ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№2(139)/2022

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2022
Nur-Sultan, 2022
Нур-Султан, 2022

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.
№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008.
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.
Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.

Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, №2(1389)/2022

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer science. Mechanics series, №2(139)/2022

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, №2(139)/2022

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

ЕСТЕЛІК/ MEMORY/ ПАМЯТЬ

Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2022, Vol. 139, №2, P.6-11
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.19**

Д.Х. Козыбаев, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Сатпаева, 2, Нур-Султан, 010008, Казахстан
(E-mail: kozybayev@gmail.com, altyngul.82@mail.ru)

Коалгебры Новикова [1]

Аннотация: В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых коалгебра является левосимметричной коалгеброй. Описан метод построения коалгебр. Построен пример левосимметричной коалгебры. Приведены необходимые и достаточные условия, при которых левосимметричная коалгебра является коалгеброй Новикова. Построен пример не локально конечной коалгебры Новикова.

Ключевые слова: коалгебра, алгебра Новикова, левосимметричная коалгебра, многообразие.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/2.1

2000 Mathematics Subject Classification: 16T15.

1. Введение

Коалгебры рассматривались математиками долгое время как часть структурной теории алгебр Хопфа [7]. В настоящее время коалгебры стали активно изучаться в связи с исследованиеми квантовых групп. В. Дринфельд [2] вел понятие биалгебры Ли, в которой коумножение определяет структуру коалгебры Ли. Понятие йордановых, альтернативных коалгебр определено в [1].

Одним из основных вопросов в теории коалгебр является вопрос о локальной конечности данного многообразия коалгебр. В [7] доказана локальная конечность ассоциативных коалгебр. Аналогичный результат для йордановых и альтернативных коалгебр установлен в [1]. В. Михаэлисом [3] построен пример не локально конечной коалгебры Ли. В [4] и [5] приведены примеры не локально конечной дифференциальной коалгебры, коалгебры Новикова, коалгебры Ли, йордановой супералгебры и правоальтернативной коалгебры.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых коалгебра является левосимметричной коалгеброй или коалгеброй Новикова. Построен пример не локально конечной коалгебры Новикова.

2. Критерий левосимметричной алгебры

Пусть F – произвольное поле. Для элементов x, y, z произвольной алгебры над полем F воспользуемся следующим стандартным обозначением

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz).$$

Определение 1. Алгебра A называется левосимметричной, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество

$$(x, y, z) = (y, x, z). \tag{1}$$

[1] Работа выполнена в рамках проекта AP08052290 МОН РК.

Определение 2. Левосимметричная алгебра A называется алгеброй Новикова, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество

$$(xy)z = (xz)y. \tag{2}$$

Определение 3. Векторное пространство A над полем F в котором задано линейное отображение $\Delta : A \to A \otimes A$ называется коалгеброй. Отображение Δ называется его коумножением. Будем называть пару (A, Δ) коалгеброй, чтобы подчеркнуть рассматриваемое коумножение.

Для любого $a \in A$, используя обозначение Свидлера (см. [7]), запишем

$$\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

Пусть $A^* = \{f : A \to F\}$ – двойственное к A пространтсво функционалов. Тогда определим спаривание

$$\langle A^*, A\rangle \to F,$$

пологая $\langle f, a\rangle = f(a)$, где $f \in A^*, a \in A$.

Определим операцию умножения на пространтсве A^* следующим образом

$$\langle f \cdot g, a\rangle = \langle f \otimes g, \Delta(a)\rangle = \sum_{(a)} f(a_{(1)}) \cdot g(a_{(2)}),$$

где $f, g \in A^*, a \in A$. Легко проверить, что A^* является алгеброй относительно этого умножения.

Определение 4. Алгебра A^* называется двойственной алгеброй к алгебре A.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное многообразие алгебр над полем F. Коалгебра (A, Δ) называется $\mathfrak{M}$-коалгеброй, если алгебра A^* принадлежит $\mathfrak{M}$ [3].

Пусть V, W – векторные пространства. Определим линейное отображение $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$, пологая

$$\tau(v \otimes w) = w \otimes v, v \in V, w \in W.$$

Теорема 1. *Коалгебра (A, Δ) является левосимметричной тогда и только тогда, когда выполняется тождество*

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta = 0. \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (A, Δ) левосимметричная коалгебра. Пусть $f, g, h \in A^*$ и $a \in A$. Тогда

$$\langle (fg)h - f(gh) - (gf)h + g(fh), a\rangle = \sum_{(a)} \left\langle fg, a_{(1)}\right\rangle h(a_{(2)}) - \sum_{(a)} f(a_{(1)}) \left\langle gh, a_{(2)}\right\rangle$$

$$- \sum_{(a)} \left\langle gf, a_{(1)}\right\rangle h(a_{(2)}) + \sum_{(a)} g(a_{(1)}) \left\langle fh, a_{(2)}\right\rangle = \sum_{(a)} \sum_{(a_{(1)})} f(a_{(11)})g(a_{(12)})h(a_{(2)})$$

$$- \sum_{(a)} \sum_{(a_{(2)})} f(a_{(1)})g(a_{(21)})h(a_{(22)}) - \sum_{(a)} \sum_{(a_{(1)})} g(a_{(11)})f(a_{12})h(a_{(2)})$$

$$+ \sum_{(a)} \sum_{(a_{(2)})} g(a_{(1)})f(a_{(21)})h(a_{(22)})$$

$$= \left\langle f \otimes g \otimes h, \sum_{(a)} \sum_{(a_{(1)})} a_{(11)} \otimes a_{(12)} \otimes a_{(2)} - \sum_{(a)} \sum_{(a_{(2)})} a_{(1)} \otimes a_{(21)} \otimes a_{(22)} \right\rangle$$

$$- \left\langle g \otimes f \otimes h, \sum_{(a)} \sum_{(a_{(1)})} a_{(11)} \otimes a_{(12)} \otimes a_{(2)} - \sum_{(a)} \sum_{(a_{(2)})} a_{(1)} \otimes a_{(21)} \otimes a_{(22)} \right\rangle$$

$$= \langle (1 - \tau \otimes 1)(f \otimes g \otimes h), (\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(a)\rangle$$

$$= \langle f\otimes g\otimes h, (1-\tau\otimes 1)(\Delta\otimes 1 - 1\otimes\Delta)\Delta(a)\rangle\,.$$

Следовательно,

$$\langle (fg)h - f(gh) - (gf)h + g(fh), a\rangle = \langle f\otimes g\otimes h, (1-\tau\otimes 1)(\Delta\otimes 1 - 1\otimes\Delta)\Delta(a)\rangle = 0. \quad (4)$$

Из этого вытекает, что тожество (1) в алгебре A^* эквивалентно тождеству (3) в алгебре A. Теорема доказана.

3. Критерий коалгебры Новикова

Следующая лемма устанавливает взаимно-однозначное соответствие между конечномерными алгебрами и коалгебрами.

Лемма 1. *Для любой конечномерной алгебры A найдется коалгебра B такая, что $B^*\cong A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис алгебры A с таблицей умножения

$$e_ie_j = \sum_{i,j}\gamma_{ij}^k e_k,$$

где $\gamma_{ij}^k\in F$ – структурные коэффициенты.

Рассмотрим пространство B с базисом $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Определим на пространстве B структуру коалгебры, полагая

$$\Delta(f_k) = \sum_{i,j}\gamma_{ij}^k f_i\otimes f_j.$$

Через $f_j^*\in B^*$ обозначим фунционал, определенный правилом

$$f_j^*(f_k) = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Функционалы $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*$ образуют базис алгебры B^*. Имеем

$$\left\langle f_i^*\cdot f_j^*, f_k\right\rangle = \left\langle f_i^*\otimes f_j^*, \Delta(f_k)\right\rangle = \sum_{s,t}\gamma_{st}^k f_i^*(f_s)f_j^*(f_t) = \gamma_{ij}^k,$$

т.е.

$$f_i^*f_j^* = \sum_k \gamma_{ij}^k f_k^*.$$

Следовательно, линейное отображение $\phi: B^*\to A$, определенное правилом $\phi(f_i^*) = e_i, 1\le i\le n$, является изоморфизмом алгебр. Лемма доказана.

Теперь приведем пример левосимметричной алгебры и коалгебры

Пример 1

Левосимметичная алгеба	Левосимметичная коалгеба
$e_1e_1 = e_1$, $e_1e_2 = e_1$, $e_2e_1 = e_1$, $e_2e_2 = e_1$	$\Delta(e_1) = e_1\otimes e_1 + e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1 + e_2\otimes e_2$, $\Delta(e_2) = 0$

В работе [5] найдены необходимое и достаточное условия, при которых левосимметричная коалгебра (A,Δ) является коалгеброй Новикова.

Теорема 2. *[5] Для того чтобы левосимметричная коалгебра (A,Δ) была коалгеброй Новикова необходимо и достаточно чтобы выполнялось следующее равентсво*

$$(1 - 1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)\Delta = 0. \quad (5)$$

Пример 2 Проверим этот критерий для левосимметричной коалгебры из примера 1. Имеем

$$(1-1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)\Delta(e_1) = (1-1\otimes\tau)(\Delta\otimes 1)(e_1\otimes e_1 + e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1 + e_2\otimes e_2)$$

$$= (1 - 1 \otimes \tau)\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} e_i \otimes e_j \otimes e_k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} e_i \otimes e_j \otimes e_k - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} e_i \otimes e_k \otimes e_j = 0,$$

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(e_2) = 0.$$

Как мы видим тождество (5) выполняется. Следовательно, левосимметричная коалгебра из примера 1 является коалгеброй Новикова.

Пример 3 Пусть $\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1$, $\Delta(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2$. Тогда непосредственные вычисления дают

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(e_1) = (1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1)$$

$$= (1 - 1 \otimes \tau)(e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2)$$

$$= e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 \neq 0.$$

Согласно теореме 2, эта алгебра не является коалгеброй Новикова.

4. Не локально конечные коалгебры

Пусть (A_1, Δ_1) и (A_2, Δ_2) – коалгебры. Морфизмом коалгебр (A_1, Δ_1) и (A_2, Δ_2) называется линейное отображение

$$f : A_1 \to A_2$$

такое, что

$$\Delta_2 f = (f \otimes f)\Delta_1.$$

Определение 6. Коалгебра (K, Δ_k) называется подкоалгеброй коалгебры (A, Δ), если K – векторное подпространство A и включение

$$i_N : K \subset A$$

является морфизмом коалгебр. Другими словами, K является подкоалгеброй тогда и только тогда, когда $\Delta(K) \subseteq K \otimes K$.

Определение 7. Коалгебра называется локально конечной, если каждый ее элемент лежит в конечномерной подкоалгебре. Это означает, что всякая конечно-порожденная подкоалгебра конечномерна.

Лемма 2. *Если K – подпространство, $x \in K$ и $x \otimes y \in K \otimes K$, тогда $y \in K$.*

Доказательство. Пусть $x, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ – базис подкоалгебры K. Тогда базис пространтсва $K \otimes K$ имеет вид

$$x \otimes x_k, x_k \otimes x, x_i \otimes x_j, i, j, k \geq 1.$$

Следовательно,

$$K \otimes K = x \otimes K \oplus x_1 \otimes K \oplus \ldots \oplus x_k \otimes K \oplus \ldots$$

Так как $x \otimes y \in K \otimes K$, имеем $x \otimes y \in x \otimes K$, т.е.

$$x \otimes y = \lambda x \otimes x + \sum_i \lambda_i x \otimes x_i.$$

Следовательно,

$$x \otimes (y - \lambda x - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_k x_k - \ldots) = 0.$$

Откуда получаем, что

$$y = \lambda x + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k + \ldots \in K.$$

Лемма доказана.

В работе [5] доказано, что многообразие коалгебр Новикова не является локально конечным. Следовательно, многообразие левосимметричных алгебр также не локально конечно.

Приведем еще один пример не локально конечной алгебры Новикова.

Пример 4 Пусть A – векторное пространство с базисом $e, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$. Определим коалгебру (A, Δ), пологая

$$\Delta(e) = 0,$$

$$\Delta(f_{3n-2}) = e \otimes f_{3n+1},$$

$$\Delta(f_{3n-1}) = e \otimes f_{3n},$$

$$\Delta(f_{3n}) = e \otimes f_{3n+2}.$$

Сначала проверим тождество (3):

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(e) = 0,$$

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(f_{3n-2}) = (1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)(e \otimes f_{3n+1})$$

$$= (1 - \tau \otimes 1)(-e \otimes e \otimes f_{3n+4}) = -e \otimes e \otimes f_{3n+4} + e \otimes e \otimes f_{3n+4} = 0,$$

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(f_{3n-1}) = (1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)(e \otimes f_{3n})$$

$$= (1 - \tau \otimes 1)(-e \otimes e \otimes f_{3n+2}) = -e \otimes e \otimes f_{3n+2} + e \otimes e \otimes f_{3n+2} = 0,$$

$$(1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)\Delta(f_{3n}) = (1 - \tau \otimes 1)(\Delta \otimes 1 - 1 \otimes \Delta)(e \otimes f_{3n+2})$$

$$= (1 - \tau \otimes 1)(-e \otimes e \otimes f_{3n+3}) = -e \otimes e \otimes f_{3n+3} + e \otimes e \otimes f_{3n+3} = 0.$$

Следовательно, по Теореме 1 данная коалгебра является левосимметричной. Теперь проверим тождество (5):

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(e) = 0,$$

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(f_{3n-2}) = (1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)(e \otimes f_{3n+1}) = 0,$$

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(f_{3n-1}) = (1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)(e \otimes f_{3n}) = 0,$$

$$(1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)\Delta(f_{3n}) = (1 - 1 \otimes \tau)(\Delta \otimes 1)(e \otimes f_{3n+2}) = 0.$$

Согласно теореме 2 данная коалгебра является коалгеброй Новикова.

Рассмотрим подкоалгебру K, порожденную элементами e, f_2. Имеем

$$\Delta(f_2) = e \otimes f_3 \in K \otimes K,$$

т.е. $f_3 \in K$ в силу Леммы 2. Далее имеем

$$\Delta(f_3) = e \otimes f_5 \in K \otimes K.$$

Тогда по Лемме 2 $f_5 \in K$. Продолжая этот процесс, получим, что $f_3, f_4, \ldots, f_n, \ldots \in K$. Подкоалгебра K бесконечномерна. Следовательно, данная коалгебра Новикова не является локально конечной.

Список литературы

1 Anquella J., Cortes T., Montaner F. Nonassociative Coalgebras// Comm. in Algebra. -1994. -Vol. 22. N 12, -P. 4693 – 4716.
2 Drinfeld V.G. Quantum Groups// Proc. Int. Congress Math., Berkeley. -1986.
3 Michaelis W. Lie Coalgebras// Adv. Math. -1980. -Vol. 38. -P. 1–54.
4 Козыбаев Д. Х. Правоальтернативные и правосимметричные коалгебры// Наука и Образование Южного Казахстана. -2000. -Vol. 19. N 12. -P. 155-163.
5 Kozybaev, D., Umirbaev, U., Zhelyabin, V. Some examples of nonassociative coalgebras and supercoalgebras//Linear Algebra and Its Applications, -2022, -Vol. 643. -P. 235-257.
6 Slinko A. Local finites of coalgebraic Lie Coalgebras// Comm. in Algebra. -1995. -Vol. 23. N 3. -P. 1165–1170.
7 Sweedler M. Hopf algebras// W.A. Benjamin Inc. New York, -1969.

Д.Х. Козыбаев, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаева, 2, Нұр-Сұлтан, 010008, Қазақстан

Новиков коалгебралары

Аннотация: Осы жұмыста коалгебра сол-симметриялы коалгебра болатын қажетті және жеткілікті шарттар табылды. Коалгебраларды құру әдісі сипатталды. Сол-симметриялы коалгебрасының мысалы құрастырылды. Солсимметриялы коалгебра Новиков коалгебра болатын қажетті және жеткілікті шарттар берілді. Локальді ақырлы емес Новиков коалгебрасының мысалы құрастырылды.

Түйін сөздер: коалгебрла, Новиков коалгебрасы, сол-симметриялы коалгебра, көпбейнелілік.

D.Kh. Kozybaev, A.S. Naurazbekova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Nur-Sultan, 010008, Kazakhstan

The Novikov coalgebras

Abstract: In the present paper, necessary and sufficient conditions are found under which a coalgebra is a left-symmetric coalgebra. A method for constructing coalgebras is described. An example of a left-symmetric coalgebra is constructed. Necessary and sufficient conditions are given under which a left-symmetric coalgebra is a Novikov coalgebra. An example of a non-locally finite Novikov coalgebra is constructed.

Keywords: coalgebra, Novikov coalgebra, left-symmetric coalgebra, variety.

References

1 Anquella J., Cortes T., Montaner F. Nonassociative Coalgebras, Comm. in Algebra. 1994. Vol. 22. N 12. P. 4693 – 4716.
2 Drinfeld V.G. Quantum Groups, Proc. Int. Congress Math., Berkeley. 1986.
3 Michaelis W. Lie Coalgebras, Adv. Math. 1980. Vol. 38. P. 1–54.
4 Козыбаев Д. Х. Правоальтернативные и правосимметричные коалгебры, Наука и Образование Южного Казахстана. 2000. Vol. 19. N 12. P. 155-163.
5 Kozybaev, D., Umirbaev, U., Zhelyabin, V. Some examples of nonassociative coalgebras and supercoalgebras, Linear Algebra and Its Applications, 2022. Vol. 643. P. 235-257.
6 Slinko A. Local finites of coalgebraic Lie Coalgebras, Comm. in Algebra. 1995. Vol. 23. N 3. P. 1165–1170.
7 Sweedler M. Hopf algebras, W.A. Benjamin Inc. New York, 1969.

Сведения об авторах:

Козыбаев Д.Х. – декан механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Нур-Султан, 010008, Казахстан.

Науразбекова А.С. – ***автор для корреспонденции,*** PhD, доцент кафедры алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Нур-Султан, 010008, Казахстан.

Kozybaev D.Kh. – Dean of the Faculty of Mechanics and Mathematics L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpaev str., Nur-Sultan, 010008, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – ***Corresponding author,*** PhD, Assosiate Professor of the Department of Algebra and Geometry L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpaev str., Nur-Sultan, 010008, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 17.05.2022

Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2022, Vol. 139, №2, P.12-25
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

GRNTI: **27.17.19**

A. Nadjimzadah

University of California, Los Angeles, CA 90095, USA
(E-mail: arianaddress@gmail.com)

Trees of Dot Products in Thin Subsets of $\mathbb{R}^d$

Abstract: A. Iosevich and K. Taylor showed that compact subsets of $\mathbb{R}^d$ with Hausdorff dimension greater than $(d+1)/2$ contain trees with gaps in an open interval. Under the same dimensional threshold, we prove the analogous result where distance is replaced by the dot product. We additionally show that the gaps of embedded trees of dot products are prevalent in a set of positive Lebesgue measure, and for Ahlfors-David regular sets, the number of trees with given gaps agrees with the regular value theorem.

Keywords: Finite point configurations, regularity of generalized Radon transforms, geometric graphs.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/2.2

2000 Mathematics Subject Classification: 28A75, 49Q15.

1. Introduction

The theme of this work can be summarized in the following question: how large must a subset of $\mathbb{R}^d$ be for it to contain certain geometric structures? Though in our work we focus on dot products, the the study of such questions was first motivated by distances.

If E is a set in $\mathbb{R}^d$, define its distance set by $\Delta(E) = \{|x-y| : x, y \in E\}$. When $E \subset \mathbb{R}^2$ is finite, the study of the relationship between $|\Delta(E)|$ and $|E|$ is the celebrated Erdős distance problem. The conjecture is $|\Delta(E)| \geq |E|/\log|E|$, which was met up to a square root with Guth and Katz's bound of $|\Delta(E)| \geq |E|/\sqrt{\log|E|}$ [1]. One could ask what happens when $E \subset \mathbb{R}^d$ is infinite. A first notion of size that one learns in real analysis is the Lebesgue measure, which we will denote from here onward by $|\cdot|$. The following question could be posed.

Question 1. If $|E| > 0$, how large must $\Delta(E)$ be?

A theorem of Steinhaus says that when $|E| > 0$, $E - E$ contains an open set around 0, so in particular $\Delta(E)$ contains an open set. This is as large of a set in $\mathbb{R}^d$ that we could ever hope for, so we need a more refined notion of the size of infinite sets. Another notion of size that one might encounter is the Minkowski dimension.

Definition 1 (Minkowski Dimension)**.** Let $N(E,\epsilon)$ be the number of balls of radius $\epsilon > 0$ required to cover the set E. Then the lower Minkowski dimension of E is given by

$$\underline{\dim_{\mathcal{M}}}(E) = \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(E,\epsilon)}{\log(1/\epsilon)},$$

and the upper Minkowski dimension is

$$\overline{\dim_{\mathcal{M}}}(E) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(E,\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}.$$

We can pose the following possibly more refined question.

Question 2. How large does $\underline{\dim_{\mathcal{M}}}(E)$ have to be for $|\Delta(E)| > 0$?

Unfortunately this question is still uninteresting. There exist sets which have "full" Minkowski dimension, in the sense that the lower Minkowski dimension is as large as it can be, yet their distance sets have measure 0. In fact, they can be merely countable! Consider

$$E = \mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d.$$

By the density of the rationals, it takes (up to a constant) $1/\epsilon^d$ balls of radius ϵ to cover E, regardless of how small we take ϵ. Thus $\underline{\dim_{\mathcal{M}}(E)} = d$, the largest possible dimension in $\mathbb{R}^d$. However $\Delta(E)$ is the image of a countable set, so it is itself countable.

The deficiency in Minkowski dimension is that our covers can consist only of balls of *the same size.* However this does make computations with Minkowski dimension easier. The Hausdorff dimension does not have this issue, but it is often more difficult to compute.

Definition 2 (Hausdorff Dimension)**.** Let

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf \sum_j r_j^s,$$

where the infimum is taken over all countable coverings of E by balls $\{B(x_i, r_i)\}$ such that $r_i < \delta$. Define the s-dimensional Hausdorff measure $\mathcal{H}^s$ by

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

The *Hausdorff Dimension* of E, $\dim_{\mathcal{H}}(E)$, is the unique number s_0 such that $H^s(E) = \infty$ if $s < s_0$ and $H^s(E) = 0$ if $s > s_0$.

We can now ask the following interesting question.

Question 3. How large must $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ be to ensure that $|\Delta(E)| > 0$?

Kenneth Falconer constructed compact sets $E \subset \mathbb{R}^d$ with $\dim_{\mathcal{H}}(E) < d/2$ and $|\Delta(E)| = 0$. He also showed the first nontrivial threshold $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2]$, which ensures $|\Delta(E)| > 0$ [2]. The correct threshold thus lies in $[d/2, (d+1)/2)$ and the conjecture is $d/2$. The cutting edge is still far from the conjectured threshold. Below is a summary of progress to date.

$$\begin{cases} \frac{5}{4}, & d = 2, \ [3] \\ \frac{9}{5}, & d = 3, \ [4] \\ \frac{d}{2} + \frac{1}{4} & d \geq 4, d \text{ even}, \ [5] \\ \frac{d}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(d-1)} & d \geq 4, d \text{ odd}, \ [6] \end{cases}.$$

Steps have been taken in understanding more complex distance configurations in E. Let G be a graph and define the G*-distance configuration* of E by

$$\Delta_G(E) = \{(|x_i - x_j|)_{(i,j)\in\mathcal{E}(G)} : (x_1, \ldots, x_{|\mathcal{V}(G)|}) \in E^{|\mathcal{V}(G)|}\}.$$

Here $\mathcal{V}(G)$ and $\mathcal{E}(G)$ are the vertices and edges of G respectively. A. Iosevich and K. Taylor [7] showed that for a tree T, $\Delta_T(E)$ contains an entire interval when $E \subset \mathbb{R}^d$ has $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$. At the other extreme, A. Greenleaf, A. Iosevich, B. Liu and E. Palsson [8] showed using a group theoretic approach that if G is the complete graph on $k+1$ vertices (the k-simplex), then $|\Delta_G(E)| > 0$ as long as $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (dk+1)/(k+1)$.

Distance is certainly not the only quantity that can be associated with two points, and progress has been made in generalizing the Falconer problem in this direction too. A. Greenleaf, A. Iosevich, and K. Taylor [9] considered more general Φ-configurations for a class of $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. They showed that the associated configuration set $\Delta_\Phi(E) = \{\Phi(x,y) : x, y \in E\}$ has nonempty interior under certain lower bound assumptions on $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ and regularity of the family of generalized Radon transforms associated with Φ. To avoid some of the Fourier integral operator theory needed to handle a general class of Φ and because of the nice geometric interpretation, we specialize to dot product in $\mathbb{R}^d$, i.e.

$$\Phi(x,y) = x \cdot y = x^1 y^1 + \cdots x^d y^d.$$

Define $\Lambda(E) = \{x \cdot y : x, y \in E\}$. The lower bounds on Hausdorff dimension for dot products and similar configurations as in [9] are far less developed than for distances. The best bound so far to ensure that $|\Lambda(E)| > 0$ is $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$. Compare this with the table above for distances.

In this work we make progress on understanding T-dot-product configurations, for T a tree with some k edges. Define

$$\Lambda_T(E) = \{(x_i \cdot x_j)_{(i,j)\in E(T)} : (x_1, \dots, x_{k+1}) \in E^{k+1}\}.$$

Before arriving at our results, we need the following machinery. It is well known that if $E \subset \mathbb{R}^d$ has $\dim_{\mathcal{H}}(E) > \alpha$, there is a number $s \in (\alpha, \dim_{\mathcal{H}}(E))$ and finite Borel measure supported on E such that

$$\mu(B(x,r)) \lesssim r^s,$$

for each $x \in \mathbb{R}^d$ and $r > 0$. We call such a μ a *Frostman measure with exponent* s. In light of this, we have the following results.

Theorem 1. *Let T be a tree with k edges and $E \subset \mathbb{R}^d$ compact with $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$. Then for every Frostman measure with exponent $s > (d+1)/2$ supported on E, there is a constant $C > 0$ independent of ϵ such that*

$$\mu^{k+1}(\{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in E^{k+1} : t^{ij} - \epsilon < x_i \cdot x_j < t^{ij} + \epsilon, (i,j) \in \mathcal{E}(T)\}) < C\epsilon^k, \qquad (1)$$

for every collection $\{t^{ij}\}$ and $\epsilon > 0$.

In the proof of Theorem 1, we follow a scheme developed by A. Iosevich et. al. [10] to bootstrap a Sobolev operator bound to a $L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ bound. This gives us a mechanism to 'rip' leaves from a tree until nothing is left. We remark that in the case of chain configurations

$$\{(x_1 \cdot x_2, x_2 \cdot x_3, \dots, x_k \cdot x_{k+1}) : (x_1, \dots, x_{k+1}) \in E^k\},$$

Theorem 1 is a special case of work done by A. Iosevich, K. Taylor, and I. Uriarte-Tuero [15].

We would also like to find a lower bound for a quantity like (1). The idea will be to embed T in a *symmetric tree cover* $\sigma(T)$ which can be 'folded' down to a single edge, at which point we can apply a result in [9] to the single edge. We define $\sigma(T)$ in Section 4.

Theorem 2. *Let T be a tree with k edges and $E \subset \mathbb{R}^d$ compact with $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$. For every Frostman measure with exponent $s > (d+1)/2$ supported on E, there is a constant $c > 0$ independent of ϵ and open interval I such that for each $t \in I$ and $\epsilon > 0$,*

$$\mu^{k+1}(\{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in E^{k+1} : t - \epsilon < x_i \cdot x_j < t + \epsilon, (i,j) \in \mathcal{E}(\sigma(T))\}) > c\epsilon^k.$$

From Theorem 1 we can deduce that any tree T is embedded in E with *many* different edge-wise dot products. We mean this in the following sense.

Corollary 1. Let $E \subset \mathbb{R}^d$ be compact with $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$. Then $|\Lambda_T(E)| > 0$.

It is also interesting to pinpoint which embeddings of a graph are contained in E and how many such embeddings there are. For the distance variant of this question see [7]. We define the set of embeddings of T in E with dot-product vector $t = (t^{ij})$ as

$$T_t(E) = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in E^{k+1} : x_i \cdot x_j = t^{ij}, (i,j) \in \mathcal{E}(T)\}.$$

When t is a scalar, we take all the $t^{ij} = t$ in (1). We can use Theorem 2 to show that there are embeddings with equal edge value.

Corollary 2. Let $E \subset \mathbb{R}^d$ be compact with $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$. Then there is an open interval I such that for each $t \in I$, $T_t(E)$ is nonempty.

Using Theorem 1, we can show that when E is Ahlfors-David regular, there cannot be too many embeddings of any given type $t = (t^{ij})$. Before getting to the corollary, we define Ahlfors-David regular.

Definition 3. A set $E \subset \mathbb{R}^d$ is Ahlfors-David s-regular if it is closed and if there exists a Borel measure μ supported on E and a constant C such that

$$C^{-1}r^s \leq \mu(B(x,r)) \leq Cr^s,$$

for all $x \in E$, $0 < r \leq \operatorname{diam}(E)$, $r < \infty$.

Note that when working on compact sets E, such measures μ are finite. We prove the following.

Corollary 3. Let $E \subset \mathbb{R}^d$ be compact Ahlfors-David s-regular, for some $s > (d+1)/2$. Then for any $t = (t^{ij})$,

$$\overline{\dim_{\mathcal{M}}}(T_t(E)) \leq (k+1)s - k.$$

As we explained above, Minkowski dimension is a weaker notion than Hausdorff dimension when working with lower bounds. However for upper bounds, Minkowski dimension is the stronger statement. In summary

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \underline{\dim_{\mathcal{M}}(A)} \leq \overline{\dim_{\mathcal{M}}(A)}.$$

Corollary 3 should not be too surprising. Say we were working on $\mathbb{R}^d$ instead of E. Then we have k equations $x_i \cdot x_j = t^{ij}$ and $k+1$ variables $x_1, \ldots, x_{k+1}$. So the regular value theorem tells us that $T_t(E)$ has dimension 1. In our case E has dimension s, so one can think of $T_t(E)$ as $s(k+1)$ dimensions of freedom cut by k equations, giving $(k+1)s - k$ remaining dimensions.

2. Initial Reductions

Let $E \subset \mathbb{R}^d$ have $\dim_{\mathcal{H}}(E) > (d+1)/2$. Then there is a Frostman measure μ with exponent s supported on E, for some $s \in ((d+1)/2, \dim_{\mathcal{H}}(E))$.

We can reduce the problem to when $E \subset [c,1]^d$ for a fixed constant c. To see this, cut $\mathbb{R}^d$ into dyadic annuli $\{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$. μ is positive on at least one of these, and by rescaling we can assume it is $\{1/2 \leq |x| \leq 1\}$. If we cover $\{1/2 \leq |x| \leq 1\}$ with balls of radius $1/100$, μ is again positive on at least one of these. Notice that for $\theta \in \mathrm{SO}(2)$, $(x\theta)\cdot(y\theta) = x \cdot y$. Thus rotating the measure μ does not affect the quantity in Theorem 1 or 2, so we can assume this ball is contained in $[c,1]^d$ for a fixed constant c. Then we simply restrict μ to this ball and renormalize.

3. Proof of Theorem 1 and Corollaries 1 and 3

3.1. **Proof of Theorem 1.** We define a quantity $\mathcal{V}_{T,t}$ which is approximately the quantity in Theorem 1. Let ρ be a smooth bump function on $\mathbb{R}$ supported around 0 and set $\rho^\epsilon(\cdot) = \epsilon^{-1}\rho(\epsilon^{-1}\cdot)$. Then define

$$\mathcal{V}^\epsilon_{T,t}(\mu) = \int \cdots \int \left(\prod_{(i,j)\in\mathcal{E}(T)} \rho^\epsilon(x_i \cdot x_j - t^{ij}) \right) d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_{k+1}).$$

The idea is to rip a leaf edge from T one at a time until the tree is empty. One needs a corresponding mechanism that operators on $\mathcal{V}^\epsilon_{T,t}(\mu)$ executing this plan, which is what we develop below. This is in the same spirit as M. Bennet, A. Iosevich, and K. Taylor's work on chain configurations [11]. More concretely, we need to show that $\mathcal{V}^\epsilon_{T,t}(\mu) \leq C$ independently of ϵ and t. We recast this problem in terms of operators for which we have nice results. Define $\mathcal{R}^\epsilon_t$ to be the operator with kernel $\rho^\epsilon(x \cdot y - t)$, that is

$$\mathcal{R}^\epsilon_t f(x) = \int f(y)\rho^\epsilon(x \cdot y - t)dy.$$

We also define

$$\mathcal{R}^\epsilon_t(f\mu)(x) = \int f(y)\rho^\epsilon(x \cdot y - t)d\mu(y).$$

[1] Then we can cast $\mathcal{V}^{\epsilon}_{T,t}(\mu)$ in a way conducive to 'ripping off' edges.

Definition 4. For T a tree with a single vertex, define $f^{\epsilon}_T = 1$. Let T be a tree with $k \geq 1$ edges and say y is a leaf with edge (x, y). Say (x, y) has corresponding dot product t'. Remove the leaf edge from T to obtain a subtree T'. Define

$$f^{\epsilon}_T = \mathcal{R}^{\epsilon}_t(f^{\epsilon}_{T'}\mu).$$

One can think of $f^{\epsilon}_T(x)$ as T pinned at x. Then integrating over the pinned point gives the entirety of $\mathcal{V}^{\epsilon}_{T,t}(\mu)$. That is

$$\mathcal{V}^{\epsilon}_{T,t}(\mu) = \int f^{\epsilon}_T(x)d\mu(x).$$

By Cauchy-Schwarz and as μ is a probability measure,

$$\mathcal{V}^{\epsilon}_{T,t}(\mu) = \|f^{\epsilon}_T\|_{L^1(\mu)} \leq \|f^{\epsilon}_T\|_{L^2(\mu)}.$$

We use the following operator norm to run the induction.

Theorem 3. *If μ is a Frostman measure with exponent $s > (d+1)/2$ and with support as was established in Section 2, $\mathcal{R}^{\epsilon}_t$ is a bounded linear operator $L^2(\mu) \mapsto L^2(\mu)$ with*

$$\|\mathcal{R}^{\epsilon}_t(f\mu)\|_{L^2(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mu)}$$

independently of $\epsilon > 0$ and for $t \approx 1$.

The proof is left to Section 5.1. By our initial reduction μ has support in $[c, 1]^d$, so $x \cdot y \approx 1$ on $\operatorname{supp}\mu$. In light of Definition 4, $f^{\epsilon}_T = \mathcal{R}^{\epsilon}_{t'}(f^{\epsilon}_{T'})$. By Theorem **??** and the inductive hypothesis,

$$\begin{aligned}\|f^{\epsilon}_T\|_{L^2(\mu)} &= \|\mathcal{R}^{\epsilon}_{t'}(f^{\epsilon}_{T'})\|_{L^2(\mu)} \\ &\lesssim \|f^{\epsilon}_{T'}\|_{L^2(\mu)} \\ &\lesssim 1\end{aligned}$$

independently of $\epsilon > 0$ and $t = (t^{ij})$. □

3.2. **Proof of Corollary 1.** Consider any cover of $\Lambda_T(E)$ by products of intervals

$$\Lambda_T(E) \subset \bigcup_{\ell} \prod_{(i,j)\in\mathcal{E}(T)} (t^{ij}_{\ell} - \epsilon_{\ell}, t^{ij}_{\ell} + \epsilon_{\ell}).$$

We have

$$\begin{aligned}E^{k+1} &= \bigcup_{t\in\Lambda_T(E)} \{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in E^{k+1} : x_i \cdot x_j = t^{ij}, (i,j) \in \mathcal{E}(T)\} \\ &\subset \bigcup_{\ell} \{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in E^{k+1} : t^{ij}_{\ell} - \epsilon_{\ell} < x_i \cdot x_j < t^{ij}_{\ell} + \epsilon_{\ell}, (i,j) \in \mathcal{E}(T)\},\end{aligned}$$

so by Theorem 1,

$$\begin{aligned}1 &= \mu^{k+1}(E^{k+1}) \\ &\leq \sum_{\ell} \mu^{k+1}(\{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in E^{k+1} : t^{ij}_{\ell} - \epsilon_{\ell} < x_i \cdot x_j < t^{ij}_{\ell} + \epsilon_{\ell}, (i, j \in \mathcal{E}(T))\}) \\ &< \sum_{\ell} C\epsilon_{\ell}.\end{aligned}$$

Thus $\sum_{\ell} \epsilon_{\ell} > 1/C$. This holds for any choice of covering so $|\Lambda_T(E)| \geq 1/C > 0$. □

[1] This operator is known as the *Radon Transform*. See Section 5.1 for more details or [12] for an in-depth review.

3.3. **Proof of Corollary 3.** In Definition 1, we can replace $N(A,\epsilon)$ with $P(A,\epsilon)$. Here $P(A,\epsilon)$ is the packing number, the greatest number of disjoint ϵ-balls with centers in A. This follows from the inequality

$$N(A,2\epsilon) \le P(A,\epsilon) \le N(A,\epsilon/2),$$

which one can find in a wonderful book by P. Mattila [13]. Consider such a packing $\{B(x_i,\epsilon)\}$ of $T_t(E)$ of size $P(T_t(E),\epsilon)$. Since the centers of the balls $B(x_i,\epsilon)$ are in $T_t(E)$,

$$\bigcup_i B(x_i,\epsilon) \subset (T_t(E))^\epsilon.$$

[2] For any $(x_1,\dots,x_{k+1}) \in E^{k+1} \cap (T_t(E))^\epsilon$, there are $x'_1,\dots,x'_{k+1} \in E$ such that $x'_i \cdot x'_j = t$ for $(i,j) \in E(T)$ and $|x_i - x'_i| < \epsilon$. Thus

$$\begin{aligned} |x_i \cdot x_j - t| &\le |x_i||x_j - x'_j| + |x'_j||x_i - x'_i| \\ &\le 2\epsilon, \end{aligned}$$

giving

$$E^{k+1} \cap (T_t(E))^\epsilon \subset \{(x_1,\dots,x_{k+1}) \in E^{k+1} : t^{ij} - 2\epsilon < x_i \cdot x_j < t^{ij} + 2\epsilon, (i,j) \in \mathcal{E}(T)\}.$$

We can conclude with Theorem 1 that

$$\begin{aligned} \sum_i \mu^{k+1}(B(x_i,\epsilon)) &= \mu^{k+1}\left(\bigcup_i B(x_i,\epsilon)\right) \\ &\le \mu^{k+1}(E^{k+1} \cap (T_t(E))^\epsilon) \\ &\le \mu^{k+1}(\{(x_1,\dots,x_{k+1}) \in E^{k+1} : t^{ij} - 2\epsilon < x_i \cdot x_j < t^{ij} + 2\epsilon, (i,j) \in \mathcal{E}(T)\}) \\ &< C\epsilon^k. \end{aligned}$$

Since $\mu(B(x,r)) \ge C'^{-1} r^s$, we get $\mu^{k+1}(B(x,r)) \ge C'^{-1} r^{(k+1)s}$. We conclude from the above calculation that

$$C'^{-1}\epsilon^{(k+1)s} P(T_t(E),\epsilon) < C\epsilon^k,$$

so

$$P(T_t(E),\epsilon) < C''\epsilon^{k-s}.$$

We obtain

$$\begin{aligned} \overline{\dim_{\mathcal{M}}}(T_t(E)) &= \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\log(P(T_t(E),\epsilon))}{\log(1/\epsilon)} \\ &\le (k+1)s - k. \end{aligned}$$

□

4. Proof of Theorem 2 and Corollary 2

In this section we consider $\mathcal{V}_{T,t}$ with t a scalar as

$$\mathcal{V}^\epsilon_{T,t}(\mu) = \int \cdots \int \left(\prod_{(i,j)\in\mathcal{E}(T)} \rho^\epsilon(x_i \cdot x_j - t) \right) d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_{k+1}).$$

Our lower bound comes from repeated use of Holder's inequality, which 'folds' the graph onto itself until reaching a single edge. T itself is not guaranteed to enjoy enough symmetry for such an argument to work out, so we embed T in a larger graph $\sigma(T)$ which is highly symmetric.

Definition 5 (Symmetric Tree Covers)**.** Let T be a tree with at least $k \ge 1$ edges. We define the symmetric tree cover $\sigma(T)$ of T as follows. If $k=1$ then $\sigma(T) = T$. Otherwise let u be a non-leaf vertex of T. Let T_u be the tree obtained by collapsing every neighbor of u to a single vertex and reattaching u to this vertex. Finally join $\deg(u)$ copies of $\sigma(T_u)$ at u and call the resulting tree $\sigma(T)$.

[2] A^ϵ is the ϵ-neighborhood of A defined as $A^\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \exists y \in A, |x-y| < \epsilon\}$.

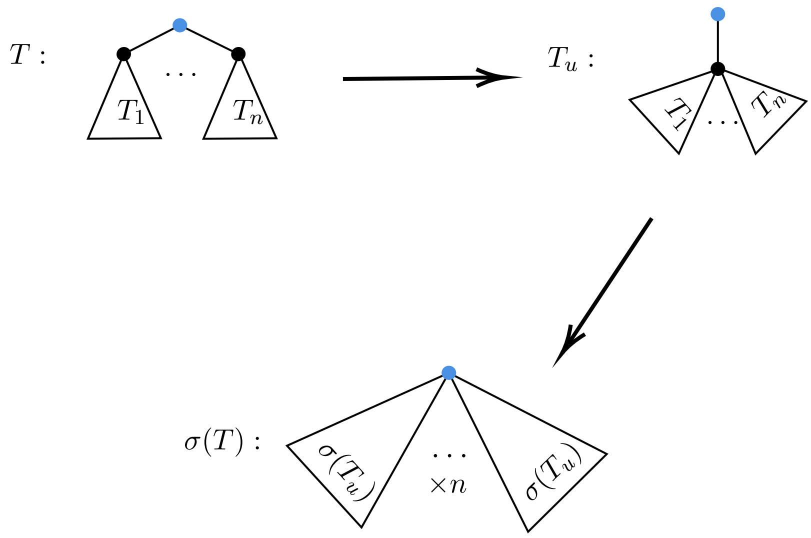

Figure 1 – Inductive construction of $\sigma(T)$.

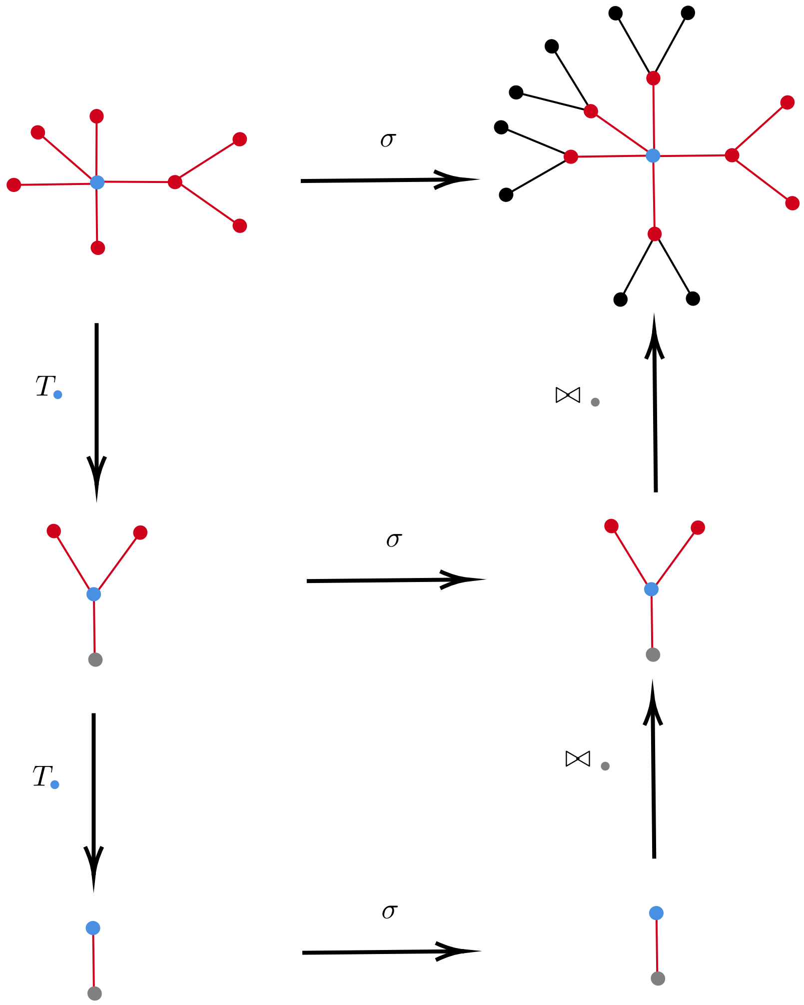

Figure 2 – Unwrapping the induction for a concrete tree. Downward arrows are the construction of the T_u's as in Definition 5. Rightward arrows are the σ operation. Upward arrows are the joining operation as in the last step of Definition 5. Edges in the upper left graph are tracked in red.

A diagram of the induction is provided in Figure 1. A concrete example is in Figure 2.

Note that the symmetric tree covering can depend on the choice of pivot at each stage, but we have no need for uniqueness. It is not difficult to establish the following properties of $\sigma(T)$.

Lemma 1. *$T \subset \sigma(T)$ and $\sigma(T)$ is finite.*

We proceed by induction. If T is a single edge we are done. Suppose that T has $k \geq 2$ edges and $T' \subset \sigma(T')$ for any tree T' on fewer than k edges. T_u contains $k-\delta(u)+1$ edges, and $\delta(u) > 1$ as we can take u to be a non-leaf vertex. Thus $T_u \subset \sigma(T_u)$. $\sigma(T_u)$ contains a copy of T_u for each vertex, so it contains each connected component of $T \setminus u$ connected to u, giving $T \subset \sigma(T)$. Also $\sigma(T)$ is finite as $\sigma(T_u)$ is by induction finite. □

The base case when T has a single edge is contained in a paper by A. Greenleaf, A. Iosevich, and K. Taylor [9]. We give the theorem in our notation below, letting e denote an edge.

Theorem 4 (Greenleaf–Iosevich–Taylor [9])**.** *Let μ have exponent $s > (d+1)/2$. Then there is an open interval I such that*

$$\mathcal{V}^{\epsilon}_{e,t} = \langle \mathcal{R}^{\epsilon}_t \mu, \mu \rangle \gtrsim 1$$

independently of $\epsilon > 0$ and $t \in I$.

Consider when T has $k \geq 2$ edges and let T_u be as in Definition 5. Note that the disjoint copies of T_u are common only in u. We have

$$\mathcal{V}^{\epsilon}_{\sigma(T),t}(\mu) = \int \left(\int \cdots \int \prod_{(i,j)\in\mathcal{E}(\sigma(T_u))} \rho^{\epsilon}(x_i \cdot x_j - t) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_{k'}) \right)^{\deg(u)} d\mu(u),$$

where we are abusing notation and letting u represent the vertex as embedded in E and as in the abstract graph T. Here $x_1, \ldots, x_{k'}$ are the vertices in T_u excluding u. Since μ is a probability measure, Holder gives

$$\begin{aligned}
&\int \left(\int \cdots \int \prod_{(i,j)\in\mathcal{E}(\sigma(T_u))} \rho^{\epsilon}(x_i \cdot x_j - t) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_{k'}) \right)^{\deg(u)} d\mu(u) \\
&\geq \left(\int \int \cdots \int \prod_{(i,j)\in\mathcal{E}(\sigma(T_u))} \rho^{\epsilon}(x_i \cdot x_j - t) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_{k'}) d\mu(u) \right)^{\deg(u)} \\
&= (\mathcal{V}^{\epsilon}_{\sigma(T_u),t}(\mu))^{\deg(u)} \gtrsim 1,
\end{aligned}$$

where the last line is by induction. □

4.1. **Proof of Corollary 2.** Set

$$K_n = \{(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in E^{k+1} : t - 1/n \leq x_i \cdot x_j \leq t + 1/n, (i,j) \in \mathcal{E}(T)\}.$$

Then the K_n are nested, non-increasing, and

$$\bigcap_{n \geq 1} K_n = \sigma(T)_t(E).$$

Consider $\Phi(x_1, \ldots, x_{k+1}) = (x_i \cdot x_j)_{(i,j)\in E(T)}$, which is continuous as a function $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^k$. Then $K_n = E^{k+1} \cap \Phi^{-1}([t-1/n, t+1/n])$ is compact, being the intersection of a compact set and a closed set. By Theorem 2 $\mu(K_n) \geq c/n^k > 0$, so K_n is nonempty. By Cantor's intersection theorem $\sigma(T)_t(E)$ is thus nonempty. By the inclusion of T in $\sigma(T)$, $T_t(E)$ is nonempty. □

5. Appendix

5.1. **The Radon Transform.** As alluded to in Section 3, we have a family of Radon transforms $\mathcal{R}^{\epsilon}_t$ given by

$$\mathcal{R}^{\epsilon}_t f(x) = \int f(y) \rho^{\epsilon}(x \cdot y - t) dy.$$

When μ is a Borel measure we write

$$\mathcal{R}^{\epsilon}_t (f\mu)(x) = \int f(y) \rho^{\epsilon}(x \cdot y - t) d\mu(y).$$

The following is a well-known mapping property of $\mathcal{R}_t^\epsilon$. See [17] for the original argument. For a source with more background, see Stein and Shakarchi's book on functional analysis [12].

Theorem 5. *$\mathcal{R}_t^\epsilon$ is a bounded linear operator $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2_{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)$ with*

$$\|\mathcal{R}_t^\epsilon f\|_{L^2_{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

independently of $\epsilon > 0$ and for $t \approx 1$.

Recall that the Sobolev space $L^2_\alpha(\mathbb{R}^d)$ is the function space equipped with the norm

$$\|f\|_{L^2_\alpha(\mathbb{R}^d)} := \left(\int (1+|\xi|^2)^\alpha |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

We bootstrap off this result to show $L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ boundedness of $\mathcal{R}_t^\epsilon$. This was done for convolution operators in [10], but the method also applies (as the authors of [10] remark) to Radon-type operators. We give the proof below.

Theorem A. If μ is a Frostman measure with exponent $s > (d+1)/2$ and with support as was established in Section 2, $\mathcal{R}_t^\epsilon$ is a bounded linear operator $L^2(\mu) \mapsto L^2(\mu)$ with

$$\|\mathcal{R}_t^\epsilon(f\mu)\|_{L^2(\mu)} \lesssim \|f\|_{L^2(\mu)}$$

independently of $\epsilon > 0$ and for $t \approx 1$.

P r o o f. By polarization, it suffices to show that for any $\|g\|_{L^2(\nu)} \leq 1$,

$$|\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(f\mu), g\mu \rangle| \lesssim \|f\|_{L^2(\mu)} \|g\|_{L^2(\mu)}$$

independently of $\epsilon > 0$ and $t \approx 1$. To proceed, we localize to dyadic frequencies. We will see that the large frequencies are the only ones that give us any trouble, so we consider a partition of unity

$$\sum_{j \geq 1} \chi(2^{-j}\xi) + \chi_0(\xi) = 1,$$

where χ is supported in the annulus $\{\xi : 1/4 \leq |\xi| \leq 1\}$. One can construct such functions by considering a C^∞ function ϕ equal to 1 when $|\xi| \geq 1$ and to 0 when $|x| \leq 1/2$, and letting $\chi(\xi) = \phi(2\xi) - \phi(\xi)$. The function χ_0 is supported in the ball $\{\xi : |\xi| \leq 1\}$ and is also smooth, since $\sum_{j\geq 1} \chi(2^{-j}\cdot)$ being the sum of only a finite number of smooth functions in a neighborhood of any point is smooth. Now we can define the Littlewood-Paley projection by the relation

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\chi(2^{-j}\xi)$$

for $j \geq 1$, and

$$\widehat{P_0 f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\chi_0(\xi).$$

Then $f = \sum_{j \geq 0} P_j f$. Applying the Littlewood-Paley decomposition to $f\mu$ and $g\mu$, we obtain

$$|\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(f\mu), g\mu \rangle| \leq \sum_{j,k \geq 0} |\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu)), P_k(g\mu) \rangle| \tag{2}$$

$$= \sum_{|j-k| \leq M} |\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu)), P_k(g\mu) \rangle| + \sum_{|j-k| > M} |\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu)), P_k(g\mu) \rangle|, \tag{3}$$

where M is a constant to be chosen later. We handle the $|j-k| \leq M$ portion first. We need a mechanism to transfer an $L^2_{(d+1)/2}$ bound to a $L^2(\mu)$ one. We need the following generic test for L^2 boundedness. See [14] Lemma 7.5.

Theorem 6 (Schur's test)**.** *Let (X, μ) and (Y, ν) be measure spaces, and let $K(x,y)$ be a measurable function on $X \times Y$ with*

$$\int_X |K(x,y)| d\mu(x) \leq A \text{ for each } y,$$

$$\int_Y |K(x,y)| d\nu(x) \leq B \text{ for each } x.$$

Define $T_K f(x) = \int K(x,y) f(y) d\nu(y)$ *. Then there is an estimate*

$$\|T_K f\|_{L^2(\mu)} \leq \sqrt{AB}\|f\|_{L^2(\mu)}.$$

Now we can continue to prove the following.

Lemma 2. *If* μ *is a Frostman measure with exponent* s *we have the estimate*

$$\|\widehat{f\mu}\|_{L^2(|\xi|\leq 2^j)} \lesssim 2^{j(d-s)/2}\|f\|_{L^2(\mu)}.$$

Lemma 2 is a special case of a result in [16]. A straightforward proof of Lemma 2 is contained in [14], but we give it here with all the details.

P r o o f. Let ϕ be an even Schwarz function which is ≥ 1 on the unit ball and whose Fourier transform has compact support. It is not difficult to see that such a function exists. For example, let f be a real-valued, nonnegative, symmetric $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ function such as

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2}) & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Define $g := \mathcal{F}^{-1}(f)$. Then

$$g(0) = \int f(x)dx > 0,$$

and by rescaling f we can assume $g(0) \geq 2$. g is certainly continuous, so for some $\delta > 0$, $g \geq 1$ on $\{|x| \leq \delta\}$. Finally define $\phi(x) = \phi(\delta x)$ which is as desired.

Now we define $\phi_j(\cdot) = \phi(2^{-j}\cdot)$, which is at least 1 on $\{|\xi| \leq 2^j\}$. Using this and Plancherel,

$$\begin{aligned}\|\widehat{f\mu}\|_{L^2(|\xi|\leq 2^j)} &\leq \|\phi_j \widehat{f\mu}\|_{L^2} \\ &= \|\widehat{\phi_j} * (f\mu)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

This last line is the L^2 norm of the function

$$x \mapsto \int 2^{jd}\widehat{\phi}(2^j(x-y))f(y)d\mu(y).$$

We have

$$\int |2^{jd}\widehat{\phi}(2^j(x-y))|dx = \|\widehat{\phi}\|_{L^1}$$

by a change of variables. $\widehat{\phi}$ has compact support in some fixed ball M , so

$$\begin{aligned}\int |2^{jd}\widehat{\phi}(2^j(x-y))|d\mu(y) &= 2^{jd}\int_{|x-y|\leq M2^{-j}} |\widehat{\phi}(2^j(x-y))|d\mu(y) \\ &\lesssim 2^{j(d-s)}.\end{aligned}$$

The last line follows from the fact that $\mu(B(x,r)) \lesssim r^s$. Now we can apply Schur's test with the kernel $K(x,y) = 2^{jd}\widehat{\phi}(2^j(x-y))$ and obtain

$$\|\widehat{\phi_j} * (f\mu)\|_{L^2} \lesssim 2^{j(d-s)/2}\|f\|_{L^2(\mu)}.$$

Returning to the proof of Theorem A, Plancherel and Cauchy-Schwarz give that the $|j-k| \leq M$ portion of (3) is dominated by

$$\sum_{|j-k|\leq M} \|\widehat{\mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu))}\|_{L^2(|\tau|\approx 2^k)}\|\widehat{P_k(g\mu)}\|_{L^2}.$$

We take advantage of Theorem 5, the $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2_{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)$ boundedness of the Radon transform $\mathcal{R}_t^\epsilon$. We have

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu))}\|_{L^2(|\tau|\approx 2^k)} &\lesssim 2^{-k(d-1)/2}\left(\int (1+|\tau|^2)^{(d-1)/2}|\widehat{\mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu))}(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2} \\ &= 2^{-k(d-1)/2}\|\mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu))\|_{L^2_{(d-1)/2}} \\ &\leq 2^{-k(d-1)/2}\|P_j(f\mu)\|_{L^2} \\ &\lesssim 2^{-k(d-1)/2}2^{j(d-s)/2}.\end{aligned}$$

Thus we are left with

$$\sum_{|j-k|\leq M} \|\widehat{\mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu))}\|_{L^2(|\tau|\approx 2^k)} \|\widehat{P_k(g\mu)}\|_{L^2} \lesssim \sum_{|j-k|\leq M} 2^{-k(d-1)/2} 2^{j(d-s)/2} 2^{k(d-s)/2},$$

which is summable if $s > (d+1)/2$.

We still need to handle the $|j-k| > M$ portion of (3). This diagonalization can be executed with the following Lemma.

Lemma 3. *For any positive integer N, there is a K such that if $|j-k| > K$,*

$$|\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu)), P_k(g\mu)\rangle| \lesssim_N 2^{-N\max(j,k)} \|f\|_{L^2(\mu)} \|g\|_{L^2(\mu)},$$

independently of $\epsilon > 0$ and for $t \approx 1$.

We give the proof below. With Lemma 3 we see that

$$\sum_{|j-k|>M} |\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu)), P_k(g\mu)\rangle| \lesssim_N \|f\|_{L^2(\mu)} \|g\|_{L^2(\mu)} \sum_{|j-k|>M} 2^{-N\max(j,k)}.$$

This is summable even when $N = 1$. □

P r o o f. [Proof of Lemma 3] We will argue by nonstationary phase. By the support properties of μ, we can insert a bump function η with support in $[c,1]^d$. By Fourier inversion on $P_j(f\mu)$ and ρ^ϵ,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu))(x) &= \int P_j(f\mu)(y)\eta(x,y)\rho^\epsilon(x\cdot y - t)dy \\ &= \iiint e^{2\pi i(y\cdot\xi + s(x\cdot y - t))} \widehat{P_j(f\mu)}(\xi)\eta(x,y)\widehat{\rho}(\epsilon s)d\xi ds dy\end{aligned}$$

Taking the Fourier transform of $\mathcal{R}_t(P_j(f\mu))$,

$$\widehat{\mathcal{R}_t(P_j(f\mu))}(\tau) = \iiiint e^{2\pi i(y\cdot\xi - x\cdot\tau + s(x\cdot y - t))} \widehat{P_j(f\mu)}(\xi)\eta(x,y)\widehat{\rho}(\epsilon s)d\xi ds dy.$$

Finally Plancherel gives

$$\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu)), P_k(g\mu)\rangle = \iiint \widehat{P_j(f\mu)}(\xi)\widehat{P_k(g\mu)}(\tau)\widehat{\rho}(\epsilon s)d\xi d\tau ds,$$

where

$$I_{jk}(\xi,\tau,s) = \chi_j(\xi)\chi_k(\tau)\iint e^{2\pi i(y\cdot\xi - x\cdot\tau + s(x\cdot y - t))}\eta(x,y)dxdy.$$

Inserting the smooth cutoffs from the definition of the Littlewood-Paley decomposition is justified as $\chi_j \approx \chi_j^2$. For convenience we write

$$\Psi_{\xi,\tau,s}(x,y) = y\cdot\xi - x\cdot\tau + s(x\cdot y - t).$$

We would be done if we could show that

$$|I_{jk}(\xi,\tau,s)| \lesssim_N (1+|s|)^{-2} 2^{-N\max(j,k)}. \tag{4}$$

ρ is Schwarz since it is even C_0^∞, so $\widehat{\rho}$ is Schwarz. This gives $|\widehat{\rho}(\epsilon s)| \lesssim 1$. It would follow from $|\widehat{\rho}(\epsilon s| \lesssim 1$ and (4) that

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu)), P_k(g\mu)\rangle| &\leq \iiint |\widehat{P_j(f\mu)}(\xi)||\widehat{P_k(g\mu)}(\tau)||\widehat{\rho}(\epsilon s)|ds d\xi d\tau \\ &\lesssim_N 2^{-N\max(j,k)} \iiint |\widehat{P_j(f\mu)}(\xi)||\widehat{P_k(g\mu)}(\tau)|(1+|s|)^{-2} ds d\xi d\tau \\ &= 2^{-N\max(j,k)} \int |\widehat{P_j(f\mu)}(\xi)|d\xi \int |\widehat{P_k(g\mu)}(\tau)|d\tau \int (1+|s|)^{-2}ds.\end{aligned}$$

The integral in s is finite. By Cauchy-Schwarz and Lemma 2, the integrals in ξ and τ are dominated by $2^{jd/2}2^{j(d-s)/2}$ and $2^{kd/2}2^{k(d-s)/2}$ respectively. Thus

$$|\langle \mathcal{R}_t^\epsilon(P_j(f\mu)), P_k(g\mu)\rangle| \lesssim_N 2^{(-N+2d-s)\max(j,k)},$$

so by choosing a large enough N we are done.

Now we prove (4). We have

$$\nabla_x \Psi_{\xi,\tau,s} = -\tau + sy$$

and

$$\nabla_y \Psi_{\xi,\tau,s} = \xi + sx.$$

Assume without loss of generality that $j > k + K$, so $|\xi| \ll |\tau|$. When $|s| \ll |\tau|$,

$$|\nabla_x \Psi_{\xi,\tau,s}| \gtrsim |\tau| - |s| \gtrsim |\tau|,$$

Where we used that η has fixed compact support. If $|s| \gg |\tau|$,

$$|\nabla_x \Psi_{\xi,\tau,s}| \gtrsim |s| - |\tau| \gtrsim |s|,$$

where we use that η is not supported near the origin. If $|s| \approx |\tau|$,

$$\begin{aligned}|\nabla_y \Psi_{\xi,\tau,s}| &\gtrsim |s| - |\xi| \\ &\approx |\tau| - |\xi| \\ &\gtrsim |\tau|.\end{aligned}$$

In any case $|\nabla \Psi_{\xi,\tau,s}| \gtrsim \max(|\tau|, |s|)$.

It is immediate that all the partials of $\Psi_{\xi,\tau,s}$ are bounded above by a constant multiple of $\max(|\tau|, |s|)$. Consider the differential operator

$$L = \frac{1}{2\pi i} \frac{\nabla \Psi_{\xi,\tau,s}}{|\nabla \Psi_{\xi,\tau,s}|^2} \cdot \nabla,$$

for which $e^{2\pi i \Psi_{\xi,\tau,s}}$ is clearly an eigenvalue. Therefore $L^N(e^{2\pi i \Psi_{\xi,\tau,s}}) = e^{2\pi i \Psi_{\xi,\tau,s}}$ for any positive integer N. Thus

$$I_{jk}(\xi, \tau, s) = \iint L^N(e^{2\pi i \Psi_{\xi,\tau,s}}) \eta dy' dx = \iint e^{2\pi i \Psi_{\xi,\tau,s}} (L^t)^N(\eta) dy' dx.$$

The transpose L^t of L is given by

$$\begin{aligned}L^t(f) &= -\frac{1}{2\pi i} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi_{\xi,\tau,s}}{|\nabla \Psi_{\xi,\tau,s}|^2} f \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\nabla f \cdot \frac{\nabla \Psi_{\xi,\tau,s}}{|\nabla \Psi_{\xi,\tau,s}|^2} - f \cdot \frac{\nabla^2 \Psi_{\xi,\tau,s}}{|\nabla \Psi_{\xi,\tau,s}|^2} \right)\end{aligned}$$

and taking the modulus,

$$|L^t(\eta)| \lesssim |\nabla \eta| \max(|\tau|, |s|)^{-1} + |\eta| \max(|\tau|, |s|)^{-1}.$$

We can continue integrating by parts up to any positive N' and obtain a bound

$$|(L^t)^{N'}(\eta)| \lesssim_{N'} \max(|\tau|, |s|)^{-N'} \sum_{|\alpha| \le N'} |\partial^\alpha \eta|.$$

Taking the modulus of $I_{jk}(\xi, \tau, s)$, we obtain

$$|I_{jk}(\xi, \tau, s)| \lesssim_{N'} \max(|\tau|, |s|)^{-N'} \iint \sum_{|\alpha| \le N'} |\partial^\alpha \eta| dy' dx \lesssim_N \max(|\tau|, |s|)^{-N'},$$

since η is Schwarz. Since $|\tau| \ge 1$,

$$\begin{aligned}|I_{jk}(\xi, \tau, s)| &\lesssim_N \max(|\tau|, |s|)^{-2} \max(|\tau|, |s|)^{-N'+2} \\ &\lesssim (1 + |s|)^{-2} |\tau|^{-N'+2} \\ &\lesssim (1 + |s|)^{-2} 2^{-(N'+2)\max(j,k)}.\end{aligned}$$

Taking N' large enough we are done. □

With Lemma 3 proved, we are done. □

6. ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to thank my undergraduate mentor and friend Alex Iosevich, for his support in this project and in many others. Thank you to Ben Baily, Brian Hu, and Ethan Pesikoff for helping to develop the symmetric tree cover idea over SMALL 2021.

References

1 Guth L. and Katz N. Hawk On the Erdős distinct distances problem in the plane//Annals of mathematics. -2015. -P. 155-190.

2 Falconer K.J. On the Hausdorff dimensions of distance sets//Mathematika. London Mathematical Society. -1985. Vol. 32. №2. -P. 206-212.

3 Guth L., Iosevich A., Ou Y. and Wang H. On Falconer's distance set problem in the plane//Inventiones mathematicae. -2020. -Vol. 219. -№3. -P. 779-830.

4 Du X., Guth L., Ou Y., Wang H., Wilson B. and Zhang R. Weighted restriction estimates and application to Falconer distance set problem//American Journal of Mathematics. -2021. -Vol. 143. №1. -P. 175-211.

5 Du X., Iosevich A., Ou Y., Wang H. and Zhang R. An improved result for Falconer's distance set problem in even dimensions//Mathematische Annalen. -2021. Vol. 380. №3. -P. 1215-1231.

6 Du X. and Zhang R. Sharp L^2 estimates of the Schrödinger maximal function in higher dimensions//Annals of Mathematics. -2019. -Vol. 189. №3. -P. 837-861.

7 Iosevich A. and Taylor K. Finite trees inside thin subsets of Rd, modern methods in operator theory and harmonic analysis// Springer Proc. Math. Stat. -2019. -Vol. 291. -P. 51-56.

8 Greenleaf A., Iosevich A., Liu B. and Palsson E. A group-theoretic viewpoint on Erdős–Falconer problems and the Mattila integral//Revista Matemática Iberoamericana. -2015. -Vol. 31. №3. -P. 799-810.

9 Greenleaf A., Iosevich A. and Taylor K. Configuration sets with nonempty interior//The Journal of Geometric Analysis. -2021. -Vol. 31. №7. -P. 6662-6680.

10 Iosevich A., Krause B., Sawyer E., Taylor K. and Uriarte-Tuero I. Maximal operators: scales, curvature and the fractal dimension// Analysis Mathematica. -2019. -Vol. 45. No 1. -P. 63-86.

11 Bennett M., Iosevich A. and Taylor K. Finite chains inside thin subsets of $\mathbb{R}^d$ //Analysis & PDE. -2016. -Vol. 9. №3. -P. 597-614.

12 Stein E.M. and Shakarchi R. Functional analysis: introduction to further topics in analysis// Princeton Lectures in Analysis. -2011. -Vol. 4.

13 Mattila P. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability. 1999. Cambridge university press. №44.

14 Wolff, Thomas H. Lectures on harmonic analysis. Vol. 29. -2003. American Mathematical Soc.

15 Iosevich A., Taylor K. and Uriarte-Tuero I. Pinned geometric configurations in Euclidean space and Riemannian manifolds. arXiv. -2016. doi: 10.48550/ARXIV.1610.00349, url: https://arxiv.org/abs/1610.00349.

16 Robert S. Strichartz Fourier asymptotics of fractal measures//Journal of Functional Analysis. -1990. -Vol. 89. No 1. -P. 154-187. doi: https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90009-A, url: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002212369090009A.

17 Phong Duong H and Stein Elias M. Radon transforms and torsion//International Mathematics Research Notices. -1991. -Vol. 1991. №4. -P. 49-60.

А. Наджимзаде

Калифорния университетi, Лос-Анджелес, Калифорния, 90095, АҚШ

$\mathbb{R}^d$ жиынының жiңiшке жиыншаларындағы тура көбейтiндiлердiң ағаштары

Аннотация: А.Иосевич пен К.Тейлор хаусдор өлшемi $(d+1)/2$ -ден артық болатын $\mathbb{R}^d$ кеңiстiгiнiң компакт жиыншалары ашық интервалда тесiктi ағаштарды қамтитындығын дәлелдеген. Мақалада осы өлшемдер үшiн арақашықтықты тура көбейтiндiге алмастыру жағдайында ұқсас нәтижелер дәлелдендi. Сонымен қатар, қамтылған тура көбейтiндi ағашының тесiктерi оң Лебег өлшемдi жиында үстемдiк етедi, ал Альфорс-Дэвидтың регулярлық жиыны үшiн берiлген тесiктi ағаштар саны регулярлық мәнi жайлы теоремамен сәйкес келедi.

Түйiн сөздер: Ақырлы-нүктелi конфигурациялар, жалпыланған Радон түрлендiрулерiнiң регулярлығы, геометриялық графтар.

А. Наджимзаде

Калифорнийский университет, Лос-Анджелес, Калифорния, 90095, США

Деревья прямых произведений в тонких подмножествах $\mathbb{R}^d$

Аннотация: А.Иосевич и К.Тейлор доказали, что компактные подмножества $\mathbb{R}^d$ с хаусдорфовой размерностью больше $(d+1)/2$ содержат деревья с пропусками в открытом интервале. В статье при том же размерном пороге доказан аналогичный результат с заменой расстояния на прямые произведения. Также получено, что пропуски вложенных деревьев прямого произведения преобладают во множестве с положительной мерой Лебега, а для регулярных множеств Альфорса-Дэвида, количество деревьев с заданными пропусками совпадает с теоремой о регулярном значении.

Ключевые слова: Конечно-точечные конфигурации, регулярность обобщенных преобразований Радона, геометрические графы.

References

1 Guth L. and Katz N. Hawk On the Erdős distinct distances problem in the plane, Annals of mathematics. 2015. P. 155-190.

2 Falconer K.J. On the Hausdorff dimensions of distance sets, Mathematika. London Mathematical Society. 1985. Vol. 32. №2. P. 206-212.

3 Guth L., Iosevich A., Ou Y. and Wang H. On Falconer's distance set problem in the plane, Inventiones mathematicae. 2020. Vol. 219. №3. P. 779-830.

4 Du X., Guth L., Ou Y., Wang H., Wilson B. and Zhang R. Weighted restriction estimates and application to Falconer distance set problem, American Journal of Mathematics. 2021. Vol. 143. №1. P. 175-211.

5 Du X., Iosevich A., Ou Y., Wang H. and Zhang R. An improved result for Falconer's distance set problem in even dimensions, Mathematische Annalen. 2021. Vol. 380. №3. P. 1215-1231.

6 Du X. and Zhang R. Sharp L^2 estimates of the Schrödinger maximal function in higher dimensions, Annals of Mathematics. 2019. Vol. 189. №3. P. 837-861.

7 Iosevich A. and Taylor K. Finite trees inside thin subsets of Rd, modern methods in operator theory and harmonic analysis, Springer Proc. Math. Stat. 2019. Vol. 291. P. 51-56.

8 Greenleaf A., Iosevich A., Liu B. and Palsson E. A group-theoretic viewpoint on Erdős–Falconer problems and the Mattila integral, Revista Matemática Iberoamericana. 2015. Vol. 31. №3. P. 799-810.

9 Greenleaf A., Iosevich A. and Taylor K. Configuration sets with nonempty interior, The Journal of Geometric Analysis. 2021. Vol. 31. №7. P. 6662-6680.

10 Iosevich A., Krause B., Sawyer E., Taylor K. and Uriarte-Tuero I. Maximal operators: scales, curvature and the fractal dimension, Analysis Mathematica. 2019. Vol. 45. No 1. P. 63-86.

11 Bennett M., Iosevich A. and Taylor K. Finite chains inside thin subsets of $\mathbb{R}^d$, Analysis & PDE. 2016. Vol. 9. №3. P. 597-614.

12 Stein E.M. and Shakarchi R. Functional analysis: introduction to further topics in analysis, Princeton Lectures in Analysis. 2011. Vol. 4.

13 Mattila P. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability. 1999. Cambridge university press. №44.

14 Wolff, Thomas H. Lectures on harmonic analysis. Vol. 29. 2003. American Mathematical Soc.

15 Iosevich A., Taylor K. and Uriarte-Tuero I. Pinned geometric configurations in Euclidean space and Riemannian manifolds. arXiv. 2016. doi: 10.48550/ARXIV.1610.00349, url: https://arxiv.org/abs/1610.00349.

16 Robert S. Strichartz Fourier asymptotics of fractal measures, Journal of Functional Analysis. 1990. Vol. 89. No 1. -P. 154-187. doi: https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90009-A, url: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002212369090009A.

17 Phong Duong H and Stein Elias M. Radon transforms and torsion, International Mathematics Research Notices. 1991. Vol. 1991. №4. P. 49-60.

Сведения об авторах:

Ариана Наджимзаде – PhD студент, Калифорния университетi, Лос-Анджелес, Калифорния, 90095, АҚШ.

Ariana Nadjimzadah – PhD student, University of California, Los Angeles, CA 90095, USA.

Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2022, Vol. 139, №2, P.26-76
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.19**

К.Е. Шерниязов

Казахский национальный университет имени Ал-Фараби, пр. аль-Фарабт, 71/23,
Алматы, Казахстан
(E-mail: ksh10@gmail.com)

Оптимальные методы приближенного восстановления функций и решений уравнений в частных производных вычислительными агрегатами по линейным комбинациям сеток Коробова со сверхсжатием информации и смежные вопросы

Аннотация: Удивительным примером сверхсжатия информации являются сетки узлов (точек в Евклидовом пространстве произвольной размерности) Н.М. Коробова, которые определяются двумя целыми положительными числами, одно из которых количество узлов. Как оказалось, квадратурные формулы с равными весами и этими сетками узлов почти оптимальны в задаче численного интегрирования, тогда как в задачах восстановления функций по крайней мере в квадрат раз хуже неулучшаемо возможного.

Тем самым, на возникаемый принципиальный вопрос "*Можно ли, если можно, то как в задачах восстановления использовать предельно высокие качества сеток Коробова*", автором был получен положительный ответ в задачах восстановления функций и преобразований их кратных тригонометрических рядов Фурье, в частности, содержащих решения уравнений в частных производных, в сложных в Вычислительной математике, Численном анализе и Теории приближений классах функций с доминирующими смешанными производной и разностью. Именно, были построены сетки, явным образом представляющие собой линейные комбинации исходных сеток Коробова, что в вычислительной практике сохраняют свойства их сверхсжатия.

В процессе решения этих задач были получены самостоятельного значения различные результаты в дискретной математике, по качеству заложенных в них приложений, быть может, даже не меньше с их помощью достигнутого. Если к числу известных с большим спектром применений относятся характеристические функции одномерных решеток, то автором в Евклидовых пространствах любой размерности для произвольных решеток, с целочисленными невырожденными задающими матрицами построены их характеристические функции.

Еще одним результатом в этом ряду являются явные решения сравнений, возникающих во многих задачах дискретной математики, среди которых находятся Линейные конгруэнтные генераторы построения случайных чисел по тестам Ковэю-Макферсона, при всех усилиях в Компьютерных науках не поддававшиеся решению в течение почти полувека, ход поисков которых постоянно освещался во всех изданиях монографии "Искусство программирования" Дональда Кнута, входящей в список 12-ти высших публикаций физико-математического цикла в 20-ом веке, с закрытием проблемы в 2016 году Н. Темиргалиевым.

Однако все эти результаты, и далеко не только, входившие в защищенную в 1999 году Кандидатскую диссертацию автора были лишь частично анонсированы в тезисах Внутриказахстанских конференций и в Кратких сообщениях, самое большее с изложением схем доказательств.

Тем самым, все результаты Диссертации оказались вне внимания в Международной математике, что с полными доказательствами восстанавливается в данной статье.

Ключевые слова: восстановление функций, восстановление решений уравнений в частных производных, операторы восстановления, характеристическая функция целочисленной решетки, сетки Коробова, сверхсжатие информации.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/2.3

2000 Mathematics Subject Classification: 42A15, 65T40.

Введение. Данная статья посвящена Теории восстановления функций и решений уравнений в частных производных для классов Коробова E, Соболева с доминирующей смешанной производной SW и Никольского-Бесова B.

Современному состоянию этих тем исследований посвящены статьи Б.С. Кашина, Е. Косова, И. Лимоновой, В.Н. Темлякова [1] и В.Н. Темлякова, Т. Ульриха [2], монография В.Н.Темлякова «Многомерные аппроксимации» [3], а также библиографические ссылки в них соответственно в 177, 33 и 251 публикациях.

Вместе с тем, во многом совершенно другие результаты из [4] составляют Научную программу Института Теоретической Математики и Научных Вычислений (ИТМиНВ) Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, которые также отражают современное состояние в 24-х Направлениях и Темах, поскольку в [1]- [3] нет формулировок и ссылок на них.

Результаты данной статьи в обзорном порядке освещены в [4]- [9], однако, по-видимому, неизвестны вне Казахстана. Так, например, в [1, 28 с.] приводится равенство

$$\sum_{l=0}^{2n} e^{\frac{ik2\pi l}{2n+1}} = \begin{cases} 2n+1, & k=0, \\ 0, & 0<|k|<2n \end{cases}$$

– характеристическая функция равномерной решетки на действительной прямой, на основе которой определены широко применяющиеся в вычислительной практике квадратурные формулы с равномерной сеткой узлов и равными весами, оптимальные в классах Соболева, Никольского-Бесова и им аналогичных. Еще одним следствием этого равенства является Метод быстрого преобразования Фурье (БПФ) Кули и Тьюки с неограниченным спектром применений, названной БПФ-манией.

Вместе с тем, для любой решетки в Евклидовом пространстве любой размерности s имеет место утверждение:

Пусть дано целое положительное число s *и пусть* $\Lambda \subset Z^s$ *есть полная решетка в* R^s*, заданная произвольной невырожденной целочисленной* $s \times s$ *матрицей* A

$$\Lambda = \{u \cdot A : u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s\}.$$

Тогда для каждого m из Z^s *имеет место равенство*

$$\chi_\Lambda(m) = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i (m, k(A^{-1})')\},$$

где величина $\chi_{\Lambda(m)}$ *равна нулю или единице смотря по тому, принадлежит или нет вектор m решетке* Λ.

В частности, для задающей решетку Λ *треугольной матрицы* V*, диагональные элементы которой* $v_{jj} > 0 (j = 1, 2, ..., s)$*, справедливо равенство*

$$\chi_\Lambda(m) = \frac{1}{\det V} \sum_{\substack{k \in Z^s : -v_{jj}/2 \le k_j < v_{jj}/2 \\ (j=1,2,...,s)}} \exp\{2\pi i (m, k(V^{-1})')\}$$

при всех $m \in Z^s$, о чем, во всяком случае в [1]- [3], не сообщается.

Далее нам понадобятся следующие определения классов.

Классы Лебега. Пусть $E \subset R^s$ – измеримое множество. Тогда в класс $L^p(E)$ относят все измеримые на E функции f такие, что конечны следующие нормы

1) Если $1 \le p < \infty$, то $\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(E)} = (\int_E |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$;

2) Если $p = \infty$, то под $L^\infty(E)$ понимается либо пространство равномерно непрерывных на E функций f и тогда

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{C(E)} = \sup_{x\in E} |f(x)|\,,$$

либо пространство существенно ограниченных на E функций f с нормой

$$\|f\|_{\infty} = vrai\sup_{x\in E} |f(x)|\,.$$

Под классом $L^{p,\infty} \equiv L^{p,\infty}\left((0,1)^s \times [0,+\infty)\right)$ будем понимать множество всех функций $g(x,t)$ таких, что для каждого $t \in [0,+\infty)$ функция $g_t(x) = g(x,t)$ как функция аргумента $x \in R^s$ является измеримой периодической с периодом 1 по каждой из своих s переменных суммируемых функций и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{p,\infty}} = vrai\sup_{t\geq 0} \left(\int_{[0,1]^s} |g(x,t)|^p\,dx\right)^{1/p} < +\infty.$$

Класс Коробова $E_s^r(r > 1, s = 1,2,...)$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$\left|\hat{f}(m)\right| = \left|\int\limits_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx\right| \leq \left(\prod_{j=1}^{s} \max\{1;|m_j|\}\right)^{-r}.$$

Класс Соболева $SW^r(0,1)^s(s = 1,2,...;r > 0; 1 \leq q \leq \infty)$ есть множество всех функций $f(x) = f(x_1,...,x_s)$, представимых в виде

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{s} \sum_{\substack{1\leq j_1<j_2<...<j_n\leq s\\ j_k\in Z(k=1,2,...,n)}} \int\limits_{[0,1]^n} \varphi_{j_1,j_2,...,j_n}(y_{j_1},y_{j_2},...,y_{j_n}) \prod_{k=1}^{n} F_r(x_{j_k}-y_{j_k})dy_{j_1}...dy_{j_n},$$

где

$$F_r(t) = \sum_{m\in Z^s\setminus\{0\}} \frac{e^{-\frac{\pi r i}{2}sgnm}}{(2\pi\|m\|)'}e^{2\pi imt}, \quad \|\varphi_{j_1,j_2,...,j_n}(\cdot)\|_{L^p(0,1)^n} \leq 1, \quad |c| \leq 1.$$

Класс Никольского-Бесова $B_{q,\theta}^r(0,1)^s(s = 1,2,...;r > 0, 1 \leq q,\theta \leq \infty)$ состоит из всех 1-периодических по каждой из своих переменных функций $f(x)$ таких, что справедливы неравенства

1) Если $1 \leq \theta < \infty$, то

$$\|f\|_{B_{q,\theta}^r} \equiv \|f\|_{L^q(0,1)^s} + \left(\int\limits_{R^s} |u|^{-s-\theta r}\left\|\Delta_u^{[r]+2}f(\cdot)\right\|_{L^q(0,1)^s}du\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1,$$

2) Если $\theta = \infty$, то

$$\|f\|_{B_{q,\theta}^r} \equiv \|f\|_{L^q(0,1)^s} + \sup_{u\in R^s}\left\{|u|^{-r}\left\|\Delta_u^{[r]+2}f(\cdot)\right\|_{L^q(0,1)^s}du\right\} \leq 1,$$

здесь $[r]$ – целая часть r, для вектора $u = (u_1,u_2,...,u_s) \in R^s$ $|u| = \sqrt{u_1^2+...+u_s^2}$ и $\Delta_u^{[r]+2}f(x) = \sum\limits_{l=0}^{[r]+2}(-1)^{[r]+2-l}C_{[r]+2}^{l}f(x+lu)$..

В [3, 15 с.] сообщается о решающей роли сеток Смоляка в задачах восстановления, тогда как не сообщается, что по соответствующим образом составленными из сеток Коробова, со свойством сверхсжатия информации, сеткам решаются те же вопросы с качеством точности в степенной шкале для изучаемых классов E и SW. Следует отметить, что весьма эффективные в вопросах численного интегрирования сетки Коробова оказались неэффективными в вопросах восстановления (см. [10]). Эта ситуация аналогична многочленам Лагранжа, которые сами по себе предельно плохи в вопросах интерполяции, но применяемые в виде сплайнов оптимальны в ряде случаев [11].

Полученные операторы восстановления даны с точностью до значений оптимальных коэффициентов. Эта задача решена в [16]- [20], где даны оптимальные алгоритмы их вычисления. Эти алгоритмы приобретают еще большую ценность по той причине, что не зависят от каких-либо свойств восстанавливаемых функций и, тем самым, не обладают свойством насыщения и автоматически дают степень приближения, заложенные в оптимальных оценках по показателям гладкости.

Решающую роль в Спектральном критерии Линейного конгруэнтного метода – Linear congruential generator (LCG), полностью решенного Н. Темиргалиевым [12] [13], играет (см. [14, 120 с.] и [15, 113 с.])

Пусть даны целое положительное число s *и целые числа* $p \geq 2, a_1 = 1, a_2, ..., a_s$ *, и пусть*

$$V_{p,a_2,...,a_s} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ -a_s & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Для всякого вектора* $m = (m_1, m_2, ..., m_s) \in Z^s$ *, удовлетворяющего соотношению*

$$m_1 + a_2 m_2 + \cdots + a_s m_s \equiv 0(mod p), \tag{1}$$

найдется вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ *из* Z^s *такой, что*

$$m = uV_{p,a_2,...,a_s}, \tag{2}$$

причем для каждого m *из* Z^s *, удовлетворяющего* (1)*, такой вектор* u *единственен.*

2. *Обратно, при любом* $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ *из* Z^s *вектор*

$$m = uV_{p,a_2,...,a_s}$$

удовлетворяет соотношению (1)*.*

Иными словами, равенство (2) *определяет взаимно однозначное соответствие между множеством векторов* $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ *из* Z^s *, удовлетворяющих соотношению* (1), и решеткой с задающей матрицей $V_{p,a_2,...,a_s}$, где новым является часть 2) об окончательности части 1).

Здесь ограничимся этими тремя примерами, фактически все утверждения статьи обладают такой же новизной, среди которых неожиданное, что совершенно различные и эффективные в Вычислительной математике сетки Н.М. Коробова и сетки К.К. Фролова задаются в виде $k(A^{-1})'$, где A треугольная целочисленная матрица.

Результаты данной статьи впервые анонсированы в [24], частично опубликованы с краткими доказательствами в [25]- [26] и составляют основное содержание Кандидатской диссертации [27], защищенной 26-го января 1999 года.

Результаты статьи выполнены в формате КВП-1, поэтому перед автором стоит задача доведения до уровня полных КВП-исследований по требованиям [9].

Глава 1. Приближенное восстановление функций из классов E , SW и по их значениям в заданном числе точек.

1.1. Необходимые определения и вспомогательные утверждения.

1.1.1. Определение оптимальных коэффициентов и их свойства. В данном подразделе будут приведены в удобном для наших целей виде ряд известных результатов (в основном из [10]), касающиеся оптимальных коэффициентов.

Приведем определение оптимальных коэффициентов. Пусть s и p - целые положительные числа, $a_1(p), a_2(p), ..., a_s(p)-$ целые числа, взаимно простые с p и величина $\chi_p(\zeta)$ равна единице или нулю, смотря по тому, делится число ζ на p или нет.

Если существуют константы $\gamma(s)$ и $c_0(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений p выполнено

$$\sum_{m\in Z^s\setminus\{0\}:\max\limits_j|m_j|<p/2}\frac{\chi_p(a_1(p)m_1+a_2(p)m_2+\cdots+a_s(p)m_s)}{\overline{\overline{m}}}\le c_0(s)\frac{\ln^{\gamma(s)}p}{p}, \qquad (1.1.1.1)$$

то для каждого p, принадлежащего указанной последовательности, целые числа $a_1(p),a_2(p),...,a_s(p)$ называют оптимальными коэффициентами по модулю p, а константу $\gamma(s)$ - их индексом, где здесь и всюду ниже для $m=(m_1,...,m_s)\in Z^s$ положено $\overline{\overline{m}}=\overline{m}_1\cdot...\cdot\overline{m}_s$ и $\overline{m_j}=\max\{1,|m_j|\}(j=1,2,...,s)$ (см. [10, 96 стр.]).

Лемма 1.1.1.1 (Коробов Н.М. [10, с. 120-121]). *Пусть s- целое положительное число. Тогда существует положительная константа $c_0(s)$ такая, что для всякого простого числа $p>2$ найдутся целые $a_1(p)=1,a_2(p),...,a_s(p)$ такие, что*

$$\sum_{m\in Z^s\setminus\{0\}:\max\limits_j|m_j|<p/2}\frac{\chi_p(a_1(p)m_1+a_2(p)m_2+\ldots+a_s(p)m_s)}{\overline{\overline{m}}}\le c_0(s)\frac{\ln^s p}{p}.$$

Иными словами, для всякого $p>2$ из последовательности простых чисел существуют оптимальные коэффициенты $a_1(p)=1,\ a_2(p),...,a_s(p)$ индекса s.

Лемма 1.1.1.2 (Коробов Н.М. [10, с. 98-101]). *Пусть даны целое положительное s и вещественное $\alpha>1$, и пусть для всякого p из некоторой последовательности целых положительных чисел целые $a_1(p),a_2(p),...,a_s(p)$ - есть оптимальные коэффициенты по модулю p индекса $\gamma(s)$. Тогда существует положительная константа $c(s,\alpha)$ такая, что для всякого p из указанной последовательности выполняется неравенство*

$$\sum_{m\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{\chi_p(a_1(p)m_1+a_2(p)m_2+\cdots+a_s(p)m_s)}{(\overline{\overline{m}})^\alpha}\le c(\alpha,s)\frac{\ln^{\alpha\gamma(s)}p}{p^\alpha}.$$

Лемма 1.1.1.3 (Коробов Н.М. [10, с. 107]). *Пусть s -целое положительное число, целые $a_1(p),a_2(p),...,a_s(p)$ - оптимальные коэффициенты по модулю $p,\gamma(s)$ их индекс и $c_0(s)$ - константа указанная в определении (1.1.1.1). Тогда для всякого ненулевого вектора $m=(m_1,m_2,...,m_s)$ из Z^s, удовлетворяющего соотношению*

$$a_1m_1+a_2m_2+\cdots+a_sm_s\equiv 0(mod p), \qquad (1.1.1.2)$$

выполняется неравенство

$$\overline{m}_1\cdot\overline{m}_2\cdot...\cdot\overline{m}_s>\frac{p}{c_0(s)\ln^{\gamma(s)}p}.$$

Лемма 1.1.1.4 (Коробов Н.М. [10, с.123]). *Пусть заданы целые числа $p>1,a_1,a_2,...,a_s$ и положительное число p такие, что для всякого ненулевого вектора $m=(m_1,m_2,...,m_s)$ из Z^s, удовлетворяющего соотношению*

$$a_1m_1+a_2m_2+\cdots+a_sm_s\equiv 0(mod p),$$

выполняется неравенство

$$\overline{\overline{m}}\equiv\overline{m}_1\overline{m}_2\cdots\overline{m}_s\ge q.$$

Тогда при любых целых λ,λ_j и $\mu_j\ge 1$ $(j=1,2,...,s)$ справедлива оценка

$$\sum_{m_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+\mu_1}\cdots\sum_{m_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+\mu_s}\chi_p(a_1m_1+a_2m_2+\cdots+a_sm_s+\lambda)\le$$

$$\le\begin{cases}1 & \text{при}\,\mu_1\mu_2\cdots\mu_s\le q,\\ \frac{4\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}{q} & \text{при}\,\mu_1\mu_2\cdots\mu_s>q.\end{cases}$$

1.1.2. Решетки: определения и некоторые известные утверждения.

Пусть s -целое положительное число. Пусть $a^{(1)},a^{(2)},...,a^{(k)}(k\le s)-$ линейно независимая система векторов евклидова пространства R^s. Совокупность Λ всех векторов вида

$$u_1a^{(1)}+u_2a^{(2)}+\cdots+u_ka^{(k)},$$

где u_j независимо друг от друга пробегают все целые числа, называется $k-$ мерной *решеткой в* R^s, а сами векторы $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(k)}$ - базисом этой решетки. Если $k = s$, то решетка называется *полной*, в противном случае *неполной* (см. [8]).

Пусть Λ и M есть решетки в R^s. Если каждая точка решетки Λ является также точкой решетки M, то Λ называется *подрешеткой* решетки M.

Далее, пусть Λ, M - есть решетки в R^s и пусть $\Lambda \subset M$, т.е. Λ есть подрешетка решетки M. Говорят, что два элемента x и y из M *эквивалентны*, если их разность $x - y$ принадлежит Λ. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. определяет разбиение решетки M на классы, состоящие из эквивалентных элементов M. Эти классы называются *классами решетки* M *относительно подрешетки* Λ (см. [10, с. 21-30] и [28, с. 144]). Всякую систему векторов $K(\Lambda, M)$, состоящую из элементов M и содержащую ровно один элемент из каждого класса решетки M относительно подрешетки Λ назовем *полной системой представителей классов решетки* М *относительно подрешетки* Λ. Отсюда следует, что если $K(\Lambda, \mathrm{M})$ - некоторая полная система представителей классов решетки M относительно подрешетки Λ, то имеет место разложение

$$M = \bigcup_{k \in K(\Lambda, M)} \{k + x : x \in \Lambda\} \qquad (1.1.2.1)$$

Лемма 1.1.2.1 (Дж. Касселс [29, с. 22]). *Пусть* Λ *и* М *полные решетки в* R^s *и* Λ *есть подрешетка решетки* M. *Тогда:*

1)*для любого базиса* $b^{(1)}, b^{(2)}, ..., b^{(s)}$ *решетки* M *можно так выбрать базис* $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(s)}$ *решетки* Λ*, что*

$$\begin{gathered} a^{(1)} = \upsilon_{11} b^{(1)} \\ a^{(2)} = \upsilon_{21} b^{(1)} + \upsilon_{22} b^{(2)} \\ \ldots \\ a^{(s)} = \upsilon_{s1} b^{(1)} + \upsilon_{s2} b^{(2)} + \cdots + \upsilon_{ss} b^{(s)}, \end{gathered} \qquad (1.1.2.2)$$

где υ_{ij} *- целые числа,* $\upsilon_{jj} > 0$ *для всех* j.

2) *обратно, для любого базиса* $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(s)}$ *решетки* Λ *найдется такой базис* $b^{(1)}, b^{(2)}, ..., b^{(s)}$ *решетки* М*, что имеет место* (1.1.2.2).

Пусть Λ - есть k - мерная решетка с базисом

$$\begin{gathered} a^{(1)} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1s}) \\ a^{(2)} = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{2s}) \\ \ldots \\ a^{(k)} = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, ..., \alpha_{ks}). \end{gathered} \qquad (1.1.2.3)$$

Тогда всякий элемент

$$u_1 a^{(1)} + u_2 a^{(2)} + \cdots + u_k a^{(k)} (u_j \in Z)$$

решетки Λ можно представить в виде

$$uA,$$

где

$$u = (u_1, u_2, ..., u_k),$$

а матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{ks} \end{pmatrix}, \qquad (1.1.2.4)$$

иными словами,

$$\Lambda = \{uA : u \in Z^k\}. \qquad (1.1.2.5)$$

Обратно, для всякой матрицы A порядка $k \times s$ с независимой системой строк (1.1.2.3), множество Λ, определяемое равенством (1.1.2.5), является k -мерной решеткой в R^s и система (1.1.2.3)является ее базисом.

Матрицу A назовем *задающей матрицей решетки* Λ или, точнее, *задающей матрицей решетки* Λ*, соответствующей базису* (1.1.2.3).

Известно, что базис решетки определен неоднозначно (см., напр., [29, с.20-30]). Всякая пара базисов одной и той же решетки связаны между собой унимодулярным преобразованием (напомним, что унимодулярным преобразованием называется преобразование с целочисленной квадратной матрицей, определитель которой равна ± 1). Следовательно, задающая матрица решетки также определена неоднозначно.

Таким образом, между базисами решетки и ее задающими матрицами существуют взаимно однозначное соответствие.

Доказательства следующих лемм не требует особых усилий и содержатся, напр., в [29, с.20-30].

Лемма 1.1.2.2. *Пусть* Λ *есть полная решетка в* R^s *. Тогда для всяких матриц* A_1 *и* A_2 *, задающих одну и ту же решетку* Λ*, имеет место равенство*

$$|\det A_1| = |\det A_2| \,.$$

Лемма 1.1.2.3. *Пусть* Λ *и* M *полные решетки в* R^s *и пусть* Λ *есть подрешетка решетки* M *. Тогда число классов решетки* M *относительно подрешетки* Λ *равно*

$$\left|\frac{\det A}{\det B}\right|,$$

где A *и* B *- произвольные задающие матрицы решеток* Λ *и* M *соответственно.*

1.2. Основные леммы. В данном разделе сформулируем и доказываем основные леммы, на базе которых будут доказаны основные результаты работы.

Пусть s - целое положительное число. Очевидно, что множество Z^s является полной решеткой в R^s . Всюду ниже будем рассматривать подрешетки решетки Z^s .

Лемма 1.2.1. *Пусть* s *-целое положительное число и пусть* Λ *есть* k*-мерная подрешетка решетки* Z^s *. Тогда всякая задающая матрица* A *решетки* Λ *является целочисленной матрицей порядка* $k \times s$ *с линейно независимыми строками.*

Эта лемма сразу же следует из определения задающей матрицы (см. п.1.1.2).

Лемма 1.2.2. *Пусть* s *целое положительное число и пусть* $\Lambda \subset Z^s$ *полная решетка в* R^s *. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Найдется треугольная матрица*

$$V = \begin{pmatrix} \upsilon_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \upsilon_{21} & \upsilon_{22} & 0 & ... & 0 \\ \upsilon_{31} & \upsilon_{32} & \upsilon_{33} & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ \upsilon_{s1} & \upsilon_{s2} & \upsilon_{s3} & ... & \upsilon_{ss} \end{pmatrix}, \tag{1.2.1}$$

где υ_{ij} *- целые числа и* $\upsilon_{jj} > 0$ *, такая, что*

$$\Lambda = \{u \cdot V : u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s\}. \tag{1.2.2}$$

Иными словами, всякая полная подрешетка решетки Z^s *задается треугольной целочисленной матрицей.*

2. *Система векторов.*

$$K = \{k = (k_1, k_2, ..., k_s) \in Z^s : -\upsilon_{jj}/2 \le k_j < \upsilon_{jj}/2 (j = 1, 2, ..., s)\}, \tag{1.2.3}$$

где υ_{jj} *- есть диагональные элементы матрицы* (1.2.1)*, является полной системой представителей классов решетки* Z^s *как относительно подрешетки,* Λ*, так и относительно подрешетки*

$$\Lambda' = \{u \cdot V' : u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s\},$$

где $V\prime$ *есть матрица, полученная транспонированием* V*.*

Доказательство. Первое утверждение данной леммы является прямым следствием леммы 1.1.2.1. Действительно, рассматривая в лемме 1.1.2.1 в качестве решетки M решетку Z^s и в качестве ее базиса систему векторов

$$b^{(1)} = (1, 0, 0, ..., 0), b^{(2)} = (0, 1, 0, ..., 0), ..., b^{(s)} = (0, 0, 0, ..., 1)$$

заключаем, что существуют целые

$$\begin{array}{lllll} \upsilon_{11} & & & & \\ \upsilon_{21} & \upsilon_{22} & & & \\ \upsilon_{31} & \upsilon_{32} & \upsilon_{33} & & \\ . & . & . & & \\ \upsilon_{s1} & \upsilon_{s2} & \upsilon_{s3} & & \upsilon_{ss} \end{array}$$

такие, что система векторов

$$\begin{aligned} &a^{(1)} \equiv \upsilon_{11} b^{(1)} = (\upsilon_{11}, 0, 0, ..., 0) \\ &a^{(2)} \equiv \upsilon_{21} b^{(1)} + \upsilon_{22} b^{(2)} = (\upsilon_{12}, \upsilon_{22}, 0, ..., 0) \\ &\ \dots \\ &a^{(s)} \equiv \upsilon_{s1} b^{(1)} + \upsilon_{s2} b^{(2)} + \dots + \upsilon_{ss} b^{(s)} = (\upsilon_{s1}, \upsilon_{s2}, \upsilon_{s3}, ..., \upsilon_{ss}), \end{aligned}$$

является базисом решетки Λ. Тогда соответствующей этому базису задающей матрицей решетки Λ будет матрица

$$V = \begin{pmatrix} \upsilon_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ \upsilon_{21} & \upsilon_{22} & 0 & ... & 0 \\ \upsilon_{31} & \upsilon_{32} & \upsilon_{33} & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ \upsilon_{s1} & \upsilon_{s2} & \upsilon_{s3} & ... & \upsilon_{ss} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\Lambda = \{u \cdot V : u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s\}.$$

Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Сначала докажем, что различные элементы системы (1.2.3) принадлежат различным классам решетки Z^s относительно подрешетки Λ. Пусть $k^{(1)} = (k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, ..., k_s^{(1)})$ и $k^{(2)} = (k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, ..., k_s^{(2)})$ элементы системы (1.2.3), принадлежащие одному классу решетки Z^s относительно подрешетки Λ. Это означает, что $k^{(1)} - k^{(2)} \in \Lambda$. Тогда в силу (1.2.2) найдется вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ из Z^s такой, что

$$k^{(1)} - k^{(2)} = uV. \tag{1.2.4}$$

Запишем последнее равенство покоординатно:

$$\begin{cases} lk_1^{(1)} - k_1^{(2)} & = u_1\upsilon_{11} + u_2\upsilon_{21} + u_3\upsilon_{31} ... + u_s\upsilon_{s1}, \\ k_2^{(1)} - k_2^{(2)} & = u_2\upsilon_{22} + u_3\upsilon_{32} ... + u_s\upsilon_{s2}, \\ \dots & \\ k_s^{(1)} - k_s^{(2)} & = u_s\upsilon_{ss}. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Но,

$$\left| k_s^{(1)} - k_s^{(2)} \right| < \upsilon_{ss},$$

ибо

$$-\upsilon_{ss}/2 \le k_s^{(1)} < \upsilon_{ss}/2,$$

$$-\upsilon_{ss}/2 \le k_s^{(2)} < \upsilon_{ss}/2.$$

Следовательно, учитывая, что u_s - целое, из последнего равенства в (1.2.5) получим

$$u_s = 0. \tag{1.2.6}$$

Подставляя последнее в систему (1.2.5) получим систему

$$\begin{cases} k_1^{(1)} - k_1^{(2)} & = u_1v_{11} + u_2v_{21} + u_3v_{31} + \cdots + u_{s-1}v_{s-11} \\ k_2^{(1)} - k_2^{(2)} & = u_2v_{22} + u_3v_{32} + \cdots + u_{s-1}v_{s-12} \\ & \cdots \\ k_{s-1}^{(1)} - k_{s-1}^{(2)} & = u_{s-1}v_{s-1s-1} \end{cases}$$

Повторяя те же рассуждения, что и при получении равенства (1.2.6), из последнего равенства последней системы получим равенство

$$u_{s-1} = 0.$$

Продолжая далее обнаружим

$$u_s = 0, u_{s-1} = 0, u_{s-2} = 0, ..., u_1 = 0.$$

Тогда из (1.2.5) следует, что

$$k^{(1)} = k^{(2)}.$$

Таким образом, предполагая, что элементы $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$ системы (1.2.3) принадлежат одному классу решетки Z^s относительно подрешетки Λ получили равенство $k^{(1)} = k^{(2)}$. Это означает, что различные элементы системы принадлежат различным классам решетки Z^s относительно подрешетки Λ.

Далее покажем, что количество элементов системы (1.2.3) совпадает с количеством всех классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ. Действительно, с одной стороны, количество элементов системы (1.2.3) равно $v_{11}v_{22} \cdot ... \cdot v_{ss} = \det V$, ибо для каждого $j = 1, 2, ..., s$ в интервале $\left[-\frac{v_{jj}}{2}, \frac{v_{jj}}{2}\right)$ имеется v_{jj} целых чисел. С другой стороны, поскольку единичная матрица E_{ss} является задающей матрицей для решетки Z^s, то в силу леммы 1.1.2.3 число классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ равно

$$\frac{\det V}{\det E_{ss}} = \det V,$$

т.е. действительно равно количеству элементов системы (1.2.3).

Тем самым показали, что, во-первых, различные элементы системы (1.2.3) принадлежат различным классам решетки Z^s относительно подрешетки Λ, во-вторых, количество элементов системы (1.2.3) совпадает с количеством классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ. Отсюда следует, что система (1.2.3), будучи подмножеством Z^s, содержит ровно по одному элементу из каждого класса решетки Z^s относительно подрешетки Λ, т.е. по определению является полной системой представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ.

То, что система (1.2.3) является также полной системой представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ' доказывается совершенно аналогично с той лишь разницей, что вместо равенства (1.2.4) рассматривается равенство

$$k^{(1)} - k^{(2)} = uV',$$

где V' - есть матрица, полученная транспонированием матрицы V. Лемма 1.2.2 полностью доказана.

Лемма 1.2.3. *Пусть дано целое положительное число s и пусть $\Lambda \subset Z^s$ есть полная решетка в R^s. Тогда для всякой задающей матрицы A решетки Λ, т.е. такой, что*

$$\Lambda = \{u \cdot A : u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s\}, \tag{1.2.7}$$

и для каждого m из Z^s имеет место равенство

$$\chi_\Lambda(m) = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i(m, k(A^{-1})')\}, \tag{1.2.8}$$

где величина $\chi_\Lambda(m)$ *равна нулю или единице смотря по тому, принадлежит или нет вектор* $m \in Z^s$ *решетке* Λ, *а система векторов* $K \subset Z^s$ *есть некоторая полная система представителей классов решетки* Z^s *относительно подрешетки*

$$\Lambda' = \{u \cdot A' : u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s\}. \tag{1.2.9}$$

В частности, для задающей решетку Λ *треугольной матрицы V, диагональные элементы которой* $v_{jj} > 0$ $(j = 1, 2, ..., s)$, *справедливо*

$$\chi_\Lambda(m) = \frac{1}{\det V} \sum_{\substack{k \in Z^s : -v_{jj} i \le k_j < v_{jj}/2 \\ (j=1,2,...,s)}} \exp\{2\pi i (m, k(V^{-1})')\} \tag{1.2.10}$$

при всех $m \in Z^s$.

Доказательство. Пусть A произвольная фиксированная задающая матрица решетки Λ, т.е. такая, что для нее выполняется (1.2.7), и пусть Λ' есть решетка с задающей матрицей A', т. е. такая, что для нее выполняется (1.2.9). Так как Λ есть полная решетка в R^s и $\Lambda \subset Z^s$, то матрица A будет невырожденной и целочисленной матрицей порядка $s \times s$ (см. лемму 1.2.1). Далее, в силу леммы 1.1.2.3 число классов решетки Z^s относительно подрешетки $\Lambda\prime$ равен $detA\prime$. Учитывая все эти факты, сначала докажем, что сумма в правой части (1.2.8) не зависит от K, т.е. от того, по какой полной системе представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ' производится суммирование.

Действительно, пусть $K = \{k^{(1)}, k^{(2)}, ..., k^{(\det A)}\} \subset Z^s$ и $T = \{t^{(1)}, t^{(2)}, ..., t^{(\det A)}\} \subset Z^s$ две различные полные системы представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ'. Тогда, в силу определения полной системы представителей классов, между элементами множеств T и K можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы соответствующие элементы принадлежали одному классу решетки Z^s относительно подрешетки Λ'. Другими словами, найдутся перестановка $\{j_1, j_2, ..., j_{\det A}\}$ упорядоченного множества $\{1, 2, ..., \det A\}$ и система векторов $\{m^{(1)}, m^{(2)}, ..., m^{(\det A)}\} \subset Z^s$ такие, что для каждого $n = 1, 2, ..., \det A$ имеет место $k^{(n)} = t^{(j_n)} + m^{(n)} A'$. Тогда при произвольном фиксированном m из Z^s имеем

$$\sum_{k \in K} e^{2\pi i (m, k(A^{-1})')} = \sum_{n=1}^{detA} e^{2\pi i (m, k^{(n)}(A^{-1})')} =$$

$$= \sum_{n=1}^{detA} e^{2\pi i (m, (t^{(j_n)} + m^{(n)} A')(A^{-1})')} = \sum_{n=1}^{detA} e^{2\pi i (m, t^{(j_n)}(A^{-1})')} e^{2\pi i (m, m^{(n)} A'(A^{-1})')}.$$

Отсюда, учитывая

$$exp\{2\pi i (m, m^{(n)} A'(A^{-1})')\} = exp\{2\pi i (m, m^{(n)} E_{ss})\} = 1,$$

где E_{ss} есть единичная матрица порядка $s \times s$, получим

$$\sum_{k \in K} e^{2\pi i (m, k(A^{-1})')} = \sum_{n=1}^{detA} e^{2\pi i (m, t^{(j_n)}(A^{-1})')} = \sum_{n=1}^{detA} e^{2\pi i (m, t^{(n)}(A^{-1})')}.$$

Итак, сумма в правой части (1.2.8) действительно не зависит от того, по какой полной системе представителей классов K производится суммирование.

Приступим к доказательству равенства (1.2.8). Пусть сначала $m \in \Lambda$. Тогда в силу (1.2.7) найдется вектор $u \in Z^s$ такой, что $m = uA$. Подставляя это в правую часть (1.2.8) получим

$$\frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i (m, k(A^{-1})')\} = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i (uA, k(A^{-1})')\} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i (uAA^{-1}, k)\} = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i (u, k)\} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} 1 = \frac{1}{\det A} cardK = \frac{1}{\det A} \cdot \det A' = 1.$$

Это доказывает справедливость (1.2.8) для всех $m \in \Lambda$.

Пусть теперь $m \notin \Lambda$. Тогда опять же в силу (1.2.7) заключаем, что не все компоненты вектора $u = mA^{-1}$ целые. Пусть одно из нецелых будет j_0-я компонента u_{j_0} и пусть $e^{(0)} \in Z^s$ есть вектор , j_0-ая компонента которого равна 1, а остальные равны 0. Рассмотрим систему векторов $K^{(0)} \equiv \{k + e^{(0)} : k \in K\}$. Покажем, что эта система также является полной системой представителей классов решетки Z^s относительно Λ'. Для этого сначала докажем, что справедливы следующие утверждения:

1) число элементов системы $K^{(0)}$ равно числу классов решетки Z^s относительно Λ' ;

2) различные элементы множества $K^{(0)}$ принадлежат различным классам решетки Z^s относительно Λ'.

Справедливость первого утверждения очевидна, поскольку в системе $K^(0)$ столько элементов, сколько в системе K.

Допустим, что второе утверждение неверно. Тогда найдутся различные элементы $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$ из K такие, что элементы $k^{(1)} + e^(0)$ и $k^{(2)} + e^(0)$ системы $K^(0)$ принадлежат одному классу решетки Z^s относительно $\Lambda\prime$. Это означает, что имеет место

$$(k^{(1)} + e^{(0)}) - (k^{(2)} + e^{(0)}) \in \Lambda',$$

или, что то же самое,

$$k^{(1)} - k^{(2)} \in \Lambda'.$$

Но последнее противоречит тому, что K есть полная система представителей решетки Z^s относительно Λ'. Тем самым справедливость утверждений 1)-2) доказаны. Из этих утверждений следует, что система $K^(0)$, будучи подмножеством Z^s, содержит ровно по одному элементу из каждого класса решетки Z^s относительно Λ', т.е. действительно является полной системой представителей классов решетки относительно Λ'.

Отсюда, учитывая тот факт, что сумма в правой части (1.2.8) не зависит от системы K, получим

$$S \equiv \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} e^{2\pi i (m, k(A^{-1})')} = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K^{(0)}} e^{2\pi i (m, k(A^{-1})')} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} e^{2\pi i (m, (k + e^{(0)})(A^{-1})')} = S \cdot e^{2\pi i (m, e^{(0)}(A^{-1})')}.$$

Но $e^{2\pi i (m, e^{(0)}(A^{-1})')} = e^{2\pi i (mA^{-1}, e^{(0)})} = e^{2\pi i (u, e^{(0)})} = e^{2\pi i u_{j_0}} \neq 1$, ибо u_{j_0} нецелое, поэтому $S = 0$. Стало быть, (1.2.8) справедливо и при $m \notin \Lambda$. Лемма 1.2.3 доказана.

Лемма 1.2.4. *Пусть даны целое положительное число* s, *ограниченная числовая последовательность* $\beta = \{\beta_m : m \in Z^s\}$, *конечное множество индексов* $\Im = \{\tau\}$, *попарно непересекающиеся множества* $\rho_\tau \subset Z^s (\tau \in \Im)$, *целочисленные квадратные невырожденные матрицы* $A_\tau (\tau \in \Im)$ *порядка* $s \times s$, *и пусть для каждого* $\tau \in \Im$ *система векторов* K_τ *есть некоторая полная система представителей классов решетки* Z^s *относительно подрешетки*

$$\Lambda'_\tau = \{uA'_\tau : u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s\}.$$

Тогда для всякой 1-периодической по каждой переменной и разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_s)$ *имеет место равенство*

$$u(x, \beta, f) - (T_{\rho,\beta,A} f)(x) =$$

$$= \sum_{\tau \in \Im} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(- \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_\tau + m) \right) \beta_m e^{2\pi i (m,x)} + \sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in \Im} \rho_\tau} \beta_m \hat{f}(m) e^{2\pi i (m,x)}, \quad (1.2.11)$$

где $\hat{f}(m) (m \in Z^s)$*– есть коэффициенты Фурье функции* f *по тригоно-метрической системе* $\{e^{2\pi i (m,x)} : m \in Z^s\}$, *функция* $u(x, \beta, f)$ *и оператор* $T_{\rho,\beta,A}$ *определены* *соответственно равенствами*

$$u(x,\beta,f)=\sum_{m\in Z^s}\beta_m\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)}(x\in R^s) \qquad (1.2.12)$$

и

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x)=\sum_{\tau\in\Im}\frac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}f(\{k(A_\tau^{-1})'\})\sum_{m\in\rho_\tau}\beta_m e^{2\pi i(m,x-\{k(A_\tau^{-1})'\})}. \qquad (1.2.13)$$

В частности, для произвольного тригонометрического полинома

$$f(x)=\sum_{m\in E}c_m e^{2\pi i(m,x)}$$

такого, что

$$E\subset\left(Z^s\backslash\bigcup_{\tau\in\Im}\bigcup_{m\in\rho_\tau}\{uA_\tau+m:u\in Z^s\backslash\{0\}\}\right)\cap\bigcup_{\tau\in\Im}\rho_\tau,$$

имеет место равенство (интерполяционная формула)

$$u(x,\beta,f)=\sum_{\tau\in\Im}\frac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}f(\{k(A_\tau^{-1})'\})\sum_{m\in\rho_\tau}\beta_m e^{2\pi i(m,x-k(A_\tau^{-1})')}.$$

Доказательство. Пусть функция $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_s)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье, т.е.

$$f(x)=\sum_{l\in Z^s}\hat{f}(l)e^{2\pi i(l,x)}(x\in R^s). \qquad (1.2.14)$$

Преобразуем правую часть равенства (1.2.13) следующим образом:

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x)=\sum_{\tau\in\Im}\tfrac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}f(\{k(A_\tau^{-1})'\})\sum_{m\in\rho_\tau}\beta_m e^{2\pi i(m,x-\{k(A_\tau^{-1})'\})}=$$
$$=\sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\tfrac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}f(\{k(A_\tau^{-1})'\})e^{-2\pi i(m,\{k(A_\tau^{-1})'\})}\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)}.$$

Далее, представив каждое значение $f(\{k(A_\tau^{-1})'\})$ в виде $\sum_{l\in Z^s}\hat{f}(l)e^{2\pi i(l,\{k(A_\tau^{-1})'\})}$ (см.(1.2.14)), получим

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x)=$$

$$=\sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\tfrac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}\sum_{l\in Z^s}\hat{f}(l)e^{2\pi i(l,\{k(A_\tau^{-1})'\})}e^{-2\pi i(m,\{k(A_\tau^{-1})'\})}\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)}=$$
$$=\sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\tfrac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}\sum_{l\in Z^s}\hat{f}(l)e^{2\pi i(l-m,\{k(A_\tau^{-1})'\})}\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)},$$

откуда, сначала делая замену $n=l-m$ в сумме по l, затем меняя местами суммы по k и по n (это возможно в силу абсолютной сходимости ряда в (1.2.14)), получим

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x)=\sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\frac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}\sum_{n\in Z^s}\hat{f}(n+m)e^{2\pi i(n,\{k(A_\tau^{-1})'\})}\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)}=$$

$$=\sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\sum_{n\in Z^s}\hat{f}(n+m)\left\{\frac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}e^{2\pi i(n,\{k(A_\tau^{-1})'\})}\right\}\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)}. \qquad (1.2.15)$$

Но, в силу леммы 1.2.3 при каждом $\tau\in\Im$ для всякого $n\in Z^s$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}e^{2\pi i(n,\{k(A_\tau^{-1})'\})}=\frac{1}{\det A_\tau}\sum_{k\in K_\tau}e^{2\pi i(n,k(A_\tau^{-1})')}=\chi_{\Lambda_\tau}(n),$$

где $\chi_{\Lambda_\tau}-$ есть характеристическая функция решетки $\Lambda_\tau = \{uA_\tau : u \in Z^s\}$. Так что (1.2.15) можно записать в виде

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x) = \sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\sum_{n\in Z^s}\hat{f}(n+m)\chi_{\Lambda_\tau}(n)\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)},$$

или, что то же самое, в виде

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x) = \sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\sum_{u\in Z^s}\hat{f}(uA_\tau+m)\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)}.$$

Преобразуя далее получим

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x) = \sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\hat{f}(uA_\tau+m)\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)} + \sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\hat{f}(m)\beta_m e^{2\pi i(m,x)} =$$

$$= \sum_{\tau\in\Im}\sum_{m\in\rho_\tau}\left(\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\hat{f}(uA_\tau+m)\right)\beta_m e^{2\pi i(m,x)} + \sum_{m\notin\bigcup_{\tau\in\Im}\rho_\tau}\hat{f}(m)\beta_m e^{2\pi i(m,x)}.$$

В итоге, из последнего равенства и из (1.2.12) следует равенство (1.2.11). Лемма 1.2.4 доказана.

Лемма 1.2.5. *Пусть даны целое положительное число s и целые числа $p \geq 2, a_1 = 1, a_2, ..., a_s$, и пусть*

$$V_{p,a_2,\dots,a_s} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ -a_s & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Для всякого вектора $m = (m_1, m_2, ..., m_s) \in Z^s$, удовлетворяющего соотношению*

$$m_1 + a_2m_2 + \dots + a_sm_s \equiv 0(mod p), \qquad (1.2.16)$$

найдется вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ из Z^s такой, что

$$m = uV_{p,a_2,\dots,a_s}, \qquad (1.2.17)$$

причем для каждого m из Z^s, удовлетворяющего (1.2.16), *такой вектор и единственен.*

2. *Обратно, при любом $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ из Z^s вектор*

$$m = uV_{p,a_2,\dots,a_s}$$

удовлетворяет соотношению (1.2.16).

Иными словами, равенство (1.2.17) *определяет взаимно однозначное соответствие между множеством векторов $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ из Z^s, удовлетворяющих соотношению* (1.2.16), *и решеткой с задающей матрицей $V_{p,a_2,\dots,a_s}$.*

Доказательство. Пусть вектор $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ из Z^s удовлетворяет соотношению (1.2.16). Это означает, что найдется целое u_1 такое, что

$$m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_sm_s = pu_1.$$

Тогда для вектора

$$u = (u_1, m_2, ..., m_s) \in Z^s$$

имеем

$$uV_{p,a_2,...,a_s} =$$

$$= (u_1, m_2, m_3, ..., m_s) \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ -a_s & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (p_1u_1 - a_2m_2 - a_3m_3 - \cdots - a_sm_s, m_2, m_3, ..., m_s) = m,$$

т. е. действительно, для каждого вектора $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ из Z^s, удовлетворяющего соотношению (1.2.16), найдется вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ из Z^s такой, что $m = uV_{p,a_2,...,a_s}$. Единственность такого вектора $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ из Z^s для каждого $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ из Z^s, удовлетворяющего (1.2.16), следует из обратимости матрицы $V_{p,a_2,...,a_s}$.

Докажем вторую часть леммы. Пусть вектор $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ из Z^s представимо в виде (1.2.16), т.е. найдется вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ из Z^s такой, что

$$m = uV_{p,a_2,...,a_s} = (u_1, u_2, u_3, ..., u_s) \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ -a_s & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (p_1u_1 - a_2u_2 - a_3u_3 - \cdots - a_su_s, u_2, u_3, ..., _s).$$

Тогда

$$m_1 + a_2m_2 + \cdot s + a_sm_s = (p_1u_1 - a_2u_2 - a_3u_3 - \cdots - a_su_s) + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_su_s = pu_1,$$

т.е. $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ удовлетворяет соотношению

$$m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_sm_s \equiv 0(modp).$$

Лемма 1.2.5 полностью доказана.

Лемма 1.2.6. *Пусть заданы целые числа* $p > 1, a_1 = 1, a_2, ..., a_s$ *и положительное число* q *такие, что для всякого ненулевого вектора* $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ *из* Z^s, *удовлетворяющего соотношению*

$$m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_sm_s \equiv 0(modp),$$

выполняется неравенство

$$\overline{\overline{m}} \equiv \overline{m}_1\overline{m}_2 \cdots \overline{m}_s \geq q.$$

Пусть

$$V_{p,a_2,...,a_s} \equiv \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ -a_s & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда при любых целых λ_j *и* $\mu_j \geq 1 (j = 1, 2, ..., s)$ *справедлива оценка*

$$card\{u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s : uV_{p,a_2,...,a_s} \in [\lambda_1 + 1, \lambda_1 + \mu_1] \times \cdots \times [\lambda_s + 1, \lambda_s + \mu_s]\} \leq$$

$$\leq \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_1\mu_2 \cdots \mu_s \leq q, \\ \frac{4\mu_1\mu_2\cdots\mu_s}{q} & \text{при } \mu_1\mu_2 ... \mu_s > q, \end{cases}$$

где для множества E *через* $cardE$ *обозначено количество его элементов.*

Доказательство. В силу утверждения 2 леммы 1.2.5 для всякого $u = (u_1, u_2, ..., u_s)$ из Z^s вектор

$$m = uV_{p,a_2,...,a_s}$$

удовлетворяет соотношению

$$m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_sm_s \equiv 0(modp),$$

поэтому

$$card\{u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s : uV_{p,a_2,...,a_s} \in [\lambda_1 + 1, \lambda_1 + \mu_1] \times ... \times [\lambda_s + 1, \lambda_s + \mu_s]\} \le$$

$$\le \sum_{m_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+\mu_1} ... \sum_{m_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+\mu_s} \chi_p(a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_sm_s),$$

где, напомним, $\chi_p(\cdot)$ - есть характеристическая функция множества целых чисел, кратных p.

С другой стороны, в силу леммы 1.1.4

$$\sum_{m_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+\mu_1} \cdots \sum_{m_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+\mu_s} \chi_p(a_1m_1 + a_2m_2 + \cdots + a_sm_s) \le$$

$$\le \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_1\mu_2\cdots\mu_s \le q, \\ \frac{4n_1n_2\cdots n_s}{q} & \text{при } \mu_1\mu_2\cdots\mu_s > q. \end{cases}$$

Из этих неравенств следует утверждение леммы 1.2.6.

Лемма 1.2.7. *Пусть* ς *целое положительное число. Тогда для любого целого* n *и для целого* k *такого, что*

$$2^{\varsigma-1} \le \overline{k} < 2^{\varsigma}$$

выполняется

$$2^{\varsigma-1}\overline{n} \le \overline{2^{\varsigma+1}n + k} < 2^{\varsigma+2}\overline{n},$$

где, напомним, для $y \in R$ *положено* $\overline{y} = \max\{1, |y|\}$.

Доказательство. Докажем оценку снизу. При $n = 0$ имеем

$$\left|2^{\varsigma+1}n + k\right| = |k|,$$

откуда

$$\overline{2^{\varsigma+1}n + k} = \max\{\left|2^{\varsigma+1}n + k\right|, 1\} = \max\{|k|, 1\} = \overline{k} \ge 2^{\varsigma-1} = 2^{\varsigma-1}\overline{n}.$$

Если же $n \ne 0$, то

$$\overline{2^{\varsigma+1}n + k} = \max\{\left|2^{\varsigma+1}n + k\right|, 1\} \ge \left|2^{\varsigma+1}n + k\right| \ge 2^{\varsigma+1}|n| - k = 2^{\varsigma}|n| + (2^{\varsigma}|n| - k) \ge$$

$$\ge 2^{\varsigma}|n| + (2^{\varsigma}|n| - \overline{k}) > 2^{\varsigma}|n| + (2^{\varsigma}|n| - 2^{\varsigma}) \ge 2^{\varsigma}|n| = 2^{\varsigma}\overline{n} > 2^{\varsigma-1}\overline{n}.$$

Оценка снизу доказана.

Докажем оценку сверху. Для любого целого n и для всякого целого k такого, что

$$2^{\varsigma-1} \le \overline{k} < 2^{\varsigma}$$

имеем

$$\left|2^{\varsigma+1}n + k\right| \le 2^{\varsigma+1}|n| + |k| < 2^{\varsigma+1}|n| + 2^{\varsigma} < 2^{\varsigma+2}\overline{n},$$

откуда

$$\overline{2^{\varsigma+1}n + k} = \max\{\left|2^{\varsigma+1}n + k\right|, 1\} < 2^{\varsigma+2}\overline{n}.$$

Лемма 1.2.7 полностью доказана.

Лемма 1.2.8. *Пусть даны целое положительное число* s *и бесконечно дифференцируемая на* R *ненулевая функция* $\omega(t)$ *такая, что*

$$\{t \in R : \omega(t) \ne 0\} \subset (0, 1), \tag{1.2.18}$$

и пусть для всяких $N > 1$ *и* $\mu (0 \leq \mu \leq N-1)$ *функция* $\omega_{N,\mu}(t)$ *есть 1 - периодическая функция, определенная равенством*

$$\omega_{N,\mu}(t) = \omega(Nt - \mu)(0 \leq t < 1). \tag{1.2.19}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. *Для всякого числа* $r > 1$ *найдется константа* $c_1(r,s,\omega) > 0$ *такая, что при любых* $N > 1$ *и* $\mu(0 \leq \mu \leq N-1)$ *функция*

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s) \equiv \frac{c_1(r,s,\omega)}{N^{r-1}} \omega_{N,\mu}(x_1)$$

принадлежит классу E_s^r .

2. *Для всякого числа* $r > 0$ *найдется константа* $c_2(r,s,\omega) > 0$ *такая, что при любых* $N (N = 1,2,3,...)$ *и* $\mu(0 \leq \mu \leq N-1)$ *функция*

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s) \equiv \frac{c_2(r,s,\omega)}{N^{r-1/2}} \omega_{N,\mu}(x_1)$$

принадлежит классу $SW_2^r(0,1)^s$.

Доказательство. Для произвольных фиксированных $N > 1$ и $\mu(0 \leq \mu \leq N-1)$ положим

$$g_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s) \equiv \omega_{N,\mu}(x_1)(x = (x_1, x_2, ..., x_s) \in R^s). \tag{1.2.20}$$

Очевидно, что функция $g_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s)$ является 1-периодической по каждой переменной. Кроме того, из (1.2.18) и (1.2.19) следует, что

$$g_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s) = 0 \,\text{при}\, x = (x_1, x_2, ..., x_s) \notin \left(\frac{\mu}{N}, \frac{\mu+1}{N}\right) \times (0,1)^{s-1}. \tag{1.2.21}$$

Рассмотрим коэффициенты Фурье функции $g_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s)$. Сперва заметим, что для всякого $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ из Z^s такого, что хотя бы один из компонент $m_2, m_3, ..., m_s$ будет отличен от нуля выполняется $\hat{g}_{N,\mu}(m_1, m_2, ..., m_s) = 0$. Действительно, пусть $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$ из Z^s такой, что для некоторого целого $2 \leq j_0 \leq s$ выполнено $m_{j_0} \neq 0$. Тогда (см. (1.2.20))

$$\hat{g}_{N,\mu}(m_1, m_2, ..., m_s) = \int_{[0,1]^s} g_{N,\mu}(x) e^{-2\pi i (m,x)} dx = \int_{[0,1]^s} \omega_{N,\mu}(x_1) e^{-2\pi i (m,x)} dx =$$

$$= \int_0^1 \omega_{N,\mu}(x_1) e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1 \cdot \prod_{j=2}^{s} \int_0^1 e^{-2\pi i m_j x_j} dx_j = 0,$$

ибо

$$\int_0^1 e^{-2\pi i m_{j_0} x_{j_0}} dx_{j_0} = 0.$$

Отсюда следует, что могут быть отличными от нуля только коэффициенты

$$\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)(m_1 \in Z). \tag{1.2.22}$$

Далее, пусть σ произвольное целое положительное число. Учитывая (1.2.19), (1.2.20) и (1.2.21) получим

$$\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0) = \int_{[0,1]^s} g_{N,\mu}(x) e^{-2\pi i (m,x)} dx = \int_0^1 \omega_{N,\mu}(x_1) e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1 =$$

$$= \int_{\frac{\mu}{N}}^{\frac{\mu+1}{N}} \omega_{N,\mu}(x_1) e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1 = \int_{\frac{\mu}{N}}^{\frac{\mu+1}{N}} \omega(N x_1 - \mu) e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1,$$

откуда, делая замену

$$t = N x_1 - \mu,$$

получим

$$\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0) = \frac{1}{N} \int_0^1 \omega(t) e^{-2\pi i \frac{m_1 (t+\mu)}{N}} dt. \tag{1.2.23}$$

Отсюда, для $m_1 \neq 0$ применяя формулу интегрирования по частям к правой части σ раз и учитывая (1.2.18) получим

$$\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0) = \frac{1}{N}\left(\frac{N}{2\pi i m_1}\right)^{\sigma} \int_0^1 \omega^{(\sigma)}(t) e^{-2\pi i \frac{m_1(t+\mu)}{N}} dt. \tag{1.2.24}$$

Приступаем к доказательству утверждения 1. Пусть задано $r > 1$ и пусть $N > 1$ и $\mu(0 \leq \mu \leq N-1)$ фиксированы. Оценим сверху коэффициенты $\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)(m_1 \in Z)$.

Пусть сначала $|m_1| \leq N$. Тогда из (1.2.23) следует, что

$$|\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)| \leq \frac{1}{N}\int_0^1 |\omega(t)|\, dt = \frac{N^{r-1}}{(\overline{m}_1)^r}\left(\frac{\overline{m}_1}{N}\right)^r \int_0^1 |\omega(t)|\, dt \leq \frac{N^{r-1}}{(\overline{m}_1)^r}\int_0^1 |\omega(t)|\, dt. \tag{1.2.25}$$

Пусть теперь $|m_1| > N$. Пользуясь равенством (1.2.24) при $\sigma = [r] + 1$, получим

$$|\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)| \leq \frac{1}{N}\left(\frac{N}{2\pi |m_1|}\right)^{\sigma} \int_0^1 \left|\omega^{(\sigma)}(t)\right| dt \leq$$

$$\leq \frac{N^{r-1}}{|m_1|^r}\left(\frac{N}{2\pi |m_1|}\right)^{\sigma - r} \int_0^1 \left|\omega^{(\sigma)}(t)\right| dt \leq \frac{N^{r-1}}{|m_1|^r}\int_0^1 \left|\omega^{(\sigma)}(t)\right| dt =$$

$$= \frac{N^{r-1}}{(\overline{m}_1)^r}\int_0^1 \left|\omega^{([r]+1)}(t)\right| dt,$$

т.е.

$$|\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)| \leq \frac{N^{r-1}}{(\overline{m}_1)^r}\int_0^1 \left|\omega^{([r]+1)}(t)\right| dt. \tag{1.2.26}$$

Как было замечено выше, остальные коэффициенты Фурье функции $g_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s)$ равны нулю. Учитывая это из (1.2.25) и (1.2.26) получим, что имеет место

$$|\hat{g}_{N,\mu}(m)| \leq \frac{N^{r-1}}{(\overline{\overline{m}})^r} \max\left\{\int_0^1 |\omega(t)|\, dt, \int_0^1 \left|\omega^{([r]+1)}(t)\right| dt\right\} (m = (m_1, m_2, ..., m_s) \in Z^s).$$

Отсюда, полагая

$$c_1(r, s, \omega) \equiv \left(\max\left\{\int_0^1 |\omega(t)|\, dt, \int_0^1 \left|\omega^{([r]+1)}(t)\right| dt\right\}\right)^{-1},$$

имеем, что для коэффициентов Фурье функции $f_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s)$, определенной равенством (см., также, (1.2.20))

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s) \equiv \frac{c_1(r, s, \omega)}{N^{r-1}} g_{N,\mu}(x) = \frac{c_1(r, s, \omega)}{N^{r-1}} \omega_{N,\mu}(x_1),$$

справедливы неравенства

$$\left|\hat{f}_{N,\mu}(m)\right| \leq (\overline{\overline{m}})^{-r}\, (m \in Z^s).$$

Это означает, что функция $f_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s)$ принадлежит классу E_s^r.

Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть $r > 0$. Пусть $N > 1$ и $\mu(0 \leq \mu \leq N-1)$ фиксированы. Оценим сверху сумму

$$\sum_{m_1 \in Z} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r},$$

для чего сначала разбиваем ряд на две части:

$$\sum_{m_1 \in Z} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r} = \sum_{|m_1| \leq N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r} +$$

$$+ \sum_{|m_1| > N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, ..., 0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r} \tag{1.2.27}$$

и отдельно оцениваем каждое слагаемое.

С учетом (1.2.23) для первой суммы в правой части последнего равенства имеем

$$\sum_{|m_1|\le N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1,0,...,0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r} \le \sum_{|m_1|\le N} \left(\frac{1}{N}\int_0^1 |\omega(t)|\,dt\right)^2 (\overline{m}_1)^{2r} =$$

$$= \left(\frac{1}{N}\int_0^1 |\omega(t)|\,dt\right)^2 \sum_{|m_1|\le N} (\overline{m}_1)^{2r} \le \left(\frac{1}{N}\int_0^1 |\omega(t)|\,dt\right)^2 \sum_{|m_1|\le N} N^{2r} =$$

$$= \left(\frac{1}{N}\int_0^1 |\omega(t)|\,dt\right)^2 N^{2r}(2N+1) \le 3\left(\frac{1}{N}\int_0^1 |\omega(t)|\,dt\right)^2 N^{2r+1} = 3\left(\int_0^1 |\omega(t)|\,dt\right)^2 N^{2r-1},$$

т.е.

$$\sum_{|m_1|\le N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1,0,...,0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r} \le 3\left(\int_0^1 |\omega(t)|\,dt\right)^2 N^{2r-1}. \quad (1.2.28)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (1.2.27). Пользуясь равенством (1.2.24) при $\sigma = [r]+2$ получим

$$\sum_{|m_1|>N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1,0,...,0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r} \le \sum_{|m_1|>N} \left(\frac{1}{N}\left(\frac{N}{2\pi|m_1|}\right)^{\sigma}\int_0^1 \left|\omega^{(\sigma)}(t)\right| dt\right)^2 (|m_1|)^{2r} =$$

$$= \frac{N^{2(\sigma-1)}}{(2\pi)^{2\sigma}}\left(\int_0^1 \left|\omega^{(\sigma)}(t)\right| dt\right)^2 \sum_{|m_1|>N} \frac{1}{(|m_1|)^{2(\sigma-r)}} =$$

$$= \frac{N^{2([r]+1)}}{(2\pi)^{2([r]+2)}}\left(\int_0^1 \left|\omega^{([r]+2)}(t)\right| dt\right)^2 \sum_{|m_1|>N} \frac{1}{(|m_1|)^{2([r]+2-r)}}. \quad (1.2.29)$$

Но, поскольку $2([r]+2-r) > 2 > 1$,

$$\sum_{|m_1|>N} \frac{1}{(|m_1|)^{2([r]+2-r)}} = 2\sum_{m_1>N} \frac{1}{(|m_1|)^{2([r]+2-r)}} \le 2\int_{N-1}^{\infty} \frac{dx}{x^{2([r]+2-r)}} =$$

$$= \frac{2}{(2([r]+2-r)-1)(N-1)^{2([r]+2-r)-1}} \le \frac{2}{(2([r]+2-r)-1)\left(\frac{N}{2}\right)^{2([r]+2-r)-1}} =$$

$$= \frac{2^{2([r]+2-r)}}{(2([r]+2-r)-1)N^{2([r]+1)-2r+1}}.$$

Учитывая это из (1.2.29) получим

$$\sum_{|m_1|>N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1,0,...,0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r} \le$$

$$\le \frac{2^{2([r]+2-r)}}{(2\pi)^{2([r]+2)}(2([r]+2-r)-1)}\left(\int_0^1 \left|\omega^{([r]+2)}(t)\right| dt\right)^2 N^{2r-1}. \quad (1.2.30)$$

Таким образом, из (1.2.27), (1.2.28) и (1.2.30) получим

$$\sum_{m_1\in Z} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1,0,...,0)|^2 (\overline{m}_1)^{2r} \le c^{-2}(r,s,\omega)N^{2r-1}, \quad (1.2.31)$$

где

$$c_2(r,s,\omega) \equiv \max^{-1/2}\left\{1, \frac{2^{2([r]+2-r)}}{(2\pi)^{2([r]+2-r)}(2([r]+2-r)-1)}\left(\int_0^1 \left|\omega^{([r]+2)}(t)\right| dt\right)^2,\right.$$

$$\left. 3\left(\int_0^1 |\omega(t)|\,dt\right)^2\right\}. \quad (1.2.32)$$

Определим функцию $f_{N,\mu}(x_1,x_2,...,x_s)$ равенством (см., также, (1.2.20))

$$f_{N,\mu}(x_1,x_2,...,x_s) \equiv \frac{c_2(r,s,\omega)}{N^{r-1/2}} g_{N,\mu}(x) = \frac{c_2(r,s,\omega)}{N^{r-1/2}} \omega_{N,\mu}(x_1) \quad (1.2.33)$$

и представим ее в виде свертки:

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s) = \frac{c_2(r,s,\omega)}{N^{r-1/2}} \hat{g}_{N,\mu}(0,0,...,0) + \int_{[0,1]} \varphi_{N,\mu}(t_1) F_r(x_1 - t_1) dt_1,$$

где

$$F_r(t) = \sum_{m \in Z \setminus \{0\}} \frac{e^{-\frac{\pi r i}{2} sgnm}}{(2\pi |m|)^r} e^{2\pi i m t}$$

и

$$\varphi_{N,\mu}(t) = c_2(r,s,\omega) \sum_{m \in Z \setminus \{0\}} (2\pi |m|)^r e^{\frac{\pi r i}{2} sgnm} \underset{N,\mu}{\hat{g}} (m,0,...,0) e^{2\pi i m t}.$$

Из (1.2.27), (1.2.28), (1.2.30) и (1.2.31) следует, что

$$\|\varphi_{N,\mu}(\cdot)\|_{L^2(0,1)} \le 1 \text{ и } \left| \frac{c_2(2,r,s,\omega)}{N^{r-1/2}} \hat{g}_{N,\mu}(0,0,...,0) \right| \le 1.$$

Следовательно, функция $f_{N,\mu}(x_1, x_2, ..., x_s)$, определенная равенством (1.2.33), принадлежит классу SW_2^r. Утверждение 2 и вместе с тем лемма 1.2.8 полностью доказано.

1.3. Оценки снизу погрешности восстановления функций из классов E_s^r и SW_2^r по их значениям в узлах равномерных и параллелепипедальных теоретико-числовых сеток

Справедлива

Теорема 1. *Пусть s целое положительное число. Тогда при любом $N = n^s (n = 1, 2, ...)$ имеют место следующие оценки снизу:*

1) *при $r > 1$ и $1 \le \nu \le \infty$*

$$\frac{1}{N^{\frac{1}{s}(r-1+1/\nu)}} \underset{r,s,\nu}{\ll} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in E_s^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), ..., f(\xi^{(N)}), \cdot) \right\|_\nu,$$

2) *при $r > 1/2$ и $1 \le \nu \le \infty$*

$$\frac{1}{N^{\frac{1}{s}\left(r-(1/2-1/\nu)_+\right)}} \underset{r,s,\nu}{\ll} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in SW_2^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), ..., f(\xi^{(N)}), \cdot) \right\|_\nu,$$

где в обоих соотношениях $\inf\limits_{\varphi_N}$ берется по всем функциям

$$\varphi_N(z_1, z_2, ..., z_N, x) : C^N \times [0,1]^s \to C,$$

измеримым по переменной x в смысле Лебега, а сетка $\{\xi^{(k)}\}_1^N$ есть равномерная сетка $(N = n^s (n = 1, 2, ...))$

$$\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, ..., \frac{k_s}{n} \right) (k_j \in Z, 0 \le k_j \le n-1 (j = 1, 2, ..., s)).$$

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем оценку 1). Пусть $r > 1$ и $\omega(t)$ - фиксированная бесконечно дифференцируемая на R функция, удовлетворяющая условию

$$\{t : \omega(t) \ne 0\} \subset (0,1), \tag{1.3.1}$$

и пусть $c_1(r,s,\omega) > 0$ есть константа из утверждения 1) леммы 2.8, соответствующая указанным r и $\omega(t)$.

Пусть даны произвольное целое положительное число n, измеримая в смысле Лебега по переменной $x = (x_1, x_2, ..., x_s)$ функция

$$\varphi_N(z_1, z_2, ..., z_N, x) : C^N \times [0,1]^s \to C (N = n^s),$$

и пусть сетка $\{\xi^{(k)}\}_1^N (N = n^s)$ есть равномерная сетка

$$\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, ..., \frac{k_s}{n} \right) (k_j \in Z, 0 \le k_j \le n-1 (j = 1, 2, ..., s)).$$

Согласно утверждению 1) леммы 1.2.8 1-периодическая по каждой переменной функция, определенная равенством

$$f_\xi(x_1, x_2, ..., x_s) \equiv \frac{c_1(r,s,\omega)}{n^{r-1}}\omega(nx_1)(0 \le x_1 < 1) \tag{1.3.2}$$

принадлежит классу E_s^r . Кроме того, из (1.3.1) следует, что

$$\forall x \in [0,1]^s \backslash \left(0, \frac{1}{n}\right) \times [0,1]^{s-1} \Rightarrow f_\xi(x) = 0.$$

Отсюда, в частности,

$$f_\xi(\xi^{(k)}) = 0 (k = 1, 2, ..., N). \tag{1.3.3}$$

Далее для каждого $1 \le \nu \le \infty$ имеем

$$\|f_\xi(x)\|_\nu = \frac{c_1(r,s,\omega)}{n^{r-1}}\left(\int_{[0,1]^s} |\omega(nx_1)|^\nu \, dx\right)^{1/\nu} = \frac{c_1(r,s,\omega)}{n^{r-1}}\left(\int_0^{\frac{1}{n}} |\omega(nx_1)|^\nu \, dx_1\right)^{\frac{1}{\nu}} =$$

$$= \frac{c_1(r,s,\omega)}{n^{r-1}}\left(\frac{1}{n}\int_0^1 |\omega(t)|^\nu \, dt\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{c_1(r,s,\omega)\, \|\omega(\cdot)\|_\nu}{n^{r-1+\frac{1}{\nu}}} = \frac{c_1(r,s,\omega)\, \|\omega(\cdot)\|_\nu}{N^{\frac{1}{s}(r-1+\frac{1}{\nu})}}.$$

В итоге, учитывая (1.3.3) и последнее равенство получим

$$\max_{j=0,1}\left\|(-1)^j f_\xi(x) - \varphi_N((-1)^j f_\xi(\xi^{(1)}), (-1)^j f_\xi(\xi^{(2)}), ..., (-1)^j f_\xi(\xi^{(N)}), x)\right\|_\nu \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}(\left\|f_\xi(x) - \varphi_N(f_\xi(\xi^{(1)}), f_\xi(\xi^{(2)}), ..., f_\xi(\xi^{(N)}), x)\right\|_\nu +$$

$$+\left\|-f_\xi(x) - \varphi_N(-f_\xi(\xi^{(1)}), -f_\xi(\xi^{(2)}), ..., -f_\xi(\xi^{(N)}), x)\right\|_\nu) =$$

$$= \frac{1}{2}(\|f_\xi(x) - \varphi_N(0,0,...,0,x)_\nu\| + \|f_\xi(x) + \varphi_N(0,0,...,0,x)\|_\nu) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\|(f_\xi(x) - \varphi_N(0,0,...,0,x)) + (f_\xi(x) + \varphi_N(0,0,...,0,x))\|_\nu = \|f_\xi(x)\|_\nu =$$

$$= \frac{c(r,s,\omega)\, \|\omega(\cdot)\|_\nu}{N^{\frac{1}{s}(r-1+\frac{1}{\nu})}},$$

откуда в силу произвольности φ_N следует утверждение 1. Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем вторую часть теоремы 1. Пусть $r > 1/2$ и $\omega(t)$-фиксированная ненулевая бесконечно дифференцируемая на R функция, удовлетворяющая условию (1.3.1), и пусть $c_2(r,s,\omega) > 0$ есть константа из утверждения 2) леммы 1.2.8, соответствующая указанным r и $\omega(t)$.

Сначала докажем оценку снизу при $\nu \ge 2$. Пусть даны произвольное целое положительное число n, измеримая в смысле Лебега по переменной $x = (x_1, x_2, ..., x_s)$ функция

$$\varphi_N(z_1, z_2, ..., z_N, x) : C^N \times [0,1]^s \to C (N = n^s),$$

и пусть сетка $\{\xi^{(k)}\}_1^N (N = n^s)$ есть равномерная сетка

$$\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, ..., \frac{k_s}{n}\right) (k_j \in Z, 0 \le k_j \le n-1 (j = 1, 2, ..., s)).$$

В силу утверждения 2 леммы 1.2.8 заключаем, что 1-периодическая по каждой переменной функция, определенная равенством

$$f_\xi(x_1, x_2, ..., x_s) \equiv \frac{c_2(r,s,\omega)}{n^{r-1/2}}\omega(nx_1)(0 \le x_j < 1 (j = 1, 2, ..., s)) \tag{1.3.4}$$

принадлежит классу $SW_2^r(0,1)^s$.

Далее повторяя те же рассуждения, что и в доказательстве первой части теоремы 1 получим

$$\max_{j=0,1}\left\|(-1)^j f_\xi(x) - \varphi_N((-1)^j f_\xi(\xi^{(1)}), (-1)^j f_\xi(\xi^{(2)}), ..., (-1)^j f_\xi(\xi^{(N)}), x)\right\|_\nu \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}(\left\|f_\xi(x)-\varphi_N(f_\xi(\xi^{(1)}),f_\xi(\xi^{(2)}),...,f_\xi(\xi^{(N)}),x)\right\|_\nu +$$

$$+\left\|-f_\xi(x)-\varphi_N(-f_\xi(\xi^{(1)}),-f_\xi(\xi^{(2)}),...,-f_\xi(\xi^{(N)}),x)\right\|_\nu) =$$

$$=\frac{1}{2}(\|f_\xi(x)-\varphi_N(0,0,...,0,x)_\nu\| + \|f_\xi(x)+\varphi_N(0,0,...,0,x)\|_\nu) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\|(f_\xi(x)-\varphi_N(0,0,...,0,x))+(f_\xi(x)+\varphi_N(0,0,...,0,x))\|_\nu = \|f_\xi(x)\|_\nu =$$

$$=\frac{c_2(r,s,\omega)\,\|\omega(\cdot)\|_\nu}{N^{\frac{1}{s}(r-1/2+1/\nu)}}. \qquad (1.3.5)$$

Если же $1 \le \nu < 2$, то вместо функции (1.3.4) рассмотрим функцию

$$f_\xi(x_1,x_2,...,x_s) \equiv \frac{1}{n^r}\sin 2\pi n x_1,$$

которая, как легко проверить, также принадлежит классу $SW_2^r(0,1)^s$. Очевидно также, что $f_\xi(\xi^{(k)})=0(k=1,2,...,N)$. Тогда

$$\max_{j=0,1}\left\|(-1)^j f_\xi(x)-\varphi_N((-1)^j f_\xi(\xi^{(1)}),(-1)^j f_\xi(\xi^{(2)}),...,(-1)^j f_\xi(\xi^{(N)}),x)\right\|_\nu \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}(\left\|f_\xi(x)-\varphi_N(f_\xi(\xi^{(1)}),f_\xi(\xi^{(2)}),...,f_\xi(\xi^{(N)}),x)\right\|_\nu +$$

$$+\left\|-f_\xi(x)-\varphi_N(-f_\xi(\xi^{(1)}),-f_\xi(\xi^{(2)}),...,-f_\xi(\xi^{(N)}),x)\right\|_\nu) =$$

$$=\frac{1}{2}(\|f_\xi(x)-\varphi_N(0,0,...,0,x)_\nu\| + \|f_\xi(x)+\varphi_N(0,0,...,0,x)\|_\nu) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\|(f_\xi(x)-\varphi_N(0,0,...,0,x))+(f_\xi(x)+\varphi_N(0,0,...,0,x))\|_\nu = \|f_\xi(x)\|_\nu =$$

$$=\frac{1}{n^r}\left(\int_0^1 |\sin 2\pi n x_1|^\nu\,dx_1\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{n^r}\left(\int_0^1 |\sin 2\pi x_1|^\nu\,dx_1\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{\|\sin 2\pi x\|_{L^\nu(0,1)}}{N^{r/s}}.$$

В итоге объединяя последнее с (1.3.5) для $1 \le \nu \le \infty$ получим

$$\sup_{f\in SW_2^r}\left\|f(\cdot)-\varphi_N(f(\xi^{(1)}),f(\xi^{(2)}),...,f(\xi^{(N)}),\cdot)\right\|_\nu \ge \frac{c_0(r,s,\omega)}{N^{\frac{1}{s}(r-(1/2-1/\nu)_+)}},$$

где $c_0(r,s,\omega)=\min\{c_2(r,s,\omega)\,\|\omega(\cdot)\|_\nu\,, \|\sin 2\pi x\|_{L^\nu(0,1)}\}$. Откуда в силу произвольности φ_N следует утверждение 2 теоремы 1. Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть s целое положительное число. Тогда при любом целом положительном N имеют место следующие оценки снизу:*

1) *при* $r>1$ *и* $1\le\nu\le\infty$

$$\frac{1}{N^{\frac{r}{2}}} \underset{r,s,\nu}{\ll} \inf_{a\in Z^s}\inf_{\varphi_N}\sup_{f\in E_s^r}\left\|f(\cdot)-\varphi_N(f\left(\frac{a}{N}\right),f\left(\frac{2a}{N}\right),...,f\left(\frac{Na}{N}\right),\cdot)\right\|_\nu,$$

2) *при* $r>1/2$ *и* $1\le\nu\le\infty$

$$\frac{1}{N^{\frac{r}{2}}} \underset{r,s,\nu}{\ll} \inf_{a\in Z^s}\inf_{\varphi_N}\sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s}\left\|f(\cdot)-\varphi_N(f\left(\frac{a}{N}\right),f\left(\frac{2a}{N}\right),...,f\left(\frac{Na}{N}\right),\cdot)\right\|_\nu,$$

где в обоих соотношениях $\inf\limits_{\varphi_N}$ *берется по всем функциям*

$$\varphi_N(z_1,z_2,...,z_N,x): C^N\times[0,1]^s \to C,$$

измеримым по переменной x в смысле Лебега.

Доказательство. Для доказательства используем пример -функцию, построенную Н.М. Коробовым в [10, с. 182]. Пусть заданы целое положительное число N и вектор $a=(a_1,a_2,...,a_s)\in Z^s$. Согласно известной лемме Туэ (см., напр., [10, с. 182]) найдутся целые числа $|n_1|\le\sqrt{N}$ и $|n_2|\le\sqrt{N}$ такие, что

$$a_1n_1+a_2n_2\equiv 0(modN). \qquad (1.3.6)$$

Положим
$$f_{N,a}(x)=\frac{e^{2\pi i n_1x_1}-e^{-2\pi i n_2x_2}}{2n^r},$$
где $n=\max\{n_1,n_2\}$. Очевидно, что $f_{N,a}(x)$ принадлежит классу E_s^r при $r>1$ и классу SW_2^r при $r>0$.

Кроме того, в силу (1.3.6)
$$f_{a,N}\left(\frac{ka}{N}\right)=\frac{e^{2\pi i\frac{n_1a_1k}{N}}-e^{-2\pi i\frac{n_2a_2k}{N}}}{n^r}=\frac{e^{2\pi i\frac{n_1a_1k}{N}}-e^{2\pi i\frac{n_1a_1k}{N}}}{n^r}=0.$$

С учетом этого для произвольной измеримой по переменной x в смысле Лебега функции
$$\varphi_N(z_1,z_2,...,z_N,x):C^N\times[0,1]^s\to C$$
имеем $(1\le\nu\le\infty)$
$$\max_{j=0,1}\left\|(-1)^jf_{a,N}(x)-\varphi_N((-1)^jf_{a,N}\left(\frac{a}{N}\right),(-1)^jf_{a,N}\left(\frac{2a}{N}\right),...,(-1)^jf_{a,N}\left(\frac{Na}{N}\right),x)\right\|_\nu\ll$$
$$\ll\frac{1}{2}\left(\left\|f_{a,N}(x)-\varphi_N(f_{a,N}\left(\frac{a}{N}\right),f_{a,N}\left(\frac{2a}{N}\right),...,f_{a,N}\left(\frac{Na}{N}\right),x)\right\|_\nu+\right.$$
$$\left.+\left\|-f_{a,N}(x)-\varphi_N(-f_{a,N}\left(\frac{a}{N}\right),-f_{a,N}\left(\frac{2a}{N}\right),...,-f_{a,N}\left(\frac{Na}{N}\right),x)\right\|_\nu\right)=$$
$$=\frac{1}{2}(\|f_{a,N}(x)-\varphi_N(0,0,...,0,x)_\nu\|+\|f_{a,N}(x)+\varphi_N(0,0,...,0,x)\|_\nu)\ge$$
$$\ge\frac{1}{2}\|(f_{a,N}(x)-\varphi_N(0,0,...,0,x))+(f_{a,N}(x)+\varphi_N(0,0,...,0,x))\|_\nu=\|f_{a,N}(x)\|_\nu\underset{r,s,\nu}{\gg}$$
$$\underset{r,s,\nu}{\gg}\frac{1}{n^r}\ge\frac{1}{N^{r/2}}.$$

Отсюда, поскольку функции $(-1)^jf_{N,a}(x)(j=0,1)$ принадлежат классу E_s^r при $r>1$ и классу SW_2^r при $r>1/2$, в силу произвольности функции
$$\varphi_N(z_1,z_2,...,z_N,x):C^N\times[0,1]^s\to C$$
получим, соответственно, утверждения 1 и 2 теоремы 2. Теорема 2 полностью доказана.

1.4. Доказательства основных результатов

В данном подразделе будут доказаны следующие теоремы:

Теорема 3. *Пусть дано целое положительное число s. Пусть для каждого $k(k=1,2...)$ число p_k - есть простое число, удовлетворяющее соотношению $2^{k+3}\le p_k\cdot k^2<2^{k+4}$, а целые числа $a_1^{(k)}=1,a_2^{(k)},...,a_s^{(k)}$ - оптимальные коэффициенты по модулю p_k индекса $\gamma\ge0$. Пусть для всякого целого $l\ge s+1$ и всякого $\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_s)$ из Z^s такого, что $\tau_j>0$ и $\|\tau\|\overset{def}{=}\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_s<l$ матрица $A_{l,\tau}$ и множества $K(l,\tau),\rho(\tau)$ определены соответственно равенствами*
$$A_{l,\tau}=\begin{pmatrix}2^{\tau_1+1}p_{l-\|\tau\|}&0&0&...&0\\-2^{\tau_1+1}a_2^{(l-\|\tau\|)}&2^{\tau_2+1}&0&...&0\\-2^{\tau_1+1}a_3^{(l-\|\tau\|)}&0&2^{\tau_3+1}&...&0\\.&.&.&...&.\\-2^{\tau_1+1}a_s^{(l-\|\tau\|)}&0&0&...&2^{\tau_s+1}\end{pmatrix},\qquad(1.4.1)$$
$$K(l,\tau)=\{k\in Z^s:-2^{\tau_1}p_{l-\|\tau\|}\le k_1<2^{\tau_1}p_{l-\|\tau\|},-2^{\tau_j}\le k_j<2^{\tau_j}(j=2,3,...,s)\}\qquad(1.4.2)$$
$$\rho(\tau)=\{m=(m_1,m_2,...,m_s)\in Z^s:2^{\tau_j-1}\le\max\{1,|m_j|\}<2^{\tau_j}(j=1,...,s)\}.\qquad(1.4.3)$$
Тогда при любом целом положительном $N\ge2^{2s+5}$ имеют место следующие соотношения:

1) *при $r>1$ и $2\le\nu\le\infty$*
$$\sup_{f\in E_s^r}\|f(\cdot)-(T_Nf)(\cdot)\|_\nu\underset{r,s,\nu,\gamma}{\ll}\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1+1/\nu}},$$

2) *при* $r > 1/2$

$$\sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \sup_{x \in [0,1]^s} |f(x) - (T_N f)(x)| \underset{r,s,\gamma}{\ll} \frac{\ln^{(r+1/2)(s-1)} N}{N^{r-1/2}},$$

3) *при* $2r > s$ *и* $1 \le \theta \le \infty$

$$\sup_{f \in B_{2,\theta}^r(0,1)^s} \sup_{x \in [0,1]^s} |f(x) - (T_N f)(x)| \underset{r,s,\gamma}{\ll} \frac{\ln^{(r/s+1/2)(s-1)} N}{N^{r/s-1/2}},$$

где оператор T_N *определен равенствами*

$$n = \max\left\{ l \in Z_+ : card\left[\bigcup_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < l}} \{k(A_{l,\tau}^{-1})' : k \in K(l,\tau)\} \right] \le N \right\}, \qquad (1.4.4)$$

$$(T_N f)(x) = \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} f(k(A_{n,\tau}^{-1})') \sum_{m \in \rho(\tau)} e^{2\pi i (m, x - k(A_{n,\tau}^{-1})')}. \qquad (1.4.5)$$

Теорема 4. *Пусть* s *целое положительное число. Тогда имеют место следующие оценки снизу:*

1) *при* $r > 1$ *и* $1 \le \nu \le \infty$

$$\frac{1}{N^{r-1+1/\nu}} \underset{r,s,\nu}{\ll} \inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\ldots,N)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in E_s^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \ldots, f(\xi^{(N)}), \cdot) \right\|_\nu,$$

2) *при* $r > 1/2$ *и* $1 \le \nu \le \infty$

$$\frac{1}{N^{r-(1/2-1/\nu)_+}} \underset{r,s,\nu}{\ll} \inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\ldots,N)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in SW_2^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \ldots, f(\xi^{(N)}), \cdot) \right\|_\nu,$$

где $\inf\limits_{\varphi_N}$ *берется по всем функциям*

$$\varphi_N(z_1, z_2, \ldots, z_N, x) : C^N \times [0,1]^s \to C,$$

измеримым по переменной x *в смысле Лебега.*

Теорема 5. *Пусть* s*-целое положительное число и* $r > 1$. *Тогда при любом целом положительном* N *имеет место соотношение*

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\ldots,N)}} \inf_{\psi_k \in L^2} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)}) \psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{\asymp} N^{-r+1/2} \ln^{r(s-1)} N,$$

где F *есть любой из классов* E_s^r *и* $SW_1^r(0,1)^s$, *причем такой оптимальный порядок погрешности достигается при восстановлении оператором* T_N *из теоремы 3.*

Прежде чем приступить к доказательству теорем установим необходимые для этого соотношения, которые следуют из вспомогательных и основных лемм.

Пусть N произвольное фиксированное целое положительное число и пусть n целое положительное число, определенное равенством (1.4.4).

Полагая в лемме 1.2.4 $\beta_m \equiv 1 (m \in Z^s)$,

$$\Im \equiv \Im_n = \{\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s) \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_s < n\}, \qquad (1.4.6)$$

$$\rho_\tau \equiv \rho(\tau) = \{m = (m_1, m_2, \ldots, m_s) \in Z^s : 2^{\tau_j - 1} \le \overline{m_j} < 2^{\tau_j} (j = 1, 2, \ldots, s)\}, \qquad (1.4.7)$$

$$A_\tau \equiv A_{n,\tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{n-\|\tau\|} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(n-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & \ldots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_3^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \ldots & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix} \qquad (1.4.8)$$

и

$$K_\tau \equiv K(n,\tau) =$$
$$= \{k \in Z^s : -2^{\tau_1}p_{n-\|\tau\|} \le k_1 < 2^{\tau_1}p_{n-\|\tau\|}, -2^{\tau_j} \le k_j < 2^{\tau_j}(j=2,3,...,s)\}, \quad (1.4.9)$$

и учитывая тот факт, что в силу леммы 1.2.2 система $K_\tau \equiv K(n,\tau)$ является полной системой представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки $\Lambda'_{n,\tau} = \{uA'_{n,\tau} : u \in Z^s\}$, для всякой 1- периодической по каждой переменной и разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_s)$ имеем

$$f(x) - (T_N f)(x) = J_{1,N}(x,f) + J_{2,N}(x,f), \quad (1.4.10)$$

где оператор T_N определен равенством (1.4.5) и

$$J_{1,N}(x,f) = \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0, \|\tau\|<n}} \sum_{m\in\rho(\tau)} (-\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}} \hat{f}(uA_{n,\tau}+m))e^{2\pi i(m,x)}, \quad (1.4.11)$$

$$J_{2,N}(x,f) = \sum_{m\in Z^s \setminus \bigcup\limits_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n} \rho(\tau)} \hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)} (x \in R^s). \quad (1.4.12)$$

Далее, для каждого $\tau \in Z^s$ с $\tau_j > 0 (j = 1,2,...,s)$ и $\tau < n$ при любых $u \in Z^s$ и $m \in \rho(\tau)$ имеет место двусторонняя оценка

$$2^{\|\tau\|-s} \cdot \overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, ..., a_s^{(n-\|\tau\|)}}}} \le \overline{\overline{uA_{n,\tau}+m}} < 2^{\|\tau\|+2s} \cdot \overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, ..., a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}, \quad (1.4.13)$$

где

$$V_{p_k, a_2^{(k)}, ..., a_s^{(k)}} = \begin{pmatrix} p_k & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a_2^{(k)} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_3^{(k)} & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ -a_s^{(k)} & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} (k = 1,2,....), \quad (1.4.14)$$

и, напомним, для $y = (y_1, y_2, ..., y_s) \in Z^s$ положено

$$\overline{y_j} = \max\{1, |y_j|\}, \overline{\overline{y}} = \prod_{j=1}^{s} \overline{y_j}. \quad (1.4.15)$$

Действительно, пусть вектор $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_s)$ из Z^s такой, что $\tau_j > 0$ и $\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_s < n$. Тогда при любых $u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s$ и $m = (m_1, m_2, ..., m_s) \in \rho(\tau)$, применяя лемму 1.2.7 к каждой компоненте вектора

$$uA_{n,\tau} + m =$$
$$= (2^{\tau_1+1}(p_{n-\|\tau\|}u_1 - a_2^{(n-\|\tau\|)}u_2 - ... - a_s^{(n-\|\tau\|)}u_s) + m_1, 2^{\tau_2+1}u_2 + m_2, ..., 2^{\tau_s+1}u_s + m_s),$$

получим

$$2^{\tau_1-1}\overline{p_{n-\|\tau\|}u_1 - a_2^{(n-\|\tau\|)}u_2 - a_3^{(n-\|\tau\|)}u_3 - ... - a_s^{(n-\|\tau\|)}u_s} \le$$
$$\le \overline{2^{\tau_1+1}(p_{n-\|\tau\|}u_1 - a_2^{(n-\|\tau\|)}u_2 - a_3^{(n-\|\tau\|)}u_3 - .. - a_s^{(n-\|\tau\|)}u_s) + m_1} <$$
$$< 2^{\tau_1+2}\overline{p_{n-\|\tau\|}u_1 - a_2^{(n-\|\tau\|)}u_2 - a_3^{(n-\|\tau\|)}u_3 - ... - a_s^{(n-\|\tau\|)}u_s},$$
$$2^{\tau_j-1}\overline{u_j} \le \overline{2^{\tau_j+1}u_j + m_j} < 2^{\tau_j+2}\overline{u_j} (j = 2,...,s),$$

или

$$2^{\tau_j-1}\overline{(uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, ..., a_s^{(n-\|\tau\|)}})_j} \le \overline{(uA_{n,\tau}+m)_j} < 2^{\tau_j+2}\overline{(uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, ..., a_s^{(n-\|\tau\|)}})_j}, \quad (1.4.16)$$

где для вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_s)$ положено $(x)_j \equiv x_j (j = 1,2,...,s)$. Отсюда перемножая отдельно правые и отдельно левые части и учитывая обозначения (1.4.14), (1.4.8) и (1.4.15) получим (1.4.13).

Далее, для всякого $\alpha > 1$ существует константа $c_0(s,\alpha)$ такая, что для каждого $k(k = 1,2,3...)$ имеет место неравенство

$$\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}} \frac{1}{(\overline{\overline{uV_{p_k,a_2^{(k)},\dots,a_s^{(k)}}}})^\alpha} \le c_o(s,\alpha)\frac{\ln^{\alpha\gamma} p_k}{p_k^\alpha}. \qquad (1.4.17)$$

Действительно, во-первых, в силу леммы 2.5 при любом фиксированном $k(k = 1,2,3...)$ имеет место равенство

$$\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}} \frac{1}{(\overline{\overline{uV_{p_k,a_2^{(k)},\dots,a_s^{(k)}}}})^\alpha} = \sum_{\substack{m\in Z^s\setminus\{0\}:\\ m_1+a_2^{(k)}m_2+\dots+a_s^{(k)}m_s\equiv 0(mod p_k)}} \frac{1}{(\overline{\overline{m}})^\alpha}. \qquad (1.4.18)$$

Во-вторых, поскольку для каждого $k(k = 1,2,3...)$ числа $a_1^{(k)} = 1, a_2^{(k)},\dots,a_s^{(k)}$ - есть оптимальные коэффициенты по модулю p_k индекса γ, то в силу леммы 1.1.1.2 для указанного $\alpha > 1$ существует константа $c_0(s,\alpha)$ такая, что при любом $k(k = 1,2,3...)$ имеет место неравенство

$$\sum_{\substack{m\in Z^s\setminus\{0\}:\\ m_1+a_2^{(k)}m_2+\dots+a_s^{(k)}m_s\equiv 0(mod p_k)}} \frac{1}{(\overline{\overline{m}})^\alpha} \le c_o(s,\alpha)\frac{\ln^{\alpha\gamma} p_k}{p_k^\alpha}. \qquad (1.4.19)$$

В итоге, объединяя соотношения (1.4.18) и (1.4.19) получим (1.4.17).

Для числа узлов сетки

$$\bigcup_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \{k(A_{n,\tau}^{-1})' : k\in K(n,\tau)\}$$

справедлива оценка

$$card \bigcup_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \{k(A_{n,\tau}^{-1})' : k\in K(n,\tau)\} \underset{s}{\ll} 2^n n^{s-1}. \qquad (1.4.20)$$

Действительно,

$$card \bigcup_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \{k(A_{n,\tau}^{-1})' : k\in K(n,\tau)\} \le card \bigcup_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} K(n,\tau) = \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} cardK(n,\tau),$$

откуда, учитывая определение множества $K(n,\tau)$ (см. (1.4.9)) и соотношения

$$\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k} 1 \underset{s}{\asymp} k^{s-1} (k = 1,2,....) \qquad (1.4.21)$$

и

$$2^{k+3} \le p_k\cdot k^2 < 2^{k+4} (k = 1,2,....), \qquad (1.4.22)$$

получим

$$card \bigcup_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \{k(A_{n,\tau}^{-1})' : k\in K(n,\tau)\} \le \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} 2^{\|\tau\|+s} p_{n-\|\tau\|} = \sum_{k=s}^{n-1} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|=k}} 2^{\|\tau\|+s} p_{n-\|\tau\|} =$$

$$= \sum_{k=s}^{n-1} 2^{k+s} p_{n-k} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|=k}} 1 \underset{s}{\ll} \sum_{k=s}^{n-1} 2^{k+s} p_{n-k} k^{s-1} \le \sum_{k=s}^{n-1} 2^{k+s}\frac{2^{n-k+4}}{(n-k)^2} k^{s-1} \le$$

$$\le 2^{n+s+4} n^{s-1} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{(n-k)^2} \underset{s}{\ll} 2^n n^{s-1}.$$

Ниже для $k = 1, 2, ...$ будем пользоваться также следующими представлениями множества $Z^s\backslash\{0\}$:

$$Z^s\backslash\{0\} = \bigcup_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0, 2^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s}\geq\frac{p_k}{c_0\ln^\gamma p_k}}} \{u\in Z^s : uV_{p_k,a_2^{(k)},...,a_s^{(k)}}\in\rho(\lambda)\}, \tag{1.4.23}$$

где $c_0 > 0$ и $\gamma > 0$ те же, что и в определении оптимальных коэффициентов (1.1.1.1), p_k - есть простое число, целые $a_1^{(k)} = 1, a_2^{(k)}, ..., a_s^{(k)}$ - оптимальные коэффициенты по модулю p_k индекса $\gamma > 0$, а $V_{p,a_2^{(k)},...,a_s^{(k)}}$ - есть матрица, определенная равенством (1.4.14).

Справедливость таких представлений следует из неравенств

$$\overline{\overline{uV_{p_k,a_2^{(k)},...,a_s^{(k)}}}} \geq \frac{p_k}{c_0\ln^\gamma p_k}(u\in Z^s\backslash\{0\}, k = 1, 2, ...),$$

которые в свою очередь следуют из лемм 1.1.1.3 и 1.2.4.

Кроме того, поскольку отображение $l(u) = uV_{p_k,a_2^{(k)},...,a_s^{(k)}}(u \in Z^s)$ - является однозначным отображением и не пересекаются множества $\rho(\lambda)$ для различных $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s) \in Z^s(\lambda_j > 0)$, то множества в правой части (1.4.23) также не пересекаются.

Наконец, при любых $k(k = 1, 2, ...)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s) \in Z^s(\lambda_j > 0)$ имеет место оценка

$$card\{u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s : uV_{p_k,a_2^{(k)},...,a_s^{(k)}} \in \rho(\lambda)\} \leq 2^{\|\lambda\|+2s+2}\frac{c_0\ln^\gamma p_k}{p_k}. \tag{1.4.24}$$

Действительно, в силу леммы 1.2.5

$$card\{u = (u_1, u_2, ..., u_s) \in Z^s : uV_{p_k,a_2^{(k)},...,a_s^{(k)}} \in \rho(\lambda)\} =$$

$$= card\{m = (m_1, m_2, ..., m_s) \in \rho(\lambda) : m_1 + a_2^{(k)}m_2 + \cdots + a_s^{(k)}m_s \equiv 0(mod p_k)\} =$$

$$= \sum_{m\in\rho(\lambda)} \chi_p(m_1 + a_2^{(k)}m_2 + \cdots + a_s^{(k)}m_s) \leq$$

$$\leq \sum_{m_1=-2^{\lambda_1+1}}^{2^{\lambda_1+1}} ... \sum_{m_{s1}=-2^{\lambda_{s1}+1}}^{2^{\lambda_s+1}} \chi_p(m_1 + a_2^{(k)}m_2 + \cdots + a_s^{(k)}m_s).$$

С другой стороны, в силу лемм 1.1.1.3 и 1.1.1.4

$$\sum_{m_1=-2^{\lambda_1+1}}^{2^{\lambda_1+1}} ... \sum_{m_s=-2^{\lambda_s+1}}^{2^{\lambda_s+1}} \chi_p(m_1 + a_2^{(k)}m_2 + \cdots + a_s^{(k)}m_s) \leq 2^{\|\lambda\|+2s+2}\frac{c_0\ln^\gamma p_k}{p_k}.$$

Объединяя эти соотношения получим (1.4.24).

Приступим к доказательству утверждения 1) теоремы 3.

Пусть $f \in E_s^r$. Оценим сначала $J_{1,N}(\cdot, f)$ в (1.4.10). Из (1.4.11), с учетом определения класса E_s^r и соотношений (1.4.13)-(1.4.14), получим

$$\|J_{1,N}(\cdot, f)\|_\infty \equiv \sup_{x\in[0,1]^s} |J_{1,N}(\cdot, f)| \leq \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{m\in\rho(\tau)} \sum_{u\in Z^s\backslash\{0\}} \left|\hat{f}(uA_{n,\tau} + m)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{m\in\rho(\tau)} \sum_{u\in Z^s\backslash\{0\}} \frac{1}{\left(\overline{\overline{uA_{n,\tau} + m}}\right)^r} \underset{r,s}{\ll}$$

$$\underset{r,s}{\ll} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{m\in\rho(\tau)} \sum_{u\in Z^s\backslash\{0\}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r} \underset{r,s}{\ll}$$

$$\underset{r,s}{\ll} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{u\in Z^s\backslash\{0\}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r} \sum_{m\in\rho(\tau)} 1,$$

откуда, с учетом соотношений

$$\sum_{m\in\rho(\tau)} 1 \ll_s 2^{\|\tau\|} (\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_s)\in Z^s, \tau_j>0), \tag{1.4.25}$$

получим

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_\infty \ll_{r,s} \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}} \frac{1}{\left(\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r}.$$

Тогда в силу (1.4.17) и неравенств $2^{k+3}\le k^2p_k<2^{k+4}(k=1,2,...)$,

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_\infty \ll_{r,s} \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}}\cdot\frac{\ln^{r\gamma} p_{n-\|\tau\|}}{p^r_{n-\|\tau\|}} \ll_{r,s}$$

$$\ll_{r,s} \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}}\cdot\frac{(n-\|\tau\|)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|\tau\|)r}} = \sum_{k=s}^{n-1}\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}}\cdot\frac{(n-\|\tau\|)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|\tau\|)r}} =$$

$$=\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{2^{k(r-1)}}\cdot\frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}}\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k} 1.$$

Отсюда в силу (1.4.21)

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_\infty \ll_{r,s}\ll_{r,s}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{2^{k(r-1)}}\cdot\frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}}\cdot k^{s-1} = \frac{1}{2^{n(r-1)}}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}\cdot k^{s-1}}{2^{(n-k)}} \le$$

$$\le \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|k\|)}} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}.$$

Таким образом,

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_\infty \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \tag{1.4.26}$$

Оценим сверху $\|J_{1,N}(\cdot,x)\|_2$. Из (1.4.10) с учетом определения класса E_s^r и соотношений (1.4.13)-(1.4.14) получим

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_2^2 = \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}\left|\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\hat f(uA_{n,\tau}+m)\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}\left(\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(\overline{\overline{uA_{n,\tau}+m}}\right)^r}\right)^2 \ll_{r,s}$$

$$\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}\left(\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r}\right)^2 \ll_{r,s}$$

$$\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\left(\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r}\right)^2\sum_{m\in\rho(\tau)} 1,$$

откуда, учитывая соотношения (1.4.25) и пользуясь неравенствами (1.4.17) при $\alpha\equiv r>1$,

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_2^2 \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\frac{1}{2^{(2r-1)\|\tau\|}}\left(\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r}\right)^2 \ll_{r,s}$$

$$\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \frac{1}{2^{(2r-1)\|\tau\|}}\cdot\frac{\ln^{2r\gamma} p_{n-\|\tau\|}}{p^{2r}_{n-\|\tau\|}}.$$

Далее, продолжим оценку с учетом неравенств (1.4.22) и (1.4.21):

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_2^2 \ll_{r,s}$$

$$\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \frac{1}{2^{(2r-1)\|\tau\|}}\cdot\frac{(n-\|\tau\|)^{2r(\gamma+2)}}{2^{2r(n-\|\tau\|)}} = \sum_{k=s}^{n-1}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|=k}} \frac{1}{2^{(2r-1)\|\tau\|}}\cdot\frac{(n-\|\tau\|)^{2r(\gamma+2)}}{2^{2r(n-\|\tau\|)}} =$$

$$= \sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{2^{(2r-1)k}}\cdot\frac{(n-k)^{2r(\gamma+2)}}{2^{2r(n-k)}}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|=k}} 1 \ll_{r,s} \sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{2^{(2r-1)k}}\cdot\frac{(n-k)^{2r(\gamma+2)}}{2^{2r(n-k)}}\cdot k^{s-1} \le$$

$$\le \frac{1}{2^{(2r-1)n}}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{(n-k)^{2r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)}}\cdot k^{s-1} \le \frac{n^{s-1}}{2^{(2r-1)n}}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{(n-k)^{2r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)}} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{(2r-1)n}}.$$

Следовательно,

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_2 \ll_{r,s} \frac{n^{(s-1)/2}}{2^{n(r-1/2)}}. \tag{1.4.27}$$

В итоге, из (1.4.26) и (1.4.27) пользуясь хорошо известным неравенством

$$\|g(\cdot)\|_\nu \le \|g(\cdot)\|_2^{2/\nu}\,\|g(\cdot)\|_\infty^{1-1/2\nu}\,(2\le\nu\le\infty), \tag{1.4.28}$$

которое следует из теоремы Рисса - Торина (см., напр., [9]), для $2\le\nu\le\infty$ получим

$$\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_\nu \le \|J_{1,N}(\cdot,f)\|_2^{2/nu}\,\|J_{1,N}(\cdot,f)\|_\infty^{1-2/\nu} \ll_{r,s,\nu} \frac{n^{(s-1)(1-1/\nu)}}{2^{n(r-1+1/\nu)}}. \tag{1.4.29}$$

Теперь оценим $J_{2,N}(\cdot,f)$ в (1.4.10). Из (1.4.12) следует, что

$$\|J_{2,N}(\cdot,f)\|_2^2 = \sum_{m\in\bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}\rho(\tau)} \left|\hat f(m)\right|^2 = \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}\sum_{m\in\rho(\tau)}\left|\hat f(m)\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}\sum_{m\in\rho(\tau)}\frac{1}{(\overline{\overline{m}})^{2r}}.$$

Отсюда учитывая (см. (1.4.7)) то, что для всякого $m\in\rho(\tau)$ выполнено $\overline{\overline{m}}\ge 2^{\|\tau\|-s}$ и (1.4.25), получим

$$\|J_{2,N}(\cdot,f)\|_2^2 \le \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}\sum_{m\in\rho(\tau)}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^{2r}} = \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^{2r}}\sum_{m\in\rho(\tau)}1 \ll_s$$

$$\ll_s \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^{2r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^{2r-1}} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\left(2^k\right)^{2r-1}}\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k}1 \ll_s \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\left(2^k\right)^{2r-1}}k^{s-1} \ll_s \frac{n^{s-1}}{2^{n(2r-1)}},$$

т.е.

$$\|J_{2,N}(\cdot,f)\|_2 \ll_{r,s} \frac{n^{(s-1)/2}}{2^{n(r-1/2)}}. \tag{1.4.30}$$

Аналогично,

$$\|J_{2,N}(\cdot,f)\|_\infty = \sum_{m\in\bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}\rho(\tau)} \left|\hat f(m)\right| = \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}\sum_{m\in\rho(\tau)}\left|\hat f(m)\right| \le$$

$$\leq \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|\geq n}} \sum_{m\in\rho(\tau)} \frac{1}{(\overline{\overline{m}})^r} \leq \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|\geq n}} \sum_{m\in\rho(\tau)} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^r} = \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|\geq n}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^r} \sum_{m\in\rho(\tau)} 1 \underset{s}{\ll}$$

$$\underset{s}{\ll} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|\geq n}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^{r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|=k}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^{r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{k}\right)^{r-1}} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|=k}} 1 \underset{s}{\ll}$$

$$\underset{s}{\ll} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{k}\right)^{r-1}} k^{s-1} \underset{s}{\ll} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \tag{1.4.31}$$

Из (1.4.30) и (1.4.31) опять же пользуясь неравенством (1.4.28) для $2 \leq \nu \leq \infty$ получим

$$\|J_{2,N}(\cdot,f)\|_\nu \leq \|J_{2,N}(\cdot,f)\|_2^{2/\nu} \|J_{2,N}(\cdot,f)\|_\infty^{1-2/\nu} \underset{r,s,\nu}{\ll} \frac{n^{(s-1)(1-1/\nu)}}{2^{n(r-1+1/\nu)}}, \tag{1.4.32}$$

Итак, в силу (1.4.10)-(1.4.12), (1.4.29), (1.4.32) и (1.4.4), (1.4.20) для всех $f \in E_s^r$ имеем

$$\|f(\cdot) - (T_N f)(\cdot)\|_\nu \underset{r,s,\nu}{\ll} \frac{n^{(s-1)(1-1/\nu)}}{2^{n(r-1+1/\nu)}} \underset{r,s,\nu}{\ll} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1+1/\nu}}.$$

Тем самым, утверждение 1) теоремы 3 доказано.

Приступим к доказательству утверждения 2) теоремы 3. Пусть в (1.4.10) функция $f(x)$ принадлежит классу $SW_2^r(0,1)^s (r > 1/2)$. Оценим сверху $J_{1,N}(t,x,f)$. Хорошо известно, что для тригонометрических коэффициентов Фурье свертки

$$h(x) \equiv \int_{[0,1]^s} f_1(y) f_2(x-y)dy,$$

где f_1 и f_2 произвольные суммируемые с квадратом на $[0,1]^s$ и 1-периодические по каждой переменной функции, справедливо равенство

$$\hat{h}(m) = \hat{f}_1(m)\cdot\hat{f}_2(m) (m\in Z^s). \tag{1.4.33}$$

Учитывая это в силу определения класса $SW_2^r(0,1)^s$ из равенства (1.4.11) получим

$$J_{1,N}(x,f) = \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0, \|\tau\|<n}} \sum_{m\in\rho(\tau)} (-\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}} \hat{f}(uA_{n,\tau}+m)) e^{2\pi i(m,x)} =$$

$$= \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0, \|\tau\|<n}} \sum_{m\in\rho(\tau)} (-\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}} \hat{\varphi}_{j(uA_{n,\tau}+m)}(uA_{n,\tau}+m) \left(\overline{\overline{uA_{n,\tau}+m}}\right)^{-r} e^{\frac{\pi i r}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{s} sign(uA_{n,\tau}+m)k\right)}) e^{2\pi i(m,x)},$$

где через $j(uA_{n,\tau}+m)$ обозначен набор индексов $j_1, j_2, ..., j_n (1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq s)$ отличных от нуля компонент вектора $uA_{n,\tau}+m$. Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского получим

$$|J_{1,N}(x,f)| \leq \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0, \|\tau\|<n}} \left(\sum_{m\in\rho(\tau)} \sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}} \left|\hat{\varphi}_{j(uA_{n,\tau}+m)}(uA_{n,\tau}+m)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{m\in\rho(\tau)} \sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}} \left(\overline{\overline{uA_{n,\tau}+m}}\right)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4.34}$$

Далее, поскольку для каждого фиксированного $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_s)$ из Z^s такого, что $\tau_j > 0$ и $\|\tau\| \overset{def}{=} \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_s < n$ множество $\rho(\tau)$ является подмножеством полной системы представителей $K_\tau \equiv K(n,\tau)$ классов решетки Z^s относительно подрешетки $\Lambda_{n,\tau} = \{uA_{n,\tau} : u \in Z^s\}$ (см. (1.4.8)-(1.4.9)), то при различных парах u, m и $u', m'(u, u' \in$

$Z^s, m, m' \in \rho(\tau))$ элементы $uA_{n,\tau}+m$ и $u'A_{n,\tau}+m'$ решетки Z^s принадлежат различным классам, т.е. $uA_{n,\tau}+m \neq u'A_{n,\tau}+m'$. Следовательно,

$$\left(\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left|\hat{\varphi}_{j(uA_{n,\tau}+m)}(uA_{n,\tau}+m)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{s}\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_n\leq s}\|\varphi_{j_1,j_2,\dots,j_n}(\cdot)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда в силу определения класса $SW_2^r(0,1)^s$

$$\left(\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left|\hat{\varphi}_{j(uA_{n,\tau}+m)}(uA_{n,\tau}+m)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{s}{\ll} 1.$$

С учетом последнего соотношения продолжим оценку (1.4.34):

$$|J_{1,N}(x,f)| \underset{s}{<<} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \left(\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left(\overline{\overline{uA_{n,\tau}+m}}\right)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \left(\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left(2^{\|\tau\|+2s}\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\dots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \left(2^{-\|\tau\|(2r-1)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left(\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\dots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{k=s}^{n-1}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|=k}} \left(2^{-\|\tau\|(2r-1)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left(\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\dots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{k=s}^{n-1}\left(2^{-k(2r-1)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left(\overline{\overline{uV_{p_{n-k},a_2^{(n-k)},\dots,a_s^{(n-k)}}}}\right)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|=k}} 1 \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{k=s}^{n-1}\left(2^{-k(2r-1)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left(\overline{\overline{uV_{p_{n-k},a_2^{(n-k)},\dots,a_s^{(n-k)}}}}\right)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}} k^{s-1} =$$

$$= \sum_{k=s}^{n-1}\frac{k^{s-1}}{2^{k(r-1/2)}}\left(\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(\overline{\overline{uV_{p_{n-k},a_2^{(n-k)},\dots,a_s^{(n-k)}}}}\right)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

отсюда, пользуясь соотношениями (1.4.17) при $\alpha = 2r > 1$, получим

$$|J_{1,N}(x,f)| \underset{r,s}{<<} \sum_{k=s}^{n-1}\frac{k^{s-1}}{2^{k(r-1/2)}}\cdot\frac{\ln^{r\gamma}p_{n-k}}{p_{n-k}^r}.$$

Далее продолжим оценку с учетом (1.4.22), (1.4.21):

$$|J_{1,N}(x,f)| \underset{r,s}{<<} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{k^{s-1}}{2^{k(r-\frac{1}{2})}} \cdot \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}} = \frac{1}{2^{n(r-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{k^{s-1}(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \leq \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{r(\gamma+2)}}{2^{\frac{k}{2}}} \underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \qquad (1.4.35)$$

Теперь в (1.4.10) оценим сверху $J_{2,N}(x,f)$. Из (1.4.12) учитывая определение класса $SW_2^r(0,1)^s$ и равенство (1.4.33)

$$J_{2,N}(x,f) = \sum_{m\in Z^s \setminus \cup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m,x)} =$$

$$= \sum_{m\in Z^s \setminus \bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} \hat{\varphi}_{j(m)}(m)\,(\overline{\overline{m}})^{-r}\, e^{\frac{\pi i r}{2}\sum_{j=1}^{s} sign(m_j)} e^{2\pi i(m,x)},$$

где через $j(m)$ обозначен набор индексов $j_1, j_2, ..., j_n$ ($1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_n \leq s$) отличных от нуля компонент вектора $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$. Отсюда применяя неравенство Коши-Буняковского получим

$$|J_{2,N}(x,f)| \leq \left(\sum_{m\in Z^s \setminus \bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} \left|\hat{\varphi}_{j(m)}(m)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m\in Z^s \setminus \bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} (\overline{\overline{m}})^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но,

$$\left(\sum_{m\in Z^s \setminus \bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} \left|\hat{\varphi}_{j(m)}(m)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{s} \sum_{1\leq j_1<...<j_n\leq s} \sum_{m\in Z^s} |\hat{\varphi}_{j_1,j_2,...,j_n}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{s} \sum_{1\leq j_1<...<j_n\leq s} \|\varphi_{j_1,j_2,...,j_n}(\cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underset{s}{<<} 1,$$

следовательно,

$$|J_{2,N}(x,f)| \underset{r,s}{<<} \left(\sum_{m\in Z^s \setminus \bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} (\overline{\overline{m}})^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \sum_{m\in\rho(\tau)} (\overline{\overline{m}})^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \sum_{m\in\rho(\tau)} \left(2^{\|\tau\|-s}\right)^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \left(2^{\|\tau\|-s}\right)^{-2r} \sum_{m\in\rho(\tau)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \left(\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \left(2^{\|\tau\|}\right)^{-2r} 2^{\|\tau\|} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \left(2^{\|\tau\|}\right)^{-2r+1} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k} \left(2^{\|\tau\|}\right)^{-2r+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(2^k\right)^{-2r+1} \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(2^k\right)^{-2r+1} k^{s-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k^{s-1}}{\left(2^k\right)^{2r-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \underset{r,s}{<<} \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \qquad (1.4.36)$$

В итоге, из (1.4.10),(1.4.11),(1.4.12), (1.4.35) и (1.4.36)

$$\sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s}\|f(\cdot)-(T_Nf)(\cdot)\|_\infty \underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-{}^1/_2)}},$$

или в пересчете на число узлов N (см.(1.4.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s}\|f(\cdot)-(T_Nf)(\cdot)\|_\infty \underset{r,s}{<<} \frac{\ln^{(r+{}^1/_2)(s-1)}N}{N^{r-{}^1/_2}}.$$

Тем самым, утверждение 2 теоремы 3 доказана.

Приступим к доказательству утверждения 3) теоремы 3. Поскольку при $1\le\theta<\infty$ имеет место вложение $B_{2,\theta}^r(0,1)^s\subset B_{2,\infty}^r(0,1)^s\equiv H_2^r(0,1)^s$, то утверждение 3) достаточно доказать для класса Никольского $B_{2,\infty}^r(0,1)^s\equiv H_2^r(0,1)$. Пусть в (1.4.10) функция $f(x)$ принадлежит классу $B_{2,\infty}^r(0,1)^s\equiv H_2^r(0,1)$ $(r>1/2)$. Сперва оценим сверху $J_{1,N}(x,f)$. Из (1.4.11) в силу абсолютной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ следует равенство $(x\in R^s)$

$$J_{1,N}(x,f)=-\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{u\in Z^s\setminus\{0\},m\in\rho(\tau)}\hat{f}(uA_{n,\tau}+m)e^{2\pi i(m,x)}. \tag{1.4.37}$$

Далее, при каждом фиксированном $\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_s)$ из Zs таком, что $\tau_j>0$ и $\|\tau\|\overset{def}{=}\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_s<n$ пользуясь представлением (1.4.23) при $k=n-\|\tau\|$ и учитывая то, что множества в правой части (1.4.23) попарно не пересекаются, группируем членов ряда в правой части (1.4.39) следующим образом:

$$J_{1,N}(x,f)=-\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{u\in Z^s\setminus\{0\},m\in\rho(\tau)}\hat{f}(uA_{n,\tau}+m)e^{2\pi i(m,x)}=$$

$$=-\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}}\ \sum\nolimits_{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}\in\rho(\lambda),m\in\rho(\tau)}\hat{f}(uA_{n,\tau}+$$

$$m)e^{2\pi i(m,x)}=$$

$$=-\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}}\int_{[0,1]^s}f(y)\sum_{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}\in\rho(\lambda),m\in\rho(\tau)}e^{2\pi i(m,x)-2\pi i(uA_{n,\tau}+m,y)}dy=$$

$$=-\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}}\int_{[0,1]^s}\Delta_{h^{(\tau,\lambda)}}^{[r]+2}f(y)P_{\lambda,\tau}(x,y)dy, \tag{1.4.38}$$

где

$$\Delta_{h^{(\tau,\lambda)}}^{[r]+2}f(y)\equiv\sum_{l=0}^{[r]+2}(-1)^{[r]+2-l}C_{[r]+2}^lf(x+lh^{(\tau,\lambda)}), \tag{1.4.39}$$

$$h^{(\lambda,\tau)}=2^{-(\lambda_{j_0}+\tau_{j_0})-4}(\underbrace{0,...,0,1,}_{j_0}0,...,0)(\tau_{j_0}+\lambda_{j_0}=\max_{1\le j\le s}(\tau_j+\lambda_j)), \tag{1.4.40}$$

$P_{\tau,\lambda}(x,y)=$

$$=\sum_{u\in Z^s,m\in\rho(\tau):uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}}\in\rho(\lambda)}a_{\tau,\lambda}(uA_{n,\tau}+m)e^{2\pi i(m,x)-2\pi i(uA_{n,\tau}+m,y)}, \tag{1.4.41}$$

$$a_{\tau,\lambda}(\sigma) = (e^{2\pi i\sigma_{j_0}2^{-(\lambda_{j_0}+\tau_{j_0})-4,\tau)}} - 1)^{-[r]-2}(\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_s) \in R^s). \tag{1.4.42}$$

Следовательно,

$$|J_{1,N}(x,f)| \leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s: \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \left\| \Delta^{[r]+2}_{h^{(\tau,\lambda)}} f(\cdot) \right\|_2 \|P_{\lambda,\tau}(x,\cdot)\|_2 . \tag{1.4.43}$$

В силу определения класса $B^r_{2,\infty}(0,1)^s \equiv H^r_2(0,1)$ (см. также (1.4.40))

$$\left\| \Delta^{[r]+2}_{h^{(\tau,\lambda)}} f(\cdot) \right\|_2 \leq \left| h^{(\tau,\lambda)} \right|^r \leq 2^{-r(\tau_{j_0}+\lambda_{j_0})} \tag{1.4.44}$$

Теперь в (1.4.43) оценим сверху $\|P_{\lambda,\tau}(x,\cdot)\|_2$ ($x \in R^s$). Для этого сначала покажем, что для всех $u \in Z^s \setminus\{0\}$ и $m \in \rho(\tau)$ таких, что $uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)$ имеет место

$$|a_{\lambda,\tau}(uA_{n,\tau} + m)| \underset{s}{<<} 1. \tag{1.4.45}$$

Действительно, для всякого $u \in Z^s \setminus\{0\}$ такого, что $uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)$ и для каждого $m \in \rho(\tau)$ пользуясь соотношением (1.4.16) при $j = j_0$ получим

$$2^{\tau_{j_0}-1}\overline{(uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}})_{j_0}} \leq \overline{(uA_{n,\tau} + m)_{j_0}} < 2^{\tau_{j_0}+2}\overline{(uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}})_{j_0}},$$

где, напомним, для вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_s)$ положено $(x)_j \equiv x_j$ $(j = 1, 2, ..., s)$. Откуда, учитывая включение $uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)$, получим

$$2^{\tau_{j_0}+\lambda_{j_0}-2} \leq |(uA_{n,\tau} + m)_{j_0}| < 2^{\tau_{j_0}+\lambda_{j_0}+2}.$$

Следовательно, для всех $u \in Z^s \setminus\{0\}$ и $m \in \rho(\tau)$ таких, что $uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)$ имеет место

$$|a(uA_{n,\tau} + m)| =$$

$$= \left| \left(e^{2\pi i(uA_{n,\tau}+m)_{j_k}2^{-(\lambda_{j_0}+\tau_{j_0})-4}} - 1 \right)^{-[r]-2} \right| = \left(2 \left| \sin \pi \left| (uA_{n,\tau} + m)_{j_0} 2^{-(\lambda_{j_0}+\tau_{j_0})-4} \right| \right| \right)^{-[r]-2} \leq$$

$$\leq \left(2 \left| \sin \frac{\pi}{2^6} \right| \right)^{-[r]-2} \underset{r,s}{<<} 1,$$

т.е. неравенство (1.4.45) доказано. Тогда из (1.4.41) и (1.4.45) следует, что

$$\|P_{\lambda,\tau}(x,\cdot)\|_2^2 = \sum_{u \in Z^s, m \in \rho(\tau) : uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)} |a_{\lambda,\tau}(uA_{n,\tau} + m)|^2 \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{u \in Z^s, m \in \rho(\tau) : uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)} 1 \leq$$

$$\leq card\{\rho(\tau)\} \cdot card\{u \in Z^s : uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)},...,a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)\},$$

отсюда в силу (1.4.24), (1.4.25) и (1.4.22)

$$\|P_{\lambda,\tau}(x,\cdot)\|_2^2 \underset{r,s}{<<} 2^{\|\tau\|} \frac{2^{\|\lambda\|} \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}{p_{n-\|\tau\|}} \underset{r,s}{<<} \frac{2^{\|\lambda\|+\|\tau\|}(n - \|\tau\|)^{\gamma+2}}{2^{n-\|\tau\|}}. \tag{1.4.46}$$

В итоге, из (1.4.43), (1.4.44) и (1.4.46) следует

$$|J_{1,N}(x,f)| \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,\, 2^{\|\lambda\|}\geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^{\gamma}p_{n-\|\tau\|}}}} 2^{-r(\lambda_{j_0}+\tau_{j_0})} \frac{2^{\frac{\|\lambda\|+\|\tau\|}{2}}(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} \underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,\, 2^{\|\lambda\|}\geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^{\gamma}p_{n-\|\tau\|}}}} 2^{-\frac{r(\|\lambda\|+\|\tau\|)}{s}} \frac{2^{\frac{\|\lambda\|+\|\tau\|}{2}}(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} \underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,\, 2^{\|\lambda\|}\geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^{\gamma}p_{n-\|\tau\|}}}} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\|+\frac{n-\|\tau\|}{2}-\frac{\|\tau\|}{2}}} \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,\, 2^{\|\lambda\|}\geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^{\gamma}p_{n-\|\tau\|}}}} \frac{1}{2^{(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})\|\lambda\|}} \underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\|+\frac{n-\|\tau\|}{2}-\frac{\|\tau\|}{2}}} \left(\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^{\gamma}p_{n-\|\tau\|}}\right)^{-(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})} \ln^{s-1}\left(\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^{\gamma}p_{n-\|\tau\|}}\right),$$

далее продолжим с учетом (1.4.22) и (1.4.21):

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\|+\frac{n-\|\tau\|}{2}-\frac{\|\tau\|}{2}}} \frac{(n-\|\tau\|)^{(\gamma+2)(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})+s-1}}{2^{(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})(n-\|\tau\|)}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} = \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|=k}} 1 \underset{s}{<<}$$

$$\underset{s}{<<} \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} k^{s-1} \underset{s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \underset{s}{<<}$$

$$\underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}},$$

т.е.

$$\sup_{x\in[0,1]^s} |J_{1,N}(x,f)| \underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}},$$

или в пересчете на число узлов N (см. (1.4.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{x\in[0,1]^s} |J_{1,N}(x,f)| \underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{\ln^{(\frac{r}{s}+\frac{1}{2})(s-1)} N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}. \tag{1.4.47}$$

Теперь в (1.4.10) оценим сверху $\sup\limits_{x\in[0,1]^s} |J_{2,N}(x,f)|$. Из (1.4.12) следует, что

$$J_{2,N}(x,f) = \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \int_{[0,1]^s} f(y) \sum_{m\in\rho(\tau)} e^{2\pi i(m,x)-2\pi i(m,y)}dy =$$

$$= \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \int_{[0,1]^s} \Delta_{h^{\tau}}^{[r]+2} f(y)...))P_{\tau}(x,y)dy, \tag{1.4.48}$$

где

$$h^{\tau}=2^{-\tau_{j_0}-4}(\underbrace{0,...,0,1}_{j_0},0,...,0)(\tau_{j_0}=\max_{1\le j\le s}(\tau_j)), \tag{1.4.49}$$

$$P_{\tau}(x,y)=\sum_{m\in\rho(\tau)}(e^{2\pi i m_{j_0}\cdot 2^{-\tau_{j_0}-4}}-1)^{-[r]-2}e^{2\pi i(m,x)-2\pi i(m,y)}. \tag{1.4.50}$$

В (1.4.48) для каждого τ оценим отдельно $\left\|\Delta_{h^{\tau}}^{[r]+2}f(\cdot)\right\|_2$ и $\left\|P_{\tau,j_1,...,j_s}(x,y)\right\|_2$. В силу определения класса $B_{2,\infty}^r(0,1)^s\equiv H_2^r(0,1)$ (см. также (1.4.49))

$$\left\|\Delta_{h^{\tau}}^{[r]+2}f(\cdot)\right\|_2\le|h^{\tau}|^r\le 2^{-r(\tau_{j_0}+\lambda_{j_0})}. \tag{1.4.51}$$

Из (1.4.50) следует

$$\|P_{\tau}(x,\cdot)\|_2^2=\sum_{m\in\rho(\tau)}\left|e^{2\pi i m_{j_0}\cdot 2^{-\tau_{j_0}-4}}-1\right|^{-2l}=\sum_{m\in\rho(\tau)}2^{-2}\left|\sin(\pi m_{j_0}\cdot 2^{-\tau_{j_0}-4})\right|^{-2([r]+2)}=$$

$$=\sum_{m\in\rho(\tau)}2^{-2}\left|\sin(\pi\left|m_{j_0}\right|\cdot 2^{-\tau_{j_0}-4})\right|^{-2([r]+2)}\le\sum_{m\in\rho(\tau)}2^{-2}\left|\sin(\pi 2^{-5})\right|^{-2([r]+2)}\underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<}\sum_{m\in\rho(\tau)}1\underset{r,s}{<<}card\rho(\tau)\underset{r,s}{<<}2^{\|\tau\|},$$

т.е.

$$\|P_{\tau}(x,\cdot)\|_2\underset{r,s}{<<}2^{\frac{\|\tau\|}{2}}. \tag{1.4.52}$$

В итоге, из (1.4.48), (1.4.51) и (1.4.52) получим

$$\sup_{x\in[0,1]^s}|J_{2,N}(x,f)|\underset{r,s}{<<}\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}2^{-r\tau_{j_0}}2^{\frac{\|\tau\|}{2}}\le\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\ge n}2^{-\frac{r\|\tau\|}{s}}2^{\frac{\|\tau\|}{2}}=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}2^{-(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})k}\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k}1\underset{s}{<<}\sum_{k=n}^{\infty}2^{-(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})k}k^{s-1}\underset{r,s}{<<}\frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}}$$

$$\sup_{x\in[0,1]^s}|J_{2,N}(x,f)|\underset{r,s}{<<}\frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}},$$

или в пересчете на число узлов N (см. (1.4.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{x\in[0,1]^s}|J_{2,N}(x,f)|\underset{r,s}{<<}\frac{\ln^{(\frac{r}{s}+\frac{1}{2})(s-1)}N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}. \tag{1.4.53}$$

Наконец, в силу (1.4.10), (1.4.47) и (1.4.53)

$$\sup_{f\in H_2^r(0,1)^s}\|f(\cdot)-(T_Nf)(\cdot)\|_{\infty}\underset{r,s}{<<}\frac{\ln^{(\frac{r}{s}+\frac{1}{2})(s-1)}N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 4. Сначала докажем оценку 1). Пусть $r>1$ и $\omega(t)$- бесконечно дифференцируемая на R функция, удовлетворяющая условиям

$$\{t:\omega(t)\ne 0\}\subset(0,1) \tag{1.4.54}$$

и пусть $c_1(r,s,\omega)>0$ есть константа из утверждения 1) леммы 1.2.8, соответствующая данным r и $\omega(t)$.

Пусть даны произвольное целое положительное число N, измеримая в смысле Лебега по переменной $x=(x_1,x_2,...,x_s)$ функция

$$\varphi_N(z_1,z_2,...,z_N,x):C^N\times[0,1]^s\to C$$

и произвольная сетка $\xi = \{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{N} \subset [0,1]^s$.

Тогда, поскольку открытые подкубы куба $[0,1]^s$

$$J_{n,\mu} \equiv \left(\frac{\mu}{N+1}, \frac{\mu+1}{N+1}\right) \times (0,1)^{s-1},$$

где $0 \leq \mu \leq N$ - целые, попарно не пересекаются и их количество N+1, то среди них найдется них найдется подкуб, не содержащий ни одного из узлов $\xi^{(k)}$ (k=1,2,..., N) заданной сетки ξ , т.е. найдется целое $0 \leq \mu^(0) < N+1$ такое, что для k=1,2,..., N

$$\xi^{(k)} \notin J_{n,\mu} \equiv \left(\frac{\mu^{(0)}}{N+1}, \frac{\mu^(0)+1}{N+1}\right) \times [0,1]^{s-1}. \qquad (1.4.55)$$

В силу утверждения 1) леммы 1.2.8 1-периодическая по каждой переменной функция, определенная равенством

$$f_\xi(x_1, x_2, ..., x_s) \equiv \frac{c_1(r,s,\omega)}{(N+1)^{r-1}} \omega((N+1)x_1 - \mu^(0))(0 \leq x_1 < 1) \qquad (1.4.56)$$

принадлежит классу E_s^r . Кроме того, из (1.4.54) следует, что

$$\forall x \in [0,1]^s \backslash \left(\frac{\mu^{(0)}}{N+1}, \frac{\mu^{(0)}+1}{N+1}\right) \times [0,1]^{s-1} \Rightarrow f_\xi(x) = 0.$$

Отсюда, в частности,

$$f_\xi(\xi^{(k)}) = 0(k = 1, 2, ..., N)(1.4.57) \qquad (1.4.57)$$

Далее, поскольку вместе с (1.4.56) принадлежит классу E_s^r и функция $-f_\xi(x)$, то с учетом (1.4.57) получим

$$\sup_{f \in E_s^r} \left\| f(x) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), ..., f(\xi^{(N)}), x) \right\|_{L^\nu(0,1)^s} \geq$$

$$\max_{j=0,1} \left\| (-1)^j f_\xi(x) - \varphi_N((-1)^j f_\xi(\xi^{(1)}), (-1)^j f_\xi(\xi^{(2)}), ..., (-1)^j f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(\left\| f_\xi(x) - \varphi_N(f_\xi(\xi^{(1)}), f_\xi(\xi^{(2)}), ..., f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu +$$

$$+ \left\| -f_\xi(x) - \varphi_N(-f_\xi(\xi^{(1)}), -f_\xi(\xi^{(2)}), ..., -f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu) =$$

$$= \frac{1}{2}(\| f_\xi(x) - \varphi_N(0,0,...,0,x)_\nu \| + \| f_\xi(x) + \varphi_N(0,0,...,0,x) \|_\nu) \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2} \| (f_\xi(x) - \varphi_N(0,0,...,0,x)) + (f_\xi(x) + \varphi_N(0,0,...,0,x)) \|_\nu = \| f_\xi(x) \|_\nu =$$

$$= \frac{c_1(r,s,\omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{(N+1)^{r-1+\frac{1}{\nu}}},$$

Тем самым, доказано, что при любом целом положительном N для всякой сетки $\xi = \{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{N} \subset [0,1]^s$ и измеримой в смысле Лебега по переменной $x = (x_1, x_2, ..., x_s)$ функции

$$\varphi_N(z_1, z_2, ..., z_N, x) : C^N \times [0, +\infty) \to C$$

имеет место

$$\sup_{f \in E_s^r} \left\| f(x) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), ..., f(\xi^{(N)}), x) \right\|_{L^\nu(0,1)^s} \geq \frac{c_1(r,s,\omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{(N+1)^{r-1+\frac{1}{\nu}}}.$$

Так как правая часть последнего неравенства не зависит от сетки $\{\xi^{(k)}\}_1^N$ и функции φ_N , то отсюда следует, что

$$\inf_{\xi^{(k)}}\inf_{\varphi_N}\sup_{f\in E_s^r}\left\|f(x)-\varphi_N(f(\xi^{(1)}),f(\xi^{(2)}),...,f(\xi^{(N)}),x)\right\|_{L^{\nu}(0,1)^s}\geq\frac{c_1(r,s,\omega)\left\|\omega(\cdot)\right\|_{\nu}}{(N+1)^{r-1+\frac{1}{\nu}}}.$$

Этим доказано утверждение 1) теоремы 4. При $\nu\ \geq 2$ утверждение 2) теоремы 4 доказывается совершенно аналогично, с той лишь разницей, что в доказательстве вместо функции $f_{\xi}(x)$ (см. (1.4.56)) берется функция из второго утверждения леммы 3.7, а при $1\leq\ \nu\ <2$ утверждение 2) теоремы 4 следует из оценки, полученной в [30], в силу вложения

$$B^{rs}_{2,2}(0,1)^s\subset SW^r_2(0,1)^s.$$

Теорема 4 полностью доказана.

Доказательство теоремы 5. Сначала докажем вложение

$$SW_1^r(0,1)^s\subset E_s^r(r>1). \tag{1.4.58}$$

Действительно, пусть $f(x)\in SW_1^r(0,1)^s$. Тогда в силу определения класса и равенства (1.4.33) имеем

$$\hat{f}(m)=\hat{\varphi}_{j(m)}(m)\left(\overline{\overline{m}}\right)^{-r}e^{2\pi i\sum_{j=1}^{s}sign(m_j)}(m\in Z^s),$$

где через $j(m)$ обозначено набор индексов $j_1,j_2,...,j_n(1\leq j_1<j_2<...<j_n\leq s)$ отличных от нуля компонент вектора $m=(m_1,m_2,...,m_s)$. Следовательно,

$$\left|\hat{f}(m)\right|=\left|\hat{\varphi}_{j(m)}(m)\right|\left(\overline{\overline{m}}\right)^{-r}.$$

Но,

$$\left|\hat{\varphi}_{j(m)}(m)\right|\leq\left\|\varphi_{j(m)}(\cdot)\right\|_1$$

и, в силу определения класса $SW_1^r(0,1)^s$,

$$\left\|\varphi_{j(m)}(\cdot)\right\|_1\leq 1.$$

Стало быть,

$$\left|\hat{f}(m)\right|\leq\left(\overline{\overline{m}}\right)^{-r},$$

т.е. $f(x)\in E_s^r$. Тем самым, действительно имеет место вложение (1.4.58). А из (1.4.58) и из утверждения 1) теоремы 3 при $\nu=2$ сразу же следует оценка сверху.

Докажем оценку снизу. Пусть N целое положительное число, $\{\xi^{(k)}\}_1^N$ произвольная фиксированная сетка и $\psi_k(x)\in L^2(0,1)^s(k=1,2,...N)$ - произвольные фиксированные функции. Тогда

$$\sup_{f\in F}\left\|f(\cdot)-\sum_{k=1}^{N}f(\xi^{(k)})\psi_k(\cdot)\right\|_{L^2(0,1)^s}\geq$$

$$\geq\sup_{f\in F}\inf_{\substack{c_k\in C\\(k=1,2,...,N)}}\left\|f(\cdot)-\sum_{k=1}^{N}c_k\psi_k(\cdot)\right\|_{L^2(0,1)^s}\geq$$

$$\geq\inf_{\substack{\theta_k\in L^2(0,1)^s\\(k=1,2,...,N)}}\sup_{f\in F}\inf_{\substack{c_k\in C\\(k=1,2,...,N)}}\left\|f(\cdot)-\sum_{k=1}^{N}c_k\theta_k(\cdot)\right\|_{L^2(0,1)^s}\equiv d_N(F,L^2), \tag{1.4.59}$$

где F любой из классов E_s^r и $SW_1^r(0,1)^s$ $(r>1)$, а $d_N(F,L^2)$ колмогоровский поперечник класса F (см. [31]). Поскольку неравенство (1.4.59) справедливо для произвольных $\{\xi^{(k)}\}_1^N$, $\{\psi_k(x)\}_1^N$ и правая часть не зависит от них, то отсюда следует, что

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,...,N)}} \inf_{\psi_k(\cdot)\in L^2} \sup_{f\in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi^{(k)})\psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \geq d_N(F, L^2). \tag{1.4.60}$$

Из последнего соотношения учитывая включение (1.4.58) получим

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,...,N)}} \inf_{\psi_k(\cdot)\in L^2} \sup_{f\in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi^{(k)})\psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \geq d_N(SW_1^r(0,1)^s, L^2).$$

Но, хорошо известно, что (см. [31])

$$d_N(SW_1^r, L^2) \underset{r,s}{\succ\prec} N^{-r+{}^1/2} \ln^{r(s-1)} N (r>1).$$

Следовательно,

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,...,N)}} \inf_{\psi_k(\cdot)\in L^2} \sup_{f\in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi^{(k)})\psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{>>} N^{-r+{}^1/2} \ln^{r(s-1)} N.$$

Теорема 5 полностью доказана.

ГЛАВА 2. Приближенное восстановление решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов B, E и SW.

Пусть $u(t,x,f)$ есть решение задачи Коши уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} (t>0, x\in R^s) \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = f(x). \tag{2.2}$$

Основными результатами данной главы являются следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть дано целое положительное число* s. *Пусть для каждого* $k(k = 1,2...)$ *число* p_k *- есть простое число, удовлетворяющее соотношению* $2^{k+3} \leq p_k \cdot k^2 < 2^{k+4}$, *а целые числа* $a_1^{(k)} = 1, a_2^{(k)}, ..., a_s^{(k)}$ *– оптимальные коэффициенты по модулю* p_k *индекса* $\gamma \geq 0$. *Пусть для всякого целого* $l \geq s+1$ *и всякого* $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_s)$ *из* Z^s *такого, что* $\tau_j > 0$ *и* $\|\tau\| \overset{def}{=} \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_s < l$ *матрица* $A_{l,\tau}$ *и множества* $K(l,\tau)$, $\rho(\tau)$ *определены соответственно равенствами*

$$A_{l,\tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{l-\|\tau\|} & 0 & 0 & ... & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(l-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & ... & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_3^{(l-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(l-\|\tau\|)} & 0 & 0 & ... & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$K(l,\tau) = \{k \in Z^s : -2^{\tau_1} p_{l-\|\tau\|} \leq k_1 < 2^{\tau_1} p_{l-\|\tau\|}, -2^{\tau_j} \leq k_j < 2^{\tau_j} (j=2,3,...,s)\}, \tag{2.4}$$

$$\rho(\tau) = \{m = (m_1, m_2, ..., m_s) \in Z^s : 2^{\tau_j - 1} \leq \max\{1, |m_j|\} < 2^{\tau_j} (j=1,...,s)\}. \tag{2.5}$$

Тогда при любом натуральном $N \geq 2^{2s+5}$ *имеют место следующие соотношения:*
1) *при* $r > 1$ *и* $2 \leq \nu \leq \infty$

$$\sup_{f\in E_s^r}\sup_{t\geq 0}\left\|u(t,\cdot,f)-(T_N^{(0)}f)(t,\cdot)\right\|_\nu \underset{r,s,\gamma,\nu}{<<} \frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1+{}^1/_\nu}},$$

2) *при* $r>1/2$

$$\sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s}\ \sup_{t\geq 0}\ \sup_{x\in[0,1]^s}\left|u(t,x,f)-(T_N^{(0)}f)(t,x)\right| \underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{\ln^{(r+{}^1/_2)(s-1)}N}{N^{r-{}^1/_2}},$$

3) *при* $2r\ >\ s$ *и* $1\leq\theta\ \leq\infty$

$$\sup_{f\in B_{2,\theta}^r(0,1)^s}\ \sup_{t\geq 0}\ \sup_{x\in[0,1]^s}\left|u(t,x,f)-(T_N^{(0)}f)(t,x)\right| \underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{\ln^{({}^r/_s+{}^1/_2)(s-1)}N}{N^{{}^r/_s-{}^1/_2}},$$

где $u(t,x,f)$ *-есть решение задачи* (2.1)-(2.2), *а оператор* $T_N^{(0)}$ *определен равенствами*

$$n=n(N)=\max\{l\in Z_+ : card\left[\bigcup_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<l}}\{k(A_{l,\tau}^{-1})' : k\in K(l,\tau)\}\right]\leq N\}, \tag{2.6}$$

$$(T_N^{(0)}f)(t,x)= \\ =\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \frac{1}{\det A_{n,\tau}}\sum_{k\in K(n,\tau)} f(k(A_{n,\tau}^{-1})')\sum_{m\in\rho(\tau)} e^{2\pi i(m,x-k(A_{n,\tau}^{-1})^{©})-4\pi^2(m,m)t}. \tag{2.7}$$

Теорема 7. *Пусть* s *целое положительное число. Тогда имеют место следующие оценки снизу:*

1) *при* $r>1$ и $1\leq\nu\leq\infty$

$$\frac{1}{N^{r-1+{}^1/_\nu}} \underset{r,s,\nu}{<<} \inf_{\substack{\xi^{(k)}\in[0,1]^s\\ (k=1,2,...,N)}}\ \inf_{\varphi_N}\sup_{f\in E_s^r}\sup_{t\geq 0}\left\|u(t,\cdot,f)-\varphi_N(f(\xi^{(1)}),f(\xi^{(2)}),...,f(\xi^{(N)}),t,\cdot)\right\|_\nu,$$

2) *при* $r>1/2$ и $1\leq\ \nu\leq\infty$

$$\frac{1}{N^{r-\left({}^1/_2-{}^1/_\nu\right)_+}} \underset{r,s,\nu}{<<} \inf_{\substack{\xi^{(k)}\in[0,1]^s\\ (k=1,2,...,N)}}\ \inf_{\varphi_N}\ \sup_{f\in SW_2^r}\ \sup_{t\geq 0}\left\|u(t,\cdot,f)-\varphi_N(f(\xi^{(1)}),f(\xi^{(2)}),...,f(\xi^{(N)}),t,\cdot)\right\|_\nu,$$

3) *при* $2r\ >\ s$, $1\ \leq\ \theta\ \leq\ \infty$ *и* $1\ \leq\ \nu\ \leq\ \infty$

$$\frac{1}{N^{{}^r/_s-\left({}^1/_2-{}^1/_\nu\right)_+}} \underset{r,s,\nu,\theta}{<<} \inf_{\substack{\xi^{(k)}\in[0,1]^s\\ (k=1,2,...,N)}}\ \inf_{\varphi_N}\ \sup_{f\in B_{2,\theta}^r}\ \sup_{t\geq 0}\left\|u(t,\cdot,f)-\varphi_N(f(\xi^{(1)}),f(\xi^{(2)}),...,f(\xi^{(N)}),t,\cdot)\right\|_\nu,$$

где $u(t,x,f)$ *-есть решение задачи* (2.1)-(2.2), $\inf\limits_{\varphi_N}$ *берется по всем функциям*

$$\varphi_N(z_1,z_2,...,z_N,t,x) : C^N\times[0,+\infty)\times[0,1]^s\to C,$$

измеримым по переменной x *в смысле Лебега и для всякого вещественного* α *положено* $(\alpha)_+\equiv\frac{1}{2}(\alpha+|\alpha|)$.

Теорема 8. *Пусть* s *-целое положительное число и* $r>1$. *Тогда при любом целом положительном* N *имеет место соотношение*

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)}\in[0,1]^s\\(k=1,2,...,N)}} \inf_{\psi_k(t,\cdot)\in L^2}\sup_{f\in F}\sup_{t\geq 0}\left\|u(t,\cdot,f)-\sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)})\psi_k(t,\cdot)\right\|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{\succ\prec} N^{-r+\frac{1}{2}}\ln^{r(s-1)}N,$$

где $u(t,x,f)$ *-есть решение задачи* (2.1)-(2.2), F *есть любой из классов* E_s^r *и* $SW_1^r(0,1)^s$, *причем такой оптимальный порядок погрешности достигается при восстановлении оператором* $T_N^{(0)}$ *из теоремы 6.*

2.1. Вспомогательные утверждения.

В следующей лемме представлен общеизвестный результат, получаемый методом Фурье.

Лемма 2.1.1. *Пусть s-целое положительное число. Для всякой 1-периодической по каждой переменной функции* $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_s)$ *с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье решение* $u(t,x,f)$ *задачи* (2.1)-(2.2) *представимо в виде* $(t\geq 0, x\in R^s)$

$$u(t,x,f)=\sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t},$$

где

$$\hat{f}(m)\equiv\int_{[0,1]^s}f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx(m\in Z^s)$$

тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

2.2. Доказательства основных результатов. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 6 установим одно необходимое для этого равенство.

Пусть N произвольное фиксированное целое положительное число и пусть целое положительное число n определено по N равенством (2.6).

Полагая в лемме 1.2.4

$$\beta_m\equiv e^{-4\pi^2(m,m)t}(m\in Z^s),$$

$$\begin{aligned}&\Im\equiv\Im_n=\\&=\{\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_s)\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=\tau_1+\tau_2+...+\tau_s<n\},\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned}&\rho_\tau\equiv\rho(\tau)=\\&=\{m=(m_1,m_2,...,m_s)\in Z^s:2^{\tau_j-1}\leq\overline{m_j}<2^{\tau_j}(j=1,2,...,s)\},\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

$$A_\tau\equiv A_{n,\tau}=\begin{pmatrix}2^{\tau_1+1}p_{n-\|\tau\|} & 0 & 0 & ... & 0\\ -2^{\tau_1+1}a_2^{(n-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & ... & 0\\ -2^{\tau_1+1}a_3^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & ... & 0\\ . & . & . & ... & .\\ -2^{\tau_1+1}a_s^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 0 & ... & 2^{\tau_s+1}\end{pmatrix},\tag{2.2.3}$$

$$\begin{aligned}&K_\tau\equiv K(n,\tau)=\\&=\{k\in Z^s:-2^{\tau_1}p_{n-\|\tau\|}\leq k_1<2^{\tau_1}p_{n-\|\tau\|},-2^{\tau_j}\leq k_j<2^{\tau_j}(j=2,3,...,s)\},\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

и учитывая тот факт, что в силу утверждения 2 леммы 1.2.2 система $K_\tau\equiv K(n,\tau)$ является полной системой представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки $\Lambda'_{n,\tau}=\{uA'_{n,\tau}:u\in Z^s\}$ и лемму 2.1.1, для всякой 1- периодической по каждой переменной и разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье функции $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_s)$ *имеем*

$$u(t,x,f)-(T_N^{(0)}f)(t,x)=U_{1,N}(t,x,f)+U_{2,N}(t,x,f),\tag{2.2.5}$$

где оператор $T_N^{(0)}$ определен равенством (2.7) и

$$U_{1,N}(t,x,f)=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\\tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}(-\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\hat{f}(uA_{n,\tau}+m))e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t},\tag{2.2.6}$$

$$U_{2,N}(t,x,f)=\sum_{m\in Z^s\setminus\bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t}(t\geq 0,x\in R^s). \qquad (2.2.7)$$

Доказательство теоремы 6. Приступим к доказательству утверждения 1) теоремы 6. Пусть $f\in E_s^r$. Оценим сначала $U_{1,N}(t,\cdot,f)$ в (2.2.5). Из (2.2.6), с учетом определения класса E_s^r и соотношений (1.4.13)-(1.4.14), получим

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_\infty\equiv\sup_{t\geq 0}\sup_{x\in[0,1]^s}|U_{1,N}(t,\cdot,f)|\leq\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left|\hat{f}(uA_{n,\tau}+m)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(\overline{\overline{uA_{n,\tau}+m}}\right)^r}\underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\ldots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r}\underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\ldots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r}\sum_{m\in\rho(\tau)}1,$$

откуда, с учетом соотношений

$$\sum_{m\in\rho(\tau)}1\underset{s}{<<}2^{\|\tau\|}(\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_s)\in Z^s,\tau_j>0),$$

получим

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_\infty\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|<n}}\frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\frac{1}{\left(\overline{\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\ldots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}}}\right)^r}.$$

Тогда в силу (1.4.17) и неравенств $2^{k+3}\leq k^2p_k<2^{k+4}(k=1,2,...)$,

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_\infty\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|<n}}\frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}}\cdot\frac{\ln^{r\gamma}p_{n-\|\tau\|}}{p^r_{n-\|\tau\|}}\underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|<n}}\frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}}\cdot\frac{(n-\|\tau\|)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|\tau\|)r}}=\sum_{k=s}^{n-1}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|=k}}\frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}}\cdot\frac{(n-\|\tau\|)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|\tau\|)r}}=$$

$$=\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{2^{k(r-1)}}\cdot\frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\\ \|\tau\|=k}}1.$$

Отсюда в силу (1.4.21)

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_\infty \underset{r,s}{<<} \underset{r,s}{<<} \sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{2^{k(r-1)}}\cdot\frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}}\cdot k^{s-1} = \frac{1}{2^{n(r-1)}}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}\cdot k^{s-1}}{2^{(n-k)}} \leq$$

$$\leq \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|k\|)}} \underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}.$$

Таким образом,

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_\infty \underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \tag{2.2.8}$$

Оценим сверху $\sup\limits_{t\geq 0}\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_2$. Из (2.2.6) следует равенство

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_2^2 = \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}\left|\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\hat{f}(uA_{n,\tau}+m)\right|^2 \equiv \|J_{1,N}(\cdot,f)\|_2^2,$$

где $J_{1,N}(\cdot,f)$ определено равенством (1.4.11), откуда в силу (1.4.27)

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_2 \underset{r,s}{<<} \frac{n^{(s-1)/2}}{2^{n(r-1/2)}}. \tag{2.2.9}$$

В итоге, из (2.2.8) и (2.2.9) при любом фиксированном $t\geq 0$ пользуясь неравенством (1.4.28) получим $(2\leq\nu\leq\infty)$

$$\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_\nu \leq \|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_2^{2/\nu}\,\|U_{1,N}(t,\cdot,f)\|_\infty^{1-2/\nu} \underset{r,s,\nu}{<<} \frac{n^{(s-1)(1-1/\nu)}}{2^{n(r-1+1/\nu)}}. \tag{2.2.10}$$

Теперь оценим $U_{2,N}(t,\cdot,f)$ в (2.2.5). Из (2.2.7) учитывая определение класса E_s^r получим

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{2,N}(t,\cdot,f)\|_\infty \leq \sum_{m\in\bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n}\rho(\tau)}\left|\hat{f}(m)\right| = \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n}\sum_{m\in\rho(\tau)}\left|\hat{f}(m)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n}\sum_{m\in\rho(\tau)}\frac{1}{(\overline{\overline{m}})^r} \leq \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n}\sum_{m\in\rho(\tau)}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^r} = \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^r}\sum_{m\in\rho(\tau)}1 \underset{s}{<<}$$

$$\underset{s}{<<} \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^{r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k}\frac{1}{\left(2^{\|\tau\|}\right)^{r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\left(2^k\right)^{r-1}}\sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k}1 \underset{s}{<<}$$

$$\underset{s}{<<} \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\left(2^k\right)^{r-1}}k^{s-1} \underset{s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}},$$

т.е.

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{2,N}(t,\cdot,f)\|_\infty \underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \tag{2.2.11}$$

Оценим сверху $\sup\limits_{t\geq 0}\|U_{2,N}(t,\cdot,f)\|_2$. Из (2.2.7) следует равенство

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{2,N}(t,\cdot,f)\|_2^2=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}\left|\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\hat{f}(uA_{n,\tau}+m)\right|^2\equiv\|J_{2,N}(\cdot,f)\|_2^2,$$

где $J_{2,N}(\cdot,f)$ определено равенством (1.4.12), откуда в силу (1.4.30)

$$\sup_{t\geq 0}\|U_{2,N}(t,\cdot,f)\|_2 \underset{r,s}{<<} \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \tag{2.2.12}$$

Из (2.2.11) и (2.2.12) опять же пользуясь неравенством (1.4.28) при $2\leq\nu\leq\infty$ получим

$$\|U_{2,N}(t,\cdot,f)\|_\nu\leq\|U_{2,N}(t,\cdot,f)\|_2^{\frac{2}{\nu}}\|U_{2,N}(t,\cdot,f)\|_\infty^{1-\frac{2}{\nu}}\underset{r,s,\nu}{<<}\frac{n^{(s-1)(1-\frac{1}{\nu})}}{2^{n(r-1+\frac{1}{\nu})}}. \tag{2.2.13}$$

В итоге из (2.2.5)-(2.2.7), (2.2.10), (2.2.13) и (2.2.4), (1.4.20) для всех $f\in E_s^r$ имеем

$$\sup_{t\geq 0}\left\|u(t,\cdot,f)-(T_N^{(0)}f)(t,\cdot)\right\|_\nu\underset{r,s,\nu}{<<}\frac{n^{(s-1)(1-\frac{1}{\nu})}}{2^{n(r-1+\frac{1}{\nu})}}\underset{r,s,\nu}{<<}\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1+\frac{1}{\nu}}}.$$

Тем самым, утверждение 1) теоремы 6 доказано.

Докажем утверждение 2) теоремы 6. Пусть в (2.2.5) функция $f(x)$ принадлежит классу $SW_2^r(0,1)^s(r>1/2)$. Оценим сверху $U_{1,N}(t,x,f)$. Учитывая (1.4.33) в силу определения класса $SW_2^r(0,1)^s$ из равенства (2.2.6) получим

$$U_{1,N}(t,x,f)=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}(-\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\hat{f}(uA_{n,\tau}+m))e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t}=$$

$$=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\sum_{m\in\rho(\tau)}(-\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\hat{\varphi}_{j(uA_{n,\tau}+m)}(uA_{n,\tau}+m)\left(\overline{\overline{uA_{n,\tau}+m}}\right)^{-r}e^{\frac{\pi i r}{2}\left(\sum_{k=1}^{s}sign(uA_{n,\tau}+m)_k\right)})e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t},$$

где через $j(uA_{n,\tau}+m)$ обозначен набор индексов $j_1,j_2,...,j_n$ ($1\leq j_1<j_2<...<j_n\leq s$) отличных от нуля компонент вектора $uA_{n,\tau}+m$. Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского получим

$$|U_{1,N}(t,x,f)|\leq$$

$$\leq\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\left(\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left|\hat{\varphi}_{j(uA_{n,\tau}+m)}(uA_{n,\tau}+m)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m\in\rho(\tau)}\sum_{u\in Z^s\setminus\{0\}}\left(\overline{\overline{uA_{n,\tau}+m}}\right)^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2.14}$$

Далее, повторяя без изменения те же выкладки, которые были использованы при получении соотношения (1.4.35) из соотношения (1.4.34), получим оценку

$$|U_{1,N}(t,x,f)|\underset{r,s}{<<}\frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \tag{2.2.15}$$

Оценим теперь $U_{2,N}(t,x,f)$ в (2.2.5). Из (2.2.7) учитывая определение класса $SW_2^r(0,1)^s$ и равенство (1.4.33)

$$U_{2,N}(t,x,f)=\sum_{m\in Z^s\setminus\bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t}=$$

$$= \sum_{m\in Z^s\setminus\bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} \hat{\varphi}_{j(m)}(m)\,(\overline{\overline{m}})^{-r}\, e^{\frac{\pi i r}{2}\sum_{j=1}^{s} sign(m_j)} e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t},$$

где через $j(m)$ обозначен набор индексов $j_1, j_2, ..., j_n$ ($1 \le j_1 < j_2 < ... < j_n \le s$) отличных от нуля компонент вектора $m = (m_1, m_2, ..., m_s)$. Отсюда применяя неравенство Коши-Буняковского получим

$$|U_{2,N}(t,x,f)| \le \left(\sum_{m\in Z^s\setminus\bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} \left|\hat{\varphi}_{j(m)}(m)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m\in Z^s\setminus\bigcup_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|<n}\rho(\tau)} (\overline{\overline{m}})^{-2r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, повторяя без изменения те же выкладки, которые использовались при получении соотношения (1.4.36), получим

$$|U_{2,N}(t,x,f)| \underset{r,s}{<<} \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \tag{2.2.16}$$

В итоге, из (2.2.5),(2.2.6),(2.2.7), (2.2.15) и (2.2.16)

$$\sup_{t\ge0}\left\|u(t,\cdot,f) - (T_N^{(0)}f)(t,\cdot)\right\|_\infty \underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}},$$

или в пересчете на число узлов N(см.(2.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{t\ge0}\left\|u(t,\cdot,f) - (T_N^{(0)}f)(t,\cdot)\right\|_\infty \underset{r,s}{<<} \frac{\ln^{(r+\frac{1}{2})(s-1)} N}{N^{r-\frac{1}{2}}}.$$

Тем самым, утверждение 2 теоремы 6 доказана.

Приступим к доказательству утверждения 3) теоремы 6. Поскольку при $1 \le \theta < \infty$ имеет место вложение $B^r_{2,\theta}(0,1)^s \subset B^r_{2,\infty}(0,1)^s \equiv H^r_2(0,1)^s$, то утверждение 3) достаточно доказать для класса Никольского $B^r_{2,\infty}(0,1)^s \equiv H^r_2(0,1)^s$. Пусть в (2.2.5) функция $f(x)$ принадлежит классу $B^r_{2,\infty}(0,1)^s \equiv H^r_2(0,1)^s$ $(r > 1/2)$. Сперва оценим сверху $U_{1,N}(t,x,f)$. Из (2.2.6) в силу абсолютной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ следует равенство $(t > 0, x \in R^s)$

$$U_{1,N}(t,x,f) = -\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{u\in Z^s\setminus\{0\},m\in\rho(\tau)} \hat{f}(uA_{n,\tau}+m)e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t}.$$

Далее, аналогично (1.4.38), преобразуя правую часть последнего равенства получим

$$U_{1,N}(t,x,f) = -\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,\, 2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \int_{[0,1]^s} \Delta^{[r]+2}_{h^{(\tau,\lambda)}} f(y) P_{\lambda,\tau}(t,x,y)dy, \tag{2.2.17}$$

где

$$\Delta^{[r]+2}_{h^{(\tau,\lambda)}} f(y) \equiv \sum_{l=0}^{[r]+2} (-1)^{[r]+2-l} C^l_{[r]+2} f(x + lh^{(\tau,\lambda)}), \tag{2.2.18}$$

$$h^{(\lambda,\tau)} = 2^{-(\lambda_{j_0}+\tau_{j_0})-4}(\underbrace{0,...,0,1,}_{j_0}0,...,0)(\tau_{j_0}+\lambda_{j_0} = \max_{1\le j\le s}(\tau_j+\lambda_j)), \tag{2.2.19}$$

$$P_{\tau,\lambda}(t,x,y)=\sum_{u\in Z^s,m\in\rho(\tau):uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\dots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}\in\rho(\lambda)} a_{\tau,\lambda}(uA_{n,\tau}+m)e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t-2\pi i(uA_{n,\tau}+m,y)}, \quad (2.2.20)$$

$$a_{\tau,\lambda}(\sigma)=(e^{2\pi i\sigma_{j_0}2^{-(\lambda_{j_0}+\tau_{j_0})-4,\tau)}}-1)^{-[r]-2}(\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_s)\in R^s). \quad (2.2.21)$$

Следовательно,

$$|U_{1,N}(t,x,f)|\le \sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \left\|\Delta^{[r]+2}_{h^{(\tau,\lambda)}}f(\cdot)\right\|_2\|P_{\lambda,\tau}(t,x,\cdot)\|_2. \quad (2.2.22)$$

В силу определения класса $B^r_{2,\infty}(0,1)^s\equiv H^r_2(0,1)$ (см. также (2.2.19))

$$\left\|\Delta^{[r]+2}_{h^{(\tau,\lambda)}}f(\cdot)\right\|_2\le\left|h^{(\tau,\lambda)}\right|^r\le 2^{-r(\tau_{j_0}+\lambda_{j_0})} \quad (2.2.23)$$

Теперь в (2.2.18) оценим сверху $\|P_{\lambda,\tau}(t,x,\cdot)\|_2$ $(x\in R^s)$. Имеем

$$\|P_{\tau,\lambda}(t,x,\cdot)\|_2^2=\sum_{u\in Z^s,m\in\rho(\tau):uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\dots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}\in\rho(\lambda)}|a_{\tau,\lambda}(uA_{n,\tau}+m)|^2e^{-8\pi^2(m,m)t}\le$$

$$\le\sum_{u\in Z^s,m\in\rho(\tau):uV_{p_{n-\|\tau\|},a_2^{(n-\|\tau\|)},\dots,a_s^{(n-\|\tau\|)}}\in\rho(\lambda)}|a_{\tau,\lambda}(uA_{n,\tau}+m)|^2\equiv\|P_{\lambda,\tau}(x,\cdot)\|_2^2,$$

где $P_{\lambda,\tau}(x,y)$ определен равенством (1.4.41). Тогда в силу (1.4.46)

$$\|P_{\lambda,\tau}(t,x,\cdot)\|_2^2\underset{r,s}{<<}\frac{2^{\|\lambda\|+\|\tau\|}(n-\|\tau\|)^{\gamma+2}}{2^{n-\|\tau\|}}. \quad (2.2.24)$$

В итоге, из (2.2.22), (2.2.23) и (2.2.24) следует

$$|U_{1,N}(t,x,f)|\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} 2^{-r(\lambda_{j_0}+\tau_{j_0})}\frac{2^{\frac{\|\lambda\|+\|\tau\|}{2}}(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}}\underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} 2^{-\frac{r(\|\lambda\|+\|\tau\|)}{s}}\frac{2^{\frac{\|\lambda\|+\|\tau\|}{2}}(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}}\underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\ \sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\|+\frac{n-\|\tau\|}{2}-\frac{\|\tau\|}{2}}}\sum_{\substack{\lambda\in Z^s:\\ \lambda_j>0,2^{\|\lambda\|}\ge\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}}\frac{1}{2^{(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})\|\lambda\|}}\underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<}\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\|+\frac{n-\|\tau\|}{2}-\frac{\|\tau\|}{2}}}\left(\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}\right)^{-(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}\ln^{s-1}\left(\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0\ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}\right),$$

далее продолжим с учетом (1.4.22) и (1.4.21):

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j>0, \|\tau\|<n}} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\|+\frac{n-\|\tau\|}{2}-\frac{\|\tau\|}{2}}} \frac{(n-\|\tau\|)^{(\gamma+2)(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})+s-1}}{2^{(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})(n-\|\tau\|)}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j>0, \|\tau\|<n}} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} = \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j>0, \|\tau\|=k}} 1 \underset{s}{<<}$$

$$\underset{s}{<<} \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} k^{s-1} \underset{s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \underset{s}{<<}$$

$$\underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}},$$

т.е.

$$\sup_{t\geq 0} \sup_{x\in[0,1]^s} |U_{1,N}(t,x,f)| \underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}},$$

или в пересчете на число узлов N (см. (2.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{t\geq 0} \sup_{x\in[0,1]^s} |U_{1,N}(t,x,f)| \underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{\ln^{(\frac{r}{s}+\frac{1}{2})(s-1)} N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}. \tag{2.2.25}$$

Оценим теперь $\sup\limits_{t\geq 0} \sup\limits_{x\in[0,1]^s} |U_{2,N}(t,x,f)|$ в (2.2.5). Из (2.2.7) следует, что

$$U_{2,N}(t,x,f) = \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \int_{[0,1]^s} f(y) \sum_{m\in\rho(\tau)} e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t-2\pi i(m,y)} dy =$$

$$= \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} \int_{[0,1]^s} \Delta_{h^\tau}^{[r]+2} f(y)...)) P_\tau(t,x,y) dy, \tag{2.2.26}$$

где

$$h^\tau = 2^{-\tau_{j_0}-4}(\underbrace{0,...,0,1}_{j_0},0,...,0)(\tau_{j_0} = \max_{1\leq j\leq s}(\tau_j)), \tag{2.2.27}$$

$$P_\tau(t,x,y) = \sum_{m\in\rho(\tau)} (e^{-2\pi i m_{j_0}\cdot 2^{-\tau_{j_0}-4}} - 1)^{-[r]-2} e^{2\pi i(m,x)-4\pi^2(m,m)t-2\pi i(m,y)}. \tag{2.2.28}$$

В (2.2.28) для каждого τ оценим отдельно $\left\|\Delta_{h^\tau}^{[r]+2} f(\cdot)\right\|_2$ и $\|P_{\tau,j_1,...,j_s}(x,y)\|_2$. В силу определения класса $B_{2,\infty}^r(0,1)^s \equiv H_2^r(0,1)$ (см. также (2.2.27))

$$\left\|\Delta_{h^\tau}^{[r]+2} f(\cdot)\right\|_2 \leq |h^\tau|^r \leq 2^{-r(\tau_{j_0}+\lambda_{j_0})}. \tag{2.2.29}$$

Из (2.2.28) следует

$$\|P_\tau(t,x,\cdot)\|_2^2 \leq \sum_{m\in\rho(\tau)} \left|e^{-2\pi i m_{j_0}\cdot 2^{-\tau_{j_0}-4}} - 1\right|^{-2l} = \sum_{m\in\rho(\tau)} 2^{-2([r]+2)} \left|\sin(\pi m_{j_0}\cdot 2^{-\tau_{j_0}-4})\right|^{-2([r]+2)} =$$

$$= \sum_{m\in\rho(\tau)} 2^{-2([r]+2)} \left|\sin(\pi\, |m_{j_0}| \cdot 2^{-\tau_{j_0}-4})\right|^{-2([r]+2)} \leq \sum_{m\in\rho(\tau)} 2^{-2([r]+2)} \left|\sin(\pi 2^{-5})\right|^{-2([r]+2)} \underset{r,s}{<<}$$

$$\underset{r,s}{<<} \sum_{m\in\rho(\tau)} 1 \underset{r,s}{<<} card\rho(\tau) \underset{r,s}{<<} 2^{\|\tau\|},$$

т.е.

$$\|P_\tau(t,x,\cdot)\|_2 \underset{r,s}{<<} 2^{\frac{\|\tau\|}{2}}. \tag{2.2.30}$$

Наконец, из (2.2.26), (2.2.29) и (2.2.30) получим

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{x\in[0,1]^s}|U_{2,N}(t,x,f)| \underset{r,s}{<<} \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} 2^{-r\tau_{j_0}}2^{\frac{\|\tau\|}{2}} \leq \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|\geq n} 2^{-\frac{r\|\tau\|}{s}}2^{\frac{\|\tau\|}{2}} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})k} \sum_{\tau\in Z^s:\tau_j>0,\|\tau\|=k} 1 \underset{s}{<<} \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})k}k^{s-1} \underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}}$$

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{x\in[0,1]^s}|U_{2,N}(t,x,f)| \underset{r,s}{<<} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}},$$

или в пересчете на число узлов N (см. (2.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{t\geq 0}\sup_{x\in[0,1]^s}|U_{2,N}(t,x,f)| \underset{r,s}{<<} \frac{\ln^{(\frac{r}{s}+\frac{1}{2})(s-1)} N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}. \qquad (2.2.31)$$

В итоге, из (2.2.5), (2.2.25) и (2.2.31) следует

$$\sup_{f\in H_2^r(0,1)^s}\sup_{t\geq 0}\left\|u(t,\cdot,f)-(T_N^{(0)}f)(t,\cdot)\right\|_\infty \underset{r,s}{<<} \frac{\ln^{(\frac{r}{s}+\frac{1}{2})(s-1)} N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 6 полностью доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть F - есть некоторый класс 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1,x_2,...,x_s)$ с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье. В силу начального условия (2.2) имеем

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)}\in[0,1]^s\\(k=1,2,...,N)}}\ \inf_{\varphi_N}\sup_{f\in F}\sup_{t\geq 0}\left\|u(t,\cdot,f)-\varphi_N(f(\xi^{(1)}),f(\xi^{(2)}),...,f(\xi^{(N)}),t,\cdot)\right\|_\nu \geq$$

$$\geq \inf_{\substack{\xi^{(k)}\in[0,1]^s\\(k=1,2,...,N)}}\ \inf_{\varphi_N}\sup_{f\in F}\left\|u(0,\cdot,f)-\varphi_N(f(\xi^{(1)}),f(\xi^{(2)}),...,f(\xi^{(N)}),0,\cdot)\right\|_\nu \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{\xi^{(k)}\in[0,1]^s\\(k=1,2,...,N)}}\ \inf_{\varphi_N}\sup_{f\in F}\left\|f(\cdot)-\varphi_N(f(\xi^{(1)}),f(\xi^{(2)}),...,f(\xi^{(N)}),\cdot)\right\|_\nu .$$

Отсюда поочередно полагая $F\equiv E_s^r$ и $F\equiv SW_2^r(0,1)$ из утверждений 1) и 2) теоремы 4 получим соответственно утверждения 1) и 2) теоремы 7. Полагая $F\equiv B_{2,\theta}^r(0,1)$ из (**??**) получим утверждение 3) теоремы 7. Теорема 7 полностью доказана.

Доказательство теоремы 8. Оценка сверху доказана в теореме 6. Оценка снизу следует из теоремы 5. Теорема 8 доказана.

Заключение. В данной статье изложены совершенно иные вычислительные агрегаты восстановления функций и решений уравнений в частных производных со свойствами неулучшаемости в степенной шкале, нежели утвердившиеся в современной математике, а также решены смежные задачи, имеющие самостоятельное значение.

Список литературы

1 Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems// Journal of Complexity. -2022. Vol. 71. -P. 101653.

2 Temlyakov V., Ullrich T. Bounds on Kolmogorov widths and sampling recovery for classes with small mixed smoothness// Journal of Complexity. -2021. Vol. 67. -P. 101575.

3 Temlyakov V. Multivariate Approximation. Cambridge University Press, 2018. 551 p.

4 Сборник трудов Международной научной и научно-методической конференции «Математика, Компьютерные науки и цифровые технологии в преподавании и в научных исследованиях», посвященной 75-летнему юбилею Математика Нурлана Темиргалиева, 7-10 декабря 2022. Уральск. ??? стр.

5 Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье//Вестник Евразийского университета - 1997. № 3. -С. 90-144.

6 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод Квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вест. ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л. Н. Гумилева - 2010. -С. 1-194

7 Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. ИТМиНВ. Астана - 2012. -С. 1-259.

8 Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. Институт теоретической математики и научных вычислений. Астана (постоянно дополняемый по новым результатам и соответственно по новым и уточняемым постановкам задач). Астана -2018.

9 Н. Темиргалиев, А. Жубанышева Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2018. -Т. 124. -№3. -С. 8-88.

10 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. -Москва: Физматгиз, 1963.

11 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв. ВУЗов. Математика - 2013. №8. -С. 86-93.

12 Темиргалиев Н. Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона// Вестник Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. –2018. –Т. 123. –№2. –С. 8-57.

13 Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period // arXiv:1607.00950 [math. NA].

14 Кнут Д. Э. Искусство программирования для ЭВМ, том 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Издательство "Мир", 1977. – 784 с. (Пер. с англ. Г. П. Бабенко, Э. Г. Белаги и Л. В. Майорова, под ред. К. И. Бабенко: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Semi numerical Algorithms, Publisher: Addison-Wesley, 1969).

15 Кнут Д. Э. Искусство программирования, том 2. Получисленные алгоритмы. –М.: Издательскийдом "Вильямс", 2001. – 832 с. (Пер. с англ. под общей редакцией Ю. В. Козаченко: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, 3 rd Edition, Publisher: Addison-Wesley, 1998).

16 Воронин С. М. , Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел //Матем. заметки - 1989. -Т. 46. №2. -С. 34-41

17 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к приближенным восстановлению и интегрированию периодических функций многих переменных //Докл. АН СССР -1990. -Т. 310. №5. -С. 1050-1054.

18 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. - 1990. -Т. 281. №4. -С. 490-505.

19 Темиргалиев Н. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях //Матем. заметки - 1997. №2. -С. 297-301.

20 Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН - 2007. -Т. 416. №2. -С. 169-173.

21 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж. Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики - 2009. -Т. 49. №1. -С. 14-25.

22 Сихов М., Темиргалиев Н. Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова // Матем. замет. -2010. -Т. 87. №6. С.948-950.

23 Баилов Е.А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики - 2014. -Т. 54. № 7. -С. 1059-1077.

24 Шерниязов К.Е. О приближенном восстановлении функций из классов и решений уравнения теплопроводности// Материалы международной конференции, посвященной 75-летию академика АН РК А.Т. Лукьянова. Алматы. -1996. 17-18 апреля. -С. 235-237.

25 Шерниязов К.Е. Оптимальные в степенной шкале порядки погрешности приближенного восстановления решения уравнения теплопроводности с начальными функциями распределения температур из классов E и SW //Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. -1998. -№9. -С. 198-215.

26 Шерниязов К.Е. Восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с распределениями начальных температур из классов E, SW и SH //Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. -1998. -№11. -С. 98-108.

27 Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E. SW и B: // Дис... канд. физ.- мат. наук. Алматы. 1998.

28 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -Москва: Издательство "Наука", 1976. -543 стр.

29 Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. -Москва: Мир, 1965.

30 Кудрявцев С.Н. Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в заданном числе точек//Изв. РАН. Сер. матем. -1998. -Т. 62. №1. -С. 21–58.

31 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной//Тр. МИАН СССР. -1986. -Т. 178. -С. 3–113.

Қ.Е. Шерниязов

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, әл-Фараби даңғ., 71/23, Алматы, Қазақстан

Функция мен дербес туындылы теңдеу шешімдерін аса тығыздалған ақпаратты қасиетке ие Коробов торының сызықты комбинациялары арқылы құрылған есептеу агрегаттарымен жуықтап қалпына келтірудің оптималь әдістері және олармен іргелес мәселелер

Аннотация: Екі оң бүтін сан арқылы анықталатын Н.М. Коробов түйіндерінен (s өлшемді Евклид кеңістігіндегі нүктелер) құрылған тор ақпараттың аса тығыздалуының таңқаларлық мысалдарының бірі. Салмақтары бірдей және түйіндері осы аталған тор болатын квадратуралық формулалар санды интегралдауда оптималь дерлік болатынына қарамастан, функцияларды қалпына келтіру есебінде, кем дегенде, бұл торлар оптимальді жағдайдан квадрат есе нашар нәтижелер береді (Теорема 2).

Осыған орай, туындаған "*Коробов торының жақсы қасиеттерін қалпына келтіру есебіне пайдалануға бола ма, болса қалай?*" деген сұраққа бұл мақалада оң жауап алынған. Дәлірек айтсақ, көп айнымалылы функциялар мен олардың еселі Фурье қатарының түрлендірулерін (оған кейбір дербес туындылы теңдеулер шешімдері де жатады) қалпына келтіруде Есептеу математикасында, Сандық анализде және Жуықтаулар теориясында қиын кластар санатына жататын доминант аралас туындысы (аралас айырымы) арқылы анықталатын кеңістіктерде оптималь болатын және Кробов торынан айқын түрде ақырлы сызықтық түрлендірулер арқылы алынатын жаңа торлар мен сәйкес операторлар құрылды (Теорема 3 және 5).

Бұл есептерді шешу барысында Дискрет математикада өз алдына орын алатын, сапасы жағынан маңыздылығы бұл жердегіден кем емес басқа да мәселелерге қолданылуы мүмкін нәтижелер алынды. Атап айтсақ, қолданылу спектрі кең бұрыннан белгілі әйгілі нәтижелер қатарына бір өлшемді решетканың характеристикалық функциясының бірқалыпты тор түйіндері арқылы өрнектелуі жататын болса, автор бұл мақалада көп өлшемді Евклид кеңістіктеріндегі кез келген толық бүтін мәнді решетканың характеристикалық функциясының решетка матрицасы арқылы өрнектелу формуласын тапқан (Лемма 1.2.3).

Мақаладағы тағы да бір қызықты нәтижелердің бірі - салыстырым есебінің шешімдерінің айқын түрінің табылуы (Лемма 1.2.5). Бұндай салыстырым есептері дискрет математиканың көптеген есептерінде кездеседі. Солардың қатарында көптеген жылдар бойы шешілмей, Д. Кнуттың "Искусство программирования" атты әйгілі кітабының барлық басылымдарында қарастырылып келген және 2016 жылы Н.Теміргалиевтің еңбегінде толық шешімін тапқан, Ковью-Макферсон тесті бойынша кездейсоқ сандарды құрудың сызықты конгруэнтті генераторы.

Алайда, автордың 1999 жылы қорғалған Кандидаттық Диссертациясына кірген бұл және де көптеген нәтижелер бұған дейін Қазақстандық конференциялар тезистерінде хабарланып, тек қана екі мақалада қысқаша ішінара дәлелімен жарияланған болатын. Сонымен, аталған диссертацияның барлық нәтижелері Халықаралық математикада назардан тыс қалып келді.

Осы олқылықтың орны ұсынылып отырған мақалада толық қалпына келтіріліп отыр.

Түйін сөздер: функцияларды жуықтау, жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімдерін жуықтау, жуықтау операторлары, бүтінмәнді тор, Коробов торлары, ақпараттың сығылуы.

K. Sherniyazov

Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi ave., 71/23, Almaty, Kazakhstan

Optimal methods for approximate recovery of functions and solutions of partial differential equations by computational units by linear combinations of Korobov grids with information supercompression and related issues

Abstract: An amazing example of information supercompression is Korobov grids (points in the Euclidean space of arbitrary dimension s), which are determined by two positive integers, one of which is the number of nodes. As it turned out, quadrature formulas with equal weights and Korobov grid are almost optimal in the problem of numerical integration, while in problems of recovery of functions, at least, square times worse than optimal (Theorem 2).

Thus, the following question arises "*Is it possible, if possible, how to use the highest quality of Korobov meshes in recovery problems*", he himself received a positive answer in the problems of restoration of functions and transformations of their multiple trigonometric Fourier series, in particular, containing solutions of equations in partial derivatives, in classes of functions that are difficult in Computational Mathematics, Numerical Analysis and Approximation Theory with dominating mixed derivative and difference. Namely, grids were constructed that are explicitly linear combinations of the original Korobov grids, which retain the properties of their overcompression in computational practice (Theorems 3, 5, 6, and 8).

In the process of solving these problems, various results of independent significance in discrete mathematics were obtained, in terms of the quality of the applications incorporated in them, perhaps even no less than what was achieved

with their help. If characteristic functions of one-dimensional lattices are among the well-known ones with a wide range of applications, then the author constructed their characteristic functions in Euclidean spaces of any dimension for arbitrary lattices with integer nondegenerate master matrices (Lemma 1.2.3).

Another result in this series are explicit congruence solutions (Lemma 1.2.5) that arise in many problems of discrete mathematics, among which are Linear congruential generators for constructing random numbers using Coway-MacPherson tests, which, with all the efforts in Computer Science, did not yield to solutions in for almost half a century, the course of the search for which was constantly covered in all editions of the monograph "The Art of Programming" by Donald Knuth, included in the list of 12 highest publications of the physical and mathematical cycle in the 20th century, with the closure of the problem in 2016 by N. Temirgaliyev.

However, all these results, and by no means only, that were included in the author's Ph.D thesis.

Thus, all the results of the Dissertation were ignored in International Mathematics, which is restored with full proofs in this article.

Keywords: recovery of functions, recovery of solutions of the heat equation, recovery operators, integer lattice, Korobov grids, information overcompression.

References

1 Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems, Journal of Complexity. 2022. Vol. 71. P. 101653.

2 Temlyakov V., Ullrich T. Bounds on Kolmogorov widths and sampling recovery for classes with small mixed smoothness, Journal of Complexity. 2021. Vol. 67. P. 101575.

3 Temlyakov V. Multivariate Approximation. Cambridge University Press, 2018. 551 p.

4 Sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchnoj i nauchno-metodicheskoj konferencii «Matematika, Komp'yuternye nauki i cifrovye tekhnologii v prepodavanii i v nauchnyh issledovaniyah», posvyashchennoj 75-letnemu yubileyu Matematika Nurlana Temirgalieva[Proceedings of the International scientific and scientific-methodical conference "Mathematics, Computer Science and Digital Technologies in Teaching and Scientific Research", dedicated to the 75th anniversary of Mathematician Nurlan Temirgaliev]. December 7-10, 2022. Uralsk. ??? page

5 Temirgaliyev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham Analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e [Numerical-theoretic methods and the probability-theoretic approach to the problems of the Analysis. The theory of embeddings and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Vestnik Evrazijskogo universiteta [Bulletin of the Eurasian University]. 1997. №3. P. 90-144.

6 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series], Vest. ENU im. L.N.Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L. N. Gumilev ENU]. 2010. P. 1-194.

7 Temirgaliyev N. Nepreryvnaja i diskretnaja matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravlenij issledovanij [Continuous and discrete mathematics in organic unity in the context of research directions], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV [Electronic edition. IThMandSC]. Astana. 2012. P.1-259.

8 Temirgaliyev N. Nepreryvnaja i diskretnaja matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravlenij issledovanij [Continuous and discrete mathematics in organic unity in the context of research directions], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV. (postojanno dopolnjaemyj po novym rezul'tatam i sootvetstvenno po novym i utochnjaemym postanovkam zadach – iz-za laviny rezul'tatov poslednih let vse vremja otodvigaemyj) [Electronic edition. IThMandSC. (constantly supplemented by new results and accordingly on new and more refined statements of problems - because of the avalanche of the results of recent years)]. Astana. 2018.

9 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series. 2018. Vol. 124. №3. P. 8-88.

10 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize[Number-theoretic methods in approximate analysis](Fizmatiz, Moscow, 1963).

11 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Zhubanysheva A.Zh., Taugynbaeva G.E. Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2013. Vol. 57. №8. P. 75-80.

12 Temirgaliyev N. Elementary construction of the linear congruent Lehmer sequence with the degree of randomness that is required by the spectral test of Coveyou and MacPherson, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series. 2018. Vol. 123. №2. P. 8-55.

13 Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period // arXiv:1607.00950 [math. NA].

14 Knut D. E. Iskusstvo programmirovaniya dlya EVM, tom 2. Poluchislennye algoritmy. Moscow: Izdatel'stvo "Mir", 1977. 784 s. (Per. s angl. G. P. Babenko, E. G. Belagi i L. V. Majorova, pod red. K. I. Babenko: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Semi numerical Algorithms, Publisher: Addison-Wesley, 1969).

15 Knuth D. Iskusstvo programmirovaniya dlya EHVM. Poluchislennye algoritmy. 3rd vol.(Izdatel'skij dom "'Vil'yams"', Moscow, 2001, 832 p.) [in Russian] (Translated in edition YU.V. Kozachenko: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, 3rd Edition, Publisher: Addison-Wesley, 1998).

16 Voronin S.M., Temirgaliev N. Quadrature formulas associated with divisors of the field of Gaussian numbers, Mat. zametki, 1989. Vol. 46. №2. P. 597-602.

17 Temirgaliev N. Primenenie teorii divizorov k priblizhennym vosstanovleniju i integrirovaniju periodicheskih funkcij mnogih peremennyh[Application of divisor theory to recovery and numerical integration of periodic functions of several variables], Dokl. AN SSSR[Dockland Mathematics]. 1990. Vol. 310. №5. P. 1050-1054.

18 Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik. 1990. Vol. 69. №2. P. 527-542.

19 Temirgaliev N. Efficiency of Numerical Integration Algorithms Related to Divisor Theory in Cyclotomic Fields, Mat. notes. 1997. Vol. 61. №2. P. 242-245.

20 Bailov E.A., Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables, Dockland Mathematics, 2007, pp. 681-685.

21 Zhubanysheva A.Zh., Temirgaliev N., Temirgalieva Zh.N. Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Computational mathematics and mathematical physics. 2009. Vol. 49. №1. P. 12-22.

22 Sikhov M.B., Temirgaliev N. On an algorithm for construction uniformly distribution Korobov grids, Mathematical notes. 2010. Vol. 87. №. 6. P. 916-917.

23 Bailov E.A., Sikhov M.B., Temirgaliev N. General Algorithm for the Numerical Integration of Functions of Several Variables, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. №7. P. 1061–1078.

24 Sherniyazov K.E. O priblizhennom vosstanovlenii funkcij iz klassov i reshenij uravneniya teploprovodnosti, [On the approximate recovery of functions from classes and solutions of the heat equation], Materialy mezhdunarodnoj konferencii, posvyashchennoj 75-letiyu akademika AN RK A.T. Luk'yanova[Proceedings of the international conference dedicated to the 75th anniversary of Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan A.T. Lukyanov]. Almaty. 1996. 17-18 April. P. 235-237

25 Sherniyazov K.E. Optimal'nye v stepennoj shkale poryadki pogreshnosti priblizhennogo vosstanovleniya resheniya uravneniya teploprovodnosti s nachal'nymi funkciyami raspredeleniya temperatur iz klassov E i SW [Optimal orders of error in the power scale of approximate recovery of the solution of the heat equation with initial temperature distribution functions from the classes E and SW], Vestnik KazGU. Seriya matematika, mekhanika, informatika [Bulletin of KazGU. A series of mathematics, mechanics, computer science] 1998. №9. P. 198-215.

26 Sherniyazov K.E. Vosstanovlenie funkcij i reshenij uravneniya teploprovodnosti s raspredeleniyami nachal'nyh temperatur iz klassov E , SW i SH [Reconstruction of functions and solutions of the heat equation with distributions of initial temperatures from the classes E , SW and SH], Vestnik KazGU. Seriya matematika, mekhanika, informatika. [Bulletin of KazGU. A series of mathematics, mechanics, computer science]. 1998. №11. P. 98-108.

27 Sherniyazov K.E. Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravneniya teploprovodnosti s funkciyami raspredeleniya nachal'nyh temperatur iz klassov E, SW i B [Approximate recovery of functions and solutions of the heat equation with distribution functions of initial temperatures from classes E. SW and B]: Dis... cand. physical-mat. sciences. Almaty. 1998.

28 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis] (Nauka Publishing House, Moscow, 1976, 543 p.).

29 Kassels J. Vvedenie v geometriyu chisel [Introduction to the geometry of numbers] (Mir, Moscow, 1965).

30 Kudryavtsev S.N. The best accuracy of reconstruction of finitely smooth functions from their values at a given number of points, Izv. Math. 1998. Vol. 62. №1. P. 19–53.

31 Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative, Proc. Steklov Inst. Math. 1989. Vol. 178. P. 1–121

Сведения об авторах:

Шерниязов Кайрат – старший преподаватель, Казахский национальный университет имени Ал-Фараби, пр. аль-Фарабт, 71/23, Алматы, Казахстан.

Sherniyazov Kairat – Senior Lecturer, Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi ave., 71/23, Almaty, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 11.05.2022

ПАМЯТЬ

Наурызбаев Кабдуш Жумагазиевич как эталон "Понимания Математики"[1]

Н. Темиргалиев

Есть такое глубокое и неуловимое, но присутствие или отсутствие чего есть явление вполне ощутимое, состояние личности "Понимание Математики". Таковыми были Ибатолла Акбергенов и Садуакас Бокаев, и больше никого до их уничтожения НКВД в 1938 году. Вследствие этой интеллектуальной трагедии с 1938 года до начала 60-х годов у казахов был дефицит "Понимающих Математику", что отражалось в учебном процессе и качестве научных результатов. В начале 60-х годов XX века в Алма-Ату приехал Кабдош Жумагазиевич Наурызбаев – окончил Механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и аспирантуру Математического института имени В.А. Стеклова АН СССР с защитой кандидатской диссертации.

Кабдуш Жумагазиевич Наурызбаев (10.XII.1934-29.III.2007) ушел из жизни, если говорить языком его молодости, находясь на "боевом посту" прервал лекцию, пообещав своим студентам дочитать потом, которая, увы, оказалась последней ...

Не стало одного из образованнейших людей Казахстанского общества, качественно поредевшего в эти три десятилетия Независимости.

Ушел из жизни человек, известный своей порядочностью и принципиальностью.

Уже в начале жизни судьба отнеслась к нему благосклонно на мальчике, юноше и молодом мужчине Кабдуше была реализована вся досоветская (или, как раньше говорили, дореволюционная) и советская система образования и науки в самых лучших своих проявлениях: учился в школе Ыбырая Алтынсарина, золотая медаль которой открыла ему путь в Московский университет на Механико-математический факультет, затем аспирантура в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР в Отделе теории функций.

Период студенчества пришелся на послевоенный подъем всей советской науки, среди сокурсников Кабдуша Жумагазиевича много имен, продолживших славные достижения и традиции Московской математической школы, заложенные Н.Н. Лузиным и Д.Ф. Егоровым.

Аспирантуру Кабдуш Жумагазиевич проходил под руководством выдающегося математика Сергея Михайловича Никольского, особого Академика АН СССР и РАН, который всегда понимал прорывы, решительно и эффективно поддерживал (что автор этих строк знает по себе).

[1]Этим Журнал открывает рубрику ПАМЯТЬ о математиках, оставивших неизгладимый след в Интеллектуальной истории Казахстана.

Свои московские связи Кабдуш Жумагазиевич никогда не терял, бережно сохранял, впитывал в себя и переосмысливал различные идеи и течения бурной многоцветной московской математической жизни.

В начале шестидесятых годов высокообразованный, даже с уникальной и по тем, да и по нынешним временам тоже, математической подготовкой, полный творческих замыслов Кабдуш Жумагазиевич со своей супругой Светланой Амангалиевной возвращается на родину в Алма-Ату.

Алма-Ата шестидесятых ... Красивейшая природа, мягкий климат, налаживающаяся жизнь, отбор в студенты (и не только) единственно по способностям и подготовке, качественные учебные программы, огромное желание учиться в сочетании с невозможностью иного пути к диплому, особая творческая обстановка во всех сферах интеллектуальной жизни: литературе и искусстве, музыке, науке - гуманитарной, технической, фундаментальной ...

Тогда еще можно было рассчитывать только на свои личные достижения, "назначения" в творчестве пришли позже.

Зарождение особой столичной общности людей со своим неповторимым "Алма-Атинским шармом", с восточным, точнее казахским национальным оттенком, облагороженной качественным образованием.

Именно в такую среду органически вписались супруги Наурызбаевы. Вписались, что, впрочем, тоже немаловажно, и не только вписались, но и со своим весомым вкладом.

Светлана Амангалиевна окончила в Москве Государственный институт театрального искусства им. А. Луначарского по специальности "педагог-хореограф". В Алма-Ате, как результат её полнейшей высококвалифицированной самоотдачи, достигла выдающихся достижений - её воспитанники уже давно сияют на самых престижных подмостках практически всех стран мира.

К.Ж. Наурызбаев сразу же становится в один ряд с самыми видными математиками столицы, да и Казахстана в целом, и таковым остается до конца своих дней. А теперь в истории математики Казахстана, навечно ...

Уже с первых дней алма-атинской жизни Кабдуш Жумагазиевич начал вносить свой вклад в математическую составляющую системы Академии наук Казахской ССР. Не говоря о его глубоких математических достижениях тех лет, ведь даже простое понимание, в изначальном смысле этого слова, основных определений типа пространств Соболева, требует действительного усвоения полного курса Анализа и тогда и, тем более, сейчас, – и это одним из первых он принес в Алма-Ату. Неимоверное количество его времени отнимала организационная рутина, – всякие комиссии и комитеты не обходились без участия Кабдуша Жумагазиевича.

Одновременно работал в Казахском государственном университете на Кафедре уравнений математической физики.

Семинар в КазГУ К.Ж. Наурызбаева того периода по своей значимости для развития математической науки и образования в Казахстане был как бы своеобразным "Филиалом Мехмата МГУ и Отдела теории функций МИАН СССР".

Автор этих строк является воспитанником этого Семинара, по направлению Кабдуша Жумагазиевича ставшего воспитанником Московской математической школы. В начале семидесятых Қабдош-аға получает приглашение Казахского политехнического института возглавить Кафедру прикладной математики.

Қабдош-аға с большим энтузиазмом – тогда ему еще не было и сорока лет – проводит новую для инженерно-технических специальностей Казахстана громадную работу по математическому обеспечению этой области Системы высшего образования Казахстана.

Многочисленные научные и методические семинары по содержанию технического математического образования с выходом на инженерно-технические разработки весьма плодотворно влияют на общую подготовку кадров как во флагмане технического образования – Казахского политехнического института, так и в этой части Системы образования в целом.

Отдав почти два десятилетия системе технического образования, Кабдуш Жумагазиевич в начале девяностых годов по приглашению уже полностью переходит на Математический факультет Казахского национального университета имени аль-Фараби, где в начале своего пути был на половине ставки. Уже до конца жизни... Здесь опять занимался математическими проблемами, но уже профессионального университетского образования, являясь руководящим звеном Семинара Кафедры функционального анализа и теории вероятностей, на котором были в деталях разработаны взаимно согласованные Программы по Теории меры и интеграла Лебега, Теории вероятностей и Функционального анализа с одновременной подготовкой высококвалифицированных специалистов.

Как это отмечалось выше, в качестве воспитанника досоветской и советской Системы образования и науки в самых лучших их проявлениях, Кабдуш Жумагазиевич болезненно воспринимал систематическую ломку сложившихся традиций, всеми возможными средствами старался ослабить разрушительную составляющую поспешных неподготовленных нововведений: подготовкой и изданием учебников по действительному и функциональному анализу, специально рассчитанных на малое количество часов, да и много ещё чего позитивного на его счету.

Таковы основные вехи жизненного пути Қабдош-аға.

На всех этапах эта была очень содержательная жизнь.

Во-первых, высокий профессионализм. Автору этих строк доводилось много лет, фактически до последних месяцев его жизни, вести совместный Научный семинар. Его комментарии были всегда глубоки и по-существу. Его одобрение было воодушевляющим, поскольку Қабдош-аға никогда не разбрасывался похвалами.

Разговоры о его докторской он не воспринимал, слишком настойчивых резко осаживал. В свою бытность в ВАКе автор этих строк был уполномочен доложить о присвоении Кабдушу Жумагазиевичу звания профессора. Ни у кого из членов не возникло ни малейшего сомнения. Точно также никто не сомневался в том, что профессор К.Ж. Наурызбаев достоин учёной степени доктора наук, противился один Қабдош-аға.

Как-то проговорился, что ему будет неловко перед сокурсниками,- докторский уровень он мерил не постсоветскими мерками, а высокими требованиями своих мехматовских времен, когда действовала статистика МГУ: "Из десяти студентов - один кандидат, из десяти кандидатов - один доктор". Много раз подать на профессора в ВАК СССР его уговаривали маститые московские профессора, он так и не дал своего согласия.

Доктором сознательно не стал, но ВАКовским профессором он был, конечно, истинным. Участвовал без исключения во всех комиссиях, комитетах и других организационных структурах научно-методического содержания. И всегда имел собственное, высокопрофессиональное мнение, которое умел твердо, но бережно донести по назначению.

В особенности не терпел глупости, а к тому, что называется "мракобесием", при всей своей врожденной интеллигентности, относился резко и даже безжалостно. Помнится его резкое выступление против "восточной физики" - была такая группа авторов школьного учебника, - взамен, как они называли, "физики европейской".

Разве забудется его яркий, как вспышка молнии, призыв "Вперед к Киселеву!" в защиту школьного математического образования: убедительные слова, отточенные фразы, безупречная логика и практические рекомендации.

Қабдош-аға был полномочным представителем казахского народа в области истории, культуры, искусства, традиций, в общем всего гуманитарного. Много раз приходилось слышать, как Қабдош-аға "просвещал" по этим разным темам представителей других национальностей, многие из которых были далеко не дилетантами в этих вопросах, и поражался, когда сугубо казахские национальные факты увязывались с особенностями культуры собеседника.

Қабдош-аға был глубоко человечен, - находил нужные слова утешения в несчастье, умел радоваться счастью других.

Қабдош-аға был прекрасным собеседником, - с ним всегда было интересно обсуждать самые разные вопросы, как правило, с большой пользой для другого участника разговора (к таковым автор этих строк относит и себя).

Словом, можно было бы повторить гамлетовское "Он человек был, человек во всем; Ему подобных мне уже не встретить".

Ушел из жизни замечательный человек - Кабдуш Жумагазиевич Наурызбаев: семья потеряла главу, жена Светлана - мужа, дети Мурат и Асет - отца, внуки Арман и Бижан - ата, родственники - опору, друзья - Друга, ученики - Учителя, Математика - одного из своих ярких представителей, Государство - одного из своих умнейших граждан, Страна - одного из своих истинных патриотов.

Вечная память!

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2022. 2(139)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 81-б. Шартты б.т. - 9,36.
Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: http://bulmathmc.enu.kz/
Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген:
http://bulmathmc.enu.kz/

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды