in the form of Chebyshev polynomials in a rectangular barycentric coordinate system with the Earth's equator and equinox, referring to the epoch *J2000*.

Atmospheric Drag. Among the forces of non-gravitational nature, aerodynamic forces acting by the influence of the Earth's atmosphere have the greatest impact on the movement of LEO satellites (i.e. satellites moving at altitudes from 150 to 1500 km). The effect of these forces is mainly expressed in the resistance to the movement of the satellite, directed opposite to its relative velocity [2, p. 551]:

$$\vec{a}_{drag} = \frac{1}{2} \rho \frac{C_D A}{m} v_{rel}^2 \frac{\vec{v}_{rel}}{|\vec{v}_{rel}|} \quad (6)$$

where ρ – the density of the atmosphere, which depends on the selected atmospheric drag model, the composition of the atmosphere, the possibility of propagation, as well as on the solar activity index $F_{10.7}$ and the geomagnetic activity indices K_p, a_p ;

C_D – aerodynamic drag coefficient;

\vec{v}_{rel} – relative velocity of the satellite to the rotating atmosphere;

A – area of the satellite.

For the air density function, the approximate expression is valid:

$$\rho = \rho(h) = \rho_0 e^{-h/H},$$

where h is the height at which the density is measured, H is a constant (height scale), ρ_0 – is the density value at the starting point.

The ballistic coefficient $BC = C_D A / 2m$ for the LEO case is usually estimated as part of the extended state vector, since this is one of the main sources of errors.

Time on coordinate systems conversions. Service IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) is responsible for monitoring the Earth orientation parameters, for maintaining global time and reference frame standards, including time corrections. The Earth Orientation Parameters (EOP) are the parameters provide the rotational part of the transformation between the current releases of the International Terrestrial Reference Frame and the (ITRF) International Celestial Reference Frame (ICRF) as a function of time. In our model, we periodically update information about time corrections and about the Earth's orientation parameters from the IERS bulletins ⁷: these are the parameters UT1-TAI, UTC-TAI, GPS-UTC, UT1-UTC [sec]; the coordinates of the pole offset x ["], y ["].

2.2 Numerical integration of the ODE describing the satellite's motion.

The efficiency and accuracy of calculations are provided by high-precision numerical methods. As an indicator of the effectiveness of numerical integration methods in propagation the position of the satellite in orbit, it is considered to achieve a given level of accuracy when integrating with

⁷International Earth Rotation and Reference Systems Service(IERS Conventions), <https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/Bulletins/bulletins.html>

less calculation time, which is equivalent to the number of calls to the right side of the system of ODE(Ordinary differential equations), containing accelerations from all considered disturbing forces acting on the satellite.

To determine the parameters of the satellite motion at time t , it is necessary to solve a system of differential equations (1) with the initial conditions set at time t_0 : $(\vec{r}_0, \vec{v}_0) = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)|_{t_0}$.

Several types of ODE's numerical integration, describing the motion of the satellite, were considered, including nested Runge-Kutta methods and their modifications. Among the modern methods for solving non-rigid systems of ODE, the best results are obtained by the Dormand-Prince method 8(7) with adaptive step with error control, which was chosen for integrating the system of equations, describing the motion of the satellite(1).

Runge-Kutta methods [8] for solving the differential equation:

$$y' = f(x, y(x)) \tag{7}$$

with an initial condition

$$y(x_0) = y_0 \tag{8}$$

are given by the following calculation formulas of approximate values of the solution $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ in the $x_{n+1} = x_n + h_n$:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s \alpha_i k_i \tag{9}$$

where

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n) \tag{10}$$

$$k_i = h_n f \left(x_n + c_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right), \quad i = 2, 3, \dots, s, \tag{11}$$

s – the number of stages of the Runge-Kutta method and

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad i = 2, 3, \dots, s. \tag{12}$$

In practice, nested Runge-Kutta formulas are often used, in which, together with formulas (9)-(12), the error estimator formula is used:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s \hat{\alpha}_i k_i, \tag{13}$$

where is the new approximate value of $y(x_{n+1})$ calculated with a new set of weight multipliers $\hat{\alpha}_i, i = 1, 2, \dots, s$.

The approximation orders of the methods given by formulas (9) and (13), as a rule, differ. For such Runge-Kutta methods, the notation RK p(q) is used, where p is the order of approximation of formula (8). q is the order of approximation of formula (13). In [1], Dormand and Prince proposed a modification of the Runge-Kutta method RK8(7) (now designated as DOPRI8(7)). They considered a 13-stage Runge-Kutta method of orders 8(7). To reduce the number of equations, the following additional conditions were proposed (reduced system).

$$\sum_{i=1}^{13} \hat{\alpha}_i a_{ij} = \hat{\alpha}_j (1 - c_j), \quad j = 1, \dots, 13, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{12} \alpha_i a_{ij} = \alpha_j (1 - c_j), \quad j = 1, \dots, 12, \tag{15}$$

$$a_{i2} = 0, \quad i = 4, \dots, 13, \quad a_{i3} = 0, \quad i = 6, \dots, 13, \tag{16}$$

$$\hat{\alpha}_i = \alpha_i = 0, \quad i = 2, \dots, 5, \tag{17}$$

$$\sum_{j=1}^{12} a_{ij} c_j^k = \frac{c_i^{k+1}}{k+1}, \quad k = 1, 2; \quad i = k + 2, \dots, 13, \quad k = 3; \quad i = 6, \dots, 13 \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{13} \hat{\alpha}_i (1 - c_i) a_{ij} = 0, \quad j = 4, 5, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{13} \hat{\alpha}_i c_i (1 - c_i) a_{ij} = 0, \quad j = 4, 5, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{13} \sum_{j=1}^{12} \hat{\alpha}_i (1 - c_i) a_{ij} a_{jk} = 0, \quad k = 4, 5, \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{13} (\alpha_i - \hat{\alpha}_i) (1 - c_i) a_{ij} = 0, \quad j = 4, 5, \quad (22)$$

This model has 10 free unknowns: $c_2, c_3, c_6, c_7, c_8, c_{10}, c_{11}, \hat{\alpha}_{13}, \alpha_{12}, a_{84}$. We choose the values of these free unknowns different from each other and at least one of the unknowns $\hat{\alpha}_{13}, \alpha_{12}$ different from zero. The remaining unknowns are found by solving the system (14)-(22). Ratios (14)-(22) for coefficients $\alpha_i, \hat{\alpha}_i, i = 1, \dots, 13, c_j, j = 2, \dots, 13, a_{ij}, j = 1, \dots, i - 1, i = 2, \dots, 13$ were proposed in [1]. A set of coefficients satisfying the ratios (14)-(22) were also selected there (see Table 2 in [8]).

The Dormand-Prince method 8(7) has the smallest error among all schemes of the 8th order. Compared with the Fehlberg method, the Dormand-Prince method showed the best results in terms of global error, as well as the total number of calls to the right side of the system with disturbing accelerations acting on the satellite in orbit, as shown in the Table 2.

TABLE 2 – Global errors of numerical methods for one orbit revolution for the first group of initial values

Метод	погрешность
Fehlberg45	$7.42775 \cdot 10^{-12}$
DOPRI5	$1.95463 \cdot 10^{-13}$
Fehlberg78	$5.45348 \cdot 10^{-12}$
DOPRI8	$1.06343 \cdot 10^{-13}$

The global error is understood as the maximum value from the norms of the vectors of differences between the exact solution and the numerical solution on the interval grid (the interval is equal to the orbital period, in this case about 97 minutes) using the appropriate integration method in the absence of rounding errors.

$$\varepsilon(\tau) = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i|,$$

where $|\cdot|$ – is the selected norm in R^m , m is the dimension of the state vector of the satellite, $y_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^m)$ – approximate solution in node t_i ; $z_i = z_i(t_i)$ – is the exact solution in the same grid node.

By default, when the state vector consists only of the position vector and the velocity vector of the satellite, then the dimension in the standard case is $m = 6$.

As a rule, numerical integration errors are not a large source of errors compared to errors in modeling the model of perturbing accelerations, which are the main sources of errors. It is assumed that the integration method used is correctly configured with the correct step size control.

2.3 Covariance propagation

In the probabilistic formulation, the position of the satellite in orbit is determined by the results of the propagation of motion parameters and the propagation of the covariance matrix. The probabilistic nature of the satellite's location at the propagated point in orbit is taken into

account, based on the accuracy of determining the orbit parameters from GPS navigation data. The accuracy of determining the orbit parameters is set by the covariance matrix at the time of clarifying the initial conditions of the satellite motion.

At the same time, it is assumed that the scattering of the elements of the state vector of the satellite obeys the normal distribution law.

The covariance matrix, in turn determines the scattering ellipsoid (a special case of the phase space region) in which the satellite can be located with a given probability level.

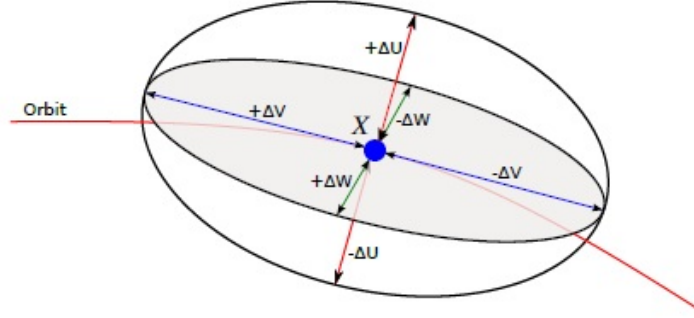


FIGURE 1 – Error ellipsoid

In the probabilistic formulation, an ellipsoid of scattering is defined at any given time, covering a region of space in which a satellite can be located with a given level of probability. Suppose that the scattering cloud is approximated by an ellipsoid of rotation curved along the orbit of the satellite, with axes equal to $\sigma_{\rho\tau n}$. The center of this ellipsoid is the position of the satellite in orbit at the initial epoch.

It is assumed that the measurement errors of the six orbital elements have a normal distribution. Thus, the satellite location error also represents a three-dimensional normal distribution [10], [11]. Covariance matrices should statistically correspond to the actual accuracy of the estimate in accordance with three-dimensional normal (Gaussian) probability distributions.

According to [12], the probability of the distribution of points in an ellipsoid varies as follows:

$$P = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{k^3}{6} - \frac{k^5}{20} + \frac{k^7}{112} - \frac{k^9}{864} + \dots \right),$$

where k -magnification factor.

The probability of the distribution of points in the error ellipsoid changes with the change of K as follows:

- at $k=1$, the probability of distribution of expected data points is 19.9%;
- at $k=2$, the probability of distribution of expected data points is 73.9%;
- at $k=3$, the probability of distribution of expected data points is 97.1%.

The covariance matrix is provided in the form of a symmetric matrix of size 6×6 and characterizes the uncertainty in the state vector of the satellite. The diagonal elements represent the variance in each of the components $(R, T, N, \dot{R}, \dot{T}, \dot{N})$, and the non-diagonal terms give the covariance between the two named components. The covariance matrix is represented in the orbital coordinate system (R, T, N, V_R, V_T, V_N) :

$$Cov = \begin{pmatrix} CR_R & CT_R & CN_R & C\dot{R}_R & C\dot{T}_R & C\dot{N}_R \\ CR_T & CT_T & CN_T & C\dot{R}_T & C\dot{T}_T & C\dot{N}_T \\ CR_N & CT_N & CN_N & C\dot{R}_N & C\dot{T}_N & C\dot{N}_N \\ CR_{\dot{R}} & CT_{\dot{R}} & CN_{\dot{R}} & C\dot{R}_{\dot{R}} & C\dot{T}_{\dot{R}} & C\dot{N}_{\dot{R}} \\ CR_{\dot{N}} & CT_{\dot{N}} & CN_{\dot{N}} & C\dot{R}_{\dot{N}} & C\dot{T}_{\dot{N}} & C\dot{N}_{\dot{N}} \\ CR_{\dot{T}} & CT_{\dot{T}} & CN_{\dot{T}} & C\dot{R}_{\dot{T}} & C\dot{T}_{\dot{T}} & C\dot{N}_{\dot{T}} \end{pmatrix}$$

This representation allows you to most clearly represent the errors in determining the parameters of the orbit.

A numerical experiment on the propagation of the covariance matrix shows that the diagonal elements of this matrix corresponding to deviations along the radial and normal directions in the orbital coordinate system have a harmonic character.

Let $x(t) = (r_i, r_j, r_k, v_i, v_j, v_k)$ – be the state vector of the satellite. As is known, the state vector can be described by a stochastic dynamical system

$$\dot{x} = f(x, w, t), \quad (23)$$

where w is the noise of the system. Let the measurements z_k of the state vector $x_k = x(t_k)$ at time $t = t_k$ be expressed as follows:

$$z_k = h_k(t_k, x_0) + w_k, \quad (24)$$

where w_k – is the noise of the system.

Here h_k denotes the model value of the k^{th} observation as a function of time t_k and the instantaneous state $x(t_0)$ at the initial moment of time. Errors arising from rounding errors, small nonlinearities, simplifying the force model will propagate without further correction by subsequent measurements and will lead to an erroneous and divergent estimation of the satellite state vector. To avoid such a situation, the addition of technological noise (process noise) is used.

The values of w_k take into account the difference between actual and simulated observations due to measurement errors, which are usually considered randomly distributed with a zero mean value.

Let \hat{x}_{k-1} be an estimate of the state vector at time t_{k-1} . Using \hat{x}_{k-1} an a priori estimate of \hat{x}_k^- is obtained. After the measurements z_k a correction of the a priori estimate is carried out and a posteriori estimate of \hat{x}_k^+ is obtained.

At the initial moment, the following are given: $\hat{x}_{k-1}, \hat{P}_{k-1}$.

The a priori estimate \hat{x}_k^- is obtained by integrating equation (23) with the initial condition on the interval $[t_{k-1}, t_k]$ $x(t_{k-1}) = \hat{x}_{k-1}$, i.e.

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\hat{x}_{k-1}, w, t) dt. \quad (25)$$

$\dot{\Phi} = \frac{\partial f(x, w, t)}{\partial x} \Phi(t_k, t_{k-1})$ with an initial condition $\Phi(t_{k-1}, t_{k-1}) = I$.

Errors in modeling the true dynamics of the system at this step may introduce a priori some error in the estimation, which is quantified in the error covariance matrix P_k .

An a priori estimate of the error covariance matrix is obtained from a linearized dynamical system:

$$P_k^- = \Phi_{k-1}(t_k, t_{k-1}) P_{k-1}^+ \Phi_{k-1}^T(t_k, t_{k-1}) + Q, \quad (26)$$

where

$$\Phi_{k-1} = e^{F_{k-1} \Delta t}, \quad F_{k-1} = \left. \frac{\partial f(x, w, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}}, \quad (27)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{dx}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{dy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{dz}^2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

where Q is the covariance matrix of the system noise.

The expected system noise (system dynamics modeling errors) and measurement noise (irregular measurement fluctuations) are used to weigh the significance of two updates relative to each other.

Modeling the noise of the Q process is a difficult task, since it is necessary to take into account various sources of disturbances. These sources are, for example, the geopotential of the Earth, the atmospheric drag/density, the pressure of solar radiation, disturbances from third bodies and tidal forces.

The accuracy of propagation the parameters of the satellite motion is determined by the covariance matrix, which is calculated by the formula (26), with a known matrix at the previous step P_{k-1}^+ .

Φ_{k-1} – the matrix of partial derivatives of the elements of the vector of motion parameters at time t by the elements of the vector of motion parameters for the initial epoch. The above ratios (25)-(26) allow us to propagate the covariance matrix together with the parameters of the satellite motion.

Also a method to reduce the influence of numerical errors in calculations for updating the covariance matrix has been applied on propagation process, which together with a highly accurate propagation, can be applied in different satellite's flight control tasks, where the satellite's orbit determination errors taking into account.

3 Results and Discussion

3.1 Developed software «Orbit Propagator tool»

The OPT (Orbit Propagator Tool) software developed by us is based on a high-precision model for orbit propagation of LEO satellites. This software makes it possible, with a given model of satellite motion and known statistical characteristics of orbit determination errors, to propagate the covariance matrix together with the state vector.

The OPT is a software tool designed to support operators in Flight Dynamics routine operations and able to use it for high-precision orbital analysis to support various space missions and planning in-orbit maneuvers. Software tool allows you to propagate the orbital parameters of the satellite (state vector, Keplerian elements) at a given interval with the writing of the results in the selected coordinate system in the report files. Also in the software there is a possibility of constructing two-dimensional graphs of orbital elements for analyzing the evolution of the elements of the satellite orbit.

The software contains a flexible system of configurable parameters of the acceleration model and the integration method (Fig. 2), including the choice of sources of planetary ephemerides, the choice of a set of configuration parameters. And it can be used as a standalone tool or in combination with advanced satellite operations planning tools in orbit. A high level of design flexibility is also achieved due to an extensive set of input and output parameters.

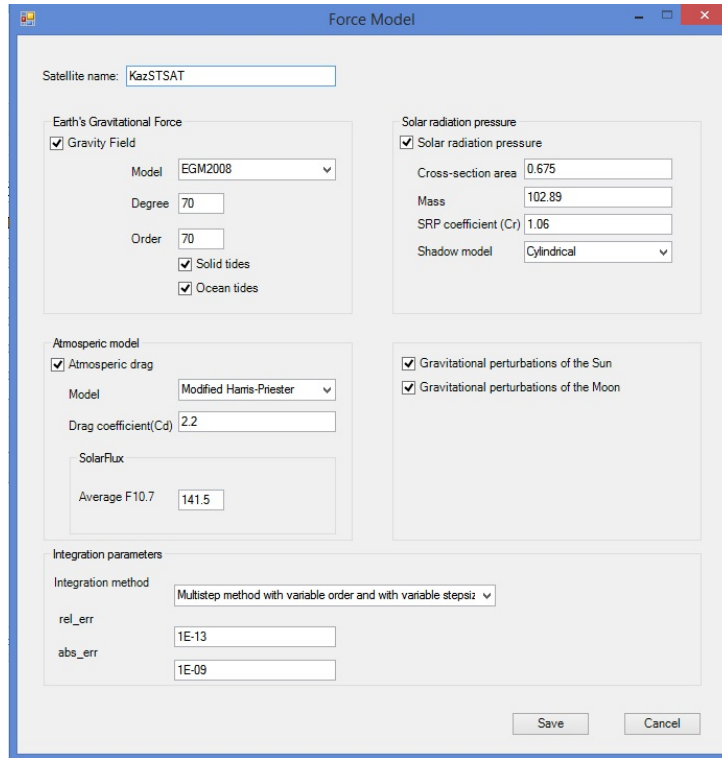


FIGURE 2 – Configurable parameters of the dynamic model of perturbation forces

3.2 Simulation data

The results obtained by modeling the satellite motion under various scenarios with a different set of disturbing forces, as well as the use of numerical methods for integrating high orders with automatic step selection, demonstrate high accuracy in propagation the satellite position in orbit. The propagation of the satellite state vector in orbit is based on a dynamic force model that includes the Earth’s gravity, polar and ocean tides, lunar-solar disturbances, atmospheric drag and solar radiation pressure, as well as relativistic effects.

On coordinate conversions effect the Parameters of the Earth’s rotation of the IAU(The International Astronomical Union) and IERS services are taken into account , as well as the geomagnetic index, atmospheric data from NOAA are taken into account on calculations of acceleration due to atmosphere drag effect.

Several test cases were created for each orbit to test the ability of the OPT software to work accurately using various combinations of forces. The forces used for testing on Earth included models of the Earth’s gravitational field *EGM2008* , perturbing accelerations from other planets, modified Harris-Priester models of atmospheric drag and solar radiation pressure (SRP). The degree and order of the geopotential of the Earth were set as constant from $0 * 20$ to $71 * 71$. The parameters in Table-4 show the composition and parameters of the disturbing forces used for the test run of the software for demonstration purposes.

All calculations on the numerical integration of the equations of motion of the satellite are carried out in the *ECIJ2000* coordinate system (an inertial coordinate system with the origin at the center of mass of the Earth for the epoch *J2000*). The duration of the propagation, the size of the report output step and the size of the integrator step varied for different test cases. The time steps of the integrator were chosen for the most accurate comparison of the results of the test case. Units of measurement when comparing state vectors: $m, m/sec$.

For test case, the initial epoch was chosen as 2022/04/28 21:38:30 UTC. The initial conditions used for the test orbits are presented in Tables 3.

When we propagated the orbit of the KazSTSAT satellite, the values of the variables of the perturbing forces model from the following table were used.

TABLE 3 – Initial State vector in Earth Mean Equator and Equinox of J2000 reference frame

	state vector in EME J2000		Kepler elements
x	6652911.169537571	Semi-major axis (a)	6968.860759643917
y	871175.193766317	Eccentricity (e)	0.002351096390
z	1864622.407990260	Inclination (i)	97.621163623454
v_x	2141.603813809	Longitude of the ascending node (Ω)	185.329246514044
v_y	-770.204970971	Argument of perigee (ω)	91.536956373807
v_z	-7217.886453230	Mean anomaly (M)	72.533302431270

TABLE 4 – Force Model Parameters

Parameter	OPT
Area[m ²]	0.675
Satellite Mass[kg]	103.9
Integrator	RK7(8)
Integrator error tolerance	1e-013
Integrator error control	Yes
n (degree)	20
m (order)	20
Sun	true
Sun position	True: DE405
Moon	True: DE405
SRad(solar radiation pressure)	True
SRP: sun position	True: DE405
Shadow modeling	Cylindrical
Drag	true
Atmospheric density model	Harris-Priester
Cr(Radiation pressure coefficient)	1.06
Average F10.7	141.5
Atmospheric Drag: Geomagnetic Flux Update	Constant
Geomagnetic index(Kp): JR and MSISE only	3
CD (Drag coefficient)	2.2
ERS EOP format used	Bulletin B(IERS)
Polar Motion calculation	enabled
Solid tides	enabled
Ocean tides	enabled
Relativistic Accelerations	enabled

TABLE 5 – Parameters and variables of the model of disturbing accelerations

gravity model order	70
mass [kg]	102.89
area [m ²]	0.675
C_r	1.06
C_d	2.2
averageF10_7	141.5
integration step size [s]	10.0
relative error	1E-13
absolute error	1E-09
Sigma	100.0

We took the parameters of the Earth’s rotation and time corrections according to the following table.

TABLE 6 – Earth rotation parameters and time corrections

UT1 _ UTC	-0.24081
UTC _ TAI	-37.0
x_{pole}	0.1627
y_{pole}	0.4322

The results of the OPT propagation are compared with the results obtained in the GMAT(General Mission Analysis Tool) in order to show the equality of the results.

General Mission Analysis Tool (GMAT) is an open source software system for space mission analysis and for solving the navigation tasks developed by NASA in collaboration with Research Institutes.

The GMAT’s propagator has been verified and validated [13] against comparison with propagators, that are include as part in Free Flyer and STK. These toolkits are presented as one of the most precise and reliable orbit Simulation tools.

TABLE 7 – Test scenario: Propagation of the state vector for KazSTSAT satellite on LEO, duration = 1 day. Composition of forces: Earth-EGM96-Sun-Moon- HPAtmModel -SRP- cylindrical

	OPT	GMAT	Differences
x	5152688.373	5152688.531346	0.158346
y	1178317.233	1178317.226069	-0.006931
z	4524117.020	4524116.838835	-0.181165
v_x	5032.404	5032.403807	-0.000193
v_y	-205.331	-205.331045	-0.000045
v_z	-5653.509	-5653.509171	-0.000171

With such a combination of forces, the accuracy of propagation the position of the satellite was 0.240712 meters, according to the velocity vector 0.00026 m/s.

TABLE 8 – Comparison results after 7 days from the initial epoch. Composition of forces: Earth-EGM96-Sun-Moon-HPAtmModel-SRP- cylindrical State vector in J2000. Epoch 2022/05/05 21:38:30.000 UTC

	OPT	GMAT	Differences
x	-6594221.923000	-6594224.764733	-2.841733
y	-1628674.335000	-1628673.392481	0.942519
z	-1546954.019000	-1546942.627187	11.391813
v_x	-1849.999000	-1849.986891	0.012109
v_y	600.779000	600.781991	0.002991
v_z	7311.571000	7311.573858	0.002858

With such a combination of forces, the accuracy of propagation the position of the satellite was 11.7 meters, with a velocity vector of 0.013 m/s.

It is assumed that the standard deviation of the initial state of the satellite state vector is 100 m (a priori sigma position) and 1 m/s (a priori sigma velocity), respectively. These statistics are used to generate the initial a priori covariance matrix.

When using various combinations of models, we noticed that among the orbital models used for satellite in low-Earth orbit, the geopotential and the atmospheric drag model are the main sources of errors, and therefore they need to be modeled more accurately.

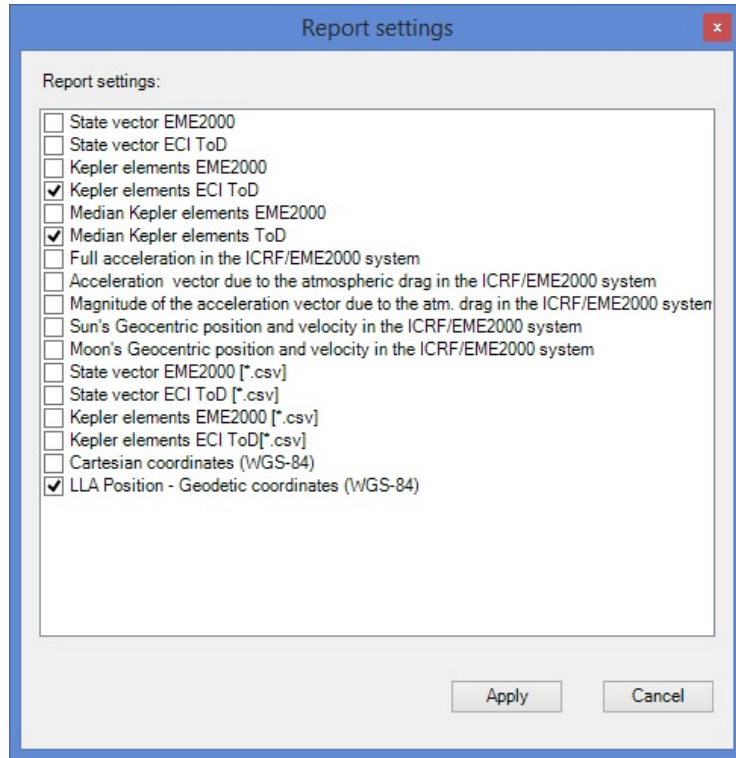


FIGURE 3 – Composition and form of the output files of the report with ephemerides

Plot of selected orbital elements in the long-term analysis of the evolution of orbital elements using "medium elements" for a mission in LEO orbit, for example, at an interval of 6 months, are shown in Fig. 6-9.

The computational performance of numerical propagator calculations with a different combination of forces, step and interval is presented in Table-9.

TABLE 9 – Calculation time for propagation the state vector of the satellite in the OPT software

Test case	OPT time[sec]
LEO SSO 1 day with step=10 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	2.4
LEO SSO 1 day with step=30 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	2.0
LEO SSO 3 day with step=10 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	6.5
LEO SSO 3 day with step=30 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	6.0
LEO SSO 3 day with step=60 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	5.9
LEO SSO 7 day with step=10 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	15.9
LEO SSO 7 day with step=30 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	14.6
LEO SSO 7 day with step=60 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	15.1
LEO SSO 7 day with step=300 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	13.8
LEO SSO 30 day with step=30 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	70.2
LEO SSO 30 day with step=60 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel-SRP -cylindrical	60.3
LEO SSO 30 day with step=300 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel-SRP -cylindrical	61.6
LEO SSO 365.25 days with step=600 sec: Earth-JGM3(20x20)-Sun-Moon-HPAtmModel - SRP -cylindrical	799

Calculations were performed on a portable computer with an Intel Core i7-4710HQ processor with 8 GB RAM.

The presentation of all the results obtained in the software is beyond the scope of one article, so we limited ourselves to demonstrating the operation of the test scenario and the propagation process in the OPT software.

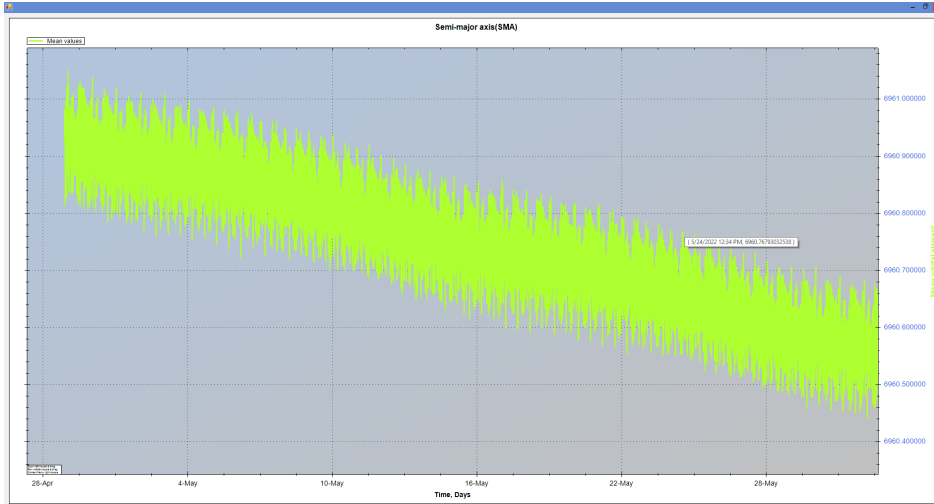


FIGURE 4 – Evolution of the Semi-major axis in the 30-day interval

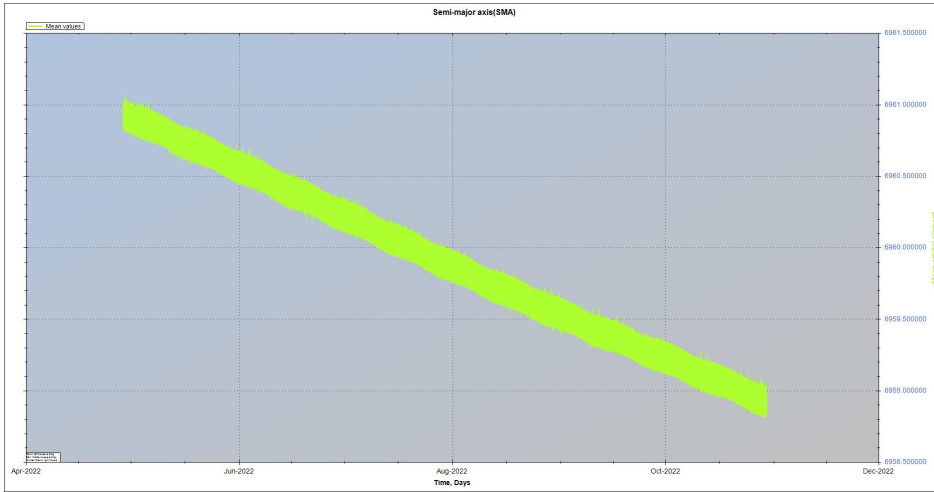


FIGURE 5 – Evolution of the Semi-major axis over the 6-month interval

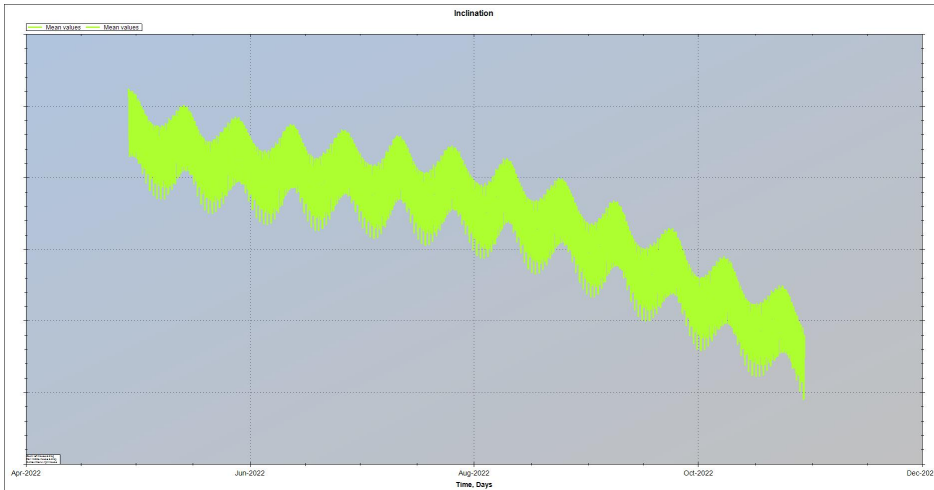


FIGURE 6 – Evolution of the inclination over the 6-month interval

3.2 Verification

This section describes the validation processes and results for the OPT tool. For a realistic assessment of accuracy, the user must make sure that the models of disturbing forces, respectively, and the propagation results can be trusted with an accuracy above 15 meters.

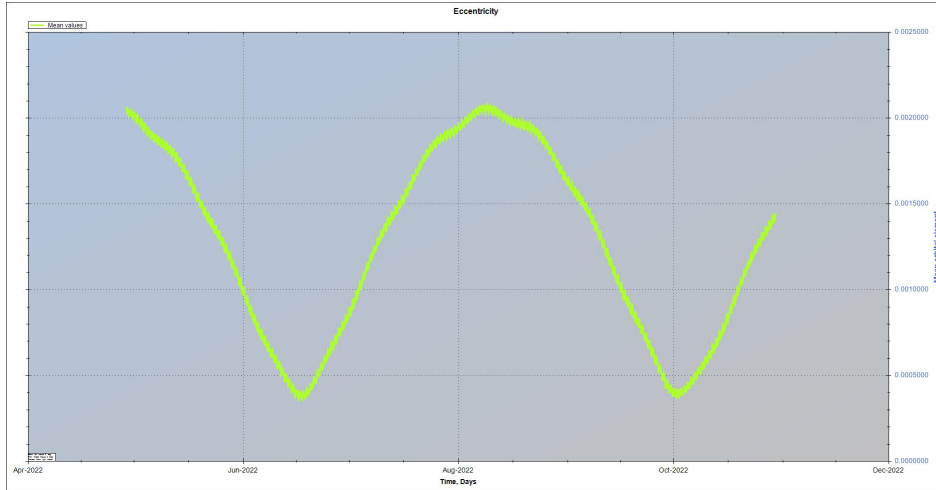


FIGURE 7 – Evolution of the eccentricity over the 6-month interval

out_Kepler_EME2000_191222_151545.txt - Notepad

Generation time: Mon Dec 19 15:19:08 2022

Kepler elements: the ICRF/Earth Mean Equator and Equinox of J2000 (EME2000)

Date/Time(UTC)	Semi-major Axis(km)	Eccentricity	Incl. (deg)	RAAN(deg)	Arg. of Perigee	Mean anomaly(deg)
2022/04/28 21:38:30.000	6968.860759643917	0.002351096390	97.621163623454	185.329246514044	91.536956373807	72.533302431270
2022/04/28 21:38:40.000	6968.965958505010	0.002344361773	97.621106280374	185.329262409917	91.974115962945	72.719279137361
2022/04/28 21:38:50.000	6969.067326751958	0.002337178153	97.621051165354	185.329277040266	92.400893987805	72.915658823836
2022/04/28 21:39:00.000	6969.164817741995	0.002329552076	97.620998304229	185.329290454497	92.815984639204	73.12272758087
2022/04/28 21:39:10.000	6969.258385722908	0.002321490571	97.620947722436	185.329302702395	93.222868968522	73.340813533864
2022/04/28 21:39:20.000	6969.347986646916	0.002313001227	97.620899445157	185.329313834096	93.615816433550	73.570253023426
2022/04/28 21:39:30.000	6969.433579020279	0.002304092232	97.620853497276	185.329323900106	93.99788067131	73.811379709357
2022/04/28 21:39:40.000	6969.515124570576	0.002294772377	97.620809903141	185.329332951360	94.367938540587	74.064538376563
2022/04/28 21:39:50.000	6969.592580486694	0.002285051016	97.62076386147	185.329341039306	94.725617239355	74.330079039346
2022/04/28 21:40:00.000	6969.665939147883	0.002274938008	97.62072868186	185.329348215981	95.070567891358	74.608357593305
2022/04/28 21:40:10.000	6969.735147422672	0.002264443664	97.620693469058	185.329354534076	95.402425728211	74.897381131116
2022/04/28 21:40:20.000	6969.800185753346	0.002253578723	97.620659509597	185.329360046943	95.720814697349	75.204596187530
2022/04/28 21:40:30.000	6969.861027302534	0.002242354264	97.620627993142	185.329364800558	96.025343745692	75.523322359448
2022/04/28 21:40:40.000	6969.917545407755	0.002230782269	97.620590941921	185.329368873413	96.315604269352	75.856324724514
2022/04/28 21:40:50.000	6969.970013482674	0.002218874712	97.620557260982	185.329372296370	96.591169018523	76.204030026385
2022/04/28 21:41:00.000	6970.018105362691	0.002206644655	97.6205248257053	185.329375132494	96.851592653057	76.566883054172
2022/04/28 21:41:10.000	6970.061895965532	0.002194105846	97.6204926635760	185.329377436901	97.096413828418	76.945344631957
2022/04/28 21:41:20.000	6970.101362065957	0.002181272876	97.6204607902525	185.329379264648	97.325157906290	77.339888826944
2022/04/28 21:41:30.000	6970.136482965813	0.002168161212	97.6204290652772	185.329380670692	97.527339651269	77.751000094574
2022/04/28 21:41:40.000	6970.167241058421	0.002154787206	97.620397470499	185.329381709913	97.7324466820108	78.179179923082
2022/04/28 21:41:50.000	6970.193621846099	0.002141168084	97.6203645994744	185.329382431716	97.910083590903	78.624900219154
2022/04/28 21:42:00.000	6970.215614135399	0.002127321929	97.620332907418	185.3293832907418	98.069550925842	79.088692327068
2022/04/28 21:42:10.000	6970.233209847878	0.002113267678	97.620301932218	185.329383175712	98.210493912625	79.571056313939
2022/04/28 21:42:20.000	6970.246403958355	0.002099025125	97.6202445335183	185.329383297305	98.332540024003	80.072505097993
2022/04/28 21:42:30.000	6970.255194493631	0.002084614926	97.6202443816591	185.329383327299	98.434615224149	80.593554107208

FIGURE 8 – Keplerian elements of the orbit in EME J2000

out_Kepler_ToD.txt - Notepad

Generation time: Mon Dec 19 15:19:08 2022

Kepler elements: the Earth-centered inertial (ECI) coordinate frame. True Equator and True Equinox of date.

Date/Time(UTC)	Semi-major Axis(km)	Eccentricity	Incl. (deg)	RAAN(deg)	Arg. of Perigee	Mean anomaly(deg)
2022/04/28 21:38:30.000	6968.860759643914	0.002351096390	97.631246698532	185.595139246607	91.413621125006	72.533302431275
2022/04/28 21:38:40.000	6968.965958505010	0.002344361773	97.631189390567	185.595155268200	91.850780733220	72.719279137361
2022/04/28 21:38:50.000	6969.067326751957	0.002337178153	97.631134307957	185.595170019402	92.277550776284	72.915658028335
2022/04/28 21:39:00.000	6969.164817741993	0.002329552076	97.631081476642	185.595183549556	92.69349495010	73.122727580818
2022/04/28 21:39:10.000	6969.258385722908	0.002321490571	97.63103802165	185.59519508423	93.00733790810	73.340813533867
2022/04/28 21:39:20.000	6969.347986646916	0.002313001227	97.630982669816	185.59520146053	93.492481271455	73.570253023423
2022/04/28 21:39:30.000	6969.433579020277	0.002304092232	97.630936744506	185.595217312910	93.874552919778	73.811379709357
2022/04/28 21:39:40.000	6969.515124570575	0.002294772377	97.630893170931	185.595226459879	94.244603407131	74.064538376563
2022/04/28 21:39:50.000	6969.592580486692	0.002285051016	97.630851972356	185.595234633355	94.602202173528	74.330079039352
2022/04/28 21:40:00.000	6969.665939147883	0.002274938008	97.630813170864	185.595241900332	94.947232783119	74.608357593305
2022/04/28 21:40:10.000	6969.735147422672	0.002264443664	97.630776786369	185.595248298457	95.27909631319	74.897381131116
2022/04/28 21:40:20.000	6969.800185753346	0.002253578723	97.630742836176	185.595253886047	95.597479610931	75.204596187527
2022/04/28 21:40:30.000	6969.861027302536	0.002242354264	97.630711334661	185.595258717046	95.902008668924	75.523322359448
2022/04/28 21:40:40.000	6969.917545407754	0.002230782269	97.630682292408	185.595264849525	96.192269201385	75.856324724519
2022/04/28 21:40:50.000	6969.970013482673	0.002218874712	97.630655720742	185.595269232527	96.467833950552	76.204030026382
2022/04/28 21:41:00.000	6970.018105362690	0.002206644655	97.630631623988	185.595269216904	96.728257600252	76.566883054172
2022/04/28 21:41:10.000	6970.061895965529	0.002194105846	97.630610008730	185.595271569151	96.973078781962	76.945344631957
2022/04/28 21:41:20.000	6970.101362065953	0.002181272876	97.630590880957	185.595273439344	97.201822865387	77.339888826944
2022/04/28 21:41:30.000	6970.136482965809	0.002168161212	97.630574245361	185.595274802400	97.414000415131	77.751000094582
2022/04/28 21:41:40.000	6970.167241058415	0.002154787206	97.6305560110206	185.595275953192	97.609131549040	78.179179923087
2022/04/28 21:41:50.000	6970.193621846096	0.002141168084	97.630544842798	185.595276706573	97.786703561537	78.624900219162
2022/04/28 21:42:00.000	6970.215614135392	0.002127321929	97.630539371357	185.595277197462	97.946215899294	79.088692327068
2022/04/28 21:42:10.000	6970.233209847878	0.002113267678	97.630532784022	185.595278400915	98.087150887759	79.571056313939
2022/04/28 21:42:20.000	6970.246403958352	0.002099025125	97.630528718324	185.595278612166	98.205019000034	80.072505097999
2022/04/28 21:42:30.000	6970.255194493630	0.002084614926	97.630527210869	185.595277646632	98.311280200341	80.593554107208

FIGURE 9 – Keplerian elements of the spacecraft orbit in the EME ToD (true-of-date epoch)

Date/Time(UTC)	x(km)	y(km)	z(km)	Vx(km / sec)	Vy(km / sec)	Vz(km / sec)
2022/04/28 21:38:00.000	6552.911169537571	871.175193766317	1864.622407996260	2.141608313089	-0.770284979971	-7.217886453230
2022/04/28 21:38:04.000	6673.933856194760	863.421842486487	1792.334535987636	2.062892507373	-0.780449962793	-7.239545114605
2022/04/28 21:38:08.000	6694.168218778583	855.566502975648	1719.834366515707	1.983940569958	-0.790602415435	-7.260345534190
2022/04/28 21:39:00.000	6713.611896351262	847.610106658815	1647.130494205632	1.904757170674	-0.800661124152	-7.280285286725
2022/04/28 21:39:04.000	6732.262622506038	839.553596951230	1574.231537418538	1.825351866481	-0.810624895673	-7.299362051571
2022/04/28 21:39:08.000	6750.118225641355	831.397929142659	1501.146137196123	1.745734151289	-0.820492548399	-7.317572613378
2022/04/28 21:39:12.000	6767.176629224692	823.144079279664	1427.882956203923	1.665913544778	-0.830262912665	-7.334017386359
2022/04/28 21:39:16.000	6783.435852042943	814.792299045792	1354.450677666999	1.585899590862	-0.83934830650	-7.351392797499
2022/04/28 21:39:20.000	6798.894008436626	806.345705639884	1280.858004299534	1.505701856055	-0.849501751742	-7.366996522045
2022/04/28 21:40:00.000	6813.549308516423	797.803191652937	1207.113657231046	1.425329927598	-0.858978759055	-7.381727248686
2022/04/28 21:40:04.000	6827.400058362247	789.166469944075	1133.226374932338	1.344793411828	-0.868348515796	-7.395832969336
2022/04/28 21:40:08.000	6840.444660206760	780.436564516115	1059.204912143783	1.264101932746	-0.877615319222	-7.408563093324
2022/04/28 21:40:12.000	6852.681612606230	771.614510309082	985.058038086581	1.183265130914	-0.886778073659	-7.420665171040
2022/04/28 21:40:16.000	6864.109510601787	762.701353484838	910.794538998199	1.102292662620	-0.895835695945	-7.43188169715
2022/04/28 21:40:20.000	6874.727045873209	753.698150482452	836.423209867407	1.021194199192	-0.904787115546	-7.442238835415
2022/04/28 21:41:00.000	6884.533096885888	744.605968710078	761.952860569250	0.939979426302	-0.913631274739	-7.451692020895
2022/04/28 21:41:04.000	6893.526279038194	735.425806060636	687.392311195982	0.858658043113	-0.922367128873	-7.460278686942
2022/04/28 21:41:08.000	6901.705844751215	726.158990588648	612.759391703090	0.777239761205	-0.930995646657	-7.467965898409
2022/04/28 21:41:12.000	6909.070783666476	716.806380921890	538.035940830079	0.695734303253	-0.939598810450	-7.474776833717
2022/04/28 21:41:16.000	6915.620272669540	707.369165573713	463.257805816806	0.614151481540	-0.947914616493	-7.480702776227
2022/04/28 21:41:20.000	6921.353586018411	697.848463084300	388.424837316835	0.532500796392	-0.956207075084	-7.485743118966
2022/04/28 21:42:00.000	6926.270095408080	688.245401816907	313.545096309251	0.450792234628	-0.964386210684	-7.489897363304
2022/04/28 21:42:04.000	6930.369270027971	678.561119819902	238.629845010151	0.369035460983	-0.972451061976	-7.493165121457
2022/04/28 21:42:08.000	6933.65067605050	668.79674683449	163.68549784347	0.287240252202	-0.980400681928	-7.495546111465
2022/04/28 21:42:12.000	6936.113979433084	658.953493396304	88.721879257233	0.205416344671	-0.988234137874	-7.497040162182
2022/04/28 21:42:40.000	6937.758940388204	649.032472201539	13.747703226483	0.123573504040	-0.995950511638	-7.4974647210791

FIGURE 10 – The state vector in the EME J2000

The results of the OPT propagation are compared with the results obtained in GMAT⁸, as well as with the GPS receiver navigation solution. For example, the residuals resulting on state vectors propagation for 7 days from the same epoch time by both the GMAT and developed OPT tool, are shown in figures 11-12.

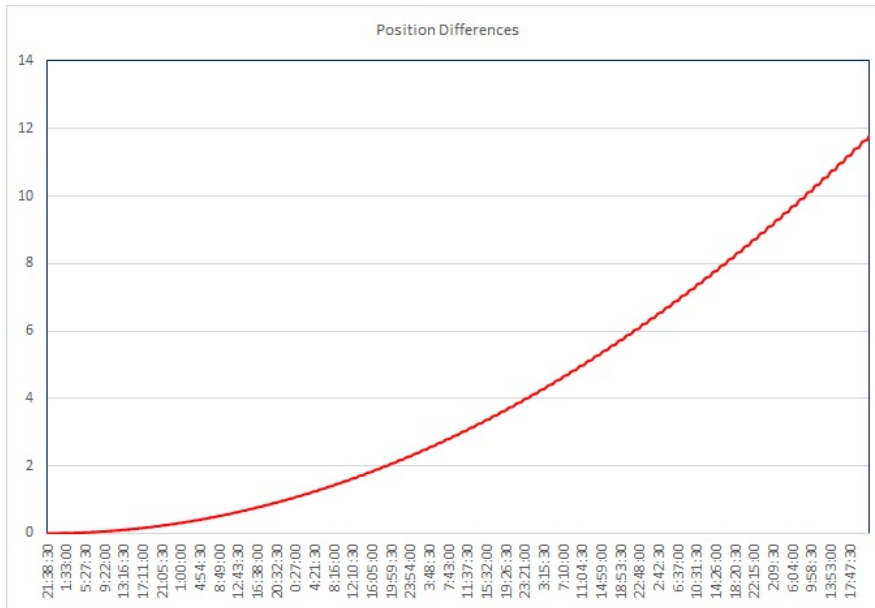


FIGURE 11 – The difference in the position vector over a one-week interval (m)

The OPT propagation results are compared with the GMAT results with the maximum normalized position and velocity difference over the propagation duration. This results displayed in a table format. To determine whether the comparison value of the test case modeled in the software is acceptable, an acceptance matrix was created, presented in Table 10. Comparative results of propagation the satellite orbit on one orbit are shown in tables 11-15, obtained in different coordinate systems.

Also, for verification purposes, we compared the orbit propagation at various time intervals with the navigation solutions of the SGR-07 GPS receiver installed on board the KazSTSAT satellite.

⁸General Mission Analysis Tool, Software Package, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, 2007, URL: <http://gmat.gsfc.nasa.gov>

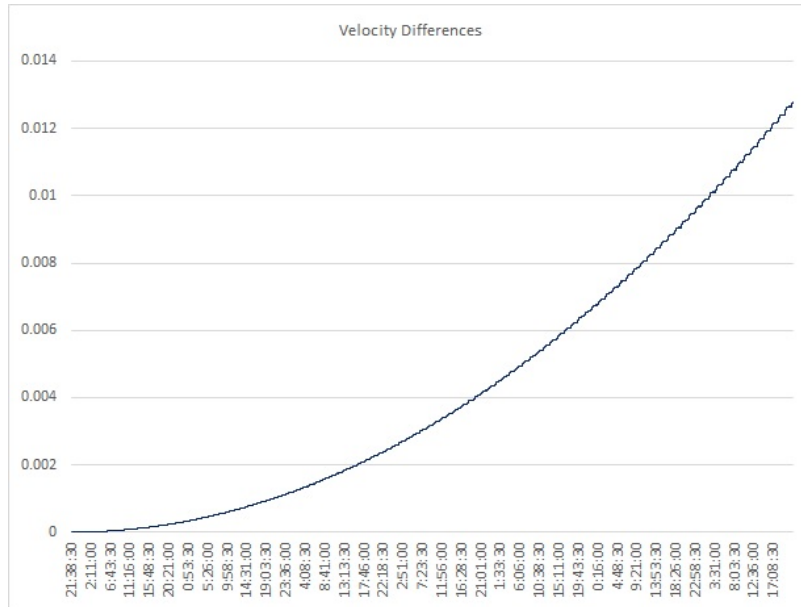


FIGURE 12 – The difference in the velocity vector over a one-week interval (m/s)

TABLE 10 – Acceptance Matrix

Difference in	Acceptable position difference (m)
Non-spherical gravity	<0.001
Point mass gravity	<0.001
Solar radiation Pressure	<0.6
Atmospheric Drag	<20

TABLE 11 – The test scenario for comparing of the OPT/GMAT software results (Sun-synchronous orbit)

Test case	Position difference(m)	Velocity difference(m/s)
Earth-JGM3-0-0-0-0	1.203	0.002
Earth-JGM3-Sun-0-0-0	1.203	0.001
Earth-JGM3-Sun-Moon-0-0	1.203	0.002
Earth-JGM3-Sun-Moon-0-SRP-cylindrical	1.020	0.001
Earth-JGM3-Sun-Moon-HPAtmModel-0	1.281	0.0015
Earth-JGM3-Sun-Moon-HPAtmModel-SRP	1.2	0.001
Earth-JGM3-Sun-Moon-HPAtmModel-SRP-cylindrical	1.0402	0.0009

TABLE 12 – The test scenario for comparing of the OPT/GMAT software results (Sun-synchronous orbit)

Test case	State vector (OPT) (m, m/s)	State vector (GMAT) (m, m/s)	delta
Earth-JGM3-Sun-Moon-HPAtmModel-SRP-cylindrical	-1344.43852	-1344.438283	-0.23726362
	4977.977623	4977.979675	-2.052247331
	-4697.661829	-4697.659723	-2.10593889
	0.0492403	0.049241026	0.0007259
	5.181641	5.181639	-0.0020000
	5.4932774	5.493279382	0.001981803

TABLE 13 – The test scenario: KazSTSAT, 2019/01/17 12:00:00.0 UTC (EME J2000)

	X(m)	Y(m)	Z(m)	Vx(m/s)	Vy(m/s)	Vz(m/s)
OPT	241433.619705	6487906.368239	2536797.612833	1009.703000	2747.069500	6970.948231
GMAT	241433.619705	6487906.368239	2536797.612833	1009.703000	2747.069500	6970.948231
delta	0	0	0	0	0	0

TABLE 14 – The state vector in the EME True-of-Date coordinate system

	X(m)	Y(m)	Z(m)	Vx(m/s)	Vy(m/s)	Vz(m/s)
OPT	-209600.1997021	-6488907.1731688	-2537067.7599385	-1008.5101100	2742.6862989	-6972.8465815
GMAT	-209600.199642	-6488907.1731640	-2537067.759955	-1008.5101100	2742.6862990	-6972.8465820
delta	5.92E-05	4.8E-06	-1.7E-05	0	1E-07	-5E-07

TABLE 15 – Keplerian elements of the orbit in EME J2000

	X(m)	Y(m)	Z(m)	Vx(m/s)	Vy(m/s)	Vz(m/s)
OPT	6967400.359	0.002037	97.868045	90.96413	99.216281	102.110747
GMAT	6967400.359	0.002037	97.868045	90.96413	99.216281	102.110747
delta	-3.99537E-07	0	0	0	0	0

SGR-07 receives and decodes L-band signals from four or more GPS satellites and, using range determination methods, is able to calculate the location of the satellite with an accuracy of 15-25 meters, as well as determine the exact speed and time.

The SGR-07 receiver tracks C/A code signals at the L1 frequency from GPS satellites. Each channel performs measurements of pseudorange, Doppler frequency shift and carrier phase in the measurement epoch. These “raw” measurements are used to calculate the receiver position, velocity and time (Position/Velocity/Time). The position and velocity are transmitted as arrays of vectors in the WGS-84 coordinate system with reference to UTC time. The time is represented as an exact location timestamp sent in GPS time format: the number of the week, the number of seconds from the beginning of the current week and a fraction of a second.

Many tests were performed with a full set of considered disturbing accelerations. In OPT software, when propagation movement, one of the processed vectors from a set of navigation solutions that has been preprocessed was selected as initial conditions. During preprocessing, abnormal errors were discarded according to the $3 \cdot \sigma$ rule. Intervals were selected for propagation the position of the satellite representing the passive sections of the satellite flight: 1 day, 3 days, 7 days, 14 days and 30 days. Then the propagated state vectors of the satellite at the end of the interval in the EME J000 coordinate system were compared with the vector obtained by the GPS navigation solution at the end of the considered intervals.

TABLE 16 – The state vector refined by GPS data and the corresponding orbital elements(true-of-date)

epoch	2022/04/28 21:38:38.000 UTC		
Keplerian elements (ToD)	value	State vector(ToD)	value
Semi-major axis (a)	6960.925018138310	r_x	6623658.751
Eccentricity (e)	0.002047257271	r_y	903162.936
Inclination (i)	97.635627176777°	r_z	1950898.625
Longitude of the ascending node (Ω)	185.592351005803°	v_x	2238.240858
Argument of perigee (ω)	85.199606512757°	v_y	-751.488029
Mean anomaly (M)	78.777122748204°	v_z	-7190.619141

Given the accuracy of determining the GPS receiver, it can be argued that the accuracy of orbit propagation allows using this model and the integration method to solve most problems of satellite orbit control.

TABLE 17 – Comparison of the satellite orbit propagation at the end of the one-week interval with the orbit from the GPS receiver navigation solution

epoch	2022/05/05 21:38:38.000 UTC		
Keplerian elements (ToD)	OPT	GPS	difference
Semi-major axis (a)	6969.242572	6969.242560	-1.2986E-05
Eccentricity (e)	0.001758	0.001759	-1.72E-07
Inclination (i)	97.628551°	97.628552	-2.13E-07
Longitude of the ascending node (Ω)	192.397495°	192.397494	-1.634E-06
Argument of perigee (ω)	63.393216°	63.393216	-1.94E-07
Mean anomaly (M)	283.824257°	283.824255	-2.405E-06

4 Conclusion

In this research integration methods and a model of disturbing accelerations acting on the satellite were studied. The efficiency of using the modified Dormand-Prince method 8(7) with adaptive step with error control for the numerical solution of differential equations describing the motion of the spacecraft to achieve a high accuracy during orbit propagation is shown.

The main purpose of this work was to show that the used propagation model and the integration method provide sufficient accuracy and are suitable for propagation the position of the satellite, both on short-term and long-term time intervals. The use of an accurate model of disturbing accelerations, using numerical methods of integration of high orders with automatic step selection, demonstrated high accuracy of refinement of the state vector of the satellite in orbit. It also provides a better estimate of the speed and, consequently, a better accuracy of the propagation, thereby improving the accuracy in secondary tasks of satellite orbit control and the accuracy of planning operations with the satellite payload.

The high-precision orbit propagation together with the updating the covariance matrix, can be applied in many actual tasks on Flight Control Operational Planning and the safety in orbit, where the orbit determination errors taking into account.

Such an approach, for example, has found its application for the task of Conjunction Assessment analysis for closest approach cases between two space objects, where the collision avoidance maneuver decision making process is based on a probabilistic approach.

The developed OPT software can be used as the basis for a number of applied tasks for ballistic support the flight control of the satellite's missions on LEO.

References

- 1 Prince P.J., Dormand J.R., High order embedded Runge-Kutta formulae// Journal of Computational and Applied Mathematics. -1981. -Vol. 7(1). -P. 67-75.
- 2 Vallado D. A., Fundamentals of Astrodynamics and Applications. - 4th Ed. -2013. -1106 p.
- 3 Capderou M., Satellites Orbits and Missions, Springer-Verlag France. 2005. p. 67.
- 4 Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008; presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, 2008, April 13-18.
- 5 Rizos C., Stolz A. Force modelling for GPS satellite orbits, Proceedings of the 1st International Symposium Precise Positioning with GPS. -1985. -Vol. 1. P. 87-98.
- 6 Love A.E.H. The yielding of the earth to disturbing forces. Proceedings of the Royal Society A. -1909. -Vol. 82. №551.
- 7 Escobal, Pedro R., Methods of Orbit Determination. New York: John Wiley & Sons. (Reprint edition. Malabar FL: Krieger Publishing Co.), 1965, p. 37
- 8 Hairer E., Norsett S.P., Wanner G., Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- 9 Wang H.B., Xue F., and Liu C.J. Test method of satellite coverage area and its engineering application//Radio Communications Technology. -2010. -Vol. 3. -P. 19.
- 10 Wang M., Ma L., Zhang L., and Ji H. Analysis of horizontal positioning error distribution of the Chinese area positioning system// Astronomical Research & Technology. -2012. -Vol. 9. №3. -P. 522-526.
- 11 Dai G., Chen X., Zuo M., Peng L., Wang M. and Song Z. The Influence of Orbital Element Error on Satellite Coverage Calculation//International Journal of Aerospace Engineering. -2018. -Vol. 2018. -P. 6.

- 12 Vallado D.A., An analysis of state vector propagation using differing flight dynamics programs. Paper AAS 05-199 presented at the AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference. Copper Mountain, CO, 2005.
- 13 Hughes SP, Qureshi RH, Cooley DS, Parker JJ, Grubb TG, Verification and validation of the general mission analysis tool (GMAT), in 2014 AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, San Diego, CA, 4-7 Aug 2014.

А.Г. Есенғалиев¹, А.Б. Муканов²

¹ «Ghalam» ЖШС, Туран даңғ., 89, Астана, Қазақстан

² М.В.Ломоносов атындағы Мәскеу Мемлекеттік Университетінің Қазақстан Филлиалы, Қажымұқан көш., 11, Астана, Қазақстан

Ковариациялық матрица болжамымен жоғары дәлдіктегі қозғалыс болжамы

Аннотация. Бұл мақалада Ғарыш Аппараттардың(ҒА) позициясын жоғары дәлдікпен болжау моделін қолдану ұсынылады, онда бұзылған үдеулер анықталады, сонымен қатар алынған сандық нәтижелер ұсынылады. Ғарыш Аппараттарына әсер ететін барлық бұзушы күштер модельденеді, атмосфералық қарсылық моделінің параметрлерінің, сондай-ақ IERS, EOP параметрлерінің өзекті деректері қолданылады. LEO-дағы орбиталық позицияны болжауға арналған әзірленген бағдарламалық қамтамасыз ету ҒА ұшуын басқаруды қолдау үшін қолданылады, бұл ретте апталық уақыт аралығындағы ҒА позиция векторы бойынша 10-15 метр деңгейдің дәлдігі қамтамасыз етіледі. ҒА қозғалысының берілген моделінде және күй векторымен бірге орбитаны анықтау қателіктерінің белгілі статистикалық сипаттамаларында ковариациялық матрица болжанады, бұл белсенді ҒА орбитасын басқарудың көптеген өзекті мәселелерінде қолданылады.

Түйін сөздер: ғарыш кемесі; ҒА позициясын болжау; орбитаны анықтау; төмен орбиталық орбита; орбитаны бағалау; бұзушы күштер; сандық интеграция; Рунге-Кутта әдістері, ковариациялық матрица.

А.Г. Есенғалиев¹, А.Б. Муканов²

¹ Ghalam LLP, пр. Туран, 89, Астана, Казахстан

² Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, ул. Кажымукана 11, Астана, Казахстан

Высокоточный прогноз движения КА с прогнозом ковариационной матрицы

Аннотация. В данной статье предлагается использовать модель высокоточного прогнозирования положения КА, в которой возмущающие ускорения определены, а также представлены полученные численные результаты.

Все возмущающие силы, действующие на Космический аппарат(КА) моделируются, используются актуальные данные параметров модели атмосферного сопротивления, и также параметров IERS, EOP. Разработанное Программное обеспечение (ПО) для прогнозирования положения КА по орбите на LEO применимо для поддержки управления полетом КА, при этом обеспечивается точность уровня в 10-15 метров по вектору положения КА на недельном интервале времени.

При заданной модели движения КА и известных статистических характеристиках погрешностей определения орбиты вместе с вектором состояния прогнозируется и ковариационная матрица, что нашло применение во многих актуальных задачах по поддержке Динамики полета КА.

Ключевые слова: Космический Аппарат, прогнозирование положения КА, определение орбиты, низкоорбитальная орбита, оценка орбиты, возмущающие силы, численное интегрирование, методы Рунге-Кутта, ковариационная матрица.

References

- 1 Prince P.J., Dormand J.R., High order embedded Runge-Kutta formulae, Journal of Computational and Applied Mathematics. 1981. Vol. 7(1). P. 67-75.
- 2 Vallado D. A., Fundamentals of Astrodynamics and Applications. 4th Ed. 2013. 1106 p.
- 3 Capderou M. Satellites Orbits and Missions, Springer-Verlag France. 2005. 67 p.
- 4 Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008; presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, 2008, April 13-18.
- 5 Rizos C., Stolz A. Force modelling for GPS satellite orbits, Proceedings of the 1st International Symposium Precise Positioning with GPS. 1985. Vol. 1. P. 87-98.
- 6 Love A.E.H. The yielding of the earth to disturbing forces. Proceedings of the Royal Society A. 1909. Vol. 82. №551.
- 7 Escobal, Pedro R., Methods of Orbit Determination. New York: John Wiley & Sons. (Reprint edition. Malabar FL: Krieger Publishing Co.), 1965, p. 37
- 8 Hairer E., Norsett S.P., Wanner G., Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- 9 Wang H.B., Xue F., and Liu C.J. Test method of satellite coverage area and its engineering application, Radio Communications Technology. 2010. Vol. 3. P. 19.
- 10 Wang M., Ma L., Zhang L., and Ji H. Analysis of horizontal positioning error distribution of the Chinese area positioning system, Astronomical Research & Technology. 2012. Vol. 9. №3. P. 522-526.

- 11 Dai G., Chen X., Zuo M., Peng L., Wang M. and Song Z. The Influence of Orbital Element Error on Satellite Coverage Calculation, International Journal of Aerospace Engineering. 2018. Vol. 2018. P. 6.
- 12 Vallado D.A., An analysis of state vector propagation using differing flight dynamics programmes. Paper AAS 05-199 presented at the AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference. Copper Mountain, CO, 2005.
- 13 Hughes SP, Qureshi RH, Cooley DS, Parker JJ, Grubb TG, Verification and validation of the general mission analysis tool (GMAT), in 2014 AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, San Diego, CA, 4-7 Aug 2014.

Information about authors:

Есенғалиев Арман Гибатович – **Байланыс үшін автор**, Ғарыштық Технологияның Арнайы Конструкторлық-технологиялық бюросы(ҒТ АКТБ) жетекші инженер-конструкторы, "Ghalam" LLP, Туран даңғ., 89, Астана, Қазақстан.

Муканов Асхат Бирлесович – PhD, аға оқытушы, М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Қазақстан филиалы, Қажымұқан көш., 11, Астана, Қазақстан.

Yessengaliyev Arman – **Corresponding author**, Lead design engineer of the Special Design and Technology department, Ghalam LLP, 89, Turan avenue, Astana, Kazakhstan.

Mukanov Askhat – PhD in Mathematics, Senior Lecturer, Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, Kazhymukan str. 11, Astana, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 07.12.2022

GRNTI: 30.17.23, 27.35.21, 50.51.15

Д.Е.Курманова¹, Н.Ж.Джайчибеков², К.Н.Волков³, А.Г.Карпенко⁴

^{1,2} Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан

³ Университет Кингстона, SW15 3DW, Лондон, Великобритания

⁴ Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский пр., 28, Санкт-Петербург, Россия

(E-mail: dikonyu89_29@mail.ru, jaich@mail.ru)

Численный расчет гидродинамики теплоносителей с учетом зависимости вязкости от температуры

Аннотация: Статья посвящена исследованию гидродинамики теплоносителей в теплообменных аппаратах. Учитывая широкое применение этого устройства, повышение его тепловых и гидравлических характеристик стало столь важным для их проектировщиков. В работе проведен расчет нестационарных течений жидкостей по трубкам теплообменника. В качестве теплоносителей используются вода ("горячий" теплоноситель) и нефть ("холодный" теплоноситель), между которыми происходит теплообмен через твердую поверхность трубопровода, являющейся границей между теплоносителями. При расчете движения нефти учитывался тот факт, что динамическая вязкость очень сильно зависит от температуры и, в зависимости от температуры, числа Рейнольдса также меняются. И, как следствие, при течении по достаточно тонкому каналу меняется режим течения, а именно, проявляется переход от ламинарного режима течения в турбулентный, в то время как при аналитическом методе расчета для постоянной вязкости этот эффект не наблюдается. Для численного моделирования гидродинамики теплоносителей применялись осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса, замкнутые при помощи модели турбулентности. Верификация расчетов теплообменника проведена в программном пакете "Ansys Fluent".

Ключевые слова: теплообмен, вязкость, гидродинамика, нефтепродукты, численное моделирование, ламинарно-турбулентный переход.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/4.2>

2000 Mathematics Subject Classification: 80M20

Введение. Для трубопроводной транспортировки нефти и нефтепродуктов используется подход, основанный на регулировании реологических свойств нефти, например, при помощи нагрева нефти с ее последующей транспортировкой по трубопроводу с повышенной теплоизоляцией (горячая перекачка нефти). В некоторых случаях увеличение вязкости нефти при понижении температуры приводит к недопустимым напряжениям на стенках трубы и остановке транспортировки. В работе [1] проведены исследования зависимости кинематической вязкости нефти и смесей нефти от температуры, а также проанализированы существующие формулы для расчета кинематической вязкости нефти в магистральных трубопроводах.

Течение жидкости в межтрубном пространстве теплообменника имеет сложный характер и зависит от множества факторов. Численное моделирование теплообмена и гидродинамики в теплообменных устройствах различных конструкций приводится в работах [2], [3]. Результаты численных расчетов находят применение для нахождения оптимальных способов интенсификации процессов теплообмена [4-6]. Полученные

результаты указывают на уменьшение влияния вязкости перекачиваемой нефти на гидравлическую характеристику трубопровода при перекачке на развитых турбулентных режимах.

Сравнение точности различных моделей турбулентности, используемых для замыкания уравнений Рейнольдса, является предметом исследования в работах [7–10]. В основном, в расчетах используются $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ модели турбулентности, а также SST $k - \omega$ модель. Полученные результаты позволяют добиться удовлетворительного совпадения результатов расчетов с данными промышленных экспериментов. Это позволяет решать задачи управления процессами и повышения эффективности производства и определения оптимальных режимных параметров технологических процессов. Вместе с тем, имеющиеся расчеты с использованием двухпараметрических моделей турбулентности не учитывают ламинарно-турбулентный переход. В случае, когда вязкость зависит от температуры, режим течения в таких тонких трубках может изменяться от ламинарного до турбулентного.

Для простоты выбирается схема теплообменника "труба в трубе" с тонкой и гладкой внутренней трубкой. Приводится метод расчета теплообменника прямоточного типа, в котором во внутреннем трубопроводе рабочей жидкостью является нефть (холодный теплоноситель), а во внешней трубе - вода (горячий теплоноситель). Расчеты проводятся для модельной конструкции теплообменного аппарата как при помощи теоретического подхода, основанного на методе среднелогарифмической разницы температур (Log-Mean Temperature Difference, LMTD) при постоянной и переменной вязкости, так и на основе средств вычислительной гидродинамики (Computational Fluid Dynamics, CFD). Данные, полученные в рамках различных подходов, сравниваются между собой, что позволяет сделать вывод о точности каждого из подходов и возможности их применения на практике.

Зависимость вязкости теплоносителей от температуры. В рассматриваемой задаче принято, что залежи нефти находятся на глубине 0.9-2.4 км. Плотность нефти составляет 844-874 кг/м³, вязкость - 3.4-8.15 мПа·с, содержание серы - 0.16-2%, парафинов 16-22%, смол - 8-20%. Эти параметры соответствуют характеристикам Узеньского нефтегазового месторождения расположенного в Казахстане.

В литературе применяются различные зависимости вязкости от температуры. В нефтяной отрасли при расчете кинематической вязкости, зависящей от температуры, применяется формула Вальтера [1]

$$\lg(\lg(\nu + 0,8)) = a + b \lg T \quad (1)$$

где a и b – эмпирические коэффициенты, определяемые для данной жидкости экспериментальным путем. Коэффициенты a и b в формуле (1) находятся из соотношений

$$a = \lg \lg(\nu_1 + 0,8) - b \lg T$$

$$b = \frac{\lg \lg(\nu_1 + 0,8) - \lg \lg(\nu_2 + 0,8)}{\lg T_1 - \lg T_2}$$

Здесь ν_1 и ν_2 – значения кинематической вязкости жидкости при температурах T_1 и T_2 .

Сравнение результатов расчетов по формуле Вальтера с экспериментальными значениями динамической вязкости для нефти показывает 1.

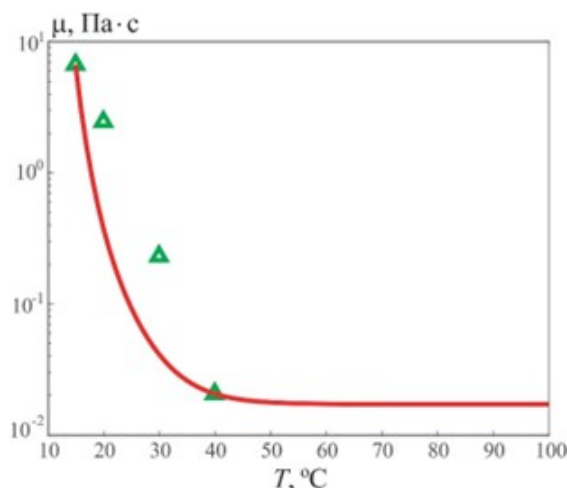


Рисунок 1 – Зависимость динамической вязкости нефти Узеньского месторождения от температуры. Треугольные значки - экспериментальные данные [11], сплошная линия - расчеты по формуле Вальтера

Температура изменяется от 10 до 100⁰С. Сплошная линия соответствует зависимости вязкости от температуры, полученной по формуле Вальтера (1), а треугольные значки - результатам физического эксперимента [11]

Метод расчета при постоянной вязкости. Для оценки тепловых потоков от горячего теплоносителя к холодному применяется модель теплоносителя с постоянной по длине вязкостью, основанная на использовании среднелогарифмической разницы температур. В рекуперативном теплообменном аппарате две жидкости с различными температурами движутся в пространстве, разделенной твердой стенкой рис.2. Тепловой расчет сводится к совместному решению уравнений теплового баланса и теплопередачи.

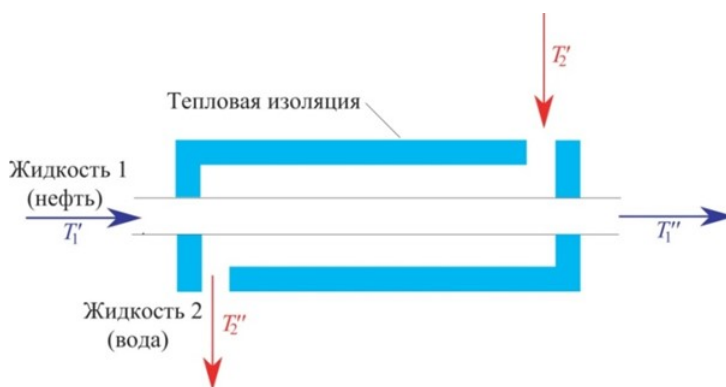


Рисунок 2 – Схема теплообменного аппарата, в котором теплоносители движутся в противоположном направлении

Уравнение теплового баланса имеет вид [12]

$$Q = G_1 c_{p1} (T_{1'} - T_{1''}) = G_2 c_{p2} (T_{2''} - T_{2'}) > 0, \quad (2)$$

где Q – количества теплоты, переданное в единицу времени от горячего теплоносителя холодному, G – массовый расход теплоносителя, c_p – изобарная теплоемкость, T' – температура на входе, T'' – температура на выходе. Индекс 1 соответствует горячему теплоносителю, а индекс 2 – холодному теплоносителю.

Уравнение теплопередачи для теплообменного аппарата представляется в виде

$$Q = \bar{k} F \Delta \bar{T}, \quad (3)$$

где \bar{k} – средний коэффициент теплопередачи, который рассчитывается при средней температуре $(T_1' + T_1'')/2$ и $(T_2' + T_2'')/2$, $\Delta\bar{T}$ – средняя разность температур. Средняя разность температур определяется выражением

$$\Delta\bar{T} = \frac{1}{F} \int_0^F \Delta T dF$$

где F – площадь поверхности теплообмена.

Используя обозначение $\Delta T = (T_1 - T_2)$, уравнения (2) и (3) в дифференциальной форме примут вид

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -m k dF, \quad m = \left(\frac{1}{G_1 c_{p1}} \pm \frac{1}{G_2 c_{p2}} \right)$$

Знак плюс выбирается в случае проточного аппарата, а знак минус – в случае противоточного теплообменника. Приведенное уравнение справедливо вдоль направления движения горячего теплоносителя. Принимая, что m и \bar{k} являются постоянными по длине аппарата и интегрируя от 0 до F и от $\Delta T'$ и ΔT , получим

$$\Delta T = \Delta T' \exp(-m \bar{k} F), \quad (4)$$

где $\Delta T'$ – перепад температур на входе горячего теплоносителя. Вдоль поверхности теплообмена температурный напор изменяется по экспоненциальному закону. Проводя усреднение температурного напора по всей поверхности теплообмена, среднелогарифмический температурный напор находится из соотношения

$$\Delta\bar{T} = \frac{\Delta T'' - \Delta T'}{\ln(\Delta T'' / \Delta T')}.$$

При конструктивном расчете теплообменных устройств тепловая производительность Q определяется по уравнению (2). Площадь поверхности теплообмена F находится из уравнения

$$F = \frac{Q}{\bar{k} \Delta\bar{T}}$$

При расчете площади поверхности теплообмена задача сводится к вычислению среднего коэффициента теплопередачи и среднелогарифмического температурного напора. Длина теплообменного устройства рассчитывается по формуле

$$L = \frac{F}{\pi n d}$$

где n – число внутренних трубок, d – их гидравлический диаметр.

Распределения температур вдоль поверхности теплообмена выражаются соотношениями:

$$T_1(x) = T_1' - \Delta T' \frac{1 - \exp[-\bar{k} m F(x)]}{1 + (G_1 c_{p1}) / (G_2 c_{p2})}$$

$$T_2(x) = T_2' - \Delta T' \frac{1 - \exp[-\bar{k} m F(x)]}{1 + (G_2 c_{p2}) / (G_1 c_{p1})}$$

Здесь $F(x)$ – зависимость площади поверхности теплообмена от длины, измеренной вдоль пути горячего теплоносителя. В случае цилиндрической поверхности площадь теплообмена выражается через длину $F(x) = \Pi x$, где Π – смоченный периметр поверхности теплообмена.

Для случая тонких цилиндрических стенок соотношения для температур поверхности имеют вид

$$T_{w1} = \frac{\left(\frac{\alpha_1 F_1}{\alpha_2 F_2} + \frac{\alpha_1 F_1 \delta_w}{\lambda_w F_a} \right) T_1 + T_2}{1 + \frac{\alpha_1 F_1}{\alpha_2 F_2} + \frac{\alpha_1 F_1 \delta_w}{\lambda_w F_a}}$$

$$T_{w2} = \frac{\left(\frac{\alpha_2 F_2}{\alpha_1 F_1} + \frac{\alpha_2 F_2 \delta_w}{\lambda_w F_a} \right) T_2 + T_1}{1 + \frac{\alpha_2 F_2}{\alpha_1 F_1} + \frac{\alpha_2 F_2 \delta_w}{\lambda_w F_a}}.$$

Здесь $F_a = (F_1 + F_2)/2$, F_1 - площадь теплообмена со стороны теплоносителя 1, F_2 - площадь теплообмена со стороны теплоносителя 2, δ_w - толщина стенки, λ_w - коэффициент теплопроводности стенки, α - коэффициент теплоотдачи. Приведенные соотношения для температуры стенки являются неявными и требуют итерационного решения, так как коэффициент теплоотдачи α зависит от температуры.

Для однослойной цилиндрической стенки средний коэффициент теплопередачи вычисляется следующим образом

$$\bar{k} = \left(\frac{1}{\bar{\alpha}_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_w} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\bar{\alpha}_2 d_2} \right)^{-1},$$

где $\bar{\alpha}_1$ - осредненный коэффициент теплоотдачи к холодному теплоносителю, $\bar{\alpha}_2$ - осредненный коэффициент теплоотдачи к горячему теплоносителю, λ_w - коэффициент теплопроводности стенки.

Число Нуссельта зависит от режима течения (ламинарный или турбулентный) и режима теплообмена (нагрев или охлаждение). Осредненный коэффициент теплоотдачи выражается через среднее по длине число Нуссельта, где $d_g = \frac{4F_g}{\Pi}$ - эффективный гидравлический диаметр, F_g - площадь проходного сечения канала, Π - смоченный периметр, λ - теплопроводность жидкости. При течении в трубе или при продольном обтекании пучков труб число Нуссельта вычисляется с помощью полуэмпирической зависимости вида

$$Nu = Nu(Re, Pr, Pr_w, L/d_g),$$

где Pr - число Прандтля жидкости, Pr_w - число Прандтля жидкости, вычисленное по температуре стенки. Числа подобия вычисляются по средней температуре теплоносителя. Число Рейнольдса определяется соотношением $Re = \rho V d_g / \mu$, где V - характерная скорость потока, ρ - плотность, μ - динамическая вязкость.

Метод расчета при переменной вязкости. В случае сильной зависимости вязкости от температуры теплообменник разбивается на элементарные участки по длине. На каждом участке делается предположение о малом изменении вязкости.

При слабой зависимости вязкости теплоносителя от температуры среднее число Рейнольдса находится по средней температуре теплоносителя. Такое допущение не вносит существенных погрешностей в расчет, поскольку практически не сказывается на режиме течения. В случае сильной зависимости вязкости от температуры по мере нагрева теплоносителя режим течения изменяется от ламинарного до развитого турбулентного. В этом случае вычисляется местный коэффициент теплоотдачи $\alpha(x)$, и используются соотношения для локального числа Нуссельта $Nu_x = \alpha(x) d_g / \lambda$, вычисленного по локальным числам подобия

$$Nu_x = Nu(Re_x, Pr_x, Pr_w, x/d_g),$$

Среднее значение коэффициента теплоотдачи находится по формуле

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx$$

Локальные числа Нуссельта в ламинарном и турбулентном режимах течения находятся при помощи соотношений, приведенных в работах [12, 13]. Для вычисления локального числа Нуссельта в ламинарном режиме течения в трубе применяется соотношение [13]

$$Nu_x = 4.36 \left(1 + 0.032 \frac{d}{x} Re_x Pr_x^{\frac{5}{6}} \right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{Pr_x}{Pr_{x,w}} \right),$$

Приведенное соотношение справедливо при $0.7 < Pr < 10^3$. Выражение для вычисления локального числа Нуссельта для турбулентного режима течения в трубе с дополнительной поправкой на изменение числа Прандтля имеет вид [12]

$$Nu_x = 0.022 Re_x^{0.8} Pr_x^{0.43} \left(\frac{Pr_x}{Pr_{x,w}} \right)^{0.25} \varepsilon_l,$$

где

$$\varepsilon_l = \begin{cases} 1, & \text{при } x/d \geq 15 \\ \frac{1.38}{(x/d)^{0.12}}, & \text{при } x/d < 15 \end{cases}$$

Для кольцевого канала в турбулентном режиме течения используется соотношение как и для течения в трубе, но со своим эквивалентным гидравлическим диаметром.

Уравнение теплового баланса для элементарного участка в направлении движения горячего теплоносителя записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dx} &= G_1 c_{p1}(T_1) \frac{dT_1}{dx}, & \frac{dQ_1}{dx} &\leq 0, \\ \frac{dQ_2}{dx} &= \pm G_2 c_{p2}(T_2) \frac{dT_2}{dx}, & \frac{dQ_2}{dx} &\geq 0 \\ \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dx} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь dQ_1 - потери количества теплоты горячим теплоносителем, dQ_2 - приобретенное количество теплоты холодным теплоносителем, G - массовый расход теплоносителя, c_p - теплоемкость, dT - изменение температуры. Знак плюс соответствует прямоточной схеме, а знак минус - противоточной схеме.

Уравнение теплопередачи для элементарного участка принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{dx} &= k(T_1, T_2)(T_2 - T_1) \frac{dF}{dx}, & \frac{dQ_1}{dx} &\leq 0 \\ \frac{dQ_2}{dx} &= k(T_1, T_2)(T_1 - T_2) \frac{dF}{dx}, & \frac{dQ_2}{dx} &\geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где k - коэффициент теплопередачи, dF/dx - изменение площади теплообмена, которая для ТОА из прямых труб остается постоянной величиной.

Из уравнений (5) и (6) следует замкнутая система уравнений относительно температур теплоносителей

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dx} &= \frac{k(T_1, T_2)}{G_1 c_{p1}(T_1)} (T_2 - T_1) \frac{dF}{dx}, \\ \frac{dT_2}{dx} &= \pm \frac{k(T_1, T_2)}{G_2 c_{p2}(T_2)} (T_1 - T_2) \frac{dF}{dx}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку $dF/dx = const$ и является известной, то система уравнений (7) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейной правой частью. В случае прямоточной схемы (знак плюс) для системы (7) ставится задача Коши, а для противоточной схемы (знак минус) решается краевая задача. При этом интегрирование ведется до длины L , которая заранее неизвестна.

Система уравнений (7) решается методом конечных разностей на интервале $x \in [0, L]$. Для стабилизации итерационного процесса при линеаризации системы применяется метод нижней релаксации. Длина промежутка интегрирования L заранее неизвестна. Для ее определения используется метод Ньютона. Локальный коэффициент теплопередачи находится с использованием локальных коэффициентов теплоотдачи

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_w} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)^{-1},$$

где α_1 - местный коэффициент теплоотдачи от холодного теплоносителя к стенке, α_2 - местный коэффициент теплоотдачи со стороны горячего теплоносителя, λ_w - коэффициент теплопроводности материала трубок.

Используемые модели гидродинамики теплоносителей. Результаты расчетов сравниваются с данными, полученные методами вычислительной гидродинамики. Нефть считается ньютоновской жидкостью с постоянной плотностью. Расчеты проводятся при помощи численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса

(Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS) для вязкой несжимаемой жидкости, замкнутых при помощи модели турбулентности, учитывающей ламинарно-турбулентный переход.

Модель турбулентности SST $k-\omega$ разработана для эффективного сочетания надежной и точной модели $k-\omega$ в пристеночной области и модели $k-\varepsilon$ в свободном потоке [14,15]. Для переключения между моделями используется специальная функции, которая принимает единичное значение в пристеночной области (используется стандартная модель $k-\omega$) и нулевое значение вдали от стенки (используется модель $k-\varepsilon$).

Модель, учитывающая ламинарно-турбулентный переход (Local-Correlation Transition Model, $\gamma - Re_{\theta t}$ transition model), основана на сочетании уравнений SST $k-\omega$ модели турбулентности с двумя дополнительными уравнениями переноса для параметра перемежаемости γ и критического числа Рейнольдса $Re_{\theta t}$, построенного по толщине потери импульса [16,17]. Для упрощения модели уравнение для $Re_{\theta t}$ не рассматривается, а в уравнении для параметра перемежаемости делается предположение о малости конвективных слагаемых [18]. Такой подход приводит к алгебраическим соотношениям для нахождения параметра перемежаемости.

Для дискретизации основных уравнений используется метод конечных объемов на неструктурированных сетках и метод SIMPLE [19]. Дискретизация невязких потоков осуществляется при помощи схемы MUSCL (Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws), которая позволяет повысить порядок аппроксимации по пространственным переменным без потери монотонности решения, удовлетворяет условию TVD (Total Variation Diminishing) и представляет собой комбинацию центрированных конечных разностей 2-го порядка и диссипативного члена. Для решения системы разностных уравнений используется геометрический многосеточный метод [20].

В расчетах используется сетка, состоящая из 19461 ячеек, из которых 500x24 ячеек размещается в области, заполненной нефтью, 500x5 ячеек - в области из стали, а 500x13 - в области, заполненной водой. Сгущение ячеек сетки производится около стенок трубы таким образом, чтобы $y^+ < 2$, где y^+ - безразмерная пристеночная координата.

Результаты расчетов и обсуждение. Схему теплообменника прямоточного типа показывает рис.3 (размеры приводятся в миллиметрах). Индекс h соответствует горячей среде (вода), индекс c - холодной среде (нефть). Индексы i и o относятся к входному и выходному сечению.

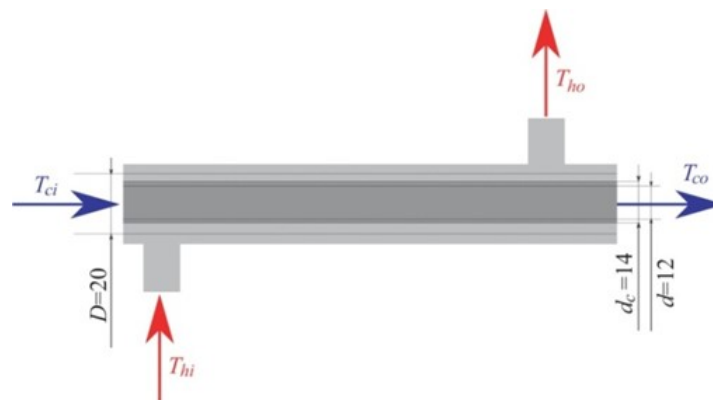


Рисунок 3 – Схема теплообменника прямоточного типа

Решая уравнения теплового баланса методом конечных разностей, получим распределения среднемассовых температур теплоносителей. Полученные результаты сравниваются с данными численного моделирования. На рис.4 показаны распределения среднемассовой температуры нефти (холодного теплоносителя) вдоль длины теплообменника, полученные при помощи метода конечных разностей и на основе численного моделирования.

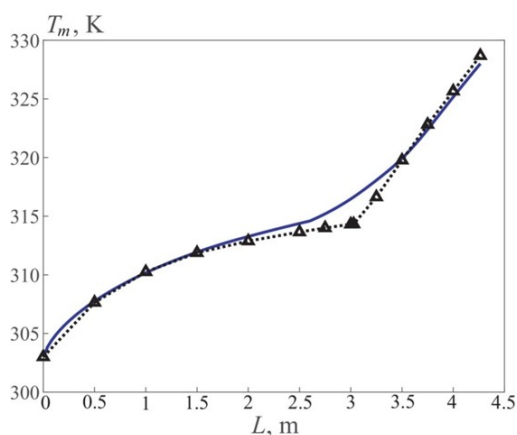


Рисунок 4 – Распределения среднемассовой температуры нефти вдоль длины. Сплошная линия соответствует результатам, полученным на основе теоретического подхода, а пунктирная линия с треугольными значками - результатам численных расчетов

Среднемассовая температура нефти возрастает вдоль длины за счет нагревания от источника тепла (горячего теплоносителя). Результаты аналитических и численных расчетов достаточно хорошо согласуются между собой.

Распределения среднемассовой температуры воды (горячего теплоносителя) вдоль длины, полученные на основе аналитических и численных расчетов, показаны на рис.5

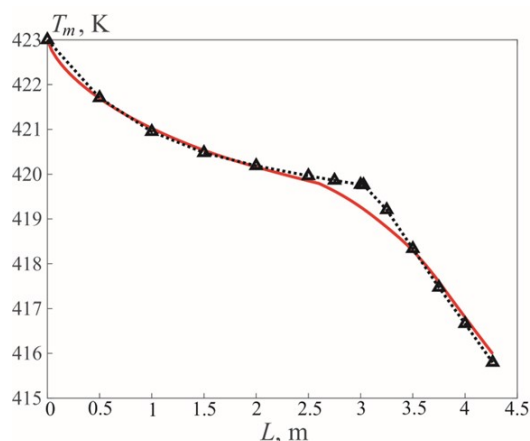


Рисунок 5 – Распределения среднемассовой температуры воды вдоль длины. Сплошная линия соответствует результатам, полученным на основе теоретического подхода, а пунктирная линия с треугольными значками - результатам численных расчетов

По сравнению с результатами, приведенными на рис.5, среднемассовая температура воды убывает вдоль длины трубы за счет передачи тепла от нее к холодному теплоносителю. Также следует отметить хорошее согласование результатов расчетов, полученных на основе различных подходов.

Из результатов, показанных на рис.4 и 5, можно заметить характерные изменения кривизны линий на расстоянии порядка 2.5 м от входного сечения, где в обоих случаях происходят резкие изменения градиентов температур с соответствующими знаками. Этот переход происходит на том расстоянии, где ламинарный режим течения переходит в турбулентный.

На рис. 6 приводятся графики изменения числа Рейнольдса теплоносителей вдоль длины, полученные в аналитическом расчете с моделью переменной вязкости. Для воды число Рейнольдса практически не меняется вдоль длины при постоянном значении вязкости и незначительном изменении температуры воды. Обратная картина наблюдается для холодного теплоносителя (нефти). Число Рейнольдса существенно возрастает вдоль

длины, что связывается с резким уменьшением вязкости нефти при ее практически неизменной плотности. На рисунке также наблюдается переходный участок на расстоянии порядка от 1.85 до 3.8 м, где происходит переход ламинарного течения в турбулентный.

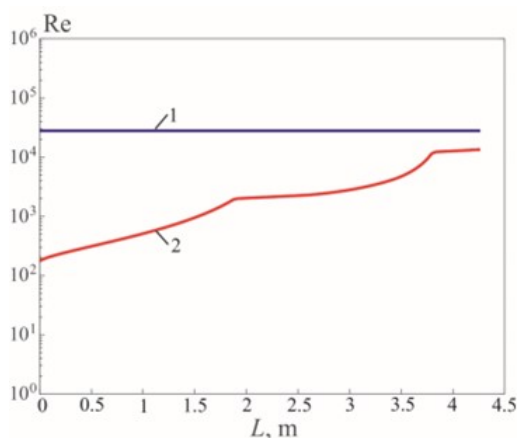


Рисунок 6 – Распределения чисел Рейнольдса по длине, полученные в аналитическом расчете. Линия 1 соответствует воде, а линия 2 - нефти

На рис.7 приведен график изменения числа Рейнольдса нефти (холодного теплоносителя) вдоль длины теплообменного аппарата при переменных значениях вязкости нефти (линия 1).

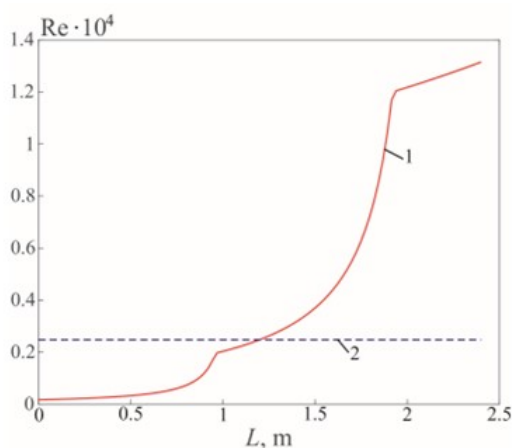


Рисунок 7 – Распределения чисел Рейнольдса нефти вдоль длины. Линия 1 соответствует численному расчету при переменной вязкости, а линия 2 - теоретическому расчету

Из рисунка видно, что значения числа Рейнольдса резко возрастают вдоль продольной координаты, что объясняется уменьшением вязкости нефти за счет ее нагревания. На рисунке приведен также график поведения числа Рейнольдса нефти при средней температуре теплоносителя (линия 2). При постоянной вязкости число Рейнольдса холодного теплоносителя также постоянно вдоль длины и не может адекватно характеризовать теплообмен в данном теплообменном аппарате.

Распределения осевой скорости теплоносителя (нефти) в различных поперечных сечениях трубопровода показывает рис.8.

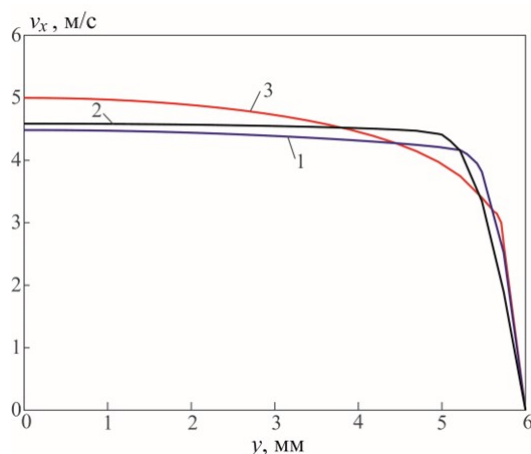


Рисунок 8 – Радиальные распределения осевой скорости нефти в различных поперечных сечениях трубопровода при $x=0.5$ м (линия 1), $x=1.5$ м (линия 2) и в выходном сечении (линия 3)

В поперечном сечении скорость нефти изменяется от максимального значения на оси трубопровода до нуля на его поверхности. Увеличение осевой скорости на выходе объясняется уменьшением вязкости нефти за счет ее нагрева по мере приближения к выходному сечению. При этом для нефти имеет место турбулентный режим течения.

Распределения осевой скорости воды в выходном сечении трубопровода показывает рис.9.

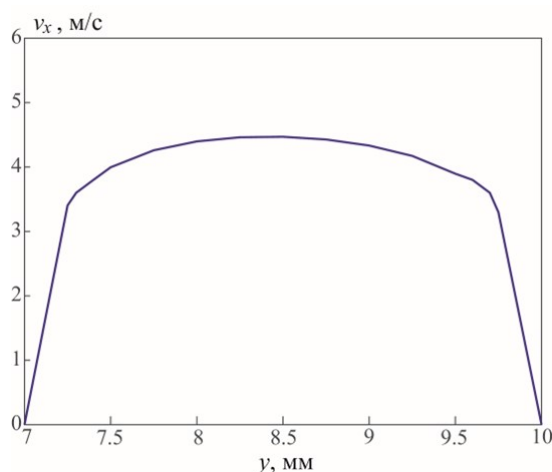


Рисунок 9 – Радиальное распределение осевой скорости воды в выходном сечении

Скорость воды изменяется от нуля на стенке до максимального значения на оси канала. Течение воды при этом является турбулентным. Профиль скорости имеет характер, типичный для турбулентного течения в круглой трубе, являясь более наполненным вблизи оси и имея большие градиенты скорости вблизи стенки по сравнению с ламинарным течением.

Распределение усредненного по сечению давления нефти показывает рис.10. Перепад давления по всей длине трубы составляет около $0,52 \cdot 10^5$ Па.

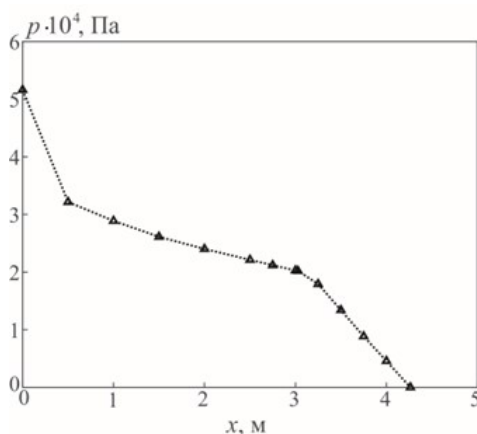


Рисунок 10 – Распределение усредненного по сечению давления нефти

Изменение коэффициента потерь на трение по длине трубы показывает рис.11.

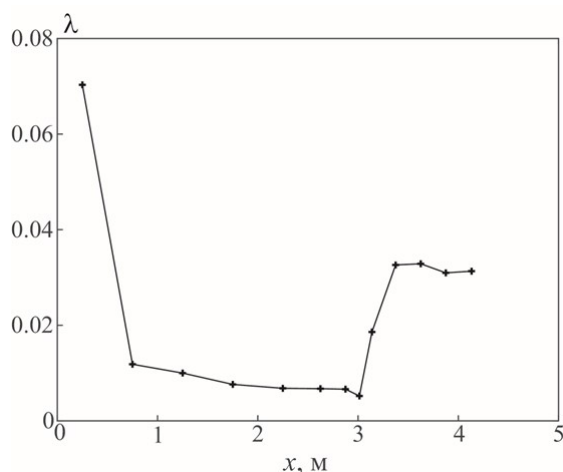


Рисунок 11 – Распределение коэффициента трения по длине трубы

Коэффициент трения вычисляется локально на некотором промежутке, используя соотношение $\lambda = 2d(\Delta p/\Delta x)/(\rho v^2)$, где Δx - расстояние между двумя точками, в которых измеряется усредненное по сечению давление, Δp - разница давлений в этих точках.

Заключение. Снижение вязкости нефти при помощи ее нагрева является одним из способов повышения энергоэффективности процесса перекачки высоковязкой нефти при добыче и транспортировке. Численное моделирование позволяет решить ряд вопросов, связанных с повышением эффективности теплопередачи, которая остается одной из наиболее важных при проектировании теплообменных устройств в нефтегазовой отрасли.

Проведены численные расчеты для определения распределения скорости, давления температуры по длине теплообменного аппарата в случае постоянной и переменной вязкости нефти. При переменной вязкости нефти проявляется переход от ламинарного режима в турбулентный, в то время как при аналитическом методе расчета для постоянной вязкости этот эффект не учитывается. Полученные результаты показывают, что модель с постоянной вязкостью приводит к заниженной примерно на 20% длине теплообменного аппарата по сравнению с расчетами, учитывающими зависимость вязкости нефти от температуры.

Список литературы

- 1 Аралов О.В. Буянов И.В. Саванин А.С. Иорданский Е.И. Исследование методов расчета кинематической вязкости нефти в магистральном нефтепроводе // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. - 2017. - Т. 7, № 5. - С. 97-105.

- 2 Yogesh S.S. Selvaraj A.S. Ravi D.K. Rajagopal T.K.R. Heat transfer and pressure drop characteristics of inclined elliptical fin tube heat exchanger of varying ellipticity ratio using CFD code // International Journal of Heat and Mass Transfer. - 2018. - Vol. 119. - P. 26-39.
- 3 Chen K. Mohammed H.I. Mahdi J.M. Rahbari A. Cairns A. Talebizadehsardari P. Effects of non-uniform fin arrangement and size on the thermal response of a vertical latent heat triple-tube heat exchanger // Journal of Energy Storage. - 2022. - Vol. 45. - P. 103723.
- 4 Osley W.G. Droegemueller P. Ellerby P. CFD investigation of heat transfer and flow patterns in tube side laminar flow and the potential for enhancement // Chemical Engineering Transactions. - 2013. - Vol. 35. - P. 997-1002.
- 5 Karar O. Emani S. Gounder S.M. Myo Thant M.M. Mukhtar H. Sharifpur M. Sadeghzadeh M. Experimental and numerical investigation on convective heat transfer in actively heated bundle-pipe // Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. - 2021. - Vol. 15, no. 1. - P. 848-864.
- 6 Rana S. Zunaid M. Kumar R. CFD approach for the enhancement of thermal energy storage in phase change material charged heat exchanger // Case Studies in Thermal Engineering. - 2022. - Vol. 33. - P. 101921.
- 7 Allouche Y. Varga S. Bouden C. Oliveira A.C. Validation of a CFD model for the simulation of heat transfer in a tubes-in-tank PCM storage unit // Renewable Energy. - 2016. - Vol. 89. - P. 371-379.
- 8 Balaji D. Prakash L.S.S. CFD analysis of a pressure drop in a staggered tube bundle for a turbulent cross flow // International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology. - 2016. - Vol. 3, no. 2. - P. 35- 40.
- 9 T. Czarnota, C. Wagner. Turbulent convection and thermal radiation in a cuboidal Rayleigh-Benard cell with conductive plates // International Journal of Heat and Fluid Flow. - 2016. - Vol. 57. - P. 150-172.
- 10 Mohanan A.K. Prasad B.V. Vengadesan S. Flow and heat transfer characteristics of a cross-flow heat exchanger with elliptical tubes // Heat Transfer Engineering. - 2020. - P. 1-15.
- 11 Тугунов П.И. Новоселов В.Ф. Коршак А.А. Шаммазов А.М. Типовые расчеты при проектировании и эксплуатации нефтебаз и нефтепроводов. - М.: Дизайн Полиграф Сервис, 2002.
- 12 Исаченко В.П. Осипова В.А. Сукомел А.С. Теплопередача. - М.: Энергия, 1965.
- 13 Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. - 2-е, стереотип. изд. - М.: "Энергия", 1977. - С. 344.
- 14 Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal, Vol. 32, No. 8, pp. 1598-1605. - 1994.
- 15 Menter Florian, Esch Thomas, Kubacki Slawomir. Transition modelling based on local variables. - 2002. - 09. - P. 555-564.
- 16 Langtry Robin B., Menter Florian R. Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes // AIAA Journal 2009 47:12, 2894-2906. - 2009. - Dec. - Vol. 47, no. 12.
- 17 Coder J.G. Maughmer M.D. Computational fluid dynamics compatible transition modeling using an amplification factor transport equation // AIAA Journal. - 2014. - Vol. 52, no. 11. - P. 2506-2512.
- 18 Menter F.R. Smirnov P.E. Liu T. Avancha R. A one-equation local correlation-based transition model // Flow, Turbulence and Combustion. - 2015. - Vol. 95. - P. 583-619.
- 19 K. Volkov. Numerical analysis of Navier-Stokes equations on unstructured meshes // Handbook on Navier-Stokes Equations: Theory and Analysis // D. Campos. Nova Science. - 2016. - P. 365-442.
- 20 K. Volkov. Multigrid and preconditioning techniques in CFD applications // CFD Techniques and Thermo-Mechanics Applications/Z. Driss, B. Necib, H.-C. Zhang. Springer International Publishing. - 2018. - P. 83-149.

Д.Е. Курманова¹, Н.Ж. Джайчибеков², К.Н. Волков³, А.Г. Карпенко⁴

^{1,2} Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Қажымұқан даңғ., 13, Астана, Қазақстан

³ Кингстон университеті, SW15 3DW, Лондон, Ұлыбритания

⁴ Санкт-Петербург мемлекеттік университеті, Университет даңғ., 28, Санкт-Петербург, Ресей

Тұтқырлықтың температураға тәуелділігін ескере отырып, жылу тасымалдағыштардың гидродинамикасының сандық есебі

Аннотация. Мақала жылу алмасу аппараттарындағы жылу тасымалдағыштың гидродинамикасын зерттеуге арналған. Жұмыста жылу алмастырғыш түтіктер арқылы сұйықтықтардың стационарлық емес ағындарына есептеу жүргізілді. Жылу тасымалдағыш ретінде су ("ыстық" жылу тасымалдағыш) және мұнай ("суық" жылу тасымалдағыш) қолданылады, олардың арасында жылу тасымалдағыштар арасындағы шекара болып табылатын құбырдың қатты беті арқылы жылу алмасу жүреді. Мұнайдың қозғалысын есептеу кезінде динамикалық тұтқырлықтың температураға өте тәуелді екендігі және температураға байланысты Рейнольдс сандары да өзгертіні ескерілді. Нәтижесінде, өте жұқа арна арқылы ағынмен ағын режимі өзгереді, атап айтқанда, ламинарлы ағын режимінен турбулентті ағынға ауысу көрінеді, ал тұрақты тұтқырлықты есептеудің аналитикалық әдісімен бұл әсер байқалмайды. Жылу тасымалдағыш гидродинамикасын сандық модельдеу үшін турбуленттілік моделімен жабылған Рейнольдс бойынша орташа Навье-Стокс теңдеулері қолданылды. Жылу алмастырғыштың есептеулерін верификациялау "Ansys Fluent" бағдарламалық пакетінде жүргізілді.

Түйін сөздер: жылу алмасу, тұтқырлық, гидродинамика, мұнай өнімдері, сандық модельдеу, ламинарлы-турбулентті ауысу.

D.Y. Kurmanova¹, N.Dzh. Jaichibekov², K.N. Volkov³, A.G. Karpenko⁴

^{1,2} L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan, 13, Astana, 010008, Kazakhstan

³ Kingstone University, SW15 3DW, London, Great Britain

⁴ Saint-Peterburg state university, Universitetskii Ave., 28, Saint-Peterburg, Russia

Numerical calculation of the hydrodynamics of heat carriers, taking into account the dependence of viscosity on temperature

Abstract. The article is devoted to the study of the hydrodynamics of heat carriers in heat exchangers. Given the widespread use of this device, increasing its thermal and hydraulic characteristics has become so important for their designers. In the work, the calculation of non-stationary flows of liquids through the heat exchanger tubes is carried out. Water ("hot" coolant) and oil ("cold" coolant) are used as heat carriers, between which heat exchange occurs through the solid surface of the pipeline, which is the boundary between the heat carriers. When calculating the movement of oil, the fact was taken into account that the dynamic viscosity depends very much on temperature and, depending on temperature, the Reynolds numbers also change. And, as a consequence, when flowing through a sufficiently thin channel, the flow regime changes, namely, the transition from the laminar flow regime to the turbulent one is manifested, while this effect is not observed with the analytical calculation method for constant viscosity. The Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, closed using the turbulence model, were used for numerical modeling of fluid dynamics of heat carriers. Verification of the heat exchanger calculations was carried out in the software package "Ansys Fluent".

engwords: heat transfer, viscosity, hydrodynamics, petroleum products, numerical modeling, laminar-turbulent transition.

References

- 1 Aralov, O.V., Buyanov, I.V., Savanin, A.S., Iordanskii, E.I. Issledovanie metodov rascheta kinematicheskoi vyazkosti nefti v magistral'nom nefteprovode. [Investigation of methods for calculating the kinematic viscosity of oil in a trunk pipeline], Nauka i tehnologii truboprovodnogo transporta nefti i nefteproductov [Science and technology of pipeline transportation of oil and petroleum products],7(5), 97-105, (2017). [in Russian]
- 2 Yogesh, S.S., Selvaraj, A.S., Ravi, D.K., Rajagopal, T.K.R. Heat transfer and pressure drop characteristics of inclined elliptical fin tube heat exchanger of varying ellipticity ratio using CFD code. International Journal of Heat and Mass Transfer,119, 26-39, (2018).
- 3 Chen, K., Mohammed, H.I., Mahdi, J.M., Rahbari, A., Cairns, A., Talebizadehsardari, P. Effects of non-uniform fin arrangement and size on the thermal response of a vertical latent heat triple-tube heat exchanger. Journal of Energy Storage, 45, 103723, (2022).
- 4 Osley, W.G., Droegemueller, P., Ellerby, P. CFD investigation of heat transfer and flow patterns in tube side laminar flow and the potential for enhancement. Chemical Engineering Transactions, 35, 997-1002, (2013).
- 5 Karar, O., Emani, S., Gounder, S.M., Myo Thant, M.M., Mukhtar, H., Sharifpur, M., Sadeghzadeh, M. Experimental and numerical investigation on convective heat transfer in actively heated bundle-pipe. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 15(1), 848-864, (2021).
- 6 Rana, S., Zunaid, M., Kumar, R. CFD approach for the enhancement of thermal energy storage in phase change material charged heat exchanger. Case Studies in Thermal Engineering,33, 101921, (2022).
- 7 Allouche Y., Varga S., Bouden C., Oliveira A.C. Validation of a CFD model for the simulation of heat transfer in a tubes-in-tank PCM storage unit. Renewable Energy, 89, 371-379, (2016).
- 8 Balaji D., Prakash L.S.S. CFD analysis of a pressure drop in a staggered tube bundle for a turbulent cross flow. International Advanced Research Journal in Science, Engineering and Technology, 3(2), 35-40, (2016).
- 9 Czarnota T., Wagner C. Turbulent convection and thermal radiation in a cuboidal Rayleigh-Benard cell with conductive plates. International Journal of Heat and Fluid Flow, 57, 150-172, (2016).
- 10 Mohanan A.K., Prasad B.V., Vengadesan S. Flow and heat transfer characteristics of a cross-flow heat exchanger with elliptical tubes. Heat Transfer Engineering, 1-15, (2020).
- 11 Tugunov, P.I., Novoselov, V.F., Korshak, A.A., Shammazov, A.M. Tipovye raschety pri proektirovanii i ekspluatatsii neftebaz i nefteprovodov [Typical calculations in the design and operation of oil depots and pipelines] (Design Polygraph Service, Moscow, 2002). [in Russian]
- 12 Isachenko, V.P., Osipova, V.A., Sukomel, A.S. Teploperedacha [Heat transfer] (Energiya, Moscow, 1965). [in Russian]
- 13 Miheev, M.A., Miheeva, I.M. Osnovy teploperedachi. [Basics of heat transfer] (Energiya, Moscow, 1977). [in Russian]
- 14 Menter, F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. AIAA Journal,32(8), 1598-1605, (1994).
- 15 Menter, F., Esch, T., Kubacki, S. Transition modelling based on local variables. Engineering Turbulence Modelling and Experiments. Elsevier, 555-564, (2002).
- 16 Langtry, R.B., Menter, F.R. Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes. AIAA Journal, 47(12), 2894-2906, (2009).
- 17 Coder, J.G., Maughmer, M.D. Computational fluid dynamics compatible transition modeling using an amplification factor transport equation. AIAA Journal, 52(11), 2506-2512, (2014).
- 18 Menter, F.R., Smirnov, P.E., Liu, T., Avancha, R. A one-equation local correlation-based transition model. Flow, Turbulence and Combustion, 95, 583-619, (2015).

- 19 Volkov, K. Numerical analysis of Navier-Stokes equations on unstructured meshes. Handbook on Navier-Stokes Equations: Theory and Analysis / D. Campos. Nova Science, 365-442, (2016).
- 20 Volkov, K. Multigrid and preconditioning techniques in CFD applications . CFD Techniques and Thermo-Mechanics Applications / Z. Driss, B. Necib, H.- C. Zhang. Springer International Publishing, 83-149, (2018).

Информация об авторах:

Курманова Д.Е. - **Автор для корреспонденции**, докторант 3 курса Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, кафедра "Математики и компьютерное моделирование", Кажымукан, 13, Астана, Казахстан.

Джайчибеков Н.Ж. - д.ф.-м.н., профессор Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, кафедра "Механика", Кажымукан, 13, Астана, Казахстан.

Волков К.Н. - д.ф.-м.н., профессор университета Кингстона, г. Лондон, SW15 3DW, Великобритания.

Карпенко А.Г. - к.ф.-м.н., доцент Санкт-Петербургского университета, кафедра "гидроаэромеханики", Университетский пр., 28, Санкт-Петербург, Россия.

Курманова Д.У. - **Corresponding author**, 3rd-year doctoral student of the L.N.Gumilyov Eurasian National University, Department of Mathematics and Computer Modeling, Kazhymukan, 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Jaichibekov N.Zh. - doctor of physical and mathematical sciences, professor of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, Department of Mechanics, Kazhymukan, 13, Astana, Kazakhstan.

Volkov K.N. - doctor of physical and mathematical sciences, professor of Kingstone University, London, SW15 3DW, United Kingdom.

Karpenko A.G. - candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of St. Petersburg University, Department of Hydroaeromechanics, Universitetskiy Ave., 28, St. Petersburg, Russia.

Поступила в редакцию 29.11.2022

МРНТИ: 27.25.19

Н. Темиргалиев, Г.Е. Таугынбаева, А.Ж.Жубанышева

*Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru)*

Формула Планшереля для преобразования Радона в гибкой шкале гильбертовых пространств Соболева¹

Аннотация: Математическая теория преобразования Радона с технической реализацией в томографах имеет неограниченный спектр применений, среди которых наиболее широкими являются медицинские.

В ареале исследований преобразования Радона ключевую роль играет соотношение:

Для всякого $\beta > 0$ существуют такие положительные константы $c(\beta, s)$ и $C(\beta, s)$, что для $f \in C_0^\infty(\Omega_s)$

$$c(\beta, s) \|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)} \leq \|Rf\|_{W^{\beta+\frac{(s-1)}{2}}(Z=S^{s-1} \times R^1)} \leq C(\beta, s) \|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)}.$$

Данная статья посвящена распространению этой эквивалентности в формате равенства на далеко идущий случай переформатированных гильбертовых пространств Соболева.

Ключевые слова: преобразование Радона, гибкая шкала гильбертовых пространств Соболева, Компьютерная томография, формула Планшереля для преобразования Радона, обобщенная формула Решетняка.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/4.3>

2000 Mathematics Subject Classification: 41A99

Введение. Это нечастое соединение прямой математической теории с практикой жизни с вполне понятным желанием без разрушения оболочки увидеть внутренность тела привело к глубоким выводам общего характера, высказанные на праздновании 100-летия выдающейся 16-страничной статьи [1] Иогана Радона (цитируется по [2-3]):

Весьма компетентное лицо, а именно Бертран Рассел, сказал: "Математика может быть определена как доктрина, в которой мы никогда не знаем, ни о чем говорим, ни того, верно ли то, что мы говорим"».

Именно в этом ключе происходили события, вызванные изобретением техники, позволяющей при просвечивании материального объекта по разности интенсивности луча на входе и выходе получить равным интегралу функции распределения плотности вещества вдоль траектории луча, с весьма точными описаниями на научном собрании «**Инновации через фундаментальные исследования. Вклад научных теорий и открытий в прогресс общества в целом (Венский университет, 2016 год)**

Ректор Венского университета (на примере И. Радона): «Часто вещи таковы, что математические теории находятся в абстрактной форме, возможно, рассматриваются как стерильные уловки, которые внезапно оказываются ценными инструментами для физических знаний и, таким образом, неожиданно раскрывают их скрытую силу».

Карл Зигмунд: «Иоган Радон исследовал абстрактные проблемы так называемой чистой математики и понятия не имел, что сегодня преобразование Радона является

¹Статья выполнена в рамках Грантового финансирования МНВО, проект № AP09260484

основой компьютерной томографии. Их многочисленные приложения подтверждают правило: нет ничего более практичного, чем хорошая теория».

В данной статье получено равенство норм преобразования Радона Rf в им самим данной форме и требующей нахождения по ней функции f в шкале гильбертовых пространств Соболева

$$\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(Z=S^{s-1}\times R^1)} = \sqrt{2}\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)},$$

содержащее как известные, так и новые соотношения такого типа.

Следует отметить, что решение этой задачи естественным образом потребовало переход от гильбертовых пространств Соболева, скажем так, степенного типа к произвольным. Для авторов ведущей идеей в таком подходе служили теоремы вложения П.Л. Ульянова [4], в которых известные классы функций степенной гладкости были распространены на гладкость произвольную с установлением их неулучшаемости.

Не исключено, что приведенного сорта новые типы Соболевских гильбертовых пространств, наряду с другого склада классами Соболева-Морри [5-6], могут служить получению результатов в ряду известных и новых.

Обозначения. Всюду в статье будем пользоваться следующими обозначениями:

$R^s = \{(x_1, \dots, x_s) : x_1 \in R, \dots, x_s \in R\}$ - s -мерное евклидово пространство, где R поле действительных чисел и $s = 1, 2, \dots$.

$x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_sy_s = \langle x, y \rangle$ - скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_s)$ и $y = (y_1, \dots, y_s)$ из R^s .

Ω_s - единичный шар в R^s .

$E_s = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^s$ - единичный куб в R^s с центром в начале координат.

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in R^s, \theta_1^2 + \dots + \theta_s^2 = 1$ - единичный вектор в R^s .

$S^{s-1} = \{(x_1, \dots, x_s) \in R^s : x_1^2 + \dots + x_s^2 = 1\}$ - единичная сфера в R^s .

$S^{s-1} \times R^1 \equiv \{(\theta_1, \dots, \theta_s, \tau) \in R^{s+1} : \theta_1^2 + \dots + \theta_s^2 = 1, -\infty < \tau < \infty\}$ - единичный цилиндр в R^{s+1} .

\overrightarrow{ab} обозначает вектор в R^s с началом в точке $a = (a_1, \dots, a_s)$ и концом в точке $b = (b_1, \dots, b_s)$ с координатами $(b_1 - a_1, \dots, b_s - a_s)$.

R_x^{s-1} - гиперплоскость, состоящая из всех точек $y \in R^s$ таких, что вектора $\overrightarrow{0x}$ и \overrightarrow{xy} перпендикулярны $\langle x, y - x \rangle = 0$ и проходящая через точку x .

$R_{t\theta}^{s-1}$ - гиперплоскость размерности $s - 1$, перпендикулярная вектору $t\theta$ и проходящая через точку $t\theta$.

$R_+^1 \equiv [0, +\infty)$ - множество всех неотрицательных действительных чисел.

$A \ll B (B \geq 0)$ означает $|A| \leq cB$.

$A \succ\prec B (A \geq 0, B \geq 0)$ - знак эквивалентности означает одновременное выполнение $A \ll B$ и $B \ll A$.

$A = B$ - знак равенства, в отдельных случаях по вполне понятным обстоятельствам будет пониматься в смысле эквивалентности.

\hat{f} и \tilde{f} - преобразования Фурье функции f , прямое и обратное соответственно:

$$\hat{f}(y) = \int_{R^s} f(x) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} dx, \tilde{f}(y) = \int_{R^s} f(x) e^{2\pi i \langle y, x \rangle} dy.$$

$\text{supp } f$ - носитель заданной на R^s числовой функции f есть наименьшее замкнутое множество пространства R^s , вне которого f тождественно равна нулю.

$C_0^\infty(\Omega)$ - множество, состоящее из всех определенных на R^s бесконечно дифференцируемых функций с носителем из открытого множества Ω .

Необходимые определения. По всему тексту статьи предполагается, что все рассматриваемые функции измеримы по Лебегу на измеримом множестве своего задания, интеграл всюду понимается в смысле Лебега. Вместе с тем будет предполагаться, что излишне строгие условия на функции могут быть ослаблены, лишь бы проводимые действия над ними были корректными и законными.

Преобразование Радона ([7, Глава I, 1]). Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца на R^s , т.е. бесконечно дифференцируемых на R^s функций, для которых норма

$$\|f\|_{k,l} = \sup_{x=(x_1,\dots,x_s)\in R^s} \left| x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s} \frac{\partial f^{l_1+\dots+l_s}}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_s^{l_s}}(x_1, \dots, x_s) \right|$$

конечна для всех мультииндексов $k = (k_1, \dots, k_s)$ и $l = (l_1, \dots, l_s)$ с целыми неотрицательными компонентами.

Преобразованием Радона называют функцию

$$\check{f}(x) \equiv Rf(x) = \int_{y \in R_x^{s-1}} f(y) dy,$$

где $x \in R^s$, R_x^{s-1} есть гиперплоскость размерности $s - 1$, проходящая через точку x перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{0x}$, соединяющего точки 0 и x .

То же в других терминах: преобразование Радона (s -мерное) функции $f(x)$, заданной на Евклидовом пространстве R^s с носителем $supp f$ из открытого множества $\Omega \subset R^s$, каждой гиперплоскости $R_{t\theta}^{s-1}$ размерности $s - 1$ перпендикулярной к вектору $t\theta$, $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_s) \in R^s$, $\theta_1^2 + \dots + \theta_s^2 = 1$, $-\infty < t < \infty$ и проходящей через точку $t\theta$, ставит в соответствие интеграл по ней

$$Rf(\theta, t) \equiv Rf(\theta_1, \dots, \theta_s; t) = Rf(t\theta) = \int_{x \in \Omega: \langle x, \theta \rangle = t} f(x) dx = \int_{y \in \Omega: y \in R_{t\theta}^{s-1}} f(y) dy.$$

Пусть на множестве $R^s \setminus \{0\}$ задана неотрицательная непрерывная функция $\alpha(y) = \alpha(y_1, \dots, y_s)$ такая, что при всех фиксированных $y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_s$ выполнено

$$\lim_{y_j \rightarrow +\infty} \alpha(y_1, \dots, y_s) = +\infty (j = 1, \dots, s).$$

Гильбертовым пространством Соболева $W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ назовем множество, составленное из всех функций $f = f(x)$ таких, что конечен интеграл

$$\|f(x)\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}^2 = \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}^2 := \int_{R^s} \alpha^2(y) |\widehat{f}(y)|^2 dy < +\infty,$$

где

$$\widehat{f}(y) = \int_{R^s} f(x) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} dx. \tag{1}$$

На цилиндре $Z := S^{s-1} \times R^1$ аналогичные гильбертовы пространства Соболева $W_2^{\alpha(y)}(S^{s-1} \times R^1)$ определим как множество всех функций $g(\theta, t)$ ($\theta \in S^{s-1}$, $\|\theta\| = \theta_1^2 + \dots + \theta_s^2 = 1$, $-\infty < t < +\infty$), для которых конечна норма ([7, Глава II.5])

$$\|g\|_{W_2^{\alpha(y)}(S^{s-1} \times R^1)}^2 = \int_{S^{s-1}} \int_{R^1} \alpha^2(t\theta) |\widehat{g}_{R^1}(\theta, t)|^2 d\theta dt,$$

где

$$\widehat{g}_{R^1}(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta, \tau) e^{-2\pi i t \tau} d\tau \quad (\theta \in S^{s-1}, -\infty < t < +\infty), \tag{2}$$

$d\theta$ - элемент объема на сфере $S^{s-1} \subset R^s$.

Для функции $g(\theta, t)$ вида $g(x) = g(x_1, \dots, x_s)$, $g(\theta, t) \equiv g(t\theta)$ Определение (2) при $x = t\theta$ в развернутой записи есть

$$\widehat{g}_{R^1}(x) = \widehat{g}_{R^1}(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta, \tau) e^{-2\pi i t \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau\theta_1^{(x)}, \dots, \tau\theta_s^{(x)}) e^{-2\pi i t \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau\theta_x) e^{-2\pi i t \tau} d\tau,$$

в котором $g(\tau\theta_1^{(x)}, \dots, \tau\theta_s^{(x)}) = g(\tau\theta_x)$, $\theta_x := (\theta_1^{(x)}, \dots, \theta_s^{(x)})$ из $x = t\theta_x, \theta_x = \frac{1}{t}x$ ($\frac{1}{0} := 0$), $(x_1, \dots, x_s) = x = t\theta_x = (t\theta_1^{(x)}, \dots, t\theta_s^{(x)})$.

Для открытого множества $\Omega \subset R^s$ и для всех функций $f \in W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ таких, что $\text{supp} f \subset \Omega$ положим $\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(\Omega)} := \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}$.

Основной результат. Зададимся вопросом: при заданном $\alpha(y)$ найдется ли $\alpha_1(y)$ такое, чтобы нормы f по $\alpha(y)$ и Rf по $\alpha_1(y)$ совпадали? Ответ следующий – справедлива

Теорема. Пусть даны целое положительное число s и на R^s задана неотрицательная непрерывная на $R^s \setminus \{0\}$ функция $\alpha(y_1, \dots, y_s)$, для каждого j ($j = 1, \dots, s$) и фиксированных $(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_s)$ из R^{s-1} удовлетворяющая условию $\alpha(y_1, \dots, y_s) \rightarrow +\infty$ при $y_j \rightarrow +\infty$.

Тогда для всякой функции f из класса $W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ справедливо равенство

$$\left\| \hat{f} \right\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)} = \|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)} = \sqrt{2} \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}. \quad (3)$$

Следуя И.М. Гельфанду равенство (3) будем называть формулой Планшереля для преобразования Радона в гибкой шкале гильбертовых пространств Соболева.

Доказательство. Переводя интеграл от $(\widehat{Rf})_{R^1}(\theta, t)$ с использованием равенства $(\widehat{Rf})_{R^1}(\theta, t) = \hat{f}(t\theta)$ (из [7, Глава II.1]) по цилиндру $Z = S^{s-1} \times R^1$ к интегралу по сферам $t\theta$, $\theta \in S^{s-1}$, параметризованным числовой переменной $t \in R^1_+$ с представлением всего Евклидова пространства $R^s = \{t\theta : S^{s-1} \times R^1_+\}$, затем в нем производя замену $(x_1, \dots, x_s) = x = t\theta = (t\theta_1, \dots, t\theta_s)$, $\|x\| = \|t\theta\| = t\|\theta\| = t$ по формуле (см. также [7, Глава VII.2]): для функций $(s+1)$ переменной $\psi(\theta, t) = \psi(\theta_1, \dots, \theta_s; t)$ вида $\psi(\theta, t) = \psi(t\theta) = \psi(t\theta_1, \dots, t\theta_s) = \psi(x_1, \dots, x_s) = \psi(x)$ справедливо равенство

$$\iint_{S^{s-1} \times R^1_+} \psi(t\theta) dt d\theta = \iint_{S^{s-1} \times R^1_+} \psi(t\theta) \frac{1}{\|t\theta\|^{s-1}} t^{s-1} dt d\theta = \int_{R^s} \psi(x) \frac{1}{\|x\|^{s-1}} dx, \quad (4)$$

последовательно получаем

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{W_2^{\alpha_1(y)}(S^{s-1} \times R^1)}^2 &= \iint_{Z=S^{s-1} \times R^1} \alpha_1^2(t\theta) \left| (\widehat{Rf})_{R^1}(\theta, t) \right|^2 d\theta dt = \\ &= 2 \iint_{S^{s-1} \times R^1_+} \alpha_1^2(t\theta) \left| \hat{f}(t\theta) \right|^2 d\theta dt = 2 \int_{R^s} \alpha_1^2(x) \left| \hat{f}(x) \right|^2 \frac{1}{\|x\|^{s-1}} dx. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\alpha_1(x) = \alpha(x) \|x\|^{\frac{s-1}{2}}$, приходим к искомому равенству

$$\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)}^2 = 2 \int_{R^s} \left(\alpha(x) \|x\|^{\frac{s-1}{2}} \right)^2 \left| \hat{f}(x) \right|^2 \frac{1}{\|x\|^{s-1}} dx = 2 \int_{R^s} \alpha^2(x) \left| \hat{f}(x) \right|^2 dx = 2 \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}^2.$$

Теорема доказана.

Приведем три следствия из этой теоремы – известные для (обычных) пространств Соболева в градации изотропные $W_2^\beta(R^s)$ и анизотропные $W_2^{\beta_1, \dots, \beta_s}(R^s)$, новое для пространств Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^\beta(R^s)$.

Следствие 1 [7, Глава II.5]. При $\beta > 0$ для (обычного) пространства Соболева

$$\alpha_W(y) = \left(1 + \|y\|^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

и

$$\|f\|_{W_2^\beta(R^s)}^2 = \int_{R^s} \left(1 + \|y\|^2\right)^\beta \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy$$

справедливо соотношение эквивалентности

$$\|Rf\|_{W_2^{\beta+\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)} \asymp \|f\|_{W_2^\beta(R^s)}. \quad (5)$$

Следствие 2. При $\beta_1 > 0, \dots, \beta_s > 0$ для анизотропного гильбертова пространства Соболева

$$\alpha_W(y; \beta_1, \dots, \beta_s) = \left(|y_1|^{2\beta_1} + \dots + |y_s|^{2\beta_s} \right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\|f\|_{W_2^{\beta_1, \dots, \beta_s}(R^s)}^2 = \int_{R^s} \left(|y_1|^{2\beta_1} + \dots + |y_s|^{2\beta_s} \right) |\hat{f}(y)|^2 dy$$

справедливо соотношение эквивалентности

$$\|Rf\|_{W\left(|y_1|^{2\beta_1} + \dots + |y_s|^{2\beta_s}\right)^{\frac{1}{2}} \left(y_1^2 + \dots + y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)} \asymp \|f\|_{W_2^{\beta_1, \dots, \beta_s}(R^s)}. \quad (6)$$

Следствие 3. При $\beta > 0$ для пространств Соболева с доминирующей смешанной производной

$$\alpha_{SW}(y) = \left(\prod_{j=1}^s \max\{|y_j|; 1\} \right)^\beta,$$

$$\|f\|_{SW_2^\beta(R^s)}^2 = \int_{R^s} \left(\prod_{j=1}^s (\max\{|y_j|; 1\})^2 \right) |\hat{f}(y)|^2 dy$$

имеет место равенство

$$\|Rf\|_{SW_2^{\left(\prod_{j=1}^s \max\{|y_j|; 1\}\right)^\beta \times \|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} = \sqrt{2} \|f\|_{SW_2^\beta(R^s)}. \quad (7)$$

Замечание. Как показывают соотношения (5) и (7), если для пространства $W_2^\beta(R^s)$ равенство (3) имеет числовой переход от β к $\beta + \frac{s-1}{2}$, пространство с числовой характеристикой $SW_2^\beta(R^s)$ выпадает из этого числового ряда и требует введения «гибкого» гильбертова пространства Соболева, что, по-видимому, обусловлено формулой (4).

Равенства типа

$$\left\| \check{f} \right\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} = \|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} = \sqrt{2} \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} \quad (3)$$

и ранее устанавливались в жестких рамках Соболевских пространств функций, выраженных в числовых параметрах (см. [8-11]), тогда как введение гибких гильбертовых пространств Соболева естественным образом определяют соответствующие пространства функций, обеспечивающих эти равенства.

Так, И.М. Гельфандом в [8] названное *формулой Планшереля для преобразования Радона*, доказанное Ю.Г. Решетняком в неопубликованной работе (приблизительно 1960 года), в [11] именуемое *Обобщенной формулой Решетняка* равенство

$$\|f\|_{H_t^r(R^s)} = \|Rf\|_{H_{t+\frac{s-1}{2}}^{r+\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)} \quad (8)$$

содержится в (3).

Действительно, для

$$\alpha(y) = \|y\|^t \left(1 + \|y\|^2 \right)^{\frac{s-t}{2}}$$

в силу определений пространств H и W последовательно имеем

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{H^{r+\frac{s-1}{2}}_{t+\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)}^2 &:= 2 \int_{S^{s-1}} \int_{R^1_+} \tau^{2t+(s-1)}(1+\tau^2)^{s-t} \left| \left(\widehat{Rf} \right)_{R^1}(\theta, \tau) \right|^2 d\theta d\tau = \\ &= 2 \|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R)}^2 \stackrel{(3)}{=} 2 \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}^2 = \\ &= \int_{R^s} \|y\|^{2t} \left(1 + \|y\|^2 \right)^{r-t} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy =: \|f\|_{H_t^r(R^s)}^2, \end{aligned}$$

что доказывает (8).

Перспективы дальнейшего развития Математической теории Компьютерной томографии, основанной на *Проекционной теореме* (также называемой *the slice theorem* - теорема о слоях) [7, Глава II.1]

$$\left(\widehat{Rf} \right)_{R^1}(\theta, t) = \hat{f}(t\theta),$$

в котором преобразование Фурье в преобразовании Радона Rf одномерное

$$\hat{g}_{R^1}(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta, \tau) e^{-2\pi i t \tau} d\tau \quad (\theta \in S^{s-1}, -\infty < t < +\infty), \quad (2)$$

тогда как преобразование Фурье искомой функции $f(x)$ смысла плотности исследуемого тела есть s -мерное:

$$\hat{f}(y) = \int_{R^s} f(x) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} dx, \quad (1)$$

никак не выражающееся через (2).

И тем вызвана необходимость определения новых "гибких" гильбертовых пространств Соболева, в продолжение известного соотношения эквивалентности

$$c(\beta, s) \|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)} \leq \|Rf\|_{W_2^{\beta+\frac{(s-1)}{2}}(Z=S^{s-1}\times R^1)} \leq C(\beta, s) \|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)},$$

которое играет ключевую роль в имеющихся к настоящему времени в научной литературе достижениях по теории Компьютерной томографии.

Результат данной статьи, заключающийся в том, что по всякой неотрицательной непрерывной на $R^{s-1} \setminus \{0\}$ функции $\alpha(y_1, \dots, y_s)$, удовлетворяющей условию $\alpha(y_1, \dots, y_s) \rightarrow +\infty$ при $y_j \rightarrow +\infty$ и фиксированных остальных переменных определяются Соболевские гильбертовы пространства, связывающие Rf и f в равенстве

$$\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} = \sqrt{2} \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}, \quad (3)$$

в более точной и ее объясняющей форме, содержащее исходное

$$\|Rf\|_{W_2^{\beta+\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)} \asymp \|f\|_{W_2^\beta(R^s)}.$$

Еще в 1990 году Редактор перевода [12] В.П. Паламодов писал «Число работ, относящихся к прикладной и теоретической томографии, измеряется тысячами», и дальше «Особенность томографических методов состоит в том, что их информативность в большей степени зависит от глубины и тонкости применяемой математической теории», во что вписываются перспективы равенства (3) в уточнении известных и получении новых результатов в Компьютерной томографии, а также в проведении сопутствующих исследований по такому далеко идущему обобщению гильбертовых пространств Соболева, чем в дальнейшем в контексте [13] намерены заняться авторы этой статьи вместе с сотрудниками ИТМиНВ.

На этом пути техническую свободу в теории Компьютерной томографии предоставляет возможность записи преобразования Радона в форме чистого Лебеговского интеграла

$Rf(x) = \int_{y \in R_x^{s-1} \cap \text{supp} f} f(y) dx$, из которого следует, что функции $f(x)$ и $Rf(x)$, стало быть и функция R^{-1} обращения R со свойством $f = R^{-1}g, g = Rf$ ([7, Глава II.2]), имеют одно и то же множество определения $\text{supp} f$, в случае необходимости, с нулевым продолжением на все R^s с сохранением нормы.

В частности, все рассмотрения можно вести на единичном кубе $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^s$ для функций f с $\text{supp} f \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^s$, и тем, без ограничения общности, искомые функции $f(x)$ как обращающиеся в нуль на границе E_s полагать 1-периодическими по каждой из s переменных, что дает возможность использования мощного аппарата Гармонического анализа.

По-видимому, в теории Компьютерной томографии для получения специфических для нее результатов порожденные преобразованием Радона классы $W_2^{\alpha(y)}(S^{s-1} \times R^1)$ требуют специального изучения и естественно их назвать пространствами Соболева-Радона, чему в последующем и будем следовать.

Список литературы

- 1 Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichteruber die Verhandlungen Gesellschaft der Wissenschaften // Journal of Mathematical Physics – 1917. –Vol. 69. –P. 262-277.
- 2 Станислав Лем: Сумма технологии. М., "Мир", 1968.
- 3 Hetzenecker K, Limbeck-Lilienau C, Schweizer D, Laufersweiler B. Innovation durch Grundlagen for schung. Der Beitragwissenschaftlicher Theorienund Entdeckungen zum gesamt gesellschaftlichen Fortschritt. Begleitheft zur Ausstellung ander Universitet Wien [Internet]. Wien: Universitet Wien; 2016. S. 68. <http://phaidra.univie.ac.at/o:560305> Google Scholar BibTex RIS
- 4 Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. -1968. -Т. 32. -№3. -С. 649-686.
- 5 Джумакаева Г.Т. Критерий вложения класса Соболева–Морри $W_{p,\Phi}^l$ в пространство C // Мат. заметки. -1985. -Т. 37. -№3. -С. 399-406.
- 6 Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А., Джумакаева Г.Т. Критерий вложения анизотропных классов Соболева–Морри в пространство равномерно непрерывных функций //Сиб. матем. журн. -2016. -Т. 57. -№5. -С. 1156-1170.
- 7 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. 226 p.
- 8 Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
- 9 Helgason S. The Radon transform. Second ed. Boston: Birkh?user, 199
- 10 Sharafutdinov V. A. The Reshetnyak formula and Natterer stability estimates in tensor tomography // Inverse Problems. 2017. V. 33, N 2. 025002 (20pp).
- 11 Шарафутдинов В.А., Преобразование Радона на пространствах Соболева, Сиб. матем. журн., 62:3 (2021), 686–710; Siberian Math. J., 62:3 (2021), 560–580.
- 12 Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. -М.: Мир, 1990. -288 с., ил.
- 13 Темиргалиев Н.Т., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. -2018. -Т. 124. №3. -С. 8-88.

Н. Темиргалиев, Г.Е. Тауғынбаева, А.Ж. Жұбанышева

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Іргелі математика және ғылыми есептеулер институты, Қажымұқан көш., 13, Астана, Қазақстан

Гильберттік Соболев кеңістіктерінің икемді шкаласындағы Радон түрлендіруінің Планшерель формуласы

Аннотация. Томографтарда техникалық жүзеге асырылатын Радон түрлендіруінің математикалық теориясының қолдану аумағы шексіз, олардың ішінде ең кеңі медицина саласы болып табылады.

Радон түрлендіруін зерттеуде келесі қатынас жетекші орын алады:

Кез келген $\beta > 0$ мен $f \in C_0^\infty(\Omega_s)$ функциясы үшін

$$c(\beta, s) \|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)} \leq \|Rf\|_{W_2^{\beta+\frac{(s-1)}{2}}(Z=S^{s-1} \times R^1)} \leq C(\beta, s) \|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)}$$

қатынасы орындалатындай $c(\beta, s)$ және $C(\beta, s)$ оң сандары табылады.

Мақала осы эквиваленттілікті теңдік түрінде жалпыланған гильберттік Соболев кеңістіктері жағдайына таратуға арналған.

Түйін сөздер: Радон түрлендіруі, гильберттік Соболев кеңістіктерінің икемді шкаласы, Компьютерлік томография, Радон түрлендіруінің Планшерель формуласы, жалпыланған Решетняк формуласы.

N. Temirgaliyev, G.E. Taugynbayeva, A.Zh. Zhubanysheva

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhimukan str., 13, Astana, Kazakhstan

Plancherel's formula for the Radon transform in the flexible scale of Sobolev Hilbert spaces

Abstract. The mathematical theory of the Radon transform with technical implementation in tomographs has an unlimited range of applications, among which the widest are medical ones.

In the aspect of studies of the Radon transformation, the key role is played by the ratio:

For any $\beta > 0$ there are exist positive constants $c(\beta, s)$ and $C(\beta, s)$, such that $f \in C_0^\infty(\Omega_s)$

$$c(\beta, s) \|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)} \leq \|Rf\|_{W^{\beta+\frac{(s-1)}{2}}(Z=S^{s-1} \times R^1)} \leq C(\beta, s) \|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)}.$$

This article is devoted to extending this equivalence in the form of equality to the far-reaching case of Sobolev spaces.

Key words: Radon transform, flexible scale of Sobolev Hilbert spaces, Computed tomography, Plancherel's formula for the Radon transform, generalized Reshetnyak's formula.

References

- 1 Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichteüber die Verhandlungen Gesellschaft der Wissenschaften, Journal of Mathematical Physics. 1917. Vol. 69. P. 262-277.
- 2 Stanislav Lem Summa tekhnologii[The amount of technology]. (Mir, Moscow, 1968).
- 3 Hetzenecker K, Limbeck-Lilienau C, Schweizer D, Laufersweiler B. Innovation durch Grundlagen for schung. Der Beitragwissenschaftlicher Theorienund Entdeckungen zum gesamt gesellschaftlichen Fortschritt. Begleitheft zur Ausstellung ander Universitet Wien. Wien: Universitet Wien; 2016. P. 68. Internet source: <http://phaidra.univie.ac.at/o:560305> Google Scholar BibTex RIS.
- 4 Ulyanov P.L. The imbedding of certain function classes H_p^ω , Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1968. Vol. 32. №3. P. 649–686.
- 5 Dzhumakaeva G.T. A criterion for the imbedding of the Sobolev-Morrey class $W_{p,\Phi}^l$ in the space C , Math. Notes 1985. Vol. 73. №3. P. 224–228.
- 6 Temirgaliyev N., Zhainibekova M.A., Dzhumakaeva G.T. Criteria of embedding of classes of Morrey type, Russian Math. (Iz. VUZ). 2015. Vol. 59. №5. P. 69–73.
- 7 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. 226 p.
- 8 Gel'fand I. M., Graev M. I., and Vilenkin N. Ya., Generalized Functions. Vol. 5: Integral Geometry and Representation Theory, Academic, New York (1966).
- 9 Helgason S. The Radon transform. Second ed. Boston: Birkhauser, 1999
- 10 Sharafutdinov V. A. The Reshetnyak formula and Natterer stability estimates in tensor tomography, Inverse Problems. 2017. Vol. 33. №2. 025002 (20pp).
- 11 Sharafutdinov V. A., Radon Transform on Sobolev Spaces, Siberian Math. J. 2021. Vol. 62. №3. P. 560–580.
- 12 Natterer F. Matematicheskie aspekty komp'yuternoj tomografii [Mathematical aspects of computed tomography: Tran. from English]. (Mir, Moscow, 1990, 288 p.).
- 13 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Teoriya priblizhenij, Vychislitel'naya matematika i CHislennyj analiz v novej koncepcii v svete Komp'yuternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter], Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta imeni L.N.Gumileva Seriya Matematika. Informatika. Mekhanika [Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series]. 2018. Vol. 124. №3. P. 8–88.

Information about authors:

Темиргалиев Нурлан – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Таугынбаева Галия Ерболовна – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Жубанышева Аксауле Жанбыршиевна – автор для корреспонденции, PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений, начальник отдела научных изданий Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Temirgaliyev Nurlan – Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Taigynbayeva Galiya – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Zhubanysheva Aksaule – corresponding author, PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, Head of the Department of Scientific Publications of L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 09.12.2022

Бас редактор:

Н. Темірғалиев

Жауапты редактор:

А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2022. 4(141)- Астана: ЕҰУ. 51-б. Басуға қол қойылды: 30.12.2022.
Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды