ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№2(135)/2021

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады
Published 4 times a year
Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2021
Nur-Sultan, 2021
Нур-Султан, 2021

БАС РЕДАКТОРЫ

Темірғалиев Н.*, ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*

Бас редактордың орынбасары	**Жұбанышева А.Ж.** *PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
Бас редактордың орынбасары	**Наурызбаев Н.Ж.** *PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.	*PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция*
Алексеева Л.А.	*ф.-м.ғ.д., проф., ҚР БжҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан*
Алимхан Килан	*PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
Бекжан Турдыбек	*PhD, проф., ҚХР Шынжан университеті, Шынжан, КНР*
Бекенов М.И.	*ф.-м.ғ.к., доцент,Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
Боранбаев С.Н.	*ф.-м.ғ.к., профессор, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
Гогинава У.	*ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия*
Голубов Б.И.	*ф.-м.ғ.д., проф., Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет) Долгопрудный, Ресей*
Зунг Динь	*ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Въетнам ұлттық университеті, Ханой, Въетнам*
Ибраев А.Г.	*ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
Иванов В.И.	*ф.-м.ғ.д., проф., Тула мемлекеттік университеті, Тула, Ресей*
Иосевич А.	*PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ*
Кобельков Г.М.	*ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей*
Курина Г.А.	*ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей*
Марков В.В.	*ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей*
Мейрманов А.М.	*ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей*
Смелянский Р.Л.	*ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетъі, Мәскеу, Ресей*
Умирбаев У.У.	*ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ*
Холщевникова Н.Н.	*ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей*
Шмайссер Ханс-Юрген	*Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия*

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_ math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.
№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

© Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

EDITOR-IN-CHIEF

Nurlan Temirgaliyev
Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief	**Aksaule Zhubanysheva** *PhD, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan*
Deputy Editor-in-Chief	**Nurlan Nauryzbayev** *PhD, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan*

Editorial board:

Evgueni Abakumov	*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee Paris, France*
Lyudmila Alexeyeva	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling Ministry of Education and Science Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*
Alexander Iosevich	*PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA*
Alimhan Keylan	*PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan*
Bekzhan Turdybek	*PhD, Prof., Shenzhen University, SZU, Chinese*
Makhsut Bekenov	*Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof. L.N. Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan*
Seilkhan Boranbayev	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., L.N. Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan*
Ushangi Goginava	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof. Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*
Boris Golubov	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and Technology (State University) Dolgoprudnyi, Russia*
Dũng Dinh	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute, Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*
Askar Ibrayev	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., L.N. Gumilyov ENU Nur-Sultan, Kazakhstan*
Valerii Ivanov	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, Russia*
Georgii Kobel'kov	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
Galina Kurina	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh, Russia*
Vladimir Markov	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
Anvarbek Meirmanov	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia*
Ruslan Smelyansky	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
Ualbay Umirbaev	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Wayne State University,Detroit, USA*
Natalya Kholshchevnikova	*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State Technological University "Stankin", Moscow, Russia*
Hans-Juergen Schmeisser	*Dr. habil., Prof., Friedrich-Shiller University Jena, Germany*

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008.
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.
Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

© L.N. Gumilyov Eurasian National University

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Темиргалиев Н., *д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*

Зам. главного редактора	**Жубанышева А.Ж.** *PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
Зам. главного редактора	**Наурызбаев Н.Ж.** *PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.	*PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция*
Алексеева Л.А.	*д.ф.-м.н., проф., Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан*
Алимхан Килан	*PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
Бекжан Турдыбек	*PhD, проф., Шынжанский университет КНР, Шынжан, КНР*
Бекенов М.И	*к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
Боранбаев С.Н.	*д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
Гогинава У.	*д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия*
Голубов Б.И.	*д.ф.-м.н., проф., Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия*
Зунг Динь	*д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам*
Ибраев А.Г.	*д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
Иванов В.И.	*д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, Тула, Россия*
Иосевич А.	*PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США*
Кобельков Г.М.	*д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
Курина Г.А.	*д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
Марков В.В.	*д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*
Мейрманов А.М.	*д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*
Смелянский Р.Л.	*д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
Умирбаев У.У.	*д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США*
Холщевникова Н.Н.	*д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия*
Шмайссер Ханс-Юрген	*Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия*

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_ math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.
Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.
Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

© Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, №2(135)/2021

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer science. Mechanics series, №2(135)/2021

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, №2(135)/2021

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2021, том 135, №2, 6-11 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: **27.25.17**

T. Tepnadze

The Artic University of Norway, Narvik, Norway.a
(E-mail: tsitsinotepnadze@gmail.com)

Cesàro means of negative order of the one-dimensional Vilenkin-Fourier series

Abstract: In [1] has been proved some inequalities related to the approximation properties of Cesàro means of negative order of the one-dimensional Vilenkin-Fourier series. These inequalities allow one to obtain a sufficient condition for the convergence of Cesàro means of Vilenkin-Fourier series in the L^p- metric in the term of modulus of continuity. In this paper, we will prove the sharpness of these conditions, in particular we find a continuous function under some condition of modulo of continuity, for which Cesàro means of Vilenkin-Fourier series diverge in the L^p- metric.

Keywords: Inequalities, Approximation, Vilenkin system, Vilenkin-Fourier series, Cesàro means, Convergence in norm.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2021/2.1

2000 Mathematics Subject Classification: 42C10, 42B25.

1. INTRODUCTION

Let N_+ denote the set of positive integers, $N := N_+ \cup \{0\}$. Let $m := (m_0, m_1, ...)$ denote a sequence of positive integers not less then 2. Denote by $Z_{m_k} := \{0, 1, ..., m_k - 1\}$ the additive group of integers modulo m_k. Define the group G_m as the complete direct product of the groups Z_{m_j}, with the product of the discrete topologies of Z_{mj}'s.

The direct product of the measures

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \qquad (j \in Z_{m_k})$$

is the Haar measure on G_m with $\mu(G_m) = 1$. If the sequence m is bounded, then G_m is called a bounded Vilenkin group. In this paper we will consider only bounded Vilenkin groups. The elements of G_m can be represented by sequences $x := (x_0, x_1, ..., x_j, ...)$, $\left(x_j \in Z_{m_j}\right)$. The group operation $+$ in G_m is given by

$$x + y = ((x_0 + y_0)\, mod\; m_0, ..., (x_k + y_k)\, mod\; m_k, ...),$$

where $x := (x_0, ..., x_k, ...)$ and $y := (y_0, ..., y_k, ...) \in G_m$. The inverse of $+$ will be denoted by $-$. For every $x \in G_m$ we denote $|x| := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{M_{j+1}}, \left(x_j \in Z_{m_j}\right)$.

It is easy to give a base for the neighborhoods of G_m:

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m | y_0 = x_0, ..., y_{n-1} = x_{n-1}\}$$

for $x \in G_m$, $n \in N$. Define $I_n := I_n(0)$ for $n \in N_+$.

If we define the so-called generalized number system based on m in the following way: $M_0 := 1,\ M_{k+1} := m_k M_k \ \ (k \in N)$, then every $n \in N$ can be uniquely expressed as $n = \sum\limits_{j=0}^{\infty} n_j M_j$, where $n_j \in Z_{m_j} \ \ (j \in N_+)$ and only a finite number of n_j 's differ from zero. We also use the following notation: $|n| := \max\{k \in N : n_k \neq 0\}$ (that is , $M_{|n|} \leq n < M_{|n|+1}$).

Next, we introduce G_m on an orthonormal system, which is called Vilenkin system. At first define the complex valued functions $r_k(x) : G_m \to C$, the generalized Rademacher functions, in this way:

$$r_k(x) := \exp \frac{2\pi i x_k}{m_k} \quad \left(i^2 = -1,\ x \in G_m,\ k \in N\right).$$

Now we define the Vilenkin system $\psi := (\psi_n : n \in N)$ on G_m as follows:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x), \qquad (n \epsilon N).$$

In particular, we call the system the Walsh-Paley system if $m = 2$.

The Vilenkin system is orthonormal and complete in $L^1(G_m)$ (see [2]).

Now, introduce analogues of the usual definitions of the Fourier analysis. If $f \in L^1(G_m)$ we can establish the following definitions in the usual way:

Fourier coefficients:

$$\widehat{f}(k) := \int\limits_{G_m} f \overline{\psi_k} d\mu, \qquad (k \in N),$$

partial sums:

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k) \psi_k, \quad (n \in N_+ ,\ S_0 f := 0),$$

Dirichlet kernels:

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k, \qquad (n \in N_+).$$

The $(C, -\alpha)$ means of the Vilenkin-Fourier series are defined as

$$\sigma_n^{-\alpha}(f, x) = \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-\alpha} \widehat{f}(k) \psi_k(x),$$

where

$$A_0^{\alpha} = 1, \qquad A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)...(\alpha+n)}{n!}.$$

It is well Known that [3]

$$A_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1}.$$

$$A_n^{\alpha} - A_{n-1}^{\alpha} = A_n^{\alpha-1}.$$

$$A_n^{\alpha} \sim n^{\alpha}.$$

The norm of the space $L^p(G_m)$ is defined by

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_{G_m} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty).$$

Denote by $C(G_m)$ the class of continuous functions on the group G_m, endoved with the supremum norm.

For the sake of brevity in notation, we agree to write $L^{\infty}(G_m)$ instead of $C(G_m)$.

Let $f \in L^p(G_m), 1 \leq p \leq \infty$. The expression

$$\omega\left(\frac{1}{M_n}, f\right)_p = \sup_{h \in I_n} \|f(\cdot - h) - f(\cdot)\|_p$$

is called the modulus of continuity.

The problems of summability of partial sums and Cesàro means for Walsh-Fourier series were studied in [4], [5]- [12], [13]. In his monography [14] Zhizhinashvili investigated the behavior of Cesàro method of negative order for trigonometric Fourier series in detail. Goginava [5] studied analogical question in case fo the Walsh system. The analogous results in the case of the Vilenkin-Fourier series have been studied in [1]. In particular, the following was proved:

Theorem T. *[1] Let* f *belong to* $L^p(G_m)$ *for some* $p \in [1, \infty]$ *and* $\alpha \in (0,1)$*. Then for any* $M_k \leq n < M_{k+1}$ $(k, n \in N)$ *the inequality*

$$\left\|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\right\|_p \leq c(p, \alpha)\left\{M_k^{\alpha}\omega(1/M_{k-1}, f)_p + \sum_{r=0}^{k-2}\frac{M_r}{M_k}\omega(1/M_r, f)_p\right\}$$

holds true.

This result allows one to obtain the condition which is sufficient for the convergence of the means $\sigma_n^{-\alpha}(f,x)$ to $f(x)$ in the L^p- metric.

Corollary 1. [1] Let f belong to $L^p(G_m)$ for some $p \in [1, \infty]$ and let $\alpha \in (0,1)$. If

$$\omega\left(f, \frac{1}{M_{k-1}}\right)_p = o\left(\frac{1}{M_k^{\alpha}}\right),$$

then

$$\left\|\sigma_n^{-\alpha}(f) - f\right\|_p \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

In this paper, we are going to prove the sharpness of Corollary 1. In particular, the following Theorem holds:

Theorem 1. *For every* $\alpha \in (0,1)$, *there exists a function* $f \in C(G_m)$ *for which*

$$\omega\left(f, \frac{1}{M_{k-1}}\right)_C = O\left(\frac{1}{M_k^{\alpha}}\right),$$

and

$$\limsup_{k \to \infty}\left\|\sigma_{M_k}^{-\alpha}(f) - f\right\|_1 > 0.$$

Since for a continuous function we have proved divergence in the space L_1, we can conclude the following corollary:

Corollary 2. For every $\alpha \in (0,1)$, there exists a function $f \in C(G_m)$, for which

$$\omega\left(f, \frac{1}{M_{k-1}}\right)_p = O\left(\frac{1}{M_k^{\alpha}}\right),$$

and

$$\limsup_{k \to \infty}\left\|\sigma_{M_k}^{-\alpha}(f) - f\right\|_p > 0, \quad \text{for some } p \in [1, \infty].$$

2. Proofs of the main results

Proof of Theorem 1.
We define the function

$$f\left(x\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{M_{j}^{\alpha}}f_{j}\left(x\right),$$

where

$$f_{j}\left(x\right)=\rho_{j}\left(x\right)=\exp\frac{2\pi ix_{j}}{m_{j}}.$$

First, we prove that

$$\omega\left(f,\frac{1}{M_{n}}\right)_{C}=O\left(\frac{1}{M_{n}^{\alpha}}\right). \tag{1}$$

Since

$$\left|f_{j}\left(x-t\right)-f_{j}\left(x\right)\right|=0,\qquad j=0,1,...,n-1,\qquad t\in I_{n}$$

we get

$$\left|f\left(x-t\right)-f\left(x\right)\right|\leq\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{M_{j}^{\alpha}}\left|f_{j}\left(x-t\right)-f_{j}\left(x\right)\right|$$

$$+\sum_{j=n}^{\infty}\frac{2}{M_{j}^{\alpha}}\leq\frac{c}{M_{n}^{\alpha}}.$$

After we showed that 1 holds, next, we shall prove that $\sigma_{M_k}^{-\alpha}\left(f\right)$ diverges in the L^1 metric. It is clear that

$$\left\|\sigma_{M_k}^{-\alpha}\left(f\right)-f\right\|_{1}\geq\left|\int\limits_{G_m}\left[\sigma_{M_k}^{-\alpha}\left(f,x\right)-f\left(x\right)\right]\psi_{M_k}\left(x\right)d\mu\left(x\right)\right| \tag{2}$$

$$\geq\left|\int\limits_{G_m}\sigma_{M_k}^{-\alpha}\left(f,x\right)\psi_{M_k}\left(x\right)d\mu\left(x\right)\right|-\left|\widehat{f}\left(M_k\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{A_{M_k}^{-\alpha}}\sum_{i=0}^{M_k}A_{M_k-i}^{-\alpha}\widehat{f}\left(i\right)\int\limits_{G_m}\psi_{i}\left(x\right)\psi_{M_k}\left(x\right)d\mu\left(x\right)\right|$$

$$-\left|\widehat{f}\left(M_k\right)\right|=\frac{1}{A_{M_k}^{-\alpha}}\left|\widehat{f}\left(M_k\right)\right|-\left|\widehat{f}\left(M_k\right)\right|.$$

We have

$$\widehat{f}\left(M_k\right)=\int\limits_{G_m}f\left(x\right)\bar{\psi}_{M_k}\left(x\right)d\mu\left(x\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{M_{j}^{\alpha}}\int\limits_{G_m}\rho_{j}\left(x\right)\bar{\psi}_{M_k}\left(x\right)d\mu\left(x\right)=\frac{1}{M_{k}^{\alpha}}.$$

So, we can write

$$\left\|\sigma_{M_k}^{-\alpha}\left(f\right)-f\right\|_{1}\geq c\left(\alpha\right). \tag{3}$$

Theorem 1 is proved.

3. CONCLUSION

Theorem 1 gives the L^p norm estimation of the difference between Cesàro means of negative order of the one-dimensional Vilenkin-Fourier Series and functions from L^p. This inequality allows one to obtain a sufficient condition for the convergence of the Cesàro means to $f(x)$ in the L^p- metric, as discussed in Corollary 1. In this paper we proved the sharpness of Corollary 1. In particular, for a continuous function, we showed divergence in the space L_1, from which follows divergence in the space L_p, with $p \in [1,\infty]$.

References

1 Tepnadze T. On the approximation properties of CesÃ ro means of negative order of Vilenkin-Fourier series // Studia Sci. Math. Hung. –2016. –Vol.53, №4. –P.532-544.

2 Agaev G.N., Vilenkin N.Ya., Dzhafarli G.M., and Rubinshtejn A.I. Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups. –Baku: Ehlm, 1981 [in Russian].

3 Zygmund A. Trigonometric series. Vo1.1. –Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

4 Fine N.J. Cesàro summability of Walsh-Fourier series // Proc. Nat.Acad. Sci. U.S.A. –1995. –Vol. 41. –P. 558-591.

5 Goginava U. On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh-Fourier series // J. Approx. Theory. –2002. –Vol.115, №1. –P.9-20.

6 Goginava U. Uniform convergence of Cesàro means of negative order of double Walsh-Fourier series // J. Approx. Theory 2003. –Vol.124, №1. –P 96-108.

7 Goginava U., Nagy K. On the maximal operator of Walsh-Kaczmarz-Fejér means // Czechoslovak Math. J. –2011. –Vol. 61(136), №3. –P. 673-686.

8 Gát G., Goginava U. A weak type inequality for the maximal operator of (C,α) -means of Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system // Acta Math. Hungar. –2009. –Vol. 125, №1-2. –P. 65-83.

9 Gát G. and Nagy K., Cesàro summability of the character system of the p-series field in the Kaczmarz rearrangement // Anal. Math. –2002. –Vol. 28, №1. –P. 1-23.

10 Nagy K. Approximation by Cesàro means of negative order of Walsh-Kaczmarz-Fourier series // East J. Approx. –2010. –Vol.16, №3. –P. 297-311.

11 Simon P., Weisz F. Weak inequalities for Cesàro and Riesz summability of Walsh-Fourier series // J. Approx. Theory. –2008. –Vol. 151, №1. –P. 1-19.

12 F. Schipp, Über gewisse Maximaloperatoren // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. –1975. –Vol. 18. –P. 189-195.

13 Tevzadze V. I. Uniform $(C,-\alpha)$ summability of Fourier series with respect to the Walsh-Paley system // Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.). –2006. –Vol. 22№1ю –P. 41–61 (electronic).

14 Zhizhiashvili L.V. Trigonometric Fourier series and their conjugates. Tbilisi, 1993 (Russian); English transl.: Kluwer Acad. publ, 1996.

15 Golubov B. I., Efimov A.V., and Skvortsov V.A. Series and transformation of Walsh. Moscow: Nauka, 1987 [In Russian]; English translation, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

16 Goginava U. On the uniform convergence of Walsh-Fourier series // Acta Math. Hungar. –2001. –Vol. 93, №1-2. –P. 59-70.

17 Schipp F., Wade W.R., Simon P. and Pál J., Walsh Series, Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Hilger, Bristol, 1990.

Т. Тепнадзе

Норвегия Арктикалық университеті, Нарвик, Норвегия

Бір өлшемді Виленкин-Фурье қатарының теріс ретті Чезàро орташалары

Аннотация: [1]-де бір өлшемді Виленкин-Фурье қатарларының теріс ретті Чезàро орташаларының жуықтау қасиеттерімен байланысты кейбір теңсіздіктер дәлелденген. Бұл теңсіздіктер L^p - метрикасында үзіліссіздік модульдері терминдерінде Виленкин - Фурье қатарының Чезàро орташаларының жинақталуының жеткілікті шартын алуға мүмкіндік береді. Бұл мақалада біз осы шарттың дәл екенін көрсетеміз, дербес жағдайда Виленкин-Фурье қатарының Чезаро орталары L^p метрикасында жинақталмайтындай үзіліссіздік модулі белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын үзіліссіз функция құрылады.

Түйін сөздер: Теңсіздіктер, жуықтау, Виленкин жүйесі, Виленкин-Фурье қатары, Чезàро орташаалары , норма бойынша жинақтылық.

Т. Тепнадзе

Арктический университет Норвегии, Нарвик, Норвегия

Средние Чезàро отрицательного порядка одномерного ряда Виленкина-Фурье

Аннотация: В [1] доказаны некоторые неравенства, связанные с аппроксимационными свойствами средних Чезàро с отрицательным порядком одномерных рядов Виленкина-Фурье. Эти неравенства позволяют получить достаточное условие сходимости средних Чезàро рядов Виленкина – Фурье в L^p -метрике в терминах модуля непрерывности. В данной статье мы докажем точность этого условия, в частности найдена непрерывная функция с некоторыми условия на ее модуль непрерывности, для которой средние Чезаро рядов Виленкина-Фурье расходятся в метрике L^p .

Ключевые слова: Неравенства, аппроксимация, система Виленкина, ряд Виленкина-Фурье, средние Чезàро, сходимость по норме.

References

1 Tepnadze T. On the approximation properties of CesÃ ro means of negative order of Vilenkin-Fourier series. Studia Sci. Math. Hung. 53(4), 532-544 (2016).

2 Agaev G.N., Vilenkin N.Ya., Dzhafarli G.M., and Rubinshtejn A.I. Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups (Baku, Ehlm, 1981) [in Russian].

3 Zygmund A. Trigonometric series. Vo1.1. (Cambridge, Cambridge University Press, 1959).

4 Fine N.J. Cesàro summability of Walsh-Fourier series. Proc. Nat.Acad. Sci. U.S.A. 41, 558-591 (1995).

5 Goginava U. On the approximation properties of Cesàro means of negative order of Walsh-Fourier series. J. Approx. Theory. 115(1), 9-20 (2002).

6 Goginava U. Uniform convergence of Cesàro means of negative order of double Walsh-Fourier series. J. Approx. Theory. 124(1), 96-108 (2003).

7 Goginava U., Nagy K. On the maximal operator of Walsh-Kaczmarz-Fejér means. Czechoslovak Math. J. 61(136), 3, 673-686 (2011).

8 Gát G., Goginava U. A weak type inequality for the maximal operator of (C,α) -means of Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system. Acta Math. Hungar. 125(1-2), 65-83 (2009).

9 Gát G. and Nagy K., Cesàro summability of the character system of the p-series field in the Kaczmarz rearrangement. Anal. Math. 28(1), 1-23 (2002).

10 Nagy K. Approximation by Cesàro means of negative order of Walsh-Kaczmarz-Fourier series. East J. Approx. 16(3), 297-311 (2010).

11 Simon P., Weisz F. Weak inequalities for Cesàro and Riesz summability of Walsh-Fourier series. J. Approx. Theory. 151(1), 1-19 (2008).

12 F. Schipp, Über gewisse Maximaloperatoren. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. 18, 189-195 (1975).

13 Tevzadze V. I. Uniform $(C,-\alpha)$ summability of Fourier series with respect to the Walsh-Paley system. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.). 22(1), 41–61 (2006) (electronic).

14 Zhizhiashvili L.V. Trigonometric Fourier series and their conjugates. (Tbilisi, 1993 [in Russian], English transl.: Kluwer Acad. publ, 1996).

15 Golubov B. I., Efimov A.V., and Skvortsov V.A. Series and transformation of Walsh. (Moscow, Nauka, 1987 [In Russian], English translation, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991).

16 Goginava U. On the uniform convergence of Walsh-Fourier series. Acta Math. Hungar. 93(1-2), 59-70 (2001).

17 Schipp F., Wade W.R., Simon P. and Pál J., Walsh Series, Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. (Hilger, Bristol, 1990).

Information about author:

Tepnadze T. – PhD student at the Faculty of Science and Technology, Department of Computer Science and Computational Engineering, The Artic University of Norway, Campus Narvik, P.O. Box 385, N-8505, Narvik, Norway.a

Tepnadze T. – Ғылым және технология факультетінің PhD студенті, Компьютерлік ғылымдар және Есептеу инженерия департаменті, Норвегия Арктикалық университеті, Narvik кампусы, P.O. Box 385, N-8505, Нарвик, Норвегия.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2021, том 135, №2, 12-63 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.23; 24.01.45; 27.01.33**

Н. Темірғалиев

Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru)

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты 2019 жылы» ғылыми, ғылыми-әдістемелік және ұйымдастырушылық есебі (III бөлім)

Аннотация: Мақалада *Синопсис*-Мазмұн түріндегі "Математикалық анализ" оқулығының мазмұны берілген. Дәл айтқанда, әр пункт пен параграф бір жағынан тақырыптың мәні мен ондағы идеяларды дамыту тұрғысынан егжей-тегжейлі баяндалып берілсе, екінші жағынан, мүмкіндігінше қысқа және мәліметті түрде келтірілген. Оқулықтың *Синопсис*-Мазмұны оқырманның түйсік деңгейінде сақталуы керек қалдық білімді құрайды.

Түйін сөздер: Математикалық анализ, *Синопсис*-Мазмұн, математикалық құрылым түрлері, математикалық дәлелдеу мәдениеті, математикалық жетілу.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2021/2.2

2000 Mathematics Subject Classification: 97E10; 97-02.

§ 8. «Математикалық анализ» (*өңделген және толықтырылған екінші басылым*) оқулығының Синопсис түріндегі мазмұны.

Математикалық анализ оқулығының алғашқы басылымы 3 томға бөлініп 1120 бет құраса [1-3], екінші басылымының жалпы көлемі 1900 беттен асып жығылады [4]. Бұл оқулық үш авторлық оқулықтан тұратын А бағдарламасы атты "Теориялық математка және ғылыми есептеулер институтының (ТМжҒЕИ) жеткілікті білімді математикалық ортасыз-ақ "математиканы түсіну" аясындағы жоғары білікті мамандарды дайындауды қамтамасыз ететін Қазақстан студенттері мен жас оқытушыларына арналған тікелей қолданудағы оқулықтар кешені"-нің алғашқысы. Мұндағы мақсат үзіліссіз математиканың алғашқы ұғымдары негізінде тереңінен түсіндіру.

Біріншіден, әдетте әртүрлі себептермен айтылмаған жайттарды ғылыми орта толтыратын болады деп қабылданса, мұнда бұл қағида орындалмайды деп есептеледі.

Екіншіден, байқауымша, тіпті математиканың мектеп оқулығының бастауыш сыныптарынан бастап авторлардың өздері талай күшпен игерген математиканың алғашқы ұстамдарын біліп пе, білмей ме, әйтеуір түсіндірмей қолдана береді де, сонымен оқулық мәтінін түсінуге көптеген кедергі тудырады.

Оқулық 21 тарауға 156 параграфқа 887 пунктке бөлінген. Әдетте, қазірге дейінгі оқулықтарда пункт пен параграф атаулары өте қысқа, жинақы, бірақ көбіне тиісті мәліметсіз. Бұл оқулықтың ерекшелігі пунктер мен параграфтардың мазмұны, әдістемесі мен өзіндік ерекшеліктері жинақы ашылып, синопсис атты түрде берілген. Мұндағы ой оқулықты игеру үстінде пункттің синопсис аталуынан-ақ тақырып не туралы, қандай әдістемемен ашылған, нені білу және ойда сақтау керектігі туралы бастапқы мәлімет беру. Сонан соң, пунктегі тексте синопсис мәліметі кеңінен баяндалады. Осындай пункт-пунктпен өрнектелген мәлімет түсінуге көп жеңілдік әкеледі деген ойдамыз.

Математикалық анализ пәні негізгі ұғымдарға, оларды дәл анықтамалар түрінде енгізуге, ұғымдар тілінде әртүрлі өзекті мәселелерді қоюға, сол қойылған мәселелердің жауап-шешімдерін теорема түрінде беруге, математика затын құрайтын дәлелдемелер, дәлелдеу мәдениетіне үйрету туралы математика әлеміне кіріспе болып табылады. Әрине кімге болса да ойында 1900 бетік бір-бірімен логикалық байланыс пен дамуда үйқастырылған біртұтыс мәтінді ойда сақтау қиын да, тіпті қажет те емес.

Математикалық анализ пәнінің негізгі мақсаты - математикалық жетілу мен керегінде ой түбінен шығатын, негізгі ұғымдар мен сол ұғымдар арасындағы байланыстар туралы қалдық білім атты жеткілікті білімнің болуы.

Мына синопсис түріндегі математикалық анализ мазмұнының өрнектелуін сол дәл қалдық білімнің жүйелі тізбесі деп түсінуге болады.

Біз білуімізше, бұрын-соңды математикалық әдебиетте кездеспеген, параграф пен пункт аттары синопсис түрінде осы оқулықта алғаш рет берілген. Негізгі анықтамалар мазмұнымен қойылған мәселелер бір жағынан қысқа, екінші жағынан мәліметті түрде баяндалған.

Қорытындылап айтқанда, математикалық анализ оқулығы мазмұнының осы уақытқа дейін әдебиетте кездеспеген синопсис түріндегі бұл берілуі мектеп оқушылары мен мұғалімдеріне, жоғарғы оқу орындарының ұстаздарына, студенттерге, жас оқытушыларға, ғылыми жұмыстарында математика құралдарын пайдаланушы кең қауымға пайдалы болады деген үміттеміз.

БІРІНШІ ТОМ

I ТАРАУ. МАТЕМАТИКАНЫҢ ЛОГИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫСЫ МЕН ТЕРМИНДЕР СӨЗДІГІ. САНДАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ-АЛГЕБРАЛЫҚ ЖӘНЕ САЛДАРЫМЕН БІРГЕ АКСИОМАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫ НЕГІЗІНДЕГІ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ДӘЛЕЛДЕУ МӘДЕНИЕТІ

§1. Математика құрылымының жалпы түсініктері және оны суреттейтін өзіндік тілінің жан-жақты талқылаулары

1. Өзара бөлек заттарды (нәрселерді) біріктіріп, бүтін бір заттай (нәрседей) қарастырғандағы жаңа зат (нәрсе) жиын, ал оның құрамындағы заттардың (нәрселердің) әрқайсысы сол жиынның элементі және солардың ішінде сандық жиын атты элементтері тек қана нақты сандар болатын математикалық анализ пәніндегі ерекше жиын

2. Жиын анықталмайтын алғашқы ұғым ретінде – математиканың ғылым ретіндегі ұғымдық аппаратында жетекші идеялар тек алдыңғыларына сүйенетін анықтамалар түрінде қабылданады, әрине, осы тізбеде жиын деп аталатын ең алғашқысының бар болуы

3. Математикалық таңбалар мен шартты белгілер – таңбалау жалпы өнер, не белгілеу өнері ғажайып құрал десе де болады, өйткені ол елес қызметін өзіне алады да ой жұмысын үдетеді. Белгілеулер жаңалықтар ашу үшін ыңғайлы болуы керек. Бұл көбінесе белгілеулер тереңде жатқан дүние құпияларын қысқа түрде бейнелегенде болады. Сонда ой-ізденіс қызметі таңғаларлық түрде қысқарады (Готфрид Лейбниц)

4. Символдық белгілеулер (символдар) және солар арқылы математикалық сөйлемдердің жазылуы – математикада ғасырлар бойы дами отырып қалыптасқан, символ деп аталатын арнайы құрылыстағы шартты белгілеулер арқылы тілдегі сөздерден сөйлем құрағандай толық математикалық сөйлемдердің символдық жазылулары

5. Квантор деп жиі кездесетін сөз бен сөйлемшелердің (сөз тіркестерінің) символдармен белгілеулері аталады – үлгі ретінде қарама-қарсы мағынадағы кез келген мен табылады сөздері сәйкес $\forall$ (ағылшын тіліндегі All сөзінің бірінші әрпінің төңкеріліп жазылуы) және $\exists$ (ағылшын тіліндегі Exist сөзінің бірінші әрпінің кері бағытта жазылуы) кванторларымен белгіленуі

6. Индекстермен жабдықталған әріптерді пайдалану қажеттілігі – математикада белгілеулерді қажет ететін объектілер саны шексіз көп, ал белгілеудің негізгі құралы болатын латын және грек, сиректеу готикалық алфавиттердегі әріптердің жалпы саны жүзден аспауында

7. Математикалық мағынада қолданылатын кей сөздердің түпнұсқасы – белгі, қасиет, ұғым не түсінік, өрнек, формула, тұжырым, шама тәрізді сөздердің лексикалық мағынасынан ерекшелендіретін математикалық кәсіби түсіндірмесі

8. «Анықтама» және оның математикадағы өзіндік ерекше орны – сөз деген белгі, ал ол нені белгілеп тұрғаны түсіндірме сөздікте берілгеніндей математикадағы негізгі қасиеттердің қабылданатын, бірақ ешқашан да дәлелденбейтін анықтама арқылы ерекшеленуі, аталуы, белгіленуі

9. Анықтаманың символдық жазылуы – сөзбен айтылған анықтаманы математикада дәл түсіну мен барлық мазмұнын аша және қажетті белгілеулерді енгізе отырып, нәтижелі қолдануды қамтамасыз ететін бірмәнді түрде жазылуы

10. Теңдік таңбасының әртүрлі мағыналары – тепе-теңдік, орындалатын не орындалмайтын тұжырым ретінде, теңдеуді анықтайтын шартты теңдік, анықтама ретінде, жаңа символды енгізу қызметінде

11. Теорема және оған кері теорема – шарт деп аталатын қасиеттен қорытынды деп аталатын қасиет шығатын құрылымдағы, қойылған сұраққа жауап беретін тұжырым және де ондағы шарт пен қорытындының орнын ауыстырғанда орындалатын теорема

12. «*Үшінші мүмкіншілік ешқашан да қарастырылмайды*» заңы мен соның негізіндегі «*кері жору*» атты дәлелдеу әдісі – әрқашанда тұжырымы мен $\bar{A}$ арқылы белгіленетін оған қарама-қарсы тұжырымның біреуі және солардың тек қана біреуі орындалауы деп қабылданған логикалық қағида және оның негізінде дәлелдеу керек қорытындыға қарама-қарсы тұжырым орындалады деп ұйғарудан теорема шартына немесе бұрын дәлелденген тұжырымға қайшы келу арқылы дәлелдеу әдістемесі

13. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ теоремасы – шарт деп аталатын қасиеттен қорытынды деп аталатын қасиеттің шығуы мен қорытындының орындалмауынан шарттың орындалмауының шығуының пара-парлығы

14. Әр теореманың «Қажетті» және «Жеткілікті» сөздерінің әрқайсысы арқылы оқылуы - $A \Rightarrow B$ теоремасының «В орындалуы үшін А тұжырымының орындалуының жеткіліктілігі» мен «А тұжырымының орындалуы үшін В тұжырымының орындалуының қажеттілігі» түріндегі өзара пара-пар екі оқылуы және де оқылудағы «жеткілікті» деген сөздің әдеттегі мағынасына сәйкес болып, талқылауды қажет етпеуі мен «қажетті» деген сөздің $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B \Rightarrow A$ теоремасының тікелей салдары болуы

15. «Критерий» атты теорема – тура және кері теоремалардың бір уақытта орындалуы және де оның құндылығының шарттарының бірінен-бірі алыс болуымен теорема тақырыбы болатын анықтаманың басқаша оқылуы болатын техникалық түрден ары қарай өсе беруі

16. Математикалық сөйлемнің жазылу түрлері – тек қана тілдік сөзбен, тек қана символдық түрде және сол екеуінің аралас түрінде жазылуы

17. Қарама-қарсы (кері) тұжырымдау ережесі – тұжырымды символдық түрде жазып, шарттағы сөйлемшелерді өзгертпей, бірақ $\forall$ және $\exists$ кванторларын өзара ауыстырып, қорытынды тұжырымды оған қарама-қарсы тұжырымға ауыстыру

18. Кері анықтама – қарама-қарсы тұжырым құру ережесі арқылы алынады да, жалпы қолданыста тікелей анықтамамен қатар жүріп, математиканың негізгі түйіндері жүйеленген анықтаманың өзін толық және терең түсінуді қамтамасыз етеді

19. Анықтаманың «атынан затына» және «затынан атына» бағыттарда қолданылуы – математикада орындалды деп қабылданған ұғымның аты аталғанда затындағы қасиеттерінің қолданысқа түсуі мен керісінше, атын дәлелдеу керек болған жағдайда затының әрбір қадамының орындалуын қамтамасыз етіп, мазмұнынан атына көшу

20. Математикалық білім алу кезеңінде саналы түсінуге жол салатын формалды және интуитивті екі құраушы – анықтама кері анықтамамен бірге, теорема қатаң түрде оқулықты толық оқу арқылы формалды игеріледі де, артынша сезім деңгейінде түпсанаға ұялайды

21. Математикалық ұғымдар мен терминдердің атауында ұлт тілінің жалпы мағыналы сөздерді қолданудың оң және теріс жақтары, оқулықтарда кездесетін «тірі» тілден алынған терминдердің әртүрлі тілдік ықпалдары – «үзіліссіздік» ұғымы бірмәнді математикадағы мағынаны берсе, «тізбек» сөзі математикадағы ұғымның кескінін бір қарағанда дұрыс

бергендей болғанымен, бірінен кейін бірі тізбектейді мағынасында дұрыс функция ұғымынан ауытқып кетеді, ал енді «ақырсыз аз шама», «мейілінше кішкене оң ε саны», «ақырсыз қосынды», «айқындалмаған функция» сияқты сөз тіркестері мүлдем басқа мағынаға бұрады

4. Жиын элементтерінің нүкте деп те аталу себептері

§2. Жиын берілулері мен белгілеулері және де оларға қолданылатын амалдар

1. Жиын құру әдістемелері – қайсібір қасиет не қасиеттерді қанағаттандыратын барлық нәрселерді (заттарды) бөліп алу мен берілген жиындарға амалдар қолдану арқылы

2. Жиын берілген қасиетті элементтердің жинағы ретінде және сол пайда болған жиынның, оны құрайтын элементтер мен элементтерді анықтайтын қасиеттердің символдық белгілеулері

3. Жиындарға қолданылатын амалдар – жиындардың бірігуі, қиылысуы, айырымы амалдарын сәйкес логиканың «кемінде бірінде – не», «әрқайсысында – және», «біріншісінде жатып, екіншісінде жатпаса» тәртіптері арқылы анықталуы

§3. Функция анықтамасы мен оның талқылаулары

1. Функцияның жалпы анықтамасы – анықталу және мәндер қабылданатын жиын деп аталатын берілген екі жиын арасындағы сәйкестік, тәуелділік, анықталу жиынының әр элементіне қолданылатын ереже, тәртіп, заң, амал, алгоритм ретінде

2. Функция анықтамасындағы үш элементтің бірі – функция аргументі немесе тәуелсіз айнымалысы деп аталатын анықталу жиынының кез келген элементін бейнелейтін символ

3. Функция анықтамасындағы үш элементтің келесісі – аргумент не тәуелсіз айнымалыға қолданылатын ереже, тәртіп, заң, амал, алгоритм және оның белгілеулері, нәтижесінде анықталу және мәндер қабылданатын жиындарының арасында орнатылған тәуелділік, сәйкестік

4. Функция анықтамасындағы үш элементтің соңғысы – функцияның мәні деп аталатын аргументтің әрбір мәніне ереже қолдану нәтижесінде мәндер қабылданатын жиыннан сәйкес қойылатын 0 де емес, 2 де емес, т.с.с. басқа да емес тек 1 ғана – жалғыз(!) мән

5. Функциялар теңдігі – анықталу жиындары ортақ екі функцияның аргументтің әрбір мәнінде сәйкес осы екі функциялар мәндерінің өзара тең болуы, яғни теңдік таңбасының бір қолданысы болатын тепе-теңдікті сақтауы

6. Табиғаты кез келген ортақ анықталу жиынды, мәндері қабылданатын жиын сандық жиын болатын нақты мәнді функцияларға арифметикалық амалдар қолдану арқылы жаңа функцияларды анықтау – анықталу жиынының әр нүктесінде сол нүктедегі функция мәндеріне аталмыш арифметикалық амалдар орындалады да, оның нәтижесі мақсатты функцияның мәні ретінде қабылданады

7. Ішкі және сыртқы деп аталатын, екіншісі біріншісінің мәндер жиынын қамтитын жиында берілген екі функция арқылы анықталатын күрделі функция не сол функциялар суперпозициясы – сыртқы функцияның аргументін ішкі функцияға ауысту, нәтижесінде ішкі функцияның анықталу жиынының әр нүктесінде бірінен кейін бірін, әуелі ішкі, сонан соң ол функцияның мәніне сыртқы ережені қолдану

8. Функция анықтамасындағы алгоритм түрінде берілетін ереже – айнымалыларға қолданылатын ережені бірінен соң бірі кезекпен орындалатын амалдар тізбесіне жіктеу

9. Тағы да формула туралы және функцияның формула арқылы берілуі – формуланың ереже ретінде оқылуы, ол орындалатын барлық нүктелер функцияның анықталу жиынын құрауы

10. Негізгі элементар және элементар функциялар – негізгі эдементар деп аталатын дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық және кері тригонометриялық 5 түрлі функцияларға төрт арифметикалық амал мен күрделі функция құрудан тұратын 5 түрлі амалдарды ақырлы рет қолдану қорытындысындағы элементар деп аталатын функция

11. Функцияның берілген жиынынан оның жиыншасына тарылуы – жиынның әр элементіне қолданылған ереженің қолдану өрісін оның жиыншасына тарылтып, берілген жиында анықталған функцияның тарылуы болатын жиыншадағы жаңа функцияның анықталуы

12. Тізбек деген функцияның жалпы анықтамасының анықталу жиыны барлық оң бүтін сандар болғандандағы әр оң бүтін санға бір объектіні сәйкес қоятын дербес жағдайы – объекттер айтылым болғанда айтылымдар тізбегі, сан болғанда сандық тізбек, сегмент болғанда сегменттер тізбегі және де объект анықталу жиындары бірдей функциялар жиынынан алынғанда функциялар тізбегі

13. Функциянның анықталу жиынының бейнесі мен мәндер қабылданатын жиынының жиыншасының алғашқы бейнесі – сәйкес функцияның барлық мәндерінің жиыны мен мәндері мәндер қабылданатын жиынның алдын ала алынған жиыншасында жататын аргумент мәндерінен құрылған жиын

14. Функциялардың түрлері: сюрьективті – функция анықтамасындағы мәндер қабылданатын жиынның әрбір элементі функция мәні болуы, яғни анықтамадағы мәндер қабылданатын жиынның функция бейнесімен беттесуі; иньективті – аргументтің әртүрлі мәндеріне функцияның әртүрлі мәндерінің сәйкес келуі немесе функция анықтамасындағы мәндер қабылданатын жиынның кез келген бір элементті жиыншасының алғашқы бейнесінің бір элементті жиын не бос жиын болуы; биективті –аргументтің әртүрлі мәніне функцияның әртүрлі мәндері сәйкес келумен қатар функция анықтамасындағы мәндер қабылданатын жиынның әрбір элементі функция мәні болуы, яғни функцияның сюрьективті әрі иньективті болуы

15. Берілген (тура) функцияға кері функция тура функцияның мәнін тәуелсіз айнымалы етіп, аргументін оған сәйкес келетін мән етіп орын ауыстыратын сәйкестік – тура функцияның мәндерінен құрылған жиында анықталған және оның әр нүктесіне тура функция үшін осы нүкте жалғыз ғана нүктеде мән болғанда аргументтің сол мәнін сәйкес қоятын ереже, бұл тек қана инъективті функция үшін ғана орындалады

16. Функцияның екі жиын арасында өзара бірмәнді сәйкестікті орнатуы – биективті функцияның өзінің анықтамасындағы анықталу жиыны мен барлық мәндер жиыны арасында орын алатын сәйкестік

17. Екі жиынның эквиваленттілігі теоретика-жиындық қасиет ретінде – екі жиынның қандай да бір биетивтік қатынаста болуы

18. Екі жиын эквиваленттілігінің қолданысы: ақырлы жиындар және ақырсыз жиындар – сәйкес жиынмен эквивалентті болатын алғашқы n оң бүтін саннан тұратын жиынның табылуы және ондай жиынның табылмауы, яғни қандай n оң бүтін сан алсақ та өзара бөлек $n+1$ элементтің табылуы

19. Екі жиын эквиваленттілігінің тағы бір қолданысы: саналымды жиындар – жиынның барлық оң бүтін сандар жиынына эквиваленттілігі, яғни қайсыбір иньективті тізбектің барлық мәндер жиыны ретінде бейнеленуі

20. Теңдеу атты берілген сандық функция мен берілген сан арасындағы шартты теңдік – теңдеуді шешу (зерттеу) есебі берілген сан берілген функцияның теңдеу шешімі деп аталатын осы мәнге тең аргумент барлық мәнін табудан не функцияның анықталу жиының барлық нүктесінде функцияның мәні осы саннан өзге болып, теңдеу шешімсіз болуын көрсетуден тұруы

21. Формула термині – сөздерді қолданбай шартты белгілер мен әріптер арқылы ғана математикалық мағынадағы (жалпы жағдайда – ғылыми) сөйлемдерді қысқартып жазу түрі

§4. Ақырлы сан деп те аталатын нақты сандардан құрылған сандық жиындар мен оның екі ақырсыз санмен толықтырылуы

1. Кеңейтілген нақты сандар жиыны атты $+\infty$ және $-\infty$ символдарынмен толықтырылған нақты сандар жиыны – нақты-ақырлы сандар жиынына меншіксіз сандар деп те аталатын $+\infty$ және $-\infty$ символдарымен белгіленген ақырсыз сандарды енгізу және математиканың ішкі құрылымы бойынша осы үш түрлі сандардың арифметикалық арақатынастары анықталу міндетінде $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ сияқты арифметикалық амалдар енбейтін «шағын» арифметикасын құру

2. Сандық жиын мен оның жоғарғы және төменгі шені атты нақты сандар – сәйкесінше, берілген сандық жиынның әрбір элементі одан аспайтын және кем емес болатын нақты

сандар, осы орайда $+\infty$ кез келген сандық жиынның жоғарғы шені және $-\infty$ кез келген сандық жиынның төменгі шені болуы

3. Жоғарыдан шенелген, төменнен шенелген және шенелген сандық жиын – сандық жиынның сәйкесінше нақты мәнде жоғарғы, төменгі шендерінің және екеуінің де бар болуы

4. Сандық жиынның ең үлкен және ең кіші элементтері – сәйкесінше сандық жиынның өзінде жататын жоғарғы, төменгі шендерінің, яғни берілген сандық жиынның өзінде жататын және оның әрбір элементінен аспайтын және кем емес болатын нақты сандардың бар болуы

5. Аралық атты ерекше сандық жиындар – тоғыз түрлі екі жақты теңсіздіктермен берілген шенелген, біржақты шенелген не екі жақты шенелмеген болғанда сандық жиынның өзін беретін, сегмент, интервал, жартылай сегмент, жартылай интервал деп аталатын сандық жиындар, соның ішінде алдын ала берілген аралықтың шекаралары деп екі санның кішісінен артық және үлкенінен кіші барлық нақты сандардан тұратын интервал мен кішісінен кем емес және үлкенінен аспайтын барлық нақты сандардан тұратын сегмент

§5. Нақты сандар жиынының геометриялық бастаулары мен алгебралық сипаттамалары

1. Күнделікті қолданыстағы және онсыз өркениет болмайтын ұзындықты өлшеу мәселесі мен оның тек қана нақты сандар арқылы шешілуі – өлшеушінің өз еркінде тағайындарған ұзындығы бір санына тең бірлік кесінді деп аталатын эталондық кесіндімен кез келген кесіндінің ұзындығын өлшеу процедурасында оның өлшеуіші атты нақты сандардың туындауы

2. Цифр атты таңбалар сандық әлемнің бастапқы әрі негізгі жазу белгісі ретінде және олар арқылы сандар жазылуының позициялық жүйесі – сөздерді жазу үшін әліпбидегі әріптер қолданылатынындай сандарды жазу үшін де цифр деп аталатын арнаулы таңбалардан тұратын жинақтың қолданылуы және сан жазылуындағы цифрлардың атқаратын міндетінің оның мәнімен қоса, әріптерден айырмашылығы өзінің орнымен (позициясымен) анықталуы

3. Алғашқы геометриялық келісімдер – бірлік кесінді, жалпы жағдайдағы кесінді, сәуле, кесіндінің ішкі кесінділерге жіктелуі, циркуль мен сызғыштың көмегімен бірлік кесіндінің алдын ала берілген тең бөлектерге бөліну, кесінділерді шекаралық нүктелерінің орналасуы бойынша сәуле бойында ұзын, қысқа, тең деңгейінде салыстыру, бірлік кесінді не оның тең бөлінген бөлшегінің бірі екінші кесіндіге дәл бүтін рет орналасуы немесе орналаспауы, екі кесіндінің ұзын, қысқа, тең мағынасында салыстырулары

4. Ұзындықты өлшеу есебі оң бүтін және оң жай бөлшек сандар көзі ретінде – сәйкес берілген кесіндіге алдын ала келісіліп алынған бірлік кесіндінің және оның тең бөлінген бөлшегінің дәл оң бүтін рет орналасуы

5. Жай бөлшектің $\frac{m}{n}$ жазылуындағы Ахмет Байтұрсынов енгізген n-«бөлімі» және m-«алымы» атты сөйлеп тұрған атаулар – бірлік кесінді ретінде қабылданған кесіндіні бөлімі деген атына сай дәл n санына тең бөлікке теңдей бөліп, алымы деген атау өзі айтып тұрғандай ұзындығы $\frac{1}{n}$ деп белгіленген кесінділердің m-ін алу

6. Кесінді ұзындығын өлшеу кезінде пайда болған жай бөлшектердің рационал сандар атты жаңа жиын құруы және сол жиын элементтері арасындағы салыстыру қатынастарын сондай ұзындықты кесінділер арқылы негіздеу – алдын ала берілген екі жай бөлшекті салыстыру мақсатында ұзындықтары соларға тең кесінділердің бір шеткі нүктелерін бір сәуле басымен беттестіре салғанда келесі ұштарының біріншісі екіншісінің оң жағында, сол жағында және беттесіп орналасуына сәйкес бірінші бөлшектің екіншісіне қарағанда үлкен, кіші және тең болуы

7. «Бөлшектің негізгі қасиеті» атты $\frac{m}{n} = \frac{m\cdot k}{n\cdot k}$ теңдігінің және m, n сандарының екеуі де k санына бүтін бөлінгенде «бөлшектерді қысқарту» деп аталатын $\frac{m}{n} = \frac{m}{k} : \frac{n}{k}$ теңдігінің геометриялық түсіндірмесі – кез келген кесіндіні тең k бөлікке бөліп, сондай бөліктерден k рет алғанда бастапқы кесіндіге келеміз де, осы жолмен ұзындығы $\frac{1}{n}$ кесіндісін тең k бөлікке бөлгенде $\frac{1}{n\cdot k}$ ұзындықты кесінділер шығады да, оларды k рет жинап алғанда

қайтадан $\frac{1}{n}$ ұзындықты кесінді, ал ондай кесінділерден m рет алынған $\frac{1}{n \cdot k}$-ұзындықты кесінділердің mk рет болып, $\frac{m}{n}$ кесіндісінің дәл өзін беруі және ұзындығы $\frac{1}{n}$-ге тең кесіндіден k рет алу мағынасындағы $\frac{1}{n \cdot k}$ -ұзындықты кесіндіні тең k бөлікке бөлгенде шыққан $\frac{1}{\frac{n}{k}k} = \frac{1}{n}$ ұзындықты кесіндіден $\frac{m}{k}k = m$ рет алғанда $\frac{m}{n}$ ұзындығына келу

8. Бөлімдері әртүрлі екі жай бөлшекті ортақ бірлік кесінді бойынша салынған сәйкес кесінділер арқылы салыстырудың геометриялық мағынасы мен аналитикалық өрнектелуі – әртүрлі тең бөлікке бөлінген бірлік кесінді бөлігінен сол кесіндінің әртүрлі санын алғанда қайсысының мәні үлкен, қайсысынікі кіші, не өзара тең екендігін анықтау мүмкін емес күрделі мәселені математиканың «құдіретімен» бірлік кесіндіні салыстырылып жатқан кесінділердің бөлімдерінің көбейтіндісі болатын $n \cdot p$ бірдей бөлікке бөлгенде «Бөлшектің негізгі қасиеті» бойынша $\frac{m}{n}$-ұзындықты кесіндіде $\frac{1}{n \cdot p}$-ұзындықты кесіндіден $m \cdot p$ кесінді, ал $\frac{p}{q}$-ұзындықты кесіндіде $q \cdot n$ кесінді алынады да, кесінділердің қайсысында $\frac{1}{n \cdot p}$-ұзындықты кесінді көп болса, сол ұзын, бірдей болғанда тең болуы және оның бөлшекті беріп тұрған 4 сан арқылы өрнектелуі

9. Бөлімдері өзара тең жай бөлшектерді қосу $\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n}$ ережесінің геометриялық мағынасы мен «алым-бөлім» атауларындағы оқылуы – тең n бөлікке бөлінген бірлік кесіндінің бөлігінен алдымен m_1 , сонан соң m_2 кесінді алып, қосқанда дәл сондай $m_1 + m_2$ кесінді шығуы

10. Бөлімдері өзара тең емес екі жай бөлшекті қосу ережесінің «Бөлшектің негізгі қасиеті» мен бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу ережесінің тікелей салдары болатын $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} + \frac{p \cdot n}{n \cdot q} = \frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$ жолымен аналитикалық дәлелдеуі – бөлімдері әртүрлі жай бөлшектерге сәйкес келетін кесінділер салып, оларды бір біріне жалғау арқылы қосындысы болатын кесінді табу қиын емес болғанымен сол кесіндінің ұзындығын осы жай бөлшектерді анықтайтын 4 сан арқылы өрнектеп жазу күрделі мәселесі математиканың «құдіретімен» $\frac{m}{n}$-ұзындықты кесіндідегі әрбір $\frac{1}{n}$ ұзындықты бөлікті тағы q бөлікке бөліп, $\frac{1}{n \cdot q}$-ұзындықты кесіндіден $m \cdot q$ кесінді, ал $\frac{p}{q}$-ұзындықты кесіндінің $\frac{1}{q}$-ұзындықты әр бөлігін теңn бөлікке бөліп, одан $\frac{1}{q \cdot n}$-ұзындықты кесіндіден $p \cdot n$ кесінді алынған соң, ұзындықтары бірдей ортақ бөлім атты $\frac{1}{n \cdot p}$ және $\frac{1}{q \cdot n}$ кесінділерді біріншісінен $m \cdot q$, екіншісінен $p \cdot n$ кесіндіден алып, қосқанда $m \cdot q + p \cdot n$ кесіндінің шығуы, әдетте, бұл амалды орындауда бөліміндегі мәнді азайтып, кесінді бөлігін барынша ірілету мақсатында ұсынылған ең кіші ортақ еселігін алу геометриялық тұрғыдан кейде тиімді болса да, аналитикалық тұрғыдан есептеу математикасында күрделі, тіпті криптографияда қолданылатын екі бөлімінің әрқайсысын жай немесе құрама сан тұрғысынан тексеру, құрама болғанда жай көбейткіштерге жіктеу бөлшектерді қосу амалын «қажетсіз» қиындатқандықтан, бөлімді тікелей nq деп алумен мақсатты ұзындық өрнегін 4 санмен өрнектеу және қалай болса да шешілген, бар маңыздылығы осы шешім табылғанында болатын есеп нәтижесін қажеттіне қарай «Бөлшектің негізгі қасиетінің» салдары бойынша ықшамдау мүмкіндігі

11. Жай бөлшектердің айырымын есептеу $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q - p \cdot n}{n \cdot q} (m \cdot q > p \cdot n)$ ережесінің геометриялық мағынасы – $\frac{m}{n}$ ұзындықты кесіндінің $m \cdot q > p \cdot n$ теңсіздігімен өрнектелетін $\frac{p}{q}$ ұзындықты кесіндісінен ұзындығындағы қаншаға ұзын және сол кесіндісінің ұзындығын жай бөлшектерді анықтайтын 4 сан арқылы қалай жазу керек деген сұрақтың жауабын $\frac{m}{n}$-ұзындықты кесіндідегі әрбір $\frac{1}{n}$ -ұзындықты бөлікті тағы q бөлікке бөліп, $\frac{1}{n \cdot q}$-ұзындықты кесіндіден $m \cdot q$ кесінді, ал $\frac{p}{q}$ -ұзындықты кесіндінің $\frac{1}{q}$-ұзындықты әр бөлігін тең n бөлікке бөліп, одан $\frac{1}{n \cdot q}$-ұзындықты кесіндіден $p \cdot n$ кесінді алынған соң, айырымын тапқанда $m \cdot q - p \cdot n$ кесіндінің шығуы

12. Екі оң бүтін санды көбейту амалы көбейткіштердің бірін екіншісіне тең қосылғыш рет қосу арқылы түсінікті анықтамамен берілсе, екі жай бөлшектің көбейтіндісі жай бөлшек болады да, оның алымы мен бөлімі көбейткіш бөлшектердің сәйкес алымдарының және бөлімдерінің көбейтіндісіне тең $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} (n \cdot q \neq 0)$ түріндегі, әдетте, оқыту барысында, аксиома деңгейінде қабылданатын ережесінің геометриялық түсіндірмесі – жай

бөлшектерді көбейту ережесін қабырғалары a және b оң сандары болатын тіктөртбұрыш атты геометриялық фигураның ауданы $a\cdot b$ көбейтіндісіне теңдігіне негіздеп, алдымен $m=p=1$ дербес жағдайы үшін бірлік квадрат деп аталатын қабырғасы бірге тең квадраттың әр қабырғасын сәйкес тең n және q бөліктерге бөлгенде пайда болған кіші тіктөртбұрыштардың ауданы біріншіден $\frac{1}{n}$ және $\frac{1}{q}$ ұзындықты қабырғаларының $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}$ көбейтіндісіне, екінші жағынан ауданы $a\Delta b=1\Delta 1=1$ санына тең квадратты тең nq бөлікке бөлгенде пайда болған тіктөртбұрыштың ауданы $\frac{1}{n\cdot q}$ болғандықтан $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{n\cdot q}$ теңдігі орындалады, дәл осылай қабырғаларының ұзындықтары $a=\frac{m}{n}$ және $b=\frac{p}{q}$ болатын тіктөртбұрыш ауданы $\frac{1}{n\cdot q}$ болатын $m\cdot p$ тіктөртбұрышқа жіктелгендіктен $a\Delta b=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$ санына тең аудан $\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$ санына тең болып, ереже мазмұнын беруі

13. $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m\cdot q}{n\cdot p}(n\cdot p\cdot q\neq 0)$ түріндегі жай бөлшектерді бөлу ережесі – $B\cdot C=A$ болатындай жалғыз ғана С санын табудан тұратын нақты сандарды бөлу амалының анықтамасы мен геометриялық тұрғыдан негізделген жай бөлшектерді көбейту амалының тікелей салдары ретінде

14. Ерекше 0 (нөл) мен 1 (бір) сандары сәйкес қосу және көбейту амалдарының нейтрал элементтері ретінде – қосу амалына қатысты кез келген санды «орнында қалдыратын» және геометриялық тұрғыдан бастапқы және соңғы нүктелері беттесетін кесіндінің ұзындығын бергендіктен, қосу амалына сәйкес кесінділерді біріне-бірін жалғағанда кез келген кесінді ұзындығы өзгеріссіз қалатын нөл атты сан мен кез келген санды көбейткенде бүтін санға көбейту амалы негізінде «орнында қалдыратын» көбейту амалына қатысты бір атты нейтрал элемент

15. Сандар жиынын «жаңа» сандар қосу арқылы кеңейтудің алгебралық мұқтаждығы – күрделі мәселелерді шешуге негізделген математиканың сан түріндегі құралы тіпті қосуға, көбейтуге қатысты сызықты, квадраттық қарапайым теңдеулерді шешуге жарамсыз болғандықтан белгілі сандар арасына «жаңа» сандар енгізу

16. Теріс мәнді жай бөлшек $\frac{m}{n}+x=0$ теңдеуінің шешімі ретінде – геометриялық тұрғыдан ұзындығы алдын ала берілген $\frac{m}{n}$ оң мәнді жай бөлшек болатын кесіндісін ұзындығы x оң мәнді жай бөлшек болатын кесіндісімен қалай жалғасақ та ұзындығы 0 саны болатын кесінді ешқашанда ала алмағандықтан, оң мәнді жай бөлшектен өзге «жаңа» , «$\frac{m}{n}$ санына қарама-қарсы сан» деп аталып, $\frac{m}{n}$ санынан қандай да бір таңбамен ажыратылатын, атап айтқанда алдына «-» таңбасын салу арқылы $-\frac{m}{n}$ түрінде жазылатын, «минус $\frac{m}{n}$» деп оқылатын теріс мәнді рационал санның енгізілуі, сонымен m/n+x=0 теңдеуінің шешімінің табылуы, қорытындысында $\frac{m}{n}+(-\frac{m}{n})=0$ теңдігінің дұрыстығы

17. Барлық бүтін сандар жиыны Z және барлық рационал сандар жиыны Q– бірлік кесіндіні біртіндеп жалғастырып отырғанда қосу амалы арқылы анықталатын $Z+$ барлық мүмкін оң бүтін сандар жиыны, оның ұштары беттескенде нүктеге айналатын кесінді ұзындығын беретін ерекше $+0=-0=0$ санымен және барлық оң сандарға қарама-қарсы сандармен толықтыруы болатын Z барлық бүтін сандар жиыны; бірлік кесіндіні дәл n бөлікке бөліп, оның бүтін санының ұзындығын өрнектейтін жай бөлшек және әртүрлі жазылудағы өзара тең жай бөлшектер жиынының мәні сол жай бөлшектердің кез келгеніне тең рационал сан атты санды беруі, осылайша анықталған әрбір рационал санға қарама-қарсы санмен толықтырылған Q барлық мүмкін рационал сандар жиыны

18. Теріс емес рационал сандардың әрқайсысына координаталық түзу атты түзу бойынан бір нүкте сәйкес қою арқылы рационал сандарды көзбен көру мақсатында геометриялық бейнелеу және сол бойынша оларды салыстыру – алдын ала берілген түзу бойында бірлік кесіндісі салынып, бірлік кесіндісінің бастапқы нүктесіне санақ басы деп аталатын 0 (нөл) санын, соңғы нүктесіне 1 (бір) санын сәйкес қойып, түзуде 0 санына сәйкес келетін нүктеден 1 санына сәйкес келетін нүктеге қарай оң деп аталатын бағыт белгіленеді де, әр $\frac{m}{n}$ оң мәнді рационал саны үшін 0 санына сәйкес нүктеден басталып, ұзындығы дәл $\frac{m}{n}$ санына тең болатын кесіндінің соңғы нүктесіне сол $\frac{m}{n}$ санын сәйкес қою және нүктедердің санақ басынан алыс немесе жақын жатуына байланысты салыстырулары

19. Теріс мәнді рационал сандарды координаталық түзудің оң мәнді рационал сандардан бос тұрған теріс бағытына енгізу арқылы геометриялық бейнелеу – координаталық түзу бойынан алынған 0 нүктесіне сәйкес келетін санақ басы түзуді екі сәулеге бөліп, оң бағытталған сәуленің әрбір нүктесі бір оң рационал санға сәйкес қойылған соң теріс мәнді рационал санын дәл бір нүктемен сәйкестендіру үшін сандық мәні соған тең оң рационал санына сәйкес нүктеге санақ басына қарағанда симметриялы екінші сәуле нүктесін сәйкес қою

20. Барлық рационал сандарды координата түзуінде орналасуына байланысты өзара салыстыру ережелері – екі оң мәнді рационал сандарға сәйкес келетін нүктелердің қайсысы санақ басынан алысырақ жатса, сол нүкте сәйкес қойылған сан үлкені болады, ал теріс мәнді рационал сандарда керісінше, оларға сәйкес келетін нүктелердің қайсысы санақ басына жақын сол нүктеге сәйкес келетін сан үлкені болады және осы қатынасты нүктелері оларға симметриялы орналасатын таңбасыз сандық мәні тең оң мәнді рационал сандар арқылы $-\frac{p}{q} < -\frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{p}{q} > \frac{m}{n}$ түрінде жазылуы және кез келген оң рационал санның 0 саны мен теріс рационал сандардан артық болуы

21. Әр рационал санды оған сәйкес өзара тең жай бөлшектердің жиыны ретінде анықтау – рационал сан біреу, сол бір рационал санның бір жазылуынан «Бөлшектің негізгі қасиеті» атты теңдік бойынша алымын да, бөлімін де бір бүтін санға көбейту, бүтін бөлінген жағдайда бөлу арқылы табылатын оны құрайтын жай бөлшектердің көптігі (саналымды) мен барлығын жазу мүмкіндігі

22. Екі өлшемдес кесінділер ұғымының алдын ала алынған үшінші ортақ бірлік кесіндіге негізделуі мен тәуелділігі – екі кесіндінің біреуін не оның қандай да бір бірдей бүтін бөліктеуінің екінші кесіндіге бүтін сан рет орналасуы немесе екі кесіндінің біреуін бірлік кесінді ретінде алғанда екіншісінің ұзындығының рационал сан арқылы өрнектелуі немесе екі кесіндінің әрқайсысының бойына бүтін сан рет орналастыру мүмкін болатын үшінші кесіндінің бар болуы немесе берілген бірлік кесінді бойынша бірінші кесіндінің ұзындығы $\frac{m}{n}$, екінші кесіндінің ұзындығы $\frac{p}{q}$ сандарына тең болғанда, бірлік кесіндінің $\frac{1}{nq}$ ұзындықты бөлігінің біріншіде дәл mq рет, екіншіде дәл np рет орналасуы

23. Кез келген кесіндіні рационал сандар көмегімен өлшейтін бірлік кесінінің табылуы мағынасындағы «Кесінділер ұзындығын өлшеу үшін рационал сандар жиыны жеткілікті» және бірлік кесінді ретінде қандай кесіндіні алсақ та ұзындығы рационал санмен бейнеленбейтін кесінді құра алу мағынасындағы «... жеткіліксіз...» деген сөйлем – сәйкес алдын ала бірлік кесінді деп қабылданған қайсыбір кесіндімен кез келген кесіндіні не бірлік кесіндінің өзін, не оның әр кесіндіге өзінше анықталатын қандай да бір бүтін санға тең бөлгендегі бөлігін сол кесіндіге бүтін рет салу мүмкіндігі және бірлік кесіндіні қандай етіп алсақ та, оны тең бөліктерге қалай бөлсек те сол бөліктердің бүтін санын өлшеніп жатқан кесіндіге бір шетінен бастап салғанда соңғы нүктесіне жетпей қалып, ал тағы бір бөлігін қосқанда асып кетіп, ешқашан соңғы нүктесімен беттеспейтіндігінен бүтін рет орналастыру мүмкін болмайтындай ең болмағанда бір кесіндінің құрылуы берілген кесіндіні өлшейтін рационал сан жоқ мағынасында

24. Жалпы дүниетанымға күмән келтірген ұзындық өлшенбейді қағидасын тудырушы Пифагор ғылыми мектебінің ұлы ашылымы – алынған әр бірлік кесіндіні қалауымызша өзара тең ұсақ бөліктерге бөліп, екінші кесіндіге бүтін рет орналастыру әрқашан мүмкін сияқты болып көрінетін жаңсақ пікірді теріске шығаратын қандай болсын бірлік кесіндімен өлшемдес емес кесінді салу мүмкіндігі

25. Әр квадраттың диагоналі оның жағымен өлшемдес емес – кез келген кесіндіні бірлік кесінді деп қабылдап, қабырғасы сол бірлік кесінді болатын квадрат салғанда квадраттың қабырғасын қандай тең бөліктерге бөлсек те, оның диагоналі болатын кесіндіге бүтін рет салынбауынан алдын ала алынған бірлік кесіндімен өлшемдес еместігі

26. Кесіндінің ұзындығын өлшеу есебінің толық шешімі оң ондық бөлшектердің бастауы болуының жалпылама суреттемесі – барлық рационал сандар жиыны кесінді өлшеу есебін толық шешпейтіндігін көрсететін Пифагор ашылымынан кейін қойылған есепті ақырына

дейін шешу мақсатында әрбір қадамда алдыңғысында толық жататын кезекті кесіндіні 0-ден 9-ға дейінгі 10 цифрмен нөмірленген тең 10 бөлікке біртіндеп шексіз бөле отырып, әр қадамда ұзындығы ізденісті кесіндінің соңғы нүктесі жататын кесіндіні белгілейтін цифрды анықтап, солар арқылы ізденісті ұзындықты бейнелейтін цифрдің сандық мәнімен қоса орнымен маңызды ақырсыз ондық бөлшек атты бүтін бөлігі мен бөлшегі үтірмен ажыратылған цифрлар тізбесі түріндегі жазу құралы

27. Әр кесінді үшін алынған бірлік кесінді бойынша оның ұзындығы болып табылатын ондық бөлшекті құру кесінді өлшеу мәселесінің толық шешімі ретінде – алдын ала алынған бірлік кесінді мен өлшеу қажет кесіндінің бастапқы нүктелерін берілген сәуле бас нүктесімен беттестіріп, бірлік кесіндіні біртіндеп орналастыра отырып, солардың ішінен өлшенетін кесіндінің соңғы нүктесін қамтитын кесіндісін тауып, соған дейін орналастырылған бірлік кесінділердің саны арқылы кесінді ұзындығының бүтін бөлігі анықталады да, бүтін бөліктен үтір арқылы бөлініп тұратын бөлшек бөлігін анықтау үшін осы соңғы нүкте жатқан бірлік кесінді 10 цифрмен нөмірленген ұзындығы $\frac{1}{10}$ болатын тең 10 бөлікке бөлінеді де, соңғы нүкте жатқан кесінді нөмірі белгіленіп алынып, сол цифр сандар тізбесінің үтірден кейінгі біріншісі болады, әр қадамда алдыңғы нөмірі анықталған кесіндіні 10 есе кішірейтіп, бірінің ішіне бірі орналасытындай дәл 10 бірдей бөлікке бөліп, сандар тізбесінің цифрларын анықтау ары қарай ақырсыз жалғасады

28. Өлшемі ізделінді кесіндінің соңғы нүктесі жатқан кесіндіні бөлшектей отырып, ұзындығын сандар тізбесі арқылы өрнектеу барысында бөлшектеу бөлігінің соңғы нүктесі өлшенетін кесінді соңымен беттесетін ерекше жағдайдың жазылуын беретін $\frac{k}{10^n}$ түрінде жазылатын ондық-рационал сандар – өлшемі ізделінді кесіндінің соңғы нүктесі бөліктелген кесінділердің бірінің соңымен беттескен сәтте кесінді ұзындығы цифрлердің ақырлы санымен жазылып, мәселе шешіледі, бұл жағдайда ізделінді кесіндінің соңы бөліктеудегі екі кесіндінің бірінің соңғы, келесісінің бастапқы нүктелерінде жатқандықтан ары қарай сол нүктені қамтитын тек оң жақ бөліктерді таңдап, осы үрдісті ары қарай жалғастырсақ, ұзындық жазылуында 0 цифрлері, ал сол жақ бөліктерін таңдап отырсақ 9 цифрлері ақырсыз жалғасып отырады, мәселен 13,01=13,010000. . . =12,0099

29. Бірлік кесінді ретінде алынған кесінді бойынша кез келген кесінді өлшемді және өлшемсіз болып екіге бөлініп, әр өлшемдінің ұзындығы рационал санмен өрнектелген болса, екінші жағынан кез келген кесіндіге оның ұзындығының сандық мәнін беретін ондық бөлшектер сәйкес қойылған, осындай жағдайда өлшемді және өлшемді емес кесінділерге сәйкес келетін ондық бөлшектердің бір-бірінен ерекшелігі бар ма, жоқ па деген сұрақтың туындауы және осы ерекшелікті қанағаттандырмайтындарымен рационал сандардан өзге жаңа санды беруі – рационал сандарды, не солардың жазылуы болатын жай бөлшектерді бір цифрдан бастап, период деп аталатын қайсыбір ақырлы цифралар тобын арасына ештеңе салмай бірінен соң бірі ақырсыз қайталанатындары ғана және де тек қана солар ғана бейнелеуі, сонымен периодты ондық бөлшек аталымды санның өлшемдес рационал мәнді кесіндінің ұзындық өлшемі болуы және де, керісінше, әр рационал санның периодты ондық бөлшек түрінде жазылуы, ал периодты емес ондық бөлшектердің өлшемдес емес кесінді ұзындық мәнін беретін иррационал атты рационал емес санды анықтауы

30. Ондық бөлшек атты цифрлардың ақырсыз тізбесіндегі разрядтық деп аталатын әрбір цифрдің геометриялық мағынасы – алдын ала сәуле беріліп, онда сәуле басынан бастап салынған бірлік кесіндінің соңғы нүктесіне 1 саны сәйкес қойылады да, сәуле бойынан нүкте алынып, X әрпімен белгіленген соң, соңы осы нүктеде болатын, сәуле басынан басталатын кесінді салынады және берілген бірлік кесіндіге сәйкес ондық бөлшекпен өлшенетін кесінді ұзындығын да сол X әрпімен белгілегенде кесіндісінің ұзындығына тең $= a_k \ldots a_0, b_1 b_2 \ldots$ саны алынған нүктеге сәйкес қойылады, осындағы $a_k \ldots a_0 = m$ бүтін бөлігі бірлік кесінді сәуле басынан бастап, сәуле бағытына қарай $m = a_k 10^k + ? + a_1 10^1 + a_0$ рет салынатынын көрсетеді де, сол нүкте жататын бірлік кесіндінің бастапқы нүктесі болады, одан кейінгі бірлік кесіндіні тең 10 бөлікке бөліп, b_1 цифры «ұзындығы ізденісті» кесіндісінің соңғы X нүктесін қамтитын, ұзындығы $\frac{1}{10}$ болатын кесіндінің нөмірін көрсетеді, келесі b_2 цифрі b_1 цифрімен белгіленген кесіндіні тағы тең 10 бөлікке бөліп, солардың ішінде соңғы нүктесі жатқан, ұзындығы $\frac{1}{10^2}$ кесіндінің

нөмірін береді, ары қарай осы үрдісті ақырсыз жалғастыра отырып, бір разрядтан келесісіне өткенде тең 10 бөлікке бөлінген әрбір кесінді алдыңғысының жиыншасы болып, ұзындықтары әр адымда алдыңғысына қарағанда 10 есе азайып, кішірейе нүктесін ақырсыз қамтиды да, сонымен берілген кесінді ұзындығының дәл мәнін береді

31. Вейерштрасс барлық нақты сандар деп атаған жиын оң және теріс мәнді барлық мүмкін ақырсыз ондық бөлшек ретінде – басы мен соңы беттеспейтін кесінді ұзындығын өлшеу есебінің шешімін берген ондық бөлшектердің оң мәнді деп аталуы, «-» минус таңбаларымен жабдықталған теріс мәнді деп аталатын ондық бөлшек және таңбасыз, ерекше, соңы мен басы беттесетін кесінді ұзындығын беретін 0=0,000... саны

32. Нақты сандар жиыны екілік, үштік және т.с.с. ақырсыз бөлшектер ретінде – ондық бөлшектер әр қадамдағы кесіндіні тең 10 бөлікке бөлгеннен шыққан болса, сол тәртіппен бөлшектеуді 2, 3 және кез келген, бірақ бекітілген, тең бөліктер саны үшін өткізу

33. Координаталық түзу деп аталатын әр екі нүктемен бірге соларды жалғастыратын кесіндінің бар нүктелерін қамтитын геометриялық түзудің әрбір нүктесін бекітілген бірлік кесінді деңгейінде кесінді ұзындығын өлшеу есебіне сүйеніп құрылған ондық бөлшек түрінде жазылған тек ойда ғана тұратын нақты сандар жиынындағы нүкте координатасы атты санмен өрнектеу арқылы арифметикаландыру – түзу алынып, оның бағыты анықталған соң оның бойынан екі нүкте белгіленіп, координат басы атты сол жақта жатқан нүктеге 0, оң жақта жатқан нүктеге 1 саны сәйкес қойылады да, осы екі нүкте арқылы бірлік масштаб енгізіліп, 0 нүктесінен оң жақта жатқан әрбір нүктеге алынған бірлік кесінді бойынша координат басынан басталып, соңы сол нүкте болатын кесінді ұзындығына тең оң санның, сол жағында жатқан нүктеге минус таңбамен жабдықталған кесінді ұзындығына тең теріс мәнді санның сәйкес қойылуы және нүктеге сәйкес қойылған санның нүкте координатасы деп, ал әр нүктесі координатамен жабдықталған түзудің координаталық түзу деп аталуы

34. Алдын ала берілген әр нақты санға координаталық түзу бойынан кесінді ұзындығын сақтап координатасы сол сан болатын нүкте салу тәртібі – теріс сандарға сәйкес қоятын нүкте координат басына қарағанда оң санға сәйкес қоятын нүктеге симметриялы салынатын болғандықтан тек оң ондық бөлшектерге сәйкес келетін нүктелерді салумен шектелу: координаталар түзуінде нөл мен бірге сәйкес қоятын нүктені анықтап алғаннан кейін оң бүтін санға сәйкес қоятын нүкте бүтін санның анықтамасынан 0 нүктесінен бастап, таңдап алынған бағытпен бірлік кесіндіні бір-біріне жалғай отырып, бүтін санда бар бірліктер санына тең рет салу арқылы алынса, периодты ондық бөлшекке тең оң жай бөлшекке сәйкес нүкте бірлік кесіндінің бөлшек санның бөліміне тең бірдей бөлікке бөлгендегі бір бөлігін алымына тең рет бір-біріне жалғай отырып салу арқылы алынады, периодсыз ондық бөлшек болатын оң иррационал санға сәйкес келетін нүктені алуда алдымен бүтін бөлігін салып аламыз да, келесі бірлік кесіндіні бір разрядтан келесісіне өткенде тең 10 бөлікке бөлінген әрбір кесінді алдыңғысының жиыншасы болып, ұзындықтары әр адымда алдыңғысына қарағанда 10 есе азайып, осы ақырсыз үрдіс нәтижесінде барлығында жататын жалғыз нүктенің ізденісті нүкте болуы, осының бәрін қорытындылағанда қосымша кез келген нақты санға координаталық түзу бойынан міндетті түрде өзіндік нүкте сәйкес келетіндігі көрсетілді

35. Координаталық түзу бойында рационал және иррационал сандардың орналасуының «тығыздығы» туралы – координаттық түзуде тек рационал сандарға сәйкес келетін нүктелерді салу түзуді толық жаппай «тесіктер» қалдыратындығын көрсететін қабырғасы бірлік кесінді болатын квадрат диагоналін сол координата басынан бастап салғанда ұзындығы иррационал сан болуына байланысты соңына рационал сан сәйкес қойылмай бос қалатын бір нүктенің мысалы геометриялық тұрғыдан құрылды, әйткенмен кез келген екі нақты санның арасында кемінде бір рационал сан, ал Кантор айтқандай олардан да көп иррационал сан бар болуынан нақты сандар жиынында олардың тығыздығы алынады

§6. Нақты сандардың мағыналы түсіндірмелерімен жабдықталған аксиомалар жүйесі

1. Сандар әлемін аксиомалық көзқарасқа бағыттаған қысқаша шолу – бастаулары мыңжылдықтар тұңғиығында жатқан нақты сандар жайлы ғасырлар бойы бөлек-бөлек

жинақталған қасиеттерден аксиома деп аталатын дәлелденбей қабылданатын санды анықтайтын құраушы қасиеттер тізбесін бөліп алу және мектептен белгілі сандар жайлы тұжырымдарды аксиомалар негізінде шығару арқылы дәлелдеу мәдениетін тәрбиелеу

2. Аксиомалар арқылы барлық нақты сандар жиыны мен әр нақты санның анықталуы – әр жеке сан өзі анықталмай тек қасиеттерімен беріліп, сол аксиомалар жүйесіне жинақталған қасиеттерді қанағаттандыратын нақты сандар жиыны деп аталатын әрбір жиынның элементі ретінде анықталуы

I. Қосу амалының аксиомалары – қосылғыштар деп аталатын реттелген екі санға олардың қосындысы атты үшінші санды сәйкес қою тәртібі бойынша қосу деп аталатын амалын енгізу, ширатып айтқанда, қосу амалының анықтамасындағы реттен туындайтын «қосылғыштардың орын ауыстырғанмен қосындының мәні өзгермейді» деген жаттанды заңның мағынасын кеңінен талқылау, тек екі қосылғыш үшін анықталған қосу амалы негізінде 3,4,... кез келген ақырлы қосылғыштардан тұратын сандар үшін қосу амалын математикалық тұрғыдан кіршіксіз дұрыс анықтау, әр элементті осы амалға қатысты орнында қалдыратын нейтраль-нөл элементін анықтау және де сол арқылы әр санға оған қарама-қарсы санды анықтау аксиомалары

II. Көбейту амалының аксиомалары – қосу деп аталған амалды қабылдағаннан кейін одан басқа және одан нейтрал элементпен ғана ерекшеленетін көбейту амалын енгізу: көбейткіштер деп аталатын реттелген екі санға олардың көбейтіндісі атты үшінші санды сәйкес қою тәртібі бойынша көбейту деп аталатын амалды енгізу, көбейту амалының анықтамасындағы реттен туындайтын «көбейткіштердің орын ауыстырғанмен көбейтіндінің мәні өзгермейді» деген жаттанды заңның мағынасын кеңінен талқылау, тек екі көбейткіш үшін анықталған көбейту амалы негізінде 3,4,... кез келген ақырлы көбейткіштерден тұратын сандар үшін көбейту амалын математикалық тұрғыдан кіршіксіз дұрыс анықтау, қосу амалының нейтрал элементінен өзге болуымен көбейтуді қосудан ажырататын және әр элементті көбейту амалына қатысты орнында қалдыру қызметін атқаратын бір атты нейтрал элементті анықтау және де сол арқылы әр нөлден өзгеше санға оған кері санды анықтау аксиомалары

III. Өзара бөлек деп анықталған қосу және көбейту амалдарының арасындағы байланыс аксиомасы – бір санды екі санның қосындысы түрінде жіктеп, олардың қосындысы болатын санды үшінші санға көбейту мен қосындыдағы әр қосылғышты үшінші санға көбейтіп, кейін оларды қосқанның бірдей болуын беретін қосу-көбейту амалдарының арасындағы үлестірімділік атты заң

IV. Рет деп аталатын екі сан арасындағы үлкен, кіші және тең қатынастарының арасындағы табиғы талаптарды жүйелеу аксиомалары – екі сан арасындағы үлкен, кіші және тең қатынастарының «біреуі және тек қана біреуі» деп жинақы түрде айтылатын, яғни әрқашанда кемінде бірі орындалғанына қоса екеу не үшеу болып, қатар орындалуы мүмкін еместігі, бір бағыттағы екі қатынас тізбесі ретінде жазылған бір санның екінші саннан кіші, ол сан үшіншіден кіші болғанда бірінші санның үшіншіден кіші болуын беретін тразитивтілік аксиомасы, рет қатынасы мен қосу амалының және көбейту амалдарының арақатынасы, ширатып айтқанда сәйкес сандар арасындағы берілген рет қатынасы кез келген санды екі жағына да қосқанда және оң санға көбейткенде рет тәртібінің сақталуы

V. Архимед аксиомасы атты барлық нақты сандар жиынын өзара қиылыспайтын жартылай интервалдарға жіктеу мүмкіндігі – барлық нақты сандар жиынын ұзындықтары алдын ала берілген оң нақты санға тең, шеттері беттесіп, бірақ қиылыспайтын тізбелей орналасқан жартылай интервалдарға бөлгенде кез келген нақты санның осы жартылай интервалдардың біреуінде және тек қана біреуінде жатуы

VI. Кез келген шенелген сандық жиынның ең кіші жоғарғы және ең үлкен төменгі шендерінің бар болуы туралы аксиома – жоғарыдан шенелген жиынның барлық жоғарғы шендерінен құрылған жиынының ең кіші элементінің әрқашанда бар болуы, яғни қайсыбір нақты сан аталмыш жиынның жоғарғы шені болып, одан кіші кез келген санның ондай қасиетте болмауы, ең үлкен төменгі шеннің сондай ұқсастығы, төменнен шенелген жиынның барлық төменгі шендерінен құралған жиынының ең үлкен элементінің бар болуы, дәл айтқанда қайсыбір нақты сан аталмыш жиынның төменгі шені болып, одан үлкен кез келген санның ондай қасиетте болмауы

3. Жиі қолданыстағы бір уақытта орындалу не орындалмауына байланысты эквивалентті болатын сандар арасындағы тұжырымдар – екі санның теңдігінің екі жағына кез келген сан болсын, белгілі бір сан болсын қосқанда теңдіктің сақталуы тәрізді көбейту, бөлу амалдарымен рет қатынастарының сақталуы

§7. Қолданыстағы жаттанды арифметикалық амалдар ережелерінің қосу, көбейту аксиомаларының салдары ретіндегі дәлелденулері

1.Реттелген екі санның айырымы мен бөліндісінің анықтамалары – математикадағы «түсініктерді керексізбен көбейтпе» ұстанымына сай арифметикалық төрт амалдың екеуі ғана анықталады да, сол анықталған қосу мен көбейту амалдарына кері амал ретінде сәйкес алу және бөлу атты амалдарының енгізілуі

2. Сандарға қолданылатын төрт арифметикалық амалдардың қасиеттері – математика затындағы табиғаттық жалғыздық қасиетін ерекше нейтрал элементтердің, ол арқылы анықталған қарама-қарсы сан мен кері сандардың қанағаттандыруы және сол жағында амал оң жағында нәтижелі қорытындыдан тұратын арифметикалық амалдардың орындалу ережелерінің оқылуы

3. Қосу және көбейту аксиомаларының салдарының дәлелдеулері – математика затындағы табиғаттық жалғыздық қасиетін ерекше нейтрал элементтердің, ол арқылы анықталған қарама-қарсы сан мен кері сандардың қанағаттандыруының және сол жағында амал оң жағында нәтижелі қорытындыдан тұратын арифметикалық амалдардың орындалу ережелерінің дәлелдемелері

4. «2+2=4» теоремасы және оның дәлелдеуі – сандар аксиомалары деңгейінде екі санды қосу амалы енгізіліп, 1 атты саны анықталған, солар бойынша 2,3,4... белгілеуде натурал сандар тізбесі алдыңғысына анықталған 1 санын енгізілген қосу амалы арқылы 1+1=:2, 2+1=:3, 3+1=:4,... түрінде жазылып, солардың негізінде 2+2 амалы анықталғанымен нәтижесі белгісіз болғандықтан бұл математикадық сұрақ болады да, оның «2+2=4» түріндегі жауабы теорема болып, дәлелдеуді қажет етеді

5. Жаттанды «Нөлге бөлуге болмайды» ережесі және оның дәлелдеуі – бөлу амалының анықтамасы бойынша жалғыз сан табылу талабына қарсы ондай санның мүлдем болмауы мен ондай сандардың шексіз көп болуын кез келген санды нөлге көбейткенде нөлге тең болуы негізінде шығатын «не шөл, не көл» мәтеліндегідей дәлелдемесі

§8. Қолданыстағы жаттанды сандар арасындағы реттік қатынастардыңреттеу аксиомаларының салдары ретіндегі дәлелденулері

1. Қолданыстағы үйреншікті рет мағыналы ережелердің реттеу аксиомаларының салдары ретіндегі оқылуы – екі санның арасындағы кейбір реттік қатынастардың орындалмауынан жалғыз біреуінің орындалуының әртүрлі жағдайлары, үш санның реттік қатынастарының орындалуынан транзитивтілік және қосу амалының қатынасты сақтау қасиеттерінен шығатын қорытынды қатынастар, екі санның арасындағы төрт мүмкін эквивалентті реттік қатынастар және де солардың дербес жағдайы болатын сан таңбасы бойынша оған қарама-қарсы санның таңбасын білу, теңсіздікті оң санға көбейткендегі теңсіздік сақталатын аксиомалық ереженің жалғасы ретіндегі теріс санға көбейтудің теңдік таңбасын сақтап, теңсіздік таңбасын қарама-қарсыға ауыстыруы, таңбалары белгілі екі санға көбейту және бөлу амалын қолданғандағы нәтиже таңбасын білу, бөлімі мен алымындағы сандардың реттік қатынасының бөлшектер арасындағы реттік қатынастары, бірнеше санды қосу және оң сандарды көбейту амалдарының реттік қатынастарды сақтауы

2. Қолданыстағы үйреншікті рет мағыналы ережелердің реттеу аксиомаларының салдары ретіндегі дәлелдеулері – екі санның арасындағы кейбір реттік қатынастардың орындалмауынан жалғыз біреуінің орындалуының әртүрлі жағдайларының, үш санның реттік қатынастарының орындалуынан транзитивтілік және қосу амалының қатынасты сақтау қасиеттерінен шығатын қорытынды қатынастардың, екі санның арасындағы төрт мүмкін эквивалентті реттік қатынастар және де солардың дербес жағдайы болатын сан таңбасы бойынша оған қарама-қарсы санның таңбасын білудің, теңсіздікті оң санға көбейткендегі теңсіздік сақталатын аксиомалық ереженің жалғасы ретіндегі теріс санға

көбейтудің теңдік таңбасын сақтап, теңсіздік таңбасын қарама-қарсыға ауыстыруыдың, таңбалары белгілі екі санға көбейту және бөлу амалын қолданғандағы нәтиже таңбасын білудің, бөлімі мен алымындағы сандардың реттік қатынасының бөлшектер арасындағы реттік қатынастарының, бірнеше санды қосу және оң сандарды көбейту амалдарының реттік қатынастарды сақтауының дәлелдемесі

3. Кез келген санның оң бүтін дәрежелерінің реттік қасиеттері – бір санды өзіне-өзін оң бүтін сан рет қосу арқылы қосындының мәнін қосылғыштар санын беретін оң бүтін санды берілген сан алдына қойып, көбейту түрінде жазу арқылы көбейту амалын анықтағандай санды өз-өзіне оң бүтін сан рет көбейту нәтижесі санның оң бүтін дәрежесі деп аталады да, негізі атты көбейткіштің оң жақ төбесіне дәреже атты көбейткіштердің санын жазу арқылы белгіленеді және ол келесідей қасиеттерде болады: кез келген нөлден өзгеше санның квадратының оң болуының дәлелдеуі, барлық нақты сандар арасындағы ерекше нөл мен бір сандарының 0<1 теңсіздігінде болуының дәлелдеуі, бүкіл бүтін сандардың ...<-2<-1<0<1<2<... өсу ретімен тізбелей жазылуының дәлелдеуі, бір дәрежелі әртүрлі негіздердің және оң мәнді бірдей негіздің әртүрлі дәрежелерінің өзара арақатынастары, 1 және 0 сандарының кез келген оң бүтін дәрежесінің өзіне тең болуының дәлелдеуі, жай бөлшектің оң бүтін дәрежесінің алымы мен бөлімінің оң бүтін дәрежелерінің қатынасына тең болуының дәлелдеуі, -1 санының оң бүтін дәрежелерісінің тақ не жұп болуына қарай сәйкес өзіне не оған қарама-қарсы санына тең болуы

4. Архимед аксиомасының салдары – әр саннан үлкен санның әрқашан табылуы

§9. Ақырсыз айтылымдар тізбегінің әр мүшесінің дұрыстығын ақырлы қадаммен растайтын математикалық индукция әдісі

1. Математикалық индукция әдісі – не жалған, не дұрыс деген екі мәнді қабылдайтын айтылым атты тұжырымдардан айтылымдар тізбегі құрылып, бірінші нөмірлі T_1 айтылымының дұрыстығын жеке дәлелдеу мен $k = 1$ нөмірінен бастап, кез келген k нөмірі үшін расында да дұрыстығы немесе жалғандығы жайлы ешқандай да сұрақ қозғалмастан T_k дұрыс айтылым деп қабылдануынан келесі $k+1$ нөмірлі T_{k+1} айтылымының дұрыстығын дәлелдеуден тұратын 2 қадаммен саны шексіз барлық оң бүтін нөмірлі айтылымдар дұрыстығын дәлелдейтін әдіс, қорытындысында бірінші қадам бойынша дәлелденген T_1 айтылымының дұрыстығынан дәлелденген екінші қадам бойынша T_2 айтылымының дұрыстығы шығады да, қалғандарының дұрыстығы екінші қадам бойынша бірінен бірі жалғасып, алдын-ала қай нөмірді алсақ та, дұрыстық сол нөмірлі айтылымға жетіп, ары қарай жалғасады және де бұл әдістің қолданысы өз оқылуына дәлме-дәл болып, теңдік пе, теңсіздік пе не мағыналы тұжырым ба әйтеуір әр айтылым өз нөмірімен жекеленуі керек

2. Ньютонның бином формуласы – екі қосылғыштан тұратан бином атты қосмүшелік, оның оң бүтін дәрежесі және оның қосынды түрінде Ньютон жазған жіктеуі

§10. Бүтін, рационал және иррационал сандардың нақты сандар аксиомаларының жүйесі негізінде құрылуы

1. Аксиомалық жүйедегі арифметикалық амалдар мен олар арқылы натурал және бүтін сандар туралы жинақталған қорытында мәлімет

2. Аксиомалар аясында өзара тең жай бөлшектер жиыны мағынасында анықталған рационал сандар – көбейту амалы және кері санның бар болуы аксиомалары бойынша анықталған алымы кез келген сан, бөлімі кез келген нөлден өзгеше сан ретінде бөлу амалымен алгебралық бөлшектер анықталады да, соның ішінде алымы кез келген бүтін, бөлімі нөлден өзгеше бүтін сандар болғандағы жай бөлшек атты дербес жағдайы болатын бөлшектің мәні рационал сан деп аталады, жай бөлшек өзінің алымы мен бөлімі арқылы анықталып, сол жәй бөлшекке мәні тең жазылуы өзге жай бөлшектің бәрі сол рационал санға тең болады да, рационал сан деп мәндері өзара тең барлық жай бөлшектер жиыны аталады. Қорытындысында, рационал сан деп қайсыбір жай бөлшек мәні болатын сан аталады

3. Оң және теріс мәнді жай бөлшектердің жазылулары – жай бөлшектің «+» және «–» таңбаларымен жабдықталған натурал сандардың қатынасы арқылы жазылғанда алымы

мен бөлімі бірдей таңбалы және әртүрлі таңбалы болуына байланысты сәйкес оң және теріс рационал сандарды өрнектеуі

4. Қолданыстағы жаттанды жай бөлшектерді көбейту ережесі және оның дәлелдемесіне сілтеме – аксиомалар салдарында дәлелденген алымын аламына, бөлімін бөліміне көбейтетін алгебралық бөлшектерді көбейту ережесінің дербес жағдайы ретінде

5. Әр санды ондық бөлшек түрінде Архимед аксиомасы негізінде бейнелеу әдістемесі – Архимед аксиомасы бойынша теріс емес сандар жиынын ұзындықтары $1, 1/10, \ldots, 1/(10^n), \ldots$ болатын өзара қиылыспайтын жартылай интервалдарға алдыңғысын 10 есе кеміте отырып, бірінен кейін бірін бөлгенде алынған сан сол жартылай интервалдардың қайсысына жататындығын 0-ден 9-ға дейінгі цифрмен белгілей отырып, санның ондық бөлшек деп аталатын алдымен ұзындығы 1 болғанда үтірге дейінгі бөлігін, артынша бөлшек бөліктерін үтірден кейін беретін жазылу

6. Нақты сандар деп аталған тек аксиомалық жүйені қанағаттандыратын элементтері айқындалмаған жиынның элементі ретінде ғана анықталған объектілерді ондық бөлшектер түрінде нақтылау – тек қана қасиеттермен берілген сандардың «қаламға түсетін» 10 цифрмен позициялық жүйеде жазылуы

7. Жай бөлшектерді салыстыру қатынастарының оларға пара-пар бүтін сандардың өзара қатынастары арқылы бейнеленуі – аксиомалар салдарында дәлелденген алгебралық бөлшектерді салыстыру сол оқылымды ережесінің дербес жағдайы ретінде

8. Жай бөлшектерді қосудың қолданыстағы үйреншікті ережесі – аксиомалар салдарында дәлелденген алгебралық бөлшектерді қосу ережесінің дербес жағдайы ретінде және алым және бөлім мағынасында қабылданған санның тең бөліктері неше рет алынып тұруын санап қосу арқылы бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу ережесінің тікелей дәлелдемесі, бөлімдері әртүрлі бөлшектердің мәнін сақтай отырып, бөлімі бірдей бөлшекке келтіру арқылы дәлелденген жағдайға әкелу

9. Жай бөлшек жазуындағы «?» сызықша таңбасының мағынасы $-m$ бірлік көлемдегі объектіні тең n бөлікке бөліп, олардың біреуінің алынуы не оған пара-пар өлшемі бірлік ретінде алынған объектіні тең n бөлікке бөліп, олардан m бөліктің алынуы

10. Оң мәнді ондық бөлшектерді барлық нақты сандарды жазу мақсатында қолдану – оң мәнді ондық бөлшектерді «+» және «-» таңбасымен жабдықтау арқылы сәйкес оң және оған қарама-қарсы сандар атты теріс сандарды таңбалау, ерекше 0=0,0. . . 0 және 1=1,0. . . 0. . . =0,9. . . 9. . . сандарының ондық бөлшек түрінде пара-пар жазылулары

11. Санның ақырлы не ақырсыз ондық бөлшек түрінде жазылуы – санның рационал не рационал емес болуына сәйкес ондық бөлшектің белгілі бір жерден бастап қандай да бір цифрлардың ақырлы тобының тізбектей қайталануына не ешқандай цифрлардың жүйелі қайталанбауына байланысты периодты және периодсыз деп аталып, екі топқа бөлінетін ондық бөлшек түрінде жазылулары, рационал сандағы кез келген орында тұрған цифр мәнін анықтау мүмкін болғандықтан санның өзі де айқын түрде жазылады, ал периодсыз ондық бөлшек жазылуында цифрлар саны ақырсыз және орналасуы жүйесіз болуына байланысты жазылудағы әрбір цифр әрқашан нақты анықтала бермегендіктен рационал емес сан ондық бөлшек арқылы толық көлемде жазылмайды, сол себепті олардың анықтама мағынасына сәйкес $\sqrt{2}, e, \pi$ тәрізді ықшам белгіленулері енгізіледі

12. Периодтық ондық бөлшекті мәні соған тең жай бөлшек түрінде жазу ережесі – ізденісті жай бөлшектің алымы мен бөлімін берілген ондық бөлшектегі периодсыз, периодты бөліктері арқылы есептеу алгоритмі

13. Периодсыз ондық бөлшектер басқа-рационал емес, яғни иррационал сандардың жиынын құруы және оның бос емес жиын екеніндігін көрсететін мысалдар

§11. Сандық жиынның супремумы мен инфимумы

1. Жоғарыдан шенелген сандық жиынның супремум атты нақты мәнді ең кіші жоғарғы шені әрқашанда бар болуының аксиомасы және оның екі сөйлеммен сипатталуы – біріншіден, супремум саны жиынның жоғарғы шені болуы, екіншіден, супремум санынан кіші кез келген нақты сан осы жиында одан үлкен сан әрқашан табылғандықтан бұл жиынның жоғарғы шені бола алмауы, яғни барлық мүмкін жоғарғы шендердің ең кішісі болуы. Төменнен шенелген сандық жиынның инфимум атты нақты мәнді ең үлкен

төменгі шені әрқашанда бар болуының аксиомасы және оның екі сөйлеммен сипатталуы – біріншіден, инфимум саны жиынның төменгі шені болуы, екіншіден, инфимум санынан үлкен кез келген нақты сан осы жиында одан кіші сан әрқашан табылғандықтан бұл жиынның төменгі шені бола алмауы, яғни барлық мүмкін төменгі шендердің ең үлкені болуы

2. Ең үлкен (ең кіші) элементі бар сандық жиынның супремумы (инфимумы) сол ең үлкен (ең кіші) элементтің дәл өзі болуы – біріншіден, жиынның ең үлкен (ең кіші) элементі сол жиынның жоғарғы (төменгі) шені болуы, екіншіден, одан кіші (үлкен) кез келген санның жиында жатқан ең үлкен (ең кіші) элемент үлкен (кіші) болғандықтан кіші (үлкен) сан жоғарғы (төменгі) шен бола алмағандықтан, ең үлкен (кіші) элемент жоғарғы (төменгі) шендердің ең кішісі (үлкені), яғни жиын супремумы (инфимумы) болуы

3.Сандық жиынның супремумын бейнелейтін сөйлемдердің сәл жеңілдетілген түрі - екінші шарттағы зерттелінді жоғарғы шеннен кіші санның кез келген емес кез келген жақындықта жатқан санмен шектелу мүмкіндігі

4. Сандық жиындардың супремумы мен инфимумының сол сандық жиындардың өзінде жатуының да, жатпауының да мүмкіндігі – сәйкес сегмент пен интервал мысалдары

5. Кез келген сандық жиынның супремумы мен инфимумының әрқашан да бар болуы – жиын әрқашанда жоғарыдан (төменнен) шенелмеген не шенелген болады да, жоғарыдан (төменнен) шенелмеген жиынның $+\infty(-\infty)$ тең ақырсыз жоғарғы (төменгі) шені бар болып, одан үлкен (кіші) сан болмағандықтан сол жоғарғы (төменгі) шен жалғыз болып, жалғыздығынан барлық жоғарғы шендер арасындағы ең үлкені де, ең кішісі де соның өзі, жинақтап айтқанда $+\infty(-\infty)$ жоғарыдан (төменнен) шенелменген жиынның ең кіші жоғарғы шені ретінде супремумы (инфимумы) болады, ал жоғарыдан шенелген жиынның супремумының (инфимумының) бар болуы супремумының (инфимумның) ең кіші (үлкен) жоғарғы (төменгі) шен деген анықтамасынмен беттесетін дәл оқылудағы 17 аксиома

6. Сандық жиыннның супремум, инфимум және элементтері арақатынастары – сандық жиынның жоғарғы (төменгі) шені қасиетті әр сан осы жиынның супремумымен (инфимумымен) артық (кіші) не тең қатынаста болуы, неғұрлым жиын кең болса, соғұрлым оның супремумы үлкен, ал инфимумы кіші болуы, берілген екі сандық жиынның бірінің әр элементі екіншісінің әр элементінен аспағанда нақты сандар болатын бірінші жиынының супремумы екінші жиынның инфимумінен аспауы, берілген сандық жиынының элементеріне қарама-қарсы элементтерден тұратын жиынның супремумы (инфимумы) бастапқы жиынның инфимумына (супремумына) қарама-қарсы санға тең болуы, берілген екі сандық жиындардың біріншісінің кез келген элементі екіншісінің бір ғана элементінен аспағанда нақты сандар болатын бірінші жиынының супремумы екінші жиынның инфимумінен аспауы, берілген сандық жиынының әр элементі оның супремумы мен инфимумынан арасында, дәл айтқанда, инфимумнан кіші емес, супремумнан артық емес болуы

§12. Оң санның арифметикалық (оң бүтін ретті) түбірі және оның бар болуы туралы теорема

1. Сан дәрежесі тақырыбындағы терминдік атаулар мен қалыптасқан белгілеулердің тарихи деректері – дәреже негізі, дәреже көрсеткіші

2. Санның оң мәнді дәрежесіне «кері» мағынадағы нақты санның оң бүтін мәнді және арифметикалық түбірлері – екіден кем емес оң бүтін дәрежесі берілген санына тең болатын әрбір сан сол санның оң бүтін түбірі деп, солардың арасындағы оң мәндісі арифметикалық түбір деп аталуы және $\sqrt[n]{a}$ арқылы белгіленуі, соның ішінде $n=2$ болғанда $\sqrt[2]{4}=\sqrt{4}$ арифметикалық түбірінің ± 2 емес, тек қана жалғыз $+2$ санына тең болуы, сонымен $\sqrt{4}=+2$ (бірақ ± 2 емес)

3. Арифметикалық түбірдің «бар болуы» туралы теорема мен одан туындайтын «арифметикалық түбірді жуықтап есептеу» мәселесі математикалық анализ дамуының бірден-бір себебі ретінде

4. Кез келген оң санның кез келген оң бүтін дәрежелі арифметикалық түбірі бар және ол жалғыз болуы туралы теорема мен оның дәлелдемесі – теорема орындалу

себебінің геометриялық тұрғыдан көрнекі түсіндірмесі мен соған негізделген 9 қадамдық аналитикалық дәлелдемесі

5. Арифметикалық түбірдің бар болуы туралы теореманың сандар құрылысында рационал санмен қатар рационал сан емес иррационал сан бар болуын нақтылауға негізделген салдары – рационал емес санның бар болуының кез келген периодсыз ондық бөлшектің мәні болуымен қатар басқа тұрғыдағы қасиетпен берілуі: квадраты 2 санына тең $\sqrt{2}$ – иррационал сан теоремасы

6. Әр интервалда рационал және иррационал сандардың бар болуы – Архимед аксиомасы мен арифметикалық түбірдің бар болу теоремасының жеке рационал және жеке иррационал сандардың нақты сандар жиынындағы тығыздығын сипаттайтын салдары ретінде

§13. Нақты санның нақты мәнді дәрежесінің a^x дәреже (сан дәрежесі), x дәреже көрсеткіші, a негізі – терминдерімен түсіндірмелі (дәлелдемелі) анықтамасы

1. Санды дәрежеге шығару мәселесінің туындануы мен шешімдер тізбесі – бір санды қайталап қосу амалы арқылы анықталған санды оң бүтін санға көбейту амалындағы оң бүтін санды кез келген нақты санға ауыстыру арқылы көбейту аксиомасының тобымен бекітілген кез келген екі санды көбейту амалы алынғандай бір санды қайталап көбейту амалы арқылы сол санды дәрежелеу амалында оң негіз үшін оң бүтін дәрежеден кезекпен теріс бүтін дәрежеге, нөл дәрежесіне, рационал дәрежесіне, иррационал дәрежесіне және теріс мәнді негіз үшін кейбір жай бөлшекті дәрежеге шығару амалын мағыналау үрдісі

2. Нақты санның оң бүтін дәрежесіне амалдар орындау ережелері мен реттік қатынастар – бірдей негізді оң бүтін дәреже түріндегі екі санды көбейту амалында олардың негіздері сақталып, бар мәселе нәтиже көрсеткішін анықтауға түседі де және оның бастапқы сандардың көрсеткіштерін қосу арқылы орындалуы, санның оң бүтін дәрежесінің оң бүтін дәрежесі осы негізді сол сандар көрсеткіштерінің көбейтіндісіне тең көрсеткішті дәреже болуы, екі санның көбейтіндісі мен бөліндісінің оң бүтін дәрежелері осы сандардың берілген оң бүтін көрсеткішті дәрежелерінің сәйкес көбейтіндісі мен бөліндісі, көрсеткіштері бірдей, оң мәнді әртүрлі негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздер үлкен болған сайын санның оң бүтін дәрежесенің де үлкен болуы, көрсеткіштері әртүрлі, оң мәнді бірдей негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздің бірден үлкен не кіші болуына сәйкес дәреженің көрсеткіштер арасындағы реттік қатынасты сақтауы немесе қарама-қарсы қатынаста болуы

3. «Сан дәрежесі» тақырыбындағы мәселесінің жалпы қойылуы – оң бүтін дәреже үшін дәлелденген алты қасиеттердің жалпылығымен кең қолданысты қамтамасыз ететін кез келген нақты мәнді көрсеткіш жағдайына тараталатындай сан дәрежесін анықтау

4. Оң нақты санның бүтін, рационал және иррационал дәрежелерінің анықтамалары – кез келген нөлден өзгеше негіздің нөлге тең көрсеткішті дәрежесі бірге тең болып $a^0 := 1 (a \in R, a \neq 0)$, нөлден өзгеше негіздің теріс бүтін мәнді дәрежесін анықталған оң бүтін көрсеткішті дәрежеге кері сан ретінде $a^{-n} := \frac{1}{a^n}(a \in R, a \neq 0, n \in N)$ анықтау арқылы оң бүтін мәнді дәрежемен бірге кез келген бүтін сан дәрежелі санды анықтау; теріс емес санның n – оң , m – кез келген бүтін сан болғанда $\frac{m}{n}$ оң жай бөлшек (рационал сан) дәрежесінің теріс емес санның n-ші дәрежелі арифметикалық түбірінің m-ші дәрежесі түрінде анықталуы $a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m \sqrt[n]{a^m}(a \in R, a \geq 0, n \in N, m \in Z)$; бірден кіші емес нақты санның оң иррационал дәрежесінің сол саннан аспайтын оң рационал мәнді көрсеткішті дәрежелердің супремумы ретінде анықталуы $a^x := \{\sup a^r : 0 < r < x\}(a \in R, a \geq 1; x \in R\ Q, x > 0)$, осындай негіздің теріс иррационал дәрежесінің анықталған оң иррационал дәрежеге кері сан түрінде анықталуы $a^x := \frac{1}{a^{-x}}(a \in R, a > 1; x \in R, x < 0)$, бірден кіші оң санның иррационал дәрежесі негізге кері сан болатын бірден үлкен санның анықталған иррационал дәрежесі арқылы анықталуы $a^x := (\frac{1}{a})^{-x}(a \in R, 0 < a < 1; x \in R)$

5. Нөлден өзгеше нақты санның нөл дәрежесі туралы $a^0 := 1$ келісімін сан дәрежесіне алдын ала қойылған алты қасиеттердің мәжбүр етуі – қарама-қарсы санның анықтамасын бойынша нөлге тең көрсеткішті онымен алмастырып, бірдей негізді дәреже түріндегі

сандардың көбейтіндісін дәреже көрсеткіштерін қосу арқылы есептегендіктен, ары қарай кері санның анықтамасы бойынша бірге тең екендігіне келу қадамдары

6. Ерекше $a = 1$ және $a = 0$ сандарының кез келген нақты мәнді дәрежелері жөнінде келісімдер – 1 санның кез келген нақты сан мәнді дәрежесінің бірге тең болуы, 0 санының оң нақты дәрежесінің нөлге тең болуы, ал оң емес мәнді, соның ішінде 0^0 дәрежесінің анықталмауы

7. Нақты санның бүтін дәрежесі және оң бүтін мәнді көрсеткіш үшін дәлелденген дәреженің алты қасиеттінің бүтін мәнді көрсеткішті дәреже жағдайына таратылу дәлелдемелері

8. Сан дәрежесі төңірегіндегі мәліметтер

§14. Сан дәрежесінің рационал көрсеткіштері жағдайындағы қасиеттерінің оқылулары мен дәлелдеулері және өзара эквивалентті әртүрлі құрылымды анықтамалары

1. Оң негізді рационал мәнді көрсеткішті дәреже қасиеттерінің дәлелдемелері – бірдей негізді рационал мәнді дәреже түріндегі екі санды көбейту амалында олардың негіздері сақталып, бар мәселе нәтиже көрсеткішін анықтауға түседі де және оның бастапқы сандардың көрсеткіштерін қосу арқылы орындалуы, санның рационал мәнді дәрежесінің рационал мәнді дәрежесі осы негізді сол сандар көрсеткіштерінің көбейтіндісіне тең көрсеткішті дәреже болуы, екі санның көбейтіндісі мен бөліндісінің рационал мәнді дәрежелері осы сандардың берілген рационал мәнді көрсеткішті дәрежелерінің сәйкес көбейтіндісі мен бөліндісі, көрсеткіштері бірдей, оң мәнді әртүрлі негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздер үлкен болған сайын санның оң рационал мәнді дәрежесенің де үлкен болуы, көрсеткіштері әртүрлі, оң мәнді бірдей негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздің бірден үлкен не кіші болуына сәйкес дәреженің көрсеткіштер арасындағы реттік қатынасты сақтауы немесе қарама-қарсы қатынаста болуы

2. Теріс санның дәреже көрсеткіші қысқартылмайтын жай бөлшек болғандағы дәрежесі – бөлшек бөлімі тақ сан болғанда негіздегі теріс санға қарама-қарсы санның бөлімдегі тақ сан дәрежелі арифметикалық түбірі анықтағаннан кейін оған қарама-қарсы санның алымға тең дәрежесін алу

3. Сан дәрежесінің көрсеткіші оң бүтін N, бүтін Z және рационал Q жиындар жағдайларында бірте-бірте келесі анықтама соның алдыңғысы арқылы кеңейе бергенде анықталған сан дәрежесінің анықтамасына эквивалентті бірыңғай супремум арқылы берілген өрнектеуі – иррационал мәнді көрсеткішті дәреженің супремум арқылы берілген анықтамасының рационал санға жарамдылығы және барлық жағдайды қамтитын бірден үлкен негіз үшін енгізілген анықтама мен тізбеленген анықтаманың пара-парлығы

§15. Сан дәрежесінің нақты мәнді көрсеткіштер жағдайынағы қасиеттерінің оқылулары мен дәлелдеулері

1. Дәреже көрсеткіші рационал және иррационал болғандағы сан дәрежелерінің өзара бөлек анықтамаларының жалпы нақты мәнді көрсеткіш үшін біріктірілген супремум негізіндегі бірыңғай анықтамасы

2. Оң негізді нақты мәнді көрсеткішті дәреже қасиеттерінің дәлелдемелері – бірдей негізді нақты мәнді дәреже түріндегі екі санды көбейту амалында олардың негіздері сақталып, бар мәселе нәтиже көрсеткішін анықтауға түседі де және оның бастапқы сандардың көрсеткіштерін қосу арқылы орындалуы, санның нақты мәнді дәрежесінің нақты мәнді дәрежесі осы негізді сол сандар көрсеткіштерінің көбейтіндісіне тең көрсеткішті дәреже болуы, екі санның көбейтіндісі мен бөліндісінің нақты мәнді дәрежелері осы сандардың берілген нақты мәнді көрсеткішті дәрежелерінің сәйкес көбейтіндісі мен бөліндісі, көрсеткіштері бірдей, оң мәнді әртүрлі негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздер үлкен болған сайын санның оң нақты мәнді дәрежесенің де үлкен болуы, көрсеткіштері әртүрлі, оң мәнді бірдей негізді сан дәрежерін салыстыру – оң мәнді негіздің бірден үлкен не кіші болуына сәйкес дәреженің көрсеткіштер арасындағы реттік қатынасты сақтауы немесе қарама-қарсы қатынаста болуы

§16. Оң санның логарифмі – анықтамасы, бар болуы, негізгі қасиеттері және қолдану өрісі

1. Логарифм анықтамасына әкелетін есептің қойылымы –нақты санды берілген мәнді негіздегі дәреже түрінде жазу мәселесі, соның ішінде бір көбейту амалын бір қосу амалына ауыстыруға мүмкіндігі

2. Сан логарифмінің анықтамасы мен белгілеуі – нақты санның берілген бірден өзге оң мәнді негіздегі дәреже түріндегі жазуындағы грек тілінен алынған $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (логос) «сөз, байланыс» және $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (арифмос) –«сан» деген мағынадағы логарифм деп аталатын дәреже көрсеткіші

3. Логарифмнің бар болуы туралы теорема – қабылданған анықтамадағы талаптардың дәлме-дәл және бірмәнді орындалуын беретін тұжырым

4. Логарифм анықтамасына эквивалентті тепе-теңдік пен дербес жағдайлары – дәреже көрсеткіші логарифмге тең болғанда санға тең болуы, жеке бірге және негізге тең сандардың логарифмдерінің сәйкес нөлге және бірге тең болуы

5. Сан логарифмінің негізгі қасиеттері – көбейтіндінің, бөліндінің, дәреженің логарифмі сәйкес логарифмдерінің қосындысы, айырмасы, дәреже көрсеткішінің логарифмге көбейтіндісіне тең болуы, логарифмде бір негізден екінші негізге көшу, негізі бірден үлкен және бірден кіші оң сан болуына сәйкес логарифм сандар арасындағы қатынастарды сақтауы немесе қарама-қарсы реттік қатынасқа алмастыру

6. Сан логарифмінің негізгі қасиеттерінің дәлелдемелері – көбейтіндінің, бөліндінің, дәреженің логарифмі сәйкес логарифмдерінің қосындысы, айырмасы, дәреже көрсеткішінің логарифмге көбейтіндісіне тең болуы, логарифмде бір негізден екінші негізге көшу, негізі бірден үлкен және бірден кіші оң сан болуына сәйкес логарифм негіз арасындағы қатынастарды сақтауы немесе қарама-қарсы таңбаға алмастыруы қасиеттерінің дәлелдеуі

7. Логарифмнің сандарды көбейтудің бір амалын қосудың бір амалына ауыстыру қасиетінің қолданбалық маңызы

II ТАРАУ. САНДЫҚ ТІЗБЕК ШЕКТЕРІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

§1. Тізбек атты функция және оның нақты мәнді шегі

1.Тізбектің анықтамасы, белгілеулері және берілу тәсілдері – тізбек табиғаты функция және ол мүмкін барлық функциялар арасында барлық оң бүтін сандар жиыны анықталу жиыны болуымен ерекшеленеді, ықшамды жазу мақсатында әдеттегі $f(n)$ түріндегі функция белгілеуінің орнына аргументті мәннің төменгі интексіне жіберу арқылы екі жақшаға ықшамдалған жинақы $x_{n}{}_{n=1}^{\infty}$ белгіленуіне алмастыру, ереже тікелей сөйлеммен не сөйлемнің символдық жазылуы формуламен, тізбектің бір нөмірінен бастап келесі мүшесі тура алдындағы бірнеше мүшелері арқылы толық бейнелейтін рекуррентті формуламен, бастапқы бірнеше мүшенің жазылуынан жалпы ережесін тану арқылы берілуі

2.Тізбектің нақты мәнді шегінің анықтамасы – «Тізбектің нақты мәнді шегі» атауы тікелей оқылуында тізбек нөмірі өскен сайын тізбектің мүшелері тізбек шегі деп аталатын нақты санға жақындай түсуі деген логикалық түйінге керісінше алдымен нөмірге бағынышты тізбек мәндерінің тізбек шегіне жақындығы тағайындалып, артынша сол теңсіздікті қанағаттандыратын мәндердің нөмірлеріне нақтылы бір нөмірден бастап, бір де бір нөмір қалдырмай барлық нөмірлер сол жақындықты сақтайтындығы жайлы шарт қойылып, осы реттегі екі теңсіздік $\varepsilon - K(\varepsilon)$ тіліндегі шек анықтамасын құрауы

3.Тізбек шегі анықтамасының қалыпты түсініктерге сәйкес келе бермеуі – шек анықтамасындағы оң болуынан басқа ешқандай шарт қойылмаған ε саны бір уақытта «бекітілген» және «кез келген» болуы және осы сөздерінің мағынасы қарама-қарсы болғанымен, бұл жағдайда үйлесімділігі, әрбір оң сан туралы алдын ала ол үлкен немесе кішкентай деп жеке өзін, басқа санмен салыстырусыз айтуға болмауы – «Берушіге бесеу көп, алушыға алтау аз», белгілі бір нөмірден бастап барлық нөмірлерге орындалатын қасиетті сақтай отырып, сол басталатын нөмірді көтере алу мүмкіндігі, тізбек шегіне кері анықтаманы нық тұжырымдауда сөздің көп мағынасымен жаңылмау үшін бірмәнді жазуға мүмкіндік беретін тізбек шегі анықтамасының символдық түрде жазылуы, символдық жазылу мен оқылуының ретінің кейбір тілдерде сақталып, кейбірінде сақталмауы, әрбір мүшесімен анықталатын тізбектің шегі болуына да, болмауына да және болған жағдайда оның мәніне де әр жеке алынған мүшесінің ешқандай да әсері болмауы

4.Тізбектің шегіне ұмтылудың түрлері – тізбек мүшелері өз шегіне «жабысып», жоғарыдан не төменнен біржақты ақырсыз жақындай түсіп, ақырсыз екіжақты жақындай түсіп, кезекпен біржақты қашықтап не шегімен беттесе отырып жақындай түсіп, біресе жақындап, біресе алыстап ырғалып ұмтылуы

§2. Нақты мәнді шек анықтамасындағы шенелген және шенелмеген маңайлар түсініктерін толық логикалық жалғастыру арқылы тізбек шегінің алты түрін қамтитын жалпы анықтамасына келу

1. «Маңай» ұғымына әкелетін шек анықтамасындағы қорытындылар – шек анықтамасы теңсіздігіндегі абсолют шаманың анықтамасы бойынша сол тізбек шегін қамтитын интервалға келу арқылы тілдегі мағынасымен дәлме-дәл келмейтін нақты сан үшін ақырлы «маңай» ұғымын және берілген нөмірден үлкен нөмірлерді интервал түрінде жазып, $+\infty$ «маңай» ұғымын анықтау

2.Шенелген және шенелмеген маңайлар құрылымдарының логикалық жалғастыруында пайда болатын жүйе – нақты санның (нүктенің) маңайы, сол маңайдың нүкте арқылы қақ бөлінген оң және сол жақты атты жартылай интервал түріндегі маңайлары, ақырсыз $+\infty$ санының маңайы және оған симметриялы ақырсыз $-\infty$ санының маңайы, осы $+\infty$ пен $-\infty$ маңайларының бірігуі арқылы алынған жаңадан енгізілген ∞ символының маңайы

3.«Маңай» ұғымы төңірегіндегі талқылаулар – ақырлы және ақырсыз нүктелердің бір-бірінен өзгеше маңайларын геометриялық тұрғыдан сан өсін ию арқылы ұқсас сипатта екендігін көрсету, қолданыстағы «маңай» ұғымы тілдегі лексикадағы «жақындық» мағынасын қандай кіші болса да әрқайсысы жеке бермегенімен, жинақталып жүйелі түрде беруі

4. Сандық тізбектің ақырлы және ақырсыз алты түрлі шегі – алдын ала берілген кез келген және бекітілген тізбек шегі маңайына жатқан тізбек мәндерінің нөмірлері $+\infty$ маңайында жату талабымен берілген анықтамалар және оның символдық түрде жазылулары

5. Тізбек мүшелерінің шегіне жай, жоғарыдан және төменнен ұмтылуыларының арақатынасы – тізбек өзінің ақырлы немесе ақырсыз шегіне жоғарыдан не төменнен ұмтылуынан жай да ұмтылуы, бірақ тізбек мәндері екі жағынан да ұмтылу мүмкін болғандығынан керісінше жағдайдың әрқашан орындала бермеуі

6. Шек анықтамасындағы алдын ала берілген ε маңайы үшін $K(\varepsilon)$ нөмірін табу үлгісі ретінде барлық оң бүтін сандар жиынында анықталатын элементар функциялар мәндерінен құрылған тізбек шектерін есептеу мысалдары

§3. Сандық тізбектің шегі жоқ деген не?

1. Сандық тізбектің нақты мәнді шегінің анықтамасын қарама-қарсы тұжырымдау – нақты мәнді (ақырлы) шектің кері анықтамасы

2. Сандық тізбек шегінің жалпы анықтамасын қарама - қарсы тұжырымдау – алты түрлі шекті қамтитын жалпы анықтамаға кері анықтама жасау арқылы алты жағдайдың әрқайсысы тізбек шегі болмайтындығын жеке-жеке тұжырымдау және оны кесте түрінде көрнекі өрнектеу

3. Сандық тізбектің ешқандай (ақырлы да, ақырсыз да) шегі жоқ болуы – сандық тізбек шегінің жалпы анықтамасына қарама-қарсы тұжырым алты жағдайдың бәрінде де орындалуы, соның арасында $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ тізбегінің ешқандай шегі жоқ

§4. Ақырлы не ақырсыз шегі бар сандық тізбектердің қасиеттері

1. Орындалуы өз-өзінен анық сияқты болса да, математикада жиі қолданыста болатын екі тұжырымның дәлелдемесі – абсолют шамасы бойынша кез келген оң саннан кіші санның нөлге ғана тең болуы, сан барлық оң нақты сандар жиында өзгергенде, әрбір бекітілген оң сан үшін олардың көбейтіндісі түріндегі сандар да барлық оң нақты сандар жиында өзгеруі

2. Шенелген және шенелмеген сандық тізбектер – сандық тізбектің заты функция болғандықтан оның мүшелері деп аталатын мәндерінен құрылған жиын шенелуіне не шенелмеуіне сәйкес тізбектің де шенелген не шенелмеген болуы, дәл айтқанда, тізбектің әрбір мүшесінің абсолют шамасы аспайтындай сан табылуы мен керісінше, қандай сан алынса да, абсолют шамасы одан үлкен тізбек мәнінің бар болуы, сандық тізбектің шенелгендігі мен шегі бар болуының арақатынастары

3. Жинақталатын деп те аталатын ақырлы шегі бар тізбектердің қасиеттері – тізбектің нақты мәнді шегінің жалғыздығы, жинақталатын тізбектен алдыңғы мүшелерінің ақырлы санын алып тастағанда шыққан жаңа тізбектің бастапқы тізбек шегіне жинақталуы, жинақталатын тізбек мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған жаңа тізбектің берілген тізбек шегінің абсолют шамасына жинақталуы, шегі нөл емес нақты сан болатын тізбектің мүшелері белгілі бір нөмірден бастап шегінің таңбасын сақтауы, екі жинақталатын тізбек шектерінің белгілі бір нөмірінен бастап орындалатын мүшелерінің арасындағы реттік қатынасты сақтауы, үш тізбек беріліп, мүшелері $x_n \leq y_n \leq z_n$ қатынасты сақтап, екі шеткі тізбектің шектерінің тең болуынан ортаңғы тізбектің де шегі сол тізбектер шегіне тең болуы

4. Тізбектерге қолданылатын арифметикалық амалдар – нөмірлері бірдей жинақталатын тізбектер мүшелері үшін арифметикалық амалдар орындалып, нәтижесінде мәні тізбек мүшелеріне сол амал орындалған сол нөмірлі жаңа тізбек құрылады да, оның шегі бастапқы шектерге дәл сол арифметикалық амалдарды қолдану нәтижесіне тең болады

§5. Шектері бар екі тізбекке амалдар қолдану нәтижесінде пайда болған анықталмағандықтар, оның түрлері және анықталмағандықты ашу есептері

1.Нақты сандарға ұмтылатын екі тізбектің қатынасы болатын сандық тізбекті шек тұрғысынан толық зерттеу – алымындағы тізбектің шегі нөлге тең, бөліміндегінікі нөлден өзгеше болғанда қатынас түрінде анықталған тізбек шегі нөлге тең болуы, алымындағы тізбектің шегі нөлден өзгеше бөліміндегінікі нөлге тең болғанда қатынас түрінде анықталған тізбек шегі шексіздікке тең болуы, алымындағы тізбектің де, бөліміндегі тізбектің де шегі нөлге тең болғанда қатынас түрінде анықталған тізбек шегі жайлы алдыңғы екі жағдайдағыдай нақтылы нәтижелі мәлімет бере алмау

2. $\frac{0}{0}$ түрінде анықталмағандық және «Анықталмағандықты ашу» есептері – алымындағы тізбектің де, бөліміндегі тізбектің де шегі нөлге тең болғанда қатынас түрінде анықталған тізбек шегі барлық мүмкін алдын ала берілген ақырлы не ақырсыз сан, не ешқандай шегі жоқ болу жағдайларының әрқайсысының орындалуы мысал арқылы көрсетіледі де, нақты алынған қатынас үшін солардың қайсысы екендігін анықтау «анықталмағандықты ашу» атты мәселені құрады

3. Анықталмағандықтардың түрлері және «Анықталмағандықты ашу» жалпы мәселелері – $\frac{0}{0}$ анықталмағандығы тәрізді нәтиже алдын ала белгісіз болатын $(+\infty)-(+\infty), 0\cdot(+\infty), \frac{\pm\infty}{-\infty}, 1^{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтар және осы шек бар ма әлде жоқ па, бар болса мәні қандай дегенді анықтау «анықталмағандықты ашу»

§6. Әрқашанда біржақты, ақырлы не ақырсыз шегі бар монотонды тізбектер

1.Монотонды тізбектер – тізбек нөмірлерінің үлкеніне үлкен мәні не біріңғай кіші мәні сәйкес келуіне қарай қатаң өспелі не қатаң кемілелі болу қасиеттері және де осы реттік қатынастармен қоса мәндері тең де болуы мүмкін кемімейтін және өспейтін деп аталатын сандық тізбектер

2. Монотонды тізбектің шегінің бар болуы туралы теорема – кемімейтін (өспейтін) тізбектің шегі бар және ол тізбек мәндерінен құрылған жиынның супремумына (инфимумына) теңдігі, сондықтан жоғарыдан (төменнен) шенелген және шенелмеген болуына қарай нақты санға не ақырсыз $+\infty(-\infty)$ санына тең болуы

3.Жинақталатын монотонды тізбектердің ерекше мысалдары – дөңгелек ауданының іштей сызылған дұрыс көпбұрыштар аудандарының нақты мәнді шегі арқылы бейнеленуі, факториал тізбектің өсуі көрсеткіштік тізбегінің өсу жылдамдығынан «шаңына да ілестірмей» ақырсыз жылдам болуы, оң санның квадраттық түбіріне кеми көрсеткіштік жылдамдықпен ұмтылатын тізбек

4. Сегменттер ұясы туралы теорема монотонды тізбектердің шектерінің геометриялық бейнесі ретінде – бірінің ішіне бірі орналасқан сегменттердің сол жақ шектік нүктелері кемімейтін, ал оң жақ шектік нүктелері өспейтін тізбектер құрады да, әрқайсысының нақты мәнді шектері бар болады және сегмент ұзындықтарынан құралған тізбектің шегі нөл болғандықтан олардың шектері өзара тең болып, дәл сол шек мәні нүкте ретінде осы сегменттердің әрқайсысында жатуы

5. Нақты санның ондық бөлшек түрінде жазылуын сегменттер ұясы арқылы сипатталуы – ондық бөлшек түрінде жазылған санның әр разряды бойынша сегмент құрылып, сол сегменттер ұясы жазылған санды қамтуы

§7. Математиканың және жаратылыстанудың негізін құрайтын бес санның бірі – e санының анықтамасы, рационал емес сан болуы және оның кез келген дәлдікпен рационал санмен жуықтау формуласы

1. e санының анықтамасы – алдын ала өзгеру тәртібі көрінбейтін, жалпы мүшесі $x_n := (1+\frac{1}{n})^n$ өспелі, шенелген тізбектің нақты мәнді шегі ретінде

2. Өзгеру тәртібі түсініксіз $(1+\frac{1}{n})^n$ тізбек шегі ретінде анықталған e санына көрнекі ақырлы қосындының төменнен ақырсыз жақындауы және сол екі санның бір-бірінен ауытқуының жоғарыдан айқын түрде бағалануы – жалпы мүшесі фактариалдарға кері сандардың ақырлы $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}$ қосындысының e санына кіші болып ұмтылуы және әр n қосылғышты қосындының ерекше е санынан жақындығының $\frac{1}{n!n}(n=1,2,...)$ санынан кіші болуы

3. Жай бөлшек түрінде жазылмайтын рационал емес сан әріппен белгіледі, соның ішінде теория мен ғылыми есептеуде өз орны бар санның Эйлердің (Euler) құрметіне е әрпімен белгіленуі және оны кез келген дәлдікпен жуықтайтын рационал санның табылуы – $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}=r_n+\frac{\theta_n}{n!n}(0<\theta_m<1)$ теңдігінен кері жору тәсілімен e саны иррационал сан екендігі көрсетіледі де, осы формуланың өз сипатынан-ақ кез келген дәлдікпен санына жақын $r_n=\frac{n!+(n-1)!+...+1!}{n!}$ түріндегі рационал санды беруі

4. Негізі $e>1$ саны болатын натурал логарифм – ондық жүйемен байланысты $lgx := log_{10}x$ тәрізді ерекше e негізді $lnx := log_e x$ логарифмі

5. Жаратылыстанудың ерекше сандарының бірі е саны төңірегіндегі зерттерлер мен олардың түрлері – 1^∞ түріндегі $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ анықталмағандықтың монотонды тізбектің шегі бар болуы туралы теоремамен ашылуы және бар болу деңгейінде анықталған иррационал е санын кез келген дәлдікпен $e-(1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!})\leq\frac{1}{n!n}$ арқылы қолданысқа жарамды рационал санмен жуықтау

§8. Сандық тізбектердің тізбекшелер мен дербес шектер

1. Сандық тізбектің жалпы алты түрдегі шегі бар болуының не ешқандай да шегі болмауы мәселесінің негізгі зерттеу құралы болып табылатын оның тізбекшесі деп аталатын тізбегі және де дербес шегі атты шегі – алдын -ала берілген сандық тізбектің қайсібір өспелі оң бүтін мәндерінен түсірілген өспелі нөмерлерге сәйкес мәндерінің өздері тізбекше деп аталатын жаңа тізбек құрады да, сол тізбектің шегі бар болған жағдайда оның ақырлы не ақырсыз мәні бастапқы сандық тізбектің дербес шегі деп аталады

2. «Тізбекше-дербес шек» түсініктері «Сандық тізбек шегі» теориясына ешқандай жаңалық әкелмейтін дербес шектер мәндері алдын-ала белгілі сандық тізбектер – Шегі бар сандық тізбектің әр тізбекшесінің сол ақырлы не ақырсыз санға тең шегі бар болуымен жоғарыдан (төменнен) шенелмеген тізбектің әрқашанда ақырсыз $+\infty(-\infty)$ дербес шегі бар болуы

3. Сандық тізбектің барлық дербес шектерінен құрылған жиынының мүмкін құрылымдары – алдын-ала берілген шектің мүмкін алты түрі де және олардың әрбір жиыншасы дербес шектері дәл сол жиындар болатын сандық тізбектердің бар болуы, сондай-ақ барлық дербес шектер жиыны сегмент болатын сандық тізбегі мысалы мен әр интервалдың ондай қасиетте бола алмайтыны туралы мәлімет

§9. Әр сандық тізбектің ең үлкен және ең кіші дербес шегі бар болуы туралы больцано-вейерштрасс теоремасы және солардың тізбек мүшелері арқылы сипаты

1. Сандық тізбекті зерттеудегі «тізбекше-дербес шек» әдісін мазмұнды ететін әр шенелген сандық тізбектің нақты сан болатын кемінде бір дербес шегінің бар болуын беретін Больцано-Вейерштрасс теоремасы – шенелген сандық тізбектің дербес шектерінің ішінде ең үлкен және ең кіші дербес шегі бар болуын, демек екеуі тең болғанда бір, өзара тең емес болғанда кемінде екі дербес шектің бар болуын қамтамасыз ететін сегменттер ұясы туралы теореманы тізбек мүшелерін қамтитын сегментті тең бөле отырып, сегменттер ұясын құру барысында тізбектің ақырсыз мүшелері тек біреуінде жатса, мүшелердің ақырсыз саны жатқан бөлігін, ал екі бөлігінде де жатса, тек оң (сол) жақ бөлігін ала отырып қолданғанда, жоғарғы (төменгі) шек деп аталатын ең үлкен (кіші) дербес шекке келуі

2. Қайсыбір нақты сан берілген сандық тізбектің (шенелген не шенелмеген) ең үлкен (ең кіші) дербес шегі болуы үшін сол тізбекке және санға қойылатын шарттар – нақты сан берілген тізбектің дербес шегі болуымен қатар, одан үлкен (кіші) дербес шек болмайтындығын қамтамасыз ететін алдын ала берілген одан үлкен (кіші) кез келген сан үшін белгілі бір нөмірінен бастап тізбек мүшелерінің барлығы сол саннан кіші (үлкен) болуы

3. Сандық тізбектің нақты мәнді жоғарғы (төменгі) шектерінің толық сипаттамасы – нақты мәнді тізбек шегі анықтамасындағы жоғарғы (төменгі) жақ теңсіздігі белгілі бір нөмірден бастап бүкіл тізбек мүшелері үшін орындалса, төменгі (жоғарғы) теңсіздік нөмірлері жоғарыдан шенелмеген мүшелер үшін орындалуы

4. Шенелген тізбектердің ең үлкен (ең кіші) дербес шектерінің тізбек мүшелерінің inf-sup (sup-inf) бойынша тікелей бейнеленуі – әр оң бүтін санды нөмір үшін нөмірлері одан кем емес барлық тізбек мәндерінен құрылған жиынның супремумдары (инфимумдары) нақты мәнді өспейтін (кемімейтін) тізбек құрып, шегі сол сандардың инфимумына (супремума) тең жоғарғы (төменгі) шектің дәл өзі болуы

5. Жоғарғы шектің $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = \inf \sup x_n$ және төменгі шектің $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n = \sup \inf x_n$ белгілеулерінің мағыналары

6. Больцано-Вейерштрасс теоремасының жалпы түрдегі қорытынды оқылуы – кез келген шенелген де, шенелмеген де сандық тізбектің ең үлкен және ең кіші дербес шектерінің бар болуы

§10. Коши критерийі – сандық тізбектің нақты мәнді шегі бар болуын оның ішкі құрылысы арқылы бейнеленген қажетті және жеткілікті шарты және оның сапалық талқылаулары

1. Коши шарты мен Коши тізбегі – нақты мәнді шегі бар тізбектің анықтамасынан шығатын тізбек ішкі құрылымын белгілі бір нөмірінен бастап кез келген екі мүшесінің бір-біріне жақын болуымен сипаттайтын шарт пен сондай қасиетті тізбек аталымы

2. Сандық тізбектің шек мәнін қатыстырмай, тек қана тізбек мүшелерінің ішкі құрылысы арқылы нақты мәнді шегі бар болуының қажетті және жеткілікті шартын беретін Коши критерийінің оқылуы және дәлелдемесі – барлық сандық тізбектерден мүшелерінің бір-біріне Коши шарты атты ақырсыз жақындық қасиетімен ерекшеленетін нақты мәнді шегі бар тізбектерді бөліп алу

3. Коши критерийінің жинақталатын тізбектер теориясындағы орны – нақты мәнді шегі бар тізбек анықтамасындағы шарттардың барлығы тікелей сол нақты мәнді шек төңірегінде болғанда, Коши критерийінде нақты мәнді шек бар екендігі мәні көрсетілмей, оның мүшелерінің құрылымы арқылы берілуі; Коши критерийінің құндылығы кез келген нақты мәнді шегі бар тізбекке арналған жалпылығы болады да және құндылығымен қатар жүретін кемшілігі Коши шартының орындалуының техникалық тұрғыдан тексеруі қиындығында, ал монотонды тізбек үшін нақты мәнді шек бар болуының кемшілігі мен құндылығы оның қолдану аясы тек монотонды тізбектерге арналған тар болуы мен тексеруі жеңіл болуында; Коши шартының орындалмауы тізбектің нақты мәнді шегі

болмауын беріп, қалған екі – шегі бар және ол ақырсыз болуы не мүлдем шегі болмауы жағдайларының біріне әкелуі

4. Объектінің таза «Бар болу теоремасы» мен «Құрылымдық теоремасы» сипатындағы тұжырым түрлері – Коши критерийі тек тізбектің нақты мәнді шегі бар болуын берсе, монотонды тізбектің шегі туралы теоремада шектің дәл мәні тікелей тізбек мүшелері арқылы $\sup - \inf$ бойынша құрылады

§11. Жоғарғы шек деп аталатын ең үлкен және төменгі шек деп аталын ең кіші дербес шектердің жинақталатын да, жинақталмайтын да барлық сандық тізбектердің құрылысы мен қасиеттерін сипаттауы

1.Тізбектің «Жай», жоғарғы және төменгі нақты мәнді шектерінің өзара байланысты $\varepsilon - K(\varepsilon)$ тіліндегі анықтамаларының жинақталған арақатынастары

2. Жоғарғы және төменгі шектерді $0{,}1{,}0{,}1{,}\ldots$ тізбек мысалында есептеу үлгісі – аталмыш тізбектің 0 мен 1 сандарына тең екі дербес шектері бар екендігін және одан басқа сан дербес шек бола алмайтындығын көрсетіп, яғни 0,1 сандық жиыны барлық мүмкін дербес шектер жиыны болып, 0 саны ең кіші, 1 саны ең үлкен дербес шек екендігін алу

3. Тізбектің нақты мәнді шегі бар болуының және болмауының дербес шектер тіліндегі критерийлері – сандық тізбектің нақты мәнді шегі бар болуына оның төменгі және жоғарғы шектері нақты мәнді, өзара тең болуының және тізбектің нақты мәнді шегі болмауына өзара бөлек екі дербес шектің бар болуының қажеттілігі мен жеткіліктігі, сонымен қатар шенелген тізбектің ақырлы да, ақырсыз да, бір сөзбен айтқанда ешқандай шегінің болмауы үшін төменгі шектің жоғарғы шектен кіші болуының қажеттілігі мен жеткіліктігі

4. Тізбек шегі бар және $+\infty, -\infty$ не ∞ ақырсыз сандардың біріне тең болуының және ақырлы да, ақырсыз да, бір сөзбен айтқанда ешқандай шегі болмауының дербес шектер тіліндегі критерийлері – сандық тізбектің шегі ақырсыз болуы үшін оның әр дербес шегі $+\infty, -\infty, \infty$ ақырсыз сандарының біріне тең болуының және тізбектің ешқандай шегі болмауы үшін кемінде бірі ақырлы екі әртүрлі дербес шектерінің бар болуының қажеттілігі мен жеткіліктігі

5.Коши критерийінің дербес шектер тіліндегі тағы бір дәлелдеуі – Коши шарты орындалатын тізбектен Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша жоғарғы және төменгі шектерге ұмтылатын тізбекшелер табылып, шектің тікелей анықтамасынан шыққан нақты мәнді жоғарғы және төменгі шектер теңдігінен нақты мәнді шегі бар болуының дербес шектер тіліндегі критерийлеріне келуі

6.Теңсіздікте жоғарғы және төменгі шектерге көшу туралы теорема – сандық тізбектің жоғарғы және төменгі шектерінің өзара жеке тізбек мүшелері арасындағы реттік қатынасты сақтауы

7. Жоғарғы және төменгі шектер арқылы тізбектің шенелгендік қасиеттерінің пара-пар бейнелеулері – тізбектің мәндер жиынының жоғарыдан, төменнен және жалпы шенелгендігінің не шенелмегендігінің сәйкес жоғарғы, төменгі және абсолют шамаларынан құрылған тізбектің жоғарғы шектерінің ақырлы болуы немесе $+\infty, -\infty, \infty$ ақырсыз сандарына тең болуы арқылы жазылуы

8. Шенелген сандық тізбектің оның жоғарғы және төменгі шектері негізіндегі өзгеру заңдылығының аналитикалық құрылысы мен геометриялық сипаттамасы – тізбектің жоғарғы және төменгі шектерінен жасалған жолақты сәл кеңейткенде белгілі бір нөмірден бастап, мүшелерінің барлығы осы кеңейтілген жолақта жатады да, оны сәл тарылтқанда қандай оң сан алсақ та, одан үлкен нөмірлі мүшелердің міндетті түрде жолақ астына да, үстіне де шығып кетуі

§12. Тізбек дербес шегінің мазмұнын ашатын маңайлар тіліндегі эквивалентті анықтамалары және соның негізіндегі Больцано-Вейерштрасс теоремасының тағы бір дәлелдеуі

1. Сандық тізбектің нақты мәнді дербес шегінің тағы екі анықтамасы – тізбектің берілген санға ұмтылатын тізбекшесі бар болуымен қатар нақты санның алдын ала алынған кез келген маңайында қалауымызша үлкен нөмірлі тізбек мүшесі жатуы не оған пара-пар тізбектің ақырсыз көп мүшелерінің жатуы

2. Дербес шектің қабылданған үш анықтамаларының эквиваленттілігі – нақты сан тізбектің қандай да бір анықтама бойынша дербес шегі болғанда, онда қалған екеуі бойынша да дербес шегі болуы

3. Бір ұғымның бірнеше эквивалентті анықтамаларының пайдалылығы – шенелген тізбектер үшін ең үлкен және ең кіші дербес шегі бар болуы жайлы Больцано-Вейерштрасс теоремасының дербес шектер қасиеттерін бойына сіңірілген эквивалентті анықтамалар арқылы мәселе мағынасын ашатын тағы бір дәлелдемесі

III ТАРАУ. САНДЫҚ ФУНКЦИЯ ШЕКТЕРІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

§1. Нақты мәнді айнымалының нақты мәнді функциясының негізгі анықтамалары мен қасиеттері

1.Нақты мәнді айнымалының нақты мәнді функциясы-аргументі де, мәні де нақты сан болатын функция

2. Координаталық жазықтық атты жазықтықтағы тік бұрышты координаталық жүйе – жазықтықтағы әр геометриялық нүктенің координаталары деп аталатын реттелген екі нақты санмен өрнектеу арқылы жазықты арифметикаландыру

3. Функция графигінің жиын түріндегі аналитикалық анықтамасы мен функция графигі деп аталатын жазықтықтағы фигура ретіндегі геометриялық бейнесі түрінде берілген өзара бөлек екі сипаттамасы – сәйкес x аргументі функция анықталу жиынында өзгергендегі $(x, f(x))$ реттелген нақты сандардан құрылған барлық жұптар жиыны және координаталық жүйедегі барлық $(x, f(x))$ геометриялық нүктелерден салынған сызық сурет

4. Квадраттық функциялар мысалындағы функциялар графиктерінің түрлендіру үлгілері – өсінің бойымен оңға не солға жылжыту, Oy өсінің бойымен жоғары не төмен жылжыту, Ох және Оу өстерінің бойымен созу не сығу

5. Функция графиктерінің түрлендірулері – өсінің бойымен оңға не солға жылжыту, Oy өсінің бойымен жоғары не төмен жылжыту, өстерінің бойымен созу не сығу, функция модулінің графигі

6. Функция графигінің математикадағы орны – математикалық теорияны графиксіз де құруға болуы және графигі салынбайтын функциялар

7. Функция графигінен көрінетін геометриялық қасиеттердің аналитикалық оқылулары – сандық функцияның монотондылығы, дөңестілігі, иілу нүктесі, жұп және тақтылығы, периодтылығы, шенелгендігі, кері функция

8. Сандық функцияның супремумы және инфимумы – функция ұғымының табиғаты ереже, ал супремум мен инфимум ұғымдары тек сандық жиын үшін ғана анықталғандықтан бір қарағанда «функцияның супремумы мен инфимумы» сөз тіркесі іштей қайшылыққа келетіндей болғанымен, олар, ширатып айтқанда, функцияның барлық мәндерінен құрылған сандық жиынның сәйкес супремумы мен инфимумы болады

9. Тригонометриялық функциялардың координаталық жазықтықтағы бірлік шеңбер арқылы анықталу ережелері – радиусы бірге тең центрі координаталар басында жатқан бірлік шеңбердің бойынан әрбір нақты санға бір нүктені сәйкес қою үрдісі, сол нүкте-векторы мен Ох өсінің арасындағы бұрыштың радиандық және градустық өлшемдер жүйесін енгізіліп, сол өлшеу жүйесінің бірінен екіншісіне көшу формулары, бірлік шеңбер бойындағы ұзындығы $|x|$ санына тең доғаның ұшындағы нүктенің абциссасы бойынша cosx, ординатасы бойынша $\sin x$ мәндерін, сол анықталған $\cos x$ пен $\sin x$ мәндерінің қатынасы арқылы $\mathrm{tg}\, x$ және $\mathrm{ctg}\, x$ мәндерін анықтау және оны беретін геометриялық құрылымды суреттеу

10. Бірлік шеңбер негізінде тригонометриялық функциялар периодтылығының геометриялық түсіндірмесі – нақты сандарды бірлік шеңбер бойына орналастыру барысында бір-бірімен 2π еселі айырмашылықты сандар бір нүктеде беттесуінен

11.Тригонометриялық функциялардың бірлік шеңбер негізінде берілген анықтамаларының тікбұрышты үшбұрыш арқылы берілген анықтамалармен пара-парлығы

12. Тригонометриялық функциялардың геометриялқы сипаттағы анықталу ережесінен тікелей оқылатын негізгі қасиеттері және графиктерінің эскиздері – cosx функциясының жұп, қалғандарының тақтылығы, cosx пен sinx функцияларының шенелгендігі, тригонометриялық функциялардың периодтылығы, монотондылық аралықтары және осы қасиеттердің барлығын функция графиктерінің эскиздерінде жинақтау

13. Кері тригонометриялық функциялар – тригонометриялық функциялардың қатаң монотондылық аралықтарының бейнесінде анықталған тригонометриялық кері функцияларды анықтау және әрқайсысының алдына «арк» қосымшасын қосу арқылы кері функцияларына сәйкес атау беру

14. Негізгі тригонометриялық теңбе-теңдіктер мен формулалар – Пифагор теоремасы мен бірлік шеңбер бойынша анықталған тригонометриялық функциялардың анықтамалары бойынша $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ негізгі тригонометриялық тепе-теңдігін дәлелдегендей аргументі $x + yx - y$ болатын қосу формулалары деп аталатын өрнекті аргументтері x және y болатын тригонометриялық функциялар арқылы бейнелеу, қосымша бұрыштар үшін формулалар, қос және жарты бұрыштар формулалар, косинустар мен синустардың қосындысы мен айырымы, аргументтері бірдей тригонометриялық функциялар арасындағы байланыстардан тұратын 50-ден аса формулаларды бірінен кейін бірін тізбелей дәлелдеу

15. Негізгі элементар функциялар атты топқа жинақталған дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық және кері тригонометриялық функциялар – сан ретінде анықталған дәреже, логарифм ұғымдары арқылы әрқайсысы мағыналы болатын жиындарда сәйкес элементтерін айнымалы ретінде алып, сол ережелермен жаратылыстанудың әртүрлі өзгеру жылдамдықтарын сипаттайтын алғашқы үш функциямен бірге бірден функция ретінде анықталған тригонометриялық және кері тригонометриялық функциялар

16. Элементар функциялар – бес түрлі негізгі элементар функцияларға бес түрлі жаңа функция құру ережелер ақырлы рет қолданысы

17. Элементар функцияның әрқаншанда формула түрінде жазылуы және сол формуладан функцияны анықтайтын ереженің оқылуы – ережені қадам-қадаммен алгоритм түрінде жіктеу

18. Элементар функцияның жазылуынан оның анықталу жиынының табылу – формуладағы алгоритмнің барлық қадамдары орындалатындай аргументтің мәндерінен құрылған жиынның жазылуы

19. Элементар функцияның төңірегіндегі қосымша мәліметтер – элементар функция берілгенде оның ережесі мен анықталу жиыны туралы ештеңе айтылмайды, элементар функция әрқашан формула түрінде жазылғанымен, әр формуланың функция бола бермеуі, $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ – элементар функция, функция жазылуында оның ережесі мен анықталу жиыны бар болғандықтан дәлме-дәл оқылу тиістілігі

20. Анықталу жиындары қиылыспайтын функциялардан құрылған анықталу жиыны берілген функциялардың анықталу жиындарының бірігуі болатын жаңа функция құру әдісі – құрылған функцияның элементар да, элементар емес те болуы, қолданыста функцияның анықталу жиыны бір элементті де болу мүмкіндігі

21. Элементар функциялардың негізгі топтары – алгебралық көпмүшелік пен олардың қатынасынан тұратын рационал функциялар, рационал функциялар мен көрсеткіші рационал болатын дәрежелік функцияларға төрт арифметикалық және күрделі функция құру амалдарын ақырлы рет қолданудың нәтижесі болатын алгебралық функциялар және алгебралық емес, функцияның x аргументіне тек қана төрт арифметикалық және кері функция құру амалдарын қолдану арқылы беруге болмайтынын білдіретін транцендενттік функциялар

§2. Сандық (нақты мәнді) функцияның тәуелсіз айнымалысы (аргументі) нақты санға ұмтылғандағы ақырлы (нақты мәнді) шегінің анықтамасы

1. Сандық функцияның ақырлы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b(a \in R, b \in R)$ шегінің $\varepsilon - \delta(\varepsilon)$-маңайлар тіліндегі анықтамасы – тәуелсіз айнымалы функцияның анықталу жиынындағы мәндердің

бәрін қабылдап, а санына бірте-бірте ақырсыз жақындаған сайын, оған тәуелді сәйкес мәні b санына ақырсыз жақындай түседі деген айтылуынан өз-өзінен туындайтын дұрыс елеске формалді математикалық өрнектегенде керісінше алдымен аргументке тәуелді мәндерінің функция шегіне жақындығы тағайындалып, артынша сол маңайда жататын мәндердің аргументтің а нүктесінің ойылған маңайында жататындығы жайлы шарт қойылып, осы реттегі екі теңсіздік « $\varepsilon - \delta(\varepsilon)$ » тіліндегі шек анықтамасын құрауы

2. Сандық функция шегінің анықтамасын сөзбе-сөз тікелей қолдану үлгісі ретіндегі алғашқы мысалдар – тұрақты, дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік функциялардың нақты мәнді нүктедегі шегін табу

3. Сандық функцияның нақты мәнді шегінің нақты мәнді нүктедегі « $\varepsilon - \delta$ »-тіліндегі анықтамасының бастапқы талқылаулары. Ойылған маңай. Шектік нүкте – функция шегін анықтау кезінде функция сол нүктеде анықталған ба, жоқ па, анықталса мәні функция шегіне қалай әсер етеді деген өзінен-өзі туындайтын сұрақтарға шек анықтамасындағы ойылған маңай функциясының сол нүктедегі шегі мен функция жағдайының байланыссыздығын беруі; шек анықтамасы мағыналы болу талабында кез келген ойылған маңайда анықталу жиынының ең болмағанда бір нүктесі жатуы үшін шек ұғымының анықталу жиының шектік нүктелері үшін ғана анықталуы; функцияның нақты мәнді нүктеде шегі бар болуы, бар болса оның мәні әр ойылған маңайымен берілген сол нүктесінің «қасындағы» функцияның құрлысына тәуелді болатын «ұжымдық» қасиетті және де сонымен бірге әр жеке алынған нүктелерге тәуелді еместігі; шектің анықтамасында тек функция мәндері шегіне жақын болуын қамтамасыз ететін аргумент ұмтылатын нүкте маңайын табу талап етілсе, кейін ол маңайды қалауымызша кішірейту мүмкіндігі және сол табылатын маңайдың алдын ала берілген оң санмен қоса, функция мен шек ұмтылатын нүктеге де тәуелділігі

§3. Нақты мәнді функцияның нақты мәнді шегінің нақты мәнді нүктедегі тізбектер тіліндегі анықтамасы. екі анықтаманың эквиваленттілігі. Екі тамаша шек

1. Сандық функцияның ақырлы шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасы – тізбек шегі теориясын функция шегін анықтауға қолдану мүмкінді

2. Сандық функцияның ақырлы шегінің маңайлар және тізбектер тіліндегі анықтамаларының эквиваленттілігі – бір ұғымның өзара пара-пар әртүрлі анықтамалармен бейнеленуі

3. Анықтамадағы шарттарды оның мазмұнын жоғалтпай азайту – функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасындағы тізбектерге қойылатын шартты жеңілдетіп, анықтама мазмұнын сақтап, монотонды тізбектермен шектелу

4. Екі тамаша шек – бірінші тамаша шек атты 0/0 түріндегі анықталмағандық болатын $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1 - 0$ шегін функция шегінің маңайлар тіліндегі анықтамасымен және екінші тамаша шек деп аталатын 1? анықталмағандығы болатын $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ шегін тізбектер тіліндегі анықтамамен дәлелдеу

§4. Нақты мәнді шегі бар нақты мәнді функциялардың шек төңірегіндегі қасиеттері

1. Сандық функцияның локалді шенелгендігі және функцияның нақты мәнді шегі бар нүктесінің сол қасиетті нүкте болуы – функцияның жиында шенелу қасиеті орындалатындай нүктенің маңайының не ойылған маңайының табылуы және функцияның нүктеде локалді шенелген болуы сол нүктеде нақты мәнді шегінің бар болу анықтамасының салдары ретінде

2. Нөлден өзгеше нақты мәнді шегі бар функцияның шек алынып тұрған нүктенің қайсыбір ойылған маңайында шек таңбасы сақтауы – шектің таңбасы оң (теріс) болса, сол нүктенің қайсыбір ойылған маңайыныңда жататын анықталу жиынының нүктелеріндегі мәні оң (теріс) болуы, сонымен бірге функцияның дәл сол нүктедегі мәні бар болғанда оның бұл заңдылыққа бағынбай, өз берілуі бойынша таңбасы шек таңбасымен бірдей болуы да, болмауы да мүмкіндігі

3. Анықталу жиындары бірдей функцияларға төрт арифметикалық амалды қолданғанда шектің сол арифметикалық амалдарды сақтауы – анықталу жиынының шектік нүктесі болатын нүктеде нақты мәнді шегі бар саны ақырлы функцияларға арифметикалық амалдар орындағанда шыққан функцияның шегі бар және оның бастапқы функция шектеріне дәл сол арифметикалық амалдарды қолдану нәтижесіне тең болуы

3. Күрделі функцияның шегі – ішкі функция шегінің мәніне тең нүктеде сыртқы функцияның шегі сол нүктедегі мәніне тең болғанда олардан құрылған күрделі функцияның ішкі функция ұмтылатын нүктедегі шегінің сол мәнге тең болуы және де осы тұжырым сақталуы үшін сыртқы функцияға қойылған шарттың міндеттілігі

4.Функцияның бір ғана нақты мәнді шегі болуы туралы теорема – сандық функцияның нүктеде екі не одан да көп нақты мәнді шегі бола алмауы

5. Сандық функцияның нақты мәнді шегінің жалпы анықтамасы және дәлелденген қасиеттердің жалпы жағдайға таралуы – аргументі нақты мәнді нүктеге жай ұмтылумен қатар, сол жағынан, оң жағынан, $+\infty, -\infty$ ақырсыз сандарына және ∞ ұмтылылғандағы функцияның нақты мәнді шегінің 6 түрлі анықтамалары

§5 Монотонды функцияның анықталу аралығының әр шектік нүктесінде біржақты шегінің әрқашанда бар болуы және олардың функция мәндері арқылы бейнеленуі

Шенелген монотонды функцияның анықталу аралығының әр шектік нүктесінде нақты мәнді шегінің әрқашанда бар және оның тек қана біржақты болуы – алты мүмкін жағдайдан $+\infty, -\infty$ пен нақты мәнді санға ұмтылғанда оң және сол жақты шектердің бірі ғана болып, ∞ пен жай шектің болмауы және сол біржақты шектердің дәл мәнінің функция өспейтін және кемімейтін болуына байланысты геометриялық түрде көрнекі функция мәндерінің инфимумы мен супремумы арқылы бейнеленіу

§6. Нақты мәнді функцияның нақты мәнді нүктеде нақты мәнді шегі бар болуын оның ішкі қасиеттері арқылы беретін Коши критерийі

1.Коши критерийі – сандық функцияның шек мәнін қатыстырмай, тек қана функция мүшелерінің ішкі құрылысы арқылы нақты мәнді шегі бар болуының қажетті және жеткілікті шарты

2. Қажеттілігі мен жеткіліктілігі бірдей салмақтағы Коши критерийінің дәлелдеуі – критерий қажеттілігінің нақты мәнді функция шек анықтамасынан ғана тікелей шығуы және оның терең дамытылған тізбектер теориясын толық көлемде қажет ететін жеткіліктілігінің дәлелдеуімен толығуы

§7. Сандық функция шегінің «$\varepsilon - \delta$»- маңайлар тіліндегі жалпы $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ анықтамасы және де оның 36 түрлі нақтылаулары: нақты мәнді нүктедегі $\lim\limits_{x\to a} f(x) = q$, шексіздіктегі $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = q$ екіжақты (жай), біржақты $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = q, \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = q, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = q, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = q$ шектері

1. Функция аргументі ұмтылатын 6 жағдайдың «Ойылған маңайлар» кестесі – нақты мәнді нүктеде нүкте маңайынан сол нүктенің өзін алып тастағанда шыққан жиындар: нүктенің жай ойылған маңайы сол нүктені қамтитын интервалдан сол нүктені алып тастағанда, оң және сол жақтағы интервалдардың бірігуі және олардың сәйкес оң және сол жақты ойылған маңайларды құрауы; маңай тек нақты сандардан құрылғандықтан ақырсыз нүктеде ойып алып тастайтын ешнарсе болмай ойылған маңай маңайдың дәл өзі болуы

2. Сандық жиынның a(a-нақты сан), $a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty$ символдарымен берілген алты түрлі шектік нүктелері – ақырлы немесе ақырсыз нүктенің кез келген ойылған маңайында сол жиынның ең болмағанда бір не оған пара-пар шексіз көп нүктелерінің бар болуы және тізбектер тіліндегі оған пара-пар тұжырым

3.Функция шегінің жалпы анықтамасы және оның 6 түрлі ойылған маңайыдағы аргументі мен 6 түрлі маңайдағы мәндерінің кестелері арқылы сипатталған 36 нақтылаулары – функция мәндері жататын кез келген алдын ала берілген маңайдағы аргументтердің барлығы жататын аргумент ұмтылатын нүктенің ойылған маңайының табылуы

4. Функция шегінің барлық 36 түрінің бір-бірімен мүлдем байланыссыз еместігі – функция аргументі нүктеге жай ұмтылғанда табылған шекке тең оң және сол жақтан ұмтылғандағы шектің бар болуы, бірақ керісінше жағдайдың әрқашан орындала бермеуі, сонымен қатар функция мәнінің шегіне ұмтылуының нақтылауы болатын жоғарыдан және төменнен ұмтылатын шектің бар болуынан оған тең екі жақты шектің бар болуы және керісінше жағдайдың бұнда да әрқашан орындала бермеуі

5. Біріншісі маңайлар кестесі арқылы жазылып, екіншісі сол жазу негізінде математикалық анализді құру үстінде «атынан-затына», «затынан-атына» түрінде қолдану тәжірибесінен түсінетін, екі сатыдан тұратын функция шегін толық түйсік деңгейінде игерудің нұсқамасы – функция шегінің жалпы анықтамасындағы аргумент ұмтылатын нүктенің 6 ойылған маңайы мен функция шегінің 6 түрлі маңайын сәйкес кестелерінен қою арқылы жасалған құраушылары бір-біріне тәуелсіз әртүрлі жұптардан 36 түрлі шек анықтамасының кванторлар тіліндегі жазылулары және солардың қарапайым тілмен оқылулары; осы нұсқамамен формалді жазылған шек анықтамасының тереңде жасырын жатқан мазмұнын шек игерудің бірінші сатысындағы жазылуларды дифференциалдық және интегралдық есептеулер теориясын құруда атауынан мазмұнына және керісінші, мазмұнынан атына бағытта қолданыс барысында бойға сіңіру

6. Функцияның нақты мәнді шегінің $«\varepsilon - \delta»$ тіліндегі 6 түрлі анықтамалары – функция аргументі нақты мәнді нүктеге және жалпыланған шексіздікке жәй, оң, сол жақты ұмтылғанда функция шегінің бар және нақты мәнді болуы

7. Функция аргументі нақты санға жай және біржақты ұмтылғандағы сандық функция шегінің $«\varepsilon - \delta»$ тіліндегі анықтамаларының барлық 18 түрі – функция аргументі нақты мәнді нүктеге оң жақты және сол жақты ұмтылғанда функция шегінің бар және нақты мәнді нүкте мен жалпы шексіздікке жәй ұмтылуы, сонымен қатар қалай ұмтылатындығын көрсететін төменнен, жоғарыдан ерекше ұмтылуы

8. Үш түрлі ақырсыз нүктедегі шектің $«\varepsilon - \delta»$ тіліндегі анықтамаларының барлық 18 түрі – функция аргументі жалпыланған шексіздікке және оған оң жақты, сол жақты ұмтылғанда функция шегінің бар және нақты мәнді нүкте мен жалпы шексіздікке жәй ұмтылуы, сонымен қатар қалай ұмтылатындығын көрсететін төменнен, жоғарыдан ерекше ұмтылуы

9. Функция шегінің $«\varepsilon - \delta»$ тіліндегі жалпы анықтамасы төңірегіндегі жағдайындағы қорытынды түйіндер

10. Шектің $«\varepsilon - \delta»$ тіліндегі жалпы анықтамасының тікелей ішкі байланыстары – функция нүктеде жинақталуының біржақты шектер арқылы берілген қажетті және жеткілікті шарттары, аргумент ұмтылатын нүкте мен шек мәні 0 немесе шексіздік болғандағы функция шегінің арақатынастары

11. Бұл оқулықта қолданылмайтын «ақырсыз аз» және «ақырсыз үлкен» шамаларға түсініктеме – нүктедегі шегі сәйкес нөл және шексіздік болғандағы атаулар және де функцияның бұл локалді қасиетін бүкіл функцияға таратқанда жаңылыс түсінік беру қауіпі

§8. Сандық функция шегінің тізбектер тіліндегі жалпы анықтамасы, оның маңайлар тіліндегі анықтамамен эквиваленттілігі және осы екі тілдегі кері анықтамалары

1. Функция шегінің тізбектер тіліндегі 36 түрді қамтитын жалпы анықтамасы – тізбек шегі теориясын функцияның ақырлы нүктедегі нақты мәнді шегін анықтауға қолдану мүмкіндігін қалған 35 жағдайға тарату

2. Функция шегінің маңайлар $«\varepsilon - \delta»$ $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ және тізбектер тіліндегі (т.т.) жалпы анықтамаларының эквиваленттілігі – функцияның ақырлы нүктедегі нақты мәнді шегі түсінігінің екі анықтамасының өзара пара-парлығын қалған 35 жағдайға тарату

3. Функция шегінің $«\varepsilon - \delta»$ тіліндегі анықтамасына кері тұжырым – функция шегін игерудің бірінші қадамы болып табылатын кванторлар тіліндегі жазбаны ыңғайландырылған ойылған маңайда жату мен маңайға жатпау кестелері арқылы функцияның сол нүктеде шегі сол мәнге тең емес мағынасында кері анықтамасын жазу

4. Функция шегінің $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ тізбектер тіліндегі кері анықтамасы $-a(a$ -нақты сан$), a+0, a-0, \infty, +\infty, -\infty$ мәніне мүшелері тең болмай ұмтылатын және оларға сәйкес функция мәндерінен құрылған тізбектің сондай алты мәннің біріне тең ізделінде шек мәніне ұмтылмайтындай аргументтер тізбегінің табылуы

5. Функцияның ешқандай шегі болмауы – оның өзара бөлек кемінде бірі ақырлы болатын екі дербес шегі болуына эквиваленттілігі

6. Функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасының монотонды тізбектер арқылы жеңітілген түрі – функция шегінің тізбектер тіліндегі жалпы анықтамасының мазмұнын сақтай отырып, анықтама талабын азайтып, тек монотонды тізбектермен шектелу

§9. «Анықталмағандықты ашудың» ішкі мәселелері мен негізгі тәсілдер

1. Шектері белгілі функциялардан құрылған жаңа функцияның шегінің сол белгілі шектер арқылы өрнектелетін және «анықталмағандық» деп аталатын өрнектелмейтін жағдайлары – екі функция шегі ақырлы және ақырсыз болғанда функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижесінің шегі осы шектер арқылы дәл анықталатын шағын арифметика және оған енбейтін жағдайлардың анықталмағандықты ашу тақырыбының мазмұнын құрауы

2. Функция шегі жағдайындағы анықталмағандықтар және «Екі тамаша шек» – екі функция шегі ақырлы және ақырсыз болғанда функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижесінің шегі бар ма, жоқ па, бар болса неге тең екендігінің «анықталмағандық» деп аталатын алдын ала белгісіздігі және $\frac{0}{0}$ мен 1^{∞} түріндегі анықталмағандықтарды ашу нәтижесі болатын $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ түріндегі бірінші және $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ түріндегі екінші «тамаша шектер» атты теңдіктер

3. «Анықталмағандықтарды ашу» есептерін шешудің A-жіктеу, B-иррацианалдықты жою, C-айнымалыны алмастыру, T-тепе-тең түрлендіру, E-е санынның анықтамасын пайдалану, L-логарифмнің $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ қасиетін пайдаланудан тұратын негізгі тәсілдері –анықталмаған өрнек шегінің дәл мәнін табуда осы тәсілдердің бірін не бірнешеуін қолдану

4. Ашылуы күрделі дәрежелік анықталмағандықтарды оған пара-пар ашылу тәсілдері айқын анықталмағандықтарға алмастыру - $0^0, \infty^0$ және 1^{∞} анықталмағандықтарына эквивалентті $0 \cdot \infty$ анықталмағандығы мысалында

5. «Анықталмағандықтарды ашу» тақырыбы бойынша тапсырма $-A, B, C, T, E, L$ тәсілдерін қолдануға арналған есептерді құрастыру

§10. Сандық функцияның әр нүктедегі жоғарғы және төменгі шектері

1. Функцияның дербес шегі және оның эквивалентті анықтамалары – анықтамалардың әртүрін қолданатын дәлелдеу жолының бірінен-біріне көшетін бөлігін өзіне алатын функция дербес шегінің тізбектер және маңайлар тіліндегі пара-пар анықтамалары

2. Сандық функцияның барлық дербес шектерінен құрылған жиын және оның мүмкін құрылымдары – барлық мүмкін дербес шектер жиыны сегмент, ақырлы жиын, ақырсыз сандар мен жалпы шексіздіктен құрылған жиын болатын функция мысалдары, сонымен қатар, интервал, жалпылап айтқанда, ең үлкен және ең кіші элементтері жоқ жиындардың барлық дербес шектер жиыны бола алмауы

3. Кез келген сандық функцияның кез келген нүктеде кемінде бір дербес шегінің бар болуы, сол себепті дербес шектер жиынының әрқашанда бос еместігі – функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасын қанағаттандыратын аргумент тізбегіне сәйкес функция мәндерінен құрылған тізбектен Больцано-Вейерштресс теоремасының дербес шектің бар болуын қамтамасыз етуі

4. Локалды шенелген функцияның нақты мәнді жоғарғы және төменгі шектерінің бар болуы – локалды шенелген функцияның барлық мүмкін дербес шектерінен құрылған әрқашанда бос емес жиынның жоғарғы шек деп аталатын ең үлкен элементінің, төменгі шек деп аталатын ең кіші элементінің міндетті түрде бар болуы

5. Локалды шенелмеген функцияның ақырсыз не жоғарғы, не төменгі шектерінің, не екеуінің де бар болуы – нүктеде жоғарыдан шенелмеген функцияның -ке тең жоғарғы

шегінің, төменнен шенелмеген функцияның - ∞ -ке тең төменгі шегінің және жоғарыдан да, төменнен де шенелмеген функция үшін осы екеуінің қатар бар болуы

§11. Нақты мәнді шенелген функция ұғымы қаншалықты жалпы болса да, өз анықталу жиынының ақырлы шектік нүктесінің маңайындағы құрылысы жоғарғы және төменгі шектермен суреттелетін нақтылы тәртіпке бағынуы

1. Анықталу жиының шектік нүктесінде локалді шенелген сандық функцияның сондағы жоғарғы және төменгі шектері негізіндегі өзгеру заңдылығының сол нүкте маңайындағы аналитикалық құрылысы мен геометриялық сипаттамасы – функцияның нүктедегі жоғарғы және төменгі шектерінен жасалған жолақты сәл кеңейткенде функция мәндерінің барлығы осы кеңейтілген жолақта жататын нүктенің ойылған маңайы табылуы және оны сәл тарылтқанда әр ойылған маңайдағы функцияның қайсыбір мәндерінің міндетті түрде жолақ астына да, үстіне де шығып кетуі, жинақтап айтқанда, айнымалы нүктеге жақындаған сайын функция жоғарғы шек пен төменгі шекке ақырсыз жақындай отырып, солардың арасында тербелуі

2. Нүктеде локалді шенелген функцияның тербелісі деп аталатын сол нүктедегі жоғарғы және төменгі шектерінің айырымы – функция аргументі нүктеге жақындаған сайын функция мәндерінің бір-бірінен алшақтылығын сипаттайтын нақты сан

§12. Сандық функциялардың локалды салыстырулары

1. Ландау символдары деп аталатын шектік нүктедегі *«O үлкен»*-$\underline{\underline{O}}$ және *«o кішкене»*-$\overline{\overline{o}}$ белгілері – $|f(x)| \leq \gamma |g(x)|$ теңсіздігі орындалатындай сәйкес γ оң сан мен ойылған маңайдың және кез келген γ оң сан үшін ойылған маңайдың табылуы арқылы сандар арасындағы реттік қатынастардай шектік нүктеде екі функция арасында да қатынастар енгізу

2. Виноградов таңбасы – жиында $|f(x)| \leq \gamma |g(x)|$ теңсіздігі орындалатындай γ оң санының табылуы

3. Лаңдау символдарының шек арқылы берілген эквивалентті анықтамалары мен қасиеттері – Ландау символдарына қолданылған арифметикалық амалдар нәтижелері

4. Локалді эквивалентті функциялар – берілген нүктенің ойылған маңайында нөлден өзгеше екі функция қатынасының шегі бар және 1 санына тең болуы түріндегі анықтама және сол эквиваленттіліктің функциялар айырымы арқылы берілген қажеттілігі мен жеткіліктілігі

5. Нүктедегі салыстыру шкаласы мен салыстыру эталондары атты локалді құралдар – нүктеде әрбір мүшесі нөлге ұмтылып, алдыңғысына қарағанда *o кішкене* болатын функциялар тізбесі салыстыру шкаласы болады да, оның әрбір мүшесі салыстыру эталонын береді

6. Тізбектерді салыстыру – функция жағдайында қабылданған салыстыру қатынастарын оның дербес жағдайы болатын тізбекке көшіру

IV ТАРАУ. ҮЗІЛІССІЗ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАР

§1. Көрнекі геометриялық кескіннен аналитикалық күрделілікке дейінгі сандық функциялардың ақырлы нүктедегі үзіліссіздігі

1. Қағаздан үшкір қаламды көтермей үзбей салынған график пен график сызу барысында қаламды бір көтеріп, басқа жерден жалғастырғандағы графиктерді, соның ішінде, модуль мен таңба функцияларының екі графиктерін тек функцияның ереже түріндегі анықтамасын қолданып, аналитикалық түрде ажырату мәселесі – «жасанды интеллекттегі» ит пен мысық кескіндерін компьютерлік ажыратқандай үзіліссіз және үзілісті салынған графиктерді дәл анықтамалармен ажырату

2. Үзіліссіздіктің геометриялық талқылауларынан шек арқылы берілетін аналитикалық анықтамасына дейін өту жолы адамзат деңгейіндегі ұлы интеллектуалды жетістік ретінде – функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің аналитикалық жазбасының шек арқылы бейнеленуі: функцияның үзіліссіздік нүктесінде шегі бар және ол міндетті түрде сол нүктедегі функция мәніне тең болуы, дамытылған шектер теориясы бойынша ширатып айтқанда, үзіліссіздік нүктесіндегі функция мәні оның ойылған маңайындағы оған тең емес нүктелердегі

функция мәндерінің ағымы болып, сонымен бірге, әр жеке нүктедегі функция мәніне тәуелсіздігі

3. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің әртүрлі символдық жазылулары – «lim» мен «$\rightarrow$» таңбалары арқылы белгіленген біржақты, жай шек және өсімше арқылы жазылулары

4. Нүктедегі оң жақты және сол жақты, жалпылап айтқанда, біржақты үзіліссіздігі – функцияның нүктедегі мәні сол нүктеге аргумент біржақты ұмтылғандағы шек мәніне тең болуы

5. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің «ε – δ»-маңайлар және тізбектер тілдеріндегі анықтамалары және олардың эквиваленттілігі – функция шегінің әртүрлі анықтамаларының эквиваленттілігі жайлы дәлелденген теоремалар мен функцияның үзіліссіздігі анықтамасының тікелей салдары ретінде

6. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің талқылаулары – жалпы жағдайдағы дамытылған функция шегі теориясындағы талқылаулардың оның жеке жағдайы болатын функция үзіліссіздігіне қайталануы

§2. Нүктеде үзіліссіз сандық функциялардың қасиеттері мен негізгі элементар және элементар функциялардың үзіліссіздігі

1. Нүктеде үзіліссіз функциялардың шектер теориясының тікелей салдары болатын қасиеттері – үзіліссіздік нүктесінде функцияның локалді шенелуі, үзіліссіздік нүктесінің қайсыбір маңайында функцияның нөлден өзгеше мәнінің таңбасын сақтауы, үзіліссіз функцияларға қолданылған арифметикалық амалдардың нәтижесі сол нүктеде функцияның үзіліссіздік қасиетін сақтауы, үзіліссіз функциялардан құрылған күрделі функцияның үзіліссіздігі

2. Негізгі элементар функциялардың өзінің әрбір анықталу нүктесіндегі үзіліссіздігі – дәрежелік, көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық функциялардың өз анықталу жиынының әр нүктесіндегі шегі функцияның сол нүктедегі мәніне тең екендігінің маңайлар тіліндегі дәлелдемесі, кері тригонометриялық функция үзіліссіздігі тереңдетілген теорияның салдары болуы

3. Элементар функциялардың өзінің әрбір анықталу нүктесіндегі үзіліссіздігі – элементар функция анықтамасы, негізгі элеменар функциялардың әр анықталу нүктесіндегі үзіліссіздігі және үзіліссіз функциялар қасиеттерінің салдары ретінде

§3. Сандық функцияның нүктеде жай және күрделі үзілуі және солардың 81 түрі

1. Функцияның нүктеде үзілуі – нүктедегі үзіліссіздіктің маңайлар және тізбектер тіліндегі анықтамаларына кері тұжырымдар

2. Функцияның нүктедегі үзілістігінің себебіне қарай жағдайларға жіктеу – функция үзіліссіздігі анықтамасының құраушы бөліктері болатын функцияның нақты мәнді оң және сол жақты шектерінің бар болуынан, олардың өзара тең болуы мен функция мәніне тең болуынан құралған 5 талаптың ең болмағанда біреуінің орындалмауынан шығатын жіктеулер

3. Функцияның жай және күрделі үзіліс нүктелері – сәйкес функцияның нақты мәнді оң және сол жақты шектерінің бар болуы және ең болмағанда бір нақты мәнді біржақты шегінің болмауы

4. Функцияның нүктедегі үзілуінің 81 түрі – функцияның нақты мәнді оң және сол жақты шектері бар 4 түрлі жай үзілуі және 77 түрлі ең болмағанда бір нақты мәнді біржақты шегі жоқ күрделі үзілуі

§4 Сандық функцияның анықталу жиынында үзіліссіздігі және үзілістілігі

1. Функцияның анықталу жиынындағы үзіліссіздігі – жиындағы үзіліссіздіктің оның әрбір нүктесіндегі үзіліссіздік арқылы анықталуы, соның ішінде, сегменттегі үзіліссіздіктің оның әрбір ішкі нүктесінде екіжақты жай, шеткі нүктелерінде біржақты үзіліссіз болуы және де жиынның оңашаланған нүктесі шектік нүкте болмағандықтан шегі анықталмайды да, функцияның сол нүктеде анықтама бойынша үзіліссіз деп қабылдануы

2. Функцияның анықталу жиындағы үзілістілігі – функцияның сол жиынның кемінде бір нүктесінде үзілісті болуы

§5. Аралықта үзіліссіз функциялардың қасиеттері

1. Әр екі элементінің арасындағы кез келген санды да қамтитын ерекше қасиетті байланысты сандық жиындар – аралықтардың байланысты жиын ұғымы арқылы анықтамасына пара-пар тағы бір толық сипаттамасы

2. Больцано-Коши теоремасы – аралықтың үзіліссіз бейнесінің байланыстылығы

3. Вейерштрасс теоремалары – сегменттің үзіліссіз бейнесінің де сегмент болуы, соның ішінде, мәндер жиынының функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері болатын элементтерінің бар болуы

4. Сандық функция үзіліссіздіктігінің бірқалыптылығы – математикада «бірқалыпты» деген сөз белгілі бір шарттың басқа бір не бірнеше шарттарға қарағанда бірдей орындалуын, яғни, басқаша айтқанда, оларға тәуелсіз болуын білдіредіреді де, сол орайда, функция үзіліссіздігінің маңайлар тіліндегі анықтамасындағы аргумент маңайы әр нүктеге байланысты жеке табылса, үзіліссіздіктің бірқалыптылығында ол маңай жиынның барлық нүктелеріне тәуелсіз болуы

5. Үзіліссіздік пен бірқалыпты үзіліссіздіктің арақатынасы – жиында бірқалыпты үзіліссіз функцияның сол жиында үзіліссіз де болуы және керісінше жағдайдың әрқашан орындала бермеуі

6. Кантор теоремасы – сегментте үзіліссіз функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі

§6. Монотонды функциялар жағдайындағы функцияның аралықтағы үзіліссіздігі мен оның мәндер жиыны байланыстылығының пара-парлығы

1. Аралықта анықталған монотоны функцияның үзіліссіздігіне пара-пар мәндер жиынының байланыстылығы – монотонды функция жағдайында күрделі шек ұғымымен анықталған үзіліссіздікті табиғаты мүлдем өзге санның реттік қатынасы және элементтің жиында жату, жатпауымен ғана берілетін жиынның байланыстылық ұғымымен сипатталуы

2. Тағы да негізгі элементар функциялардың үзіліссіздігі туралы – негізгі элементар функциялардың үзік-үзік монотондылығынан мәндер жиынының байланыстылығы арқылы үзіліссіздігіне келу, солардың ішінде, осы оқулықта алғаш рет дәлелденетін кері тригонометриялық функциялардың үзіліссіздігі

V ТАРАУ. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНУЛАРЫ

§1. Сандық функция туындысының нүктедегі анықтамасы

1. Функция графигінің қиюшы түзуінің шектік жағдайы болатын жанама түзудің сызықтық теңдеуіндегі бұрыштық коэффициентті анықтау формуласы – жанама жүргізілетін нүктедегі функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасы түріндегі өрнек шегі ретінде

2. Лездік жылдамдық деп аталатын қозғалып келе жатқан дененің уақыт мезетіндегі жылдамдық формуласы –анықтама бойынша мүмкін емес бір сәттегі жылдамдықты функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасы түрінде өрнектелген оң уақыт аралығындағы жолдың уақытқа қатынасының шегі ретінде анықтау

3. Сандық функция туындысының нүктедегі анықтамасы, дифференциалдау амалы мен функцияның нүктеде дифференциалдануы – әртүрлі салалардың жанама жүргізу мен лездік жылдамдық атты өзара бөлек екі мәселелерінің функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының нақты мәнді шегі түріндегі бірдей математикалық моделін анықтама ретінде қабылдау, функцияны нүктеде дифференциалдау атты сол шекті табу амалы, нүктеде функцияның дифференциалдануы атты нақты мәнді туындының бар болуы

4. Сандық функцияның нүктедегі туынды анықтамасының жазылу түрлері, туындының белгіленулері және туынды анықтамасының қолданысы – әртүрлі жазылған өсімшелер арқылы берілген туындының қалыптасқан әртүрлі белгілеулері, соның ішінде, кейде қолданылатын $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасының туынды алынып тұрған нүктені жоғалтып, туынды ұғымының локалділігін көрсетпеуін ескеру және әдеттегідей туынды анықтамасын «атынан затына», «затынан атына» бағытында қолдану

5. Сандық функцияның нүктедегі біржақты туындылары – туынды анықтамасындағы шекті біржақты шекпен алмастыру

6. Сандық функцияның нүктедегі екіжақты, біржақты ақырсыз туындылары – туынды анықтамасындағы сәйкес жәй және біржақты шек мәндерінің ақырсыз сандар мен жалпыланған шексіздікке тең болуы

7. Сандық функцияның жиында дифференциалдануы – жиында дифференциалданудың оның әрбір нүктесіндегі ақырлы туындысының бар болуы арқылы анықталуы, соның ішінде, сегменттегі дифференциалданудың оның әрбір ішкі нүктесінде екіжақты жай, шеткі нүктелерінде біржақты нақты мәнді туындысының бар болуы

8. Сандық функцияның нүктедегі дифференциалдану мен үзіліссіздік арасындағы өзарабайланыс – нүктеде ақырлы жай не біржақты туындысы бар функцияның сол нүктедегі дәл сондай үзіліссіздігі және керісінше жағдайдың әрқашан орындала бермеуі

9. Туынды анықтамасындағы шектің бар немесе жоқ, бар болса мәніне қарай әртүрлі қорытындыға әкелетін мысалдар – анықталу жиынының бір де бір нүктесінде нақты мәнді туынды болмауы; біржақты туындылары бар, бірақ олар өзара тең еместігінен жай туындының болмауы; үзіліссіз нүктедегі туындысының ақырсыз болуы

§2. Арифметикалық амалдар нәтижелерін, күрделі және кері функцияларды нүктеде дифференциалдау ережелері

1. Нүктеде туындысы бар сандық функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижелерінің сол нүктеде туындысы бар болуы мен нүктелердің жалпы жағдайында жазылған туынды есептеу формулалары – қосу, алу, көбейту, бөлу амалдарын қолдану нәтижесіндегі функциялардың туындыларының бар болуының дәлелдемелері және бастапқы функциялар мен олардың туындылары арқылы өрнектелген ережелері

2. Сандық күрделі функцияның нүктедегі туындысын «сырттан ішке» тәртібімен есептеу формуласы – ішкі функцияның анықталу жиынында берілген нүктедегі күрделі функцияның туындысын сол нүктедегі ішкі функция мәніндегі оны құрайтын сыртқы функцияның туындысын ішкі функцияның сол нүктедегі туындысына көбейтіндісі

3. Кері функцияның туындысын бастапқы функция мәні болатын нүктеде есептеу формуласы – бастапқы функцияның анықталу жиынынан алынған нүктеде нөлден өзгеше туындысының бар болуынан оған кері функцияның бастапқы нүкте бейнесінде туындысының бар болуы және оның бастапқы функцияның берілген нүктедегі туынды мәніне кері санға тең болуы

§3. Негізгі элементар функциялар туындыларын нүктеде есептеу және солардың кестесі

1. Негізгі элементар функциялардың туындыларын туынды анықтамасын тікелей қолдана отырып, кездескен анықталмағандықтарды ашу және бөліндінің туындысы, кері функцияның туындысын табу ережелерін қолдану арқылы анықтау – тұрақты функция туындысын шек арқылы тікелей анықтамамен; дәрежелік, көрсеткіштік және логарифмдік функциялар туындыларын екінші тамаша шектің салдары болатын e санынның анықтамасын, логарифмнің $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(\ 1+x)}{x}=1$ қасиетін пайдалану арқылы; $\sin x$ функциясының туындысын бірінші тамаша шек арқылы, ал $\cos x$ функциясының туындысын туындысы белгілі $\sin x$ функциясына келтіру формуласын қолдану арқылы күрделі функция туындысының мәні ретінде; $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ функцияларының туындыларын туындылары белгілі $\sin x, \cos x$ функцияларының қатынасының туындысын есептеу формуласы арқылы; $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ функцияларының туындысын нүктеде нөлден өзгеше туындылары бар $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ функцияларына кері сан ретінде туынды мәнін табу

2. Алдымен теориялық тұрғыдан зерттелген туынды ұғымы анықтамасын негізгі элементар функциялар туындыларын есептеуде практикалық қолдану барысында құрылған кесте – көбейту амалы бойынша қосылғыштар саны бірдей қосылғыштарды қосуды таяқшалар арқылы есептей отырып құрылған көбейту кестесін әр қадамда таяқшалармен санап отырмас үшін жаттап алғандай туынды табу жолын қайтадан

жүргізіп отырмай негізгі элементар функциялардың туындылар кестесін де жаттап алу қажеттігі

§4. Дифференциалданатын функциялардың нүктедегі туындысын есептеу техникасын игерудегі қатаң тәртіптер

1. Сыртқы функция негізгі элементар, ішкі – кез келген дифференциалданатын функциялардан тұратын күрделі функциядың туындылар кестесі – арифметикалық амалсыз тек күрделі функция құру ережесін элементар функцияларға ақырлы рет қолданғанда алынған элементар функциялардың туындысын есептеу ережесі

2. Дифференциалданатын элементар функцияның туындысын есептеуді қарапайым тұжырымға айналдыратын біріздiлік жолы – күрделі функция туындысын сырттан ішке принціпімен және туындысы бар функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижелері болатын функциялардың туындысын есептеу ережелерін ретінмен қолдану.

§5. Функцияның нүктедегі туындысы төңірегіндегі мәселелер

1. Функцияның туындысын нүктеде есептеудің дайын туынды табу формулалары мен тікелей анықтаманы қолданатын екі жағдайы – туынды есептелетін нүкте маңайында қайсыбір дифференциалданатын элементар функцияға тепе-тең болғанда туынды кестесі мен элементар функцияны дифференциалдау ережелерін қолдану және де қалған жағдайларда тікелей анықтамадағы функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы нақты мәнді шегінің бар болуын анықтап, оның дәл мәнін табу

2. Дифференциалданатын элементар функциялардың туындыларының өзі де элементар – негізгі элементар функциялардың туындылары да дифференциалданатын элементар функция болады, сонымен бірге элементар функция нүктеде дифференциалданбауы да мүмкін, ал дифференциалданатын болған жағдайда оның туындысы болатын жаңа функцияның да элементар болатындығы

3. Дәрежелі-көрсеткіштік функцияның туындысын табу ережесі – дифференциалданатын функциялардан құрылған дәрежелі-көрсеткіштік функцияның дифференциалдануы және оның туындысының құраушы функциялар және олардың туындыларымен өрнектелу формуласы

§6. Жоғарғы ретті туындылар

1. Функцияның нүктедегі жоғарғы ретті туындысы туындыдан туынды алу арқылы алынатын реккурентті анықтама ретінде – функция туындысының өзі де функция болады да, одан алынған туынды бастапқы функцияның екінші ретті туындысын және ары қарай жалғастыра отырып, үшінші, т. с. с. кез келген оң бүтін мәнді жоғарғы ретті туындыларын анықтау

2. Функцияның берілген нүктеде берілген оң бүтін дәрежелі жоғарғы ретті туындысы бар деген мәліметті орындалуын қамтамасыз етуі үшін функцияның өзінен талап етілетін шарттар – функция нүктеде n-рет дифференциалдануы үшін осы нүктенің қандай да бір маңайында функцияның өзі анықталып, маңайдың әр нүктесінде осы маңайда толық анықталған бірінші ретті туындысы, бірінші ретті туынды болатын функциядан екінші ретті туындысы, солай жалғаса беріп, $(n-1)$-ретті туындысы бар болып, ең соңында маңайда толық анықталған $(n-1)$-ретті туындының сол нүктеде туындысының бар болуы

3. Негізгі элементар функциялардың жоғарғы ретті туындыларын есептеу формулалары – дәрежелік, көрсеткіштік және логарифмдік, sinx, cosx функцияларының жинақы түрде және $tgx, ctgx,$ кері тригонометриялық функциялар үшін күрделі түрде жазылатын жоғарғы ретті туындыларды есептеу формулалары

4. Екі функцияның көбейтіндісінің жоғарғы ретті туындыларын бейнелейтін Лейбниц формуласы – Ньютон биномындағы дәреже орнына сол ретті туынды қойғандағы формула, бұл математикада құнды болып табылатын, әртүрлі салалар арасында баламалы көшірілетін ұқсастық мысалы

§7. Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары

1. Сандық функцияның нүктедегі локалді экстремумы – функцияның аралықта монотонды, үзіліссіз болуы қасиеттер тізбесі қатарында функцияның нүктедегі мәні қайсыбір екіжақты маңайындағы мәндер жиынында шеткі мән болуы, дәл айтқанда, шеткі

болып, одан үлкен мән болмаса, ең үлкені болуы не шеткі болып, одан кіші мән болмаса, ең кішісі болуы, бұнда да локалді деп аталуы қасиеттің қайсыбір екіжақты маңайда орындалуында

2. Ферма теоремасы мен оның геометриялық бейнесі– локалді экстремум нүктесінде функция дифференциалдануы да, дифференциалданбауы да мүмкін, дифференциалданатын сандық функцияның сол нүктедегі туындысының міндетті түрде нөлге тең болуы, бірақ туындысы нөлге тең нүкте локалді экстремум нүктесі болуы міндетті емес

3. Ролль теоремасы мен оның геометриялық бейнесі – сегменттің өзінде үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функцияның шеткі нүктелеріндегі мәндері өзара тең болғанда міндетті түрде локалді экстремум нүктесі, сол себептен Ферма теоремасы бойынша туындысы нөлге тең болатындай ішкі нүктенің табылуы

4. Коши теоремасы мен оның геометриялық бейнесі – сегменттің өзінде үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданатын екі функцияның шеткі нүктелердегі мәндерінің айырмалар қатынасының сол функциялардың туындыларының қатынасына тең болатындай ішкі нүктенің табылуы

5. Лагранж теоремасы мен оның геометриялық бейнесі – сегменттің өзінде үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасына тең туынды мәнінің табылуы және функцияның монотондылық қасиеттерін туынды таңбасы арқылы сипаттау

6. Функцияның анықталу аралығының шеткі нүктелерінде біржақты туындысы бар болуы туралы теорема – нүктенің маңайында туындысы бар болуынан шектік нүктедесінде туындысының бар болуын шығарып алу: нүктенің біржақты маңайы болатын сегментте үзіліссіз, ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функцияның туындысының нақты мәнді шегі бар болғанда сол шеткі нүктеде біржақты туындысы бар болады да, мәні шектің мәніне тең болады

7. Дарбу теоремасы – функция сегменттің әрбір нүктесінде дифференциалданғанда үзілісті де бола алатын туындының әр екі мәнінің арасындағы кез келген нақты сан қандай да бір нүктеде туындының мәні болуы: үзілісті туынының өзі үзіліссіз функцияларға ғана тән байланыстылық қасиетті сақтауы

§8. Дифференциал – локалды сызықтандырудағы басты сызықты функция

1. Сандық функцияның нүктедегі дифференциалдануы оның сол нүктедегі өсімшесінің сызықтық функциямен локалді жуықталуы ретінде – функцияның өзін берілген нүктеде $f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\overline{\overline{o}}\left(x-x_0\right)\left(x\to x_0\right)$ локалды сызықтандыру түрінде өрнектеу

2. Сандық функцияның нүктедегі дифференциалы $-L(h) = C\cdot h(-\infty < h < +\infty)$ түріндегі сызықтық деп аталатын функцияның коэффициенті сол нүктедегі туынды мәніне $C = f'(x_0)$ тең болатын барлық нақты сандар жиынында анықталған $L\left(h\right) = f'\left(x_0\right)h$ сызықтық функция, соның ішінде $f(x) = x^8$ функциясының $x = 24$ нүктесіндегі дифференциалының $L\left(h\right) = 8{\cdot}24^7h$ $\left(h \in (-\infty,+\infty), h \equiv dx\right.$ - екеуі де ақырсыз шама емес) функциясы болуы

3. Функцияның нүктедегі дифференциалының белгілеулері: $dy := y'dx,\ df := f'(x)dx,\ df(x_0) := f'(x_0)dx\ (dx \in (-\infty,+\infty))$.

4. Дифференциал нүктеде дифференциалданатын сандық функция өсімшесінің басты «сызықты бөлігі» ретінде – функция өсімшесі локалды сызықтандырылған жағдайда сызықты бөлік пен оған қарағанда нөлге жылдам ұмтылумен қатар сызықтылықты бүлдіретін «бүлдіргіш» деп аталатын екі қосылғыштан тұрғандықтан дифференциал сол қосылғыштардың бастысы болатын «сызықты бөлігі» тұрғысында

5. Сандық функцияның нүктедегі дифференциалының геометриялық кескіні – функция графигінің нүктесіндегі өсімшені тәуелсіз айнымалы етіп алғанда пайда болатын сызықтық функцияның өзі дифференциал, ал оның графигі функция графигіне сол нүктеде жүргізілген жанама болуы

6. Дифференциалданатын сандық функцияларға қолданылған арифметикалық амалдар нәтижесінде пайда болған функцияның дифференциалын алғашқы функциялардың өздері

мен дифференциалдары арқылы өрнектеу – дифференциал анықтамасы мен туындыға арифметикалық амалдар қолдану нәтижелерінің жазылуыларын баламалы түрде қайталау

7. Дифференциалданатын функцияның әр нүктесіне оның сол нүктедегі дифференциалын сәйкес қоятын ереже функцияның жаңа түрі ретінде – аралықта дифференциалданатын функция жағдайында аралықтың әр нүтесіне бір нақты сан сәйкес қойылса, бұнда әр нүктеге оның сол нүктедегі дифференциалы болатын бір сызықтық функцияның сәйкес қойылуы және осылайша функцияның жаңа бір түрінің анықталуы.

8. Сәйкес нүктелерде дифференциалданатын сандық функциялардан құрылған күрделі функцияның дифференциалдануы мен оның туындысын есептеу формуласының тағы бір дәлелдемесі – күрделі функцияның құрамындағы сыртқы функция дифференциалын локалді сызықтандыру түрінде ішкі функцияның мәні болатын нүктеде жазып, артынша, ондағы ішкі функция өсімшесін де локалді сызықтандырып, күрделі функцияның тәуелсіз айнымалысы бойынша бас сызықтық бөлігін бөліп, жинақталғанда шығатын теңдіктің тікелей салдары ретінде.

§9. Анықталмағандықты ашуды туындылар қатынасының шегіне келтіретін лопиталь ережелері

1. Лопиталь ережесінің мазмұны болатын екі функцияның қатынасының шегі олардың туындылар қатынасының шегіне тең болатынын айқын түрде көрсету – шек алынып тұрған нүктеде дифференциалданатын, мәні нөлге тең болып, $\frac{0}{0}$ анықталмағандықты құрайтын екі функция қатынасының шегі сол нүктедегі туындылар мәндерінің қатынасына тең болуы

2. Лопиталь ережесі – шек алынып тұрған нүктенің ойылған маңайында дифференциалданатын екі функцияның сол нүктедегі шектері бірдей нөлге немесе шексіздікке тең болып, сонысымен сәйкес $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандықтарын құрған жағдайда туындылар қатынасының шегі бар болуынан бастапқы функциялар қатынасының да шегінің бар және мәні сол туынды қатынасының шегіне тең болуы

3. Лопиталь ережесін қолдану сәттері – Лопиталь ережесінің анықталмағандықты ашу есебінде әрқашан қолданыста бола бермейтіндігін $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықтың нақты мәнді шегі бар болатындығы тікелей жолмен ашылғанымен, олардың туындыларының қатынасының ешқандайда да шегі болмайтындығын көрсететін мысал; туындылар қатынасының шегі бастапқы функциялар қатынасының шегіне қарағанда анықталмағандықтан арылған, үзіліссіз функцияның мәніне тең шек болуы; анықталмағандықты ашу мақсатына жету үшін Лопиталь ережесін бірнеше рет қолдану қажеттілігі

4. Лопиталь ережесін қолдану келтірілетін $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} түріндегі анықталмағандықтар – шегін табу қажет функцияларды Лопиталь ережесін қолдануға мүмкін болатындай функциялар қатынасы түрінде өрнектеу

§10. Сандық функцияны алгебралық көпмүшелікпен жуықтайтын Тейлор формуласы

1. Жуықтау формулаларының мағынасы мен мақсаты – қандай да бір мағынада күрделі объектіні құрылысы белгілі бір мағынада қарапайым екінші объектімен алдын ала берілген дәлдікті қанағаттандыратындай етіп алмастыру арқылы күрделі объектіні сол дәлдікпен қарапайым объектінің орынбасуы, соның ішінде дифференциалдану мағынасында жатық кез келген функцияны алгебралық көпмүшелікпен алмастыру

2. Алгебралық көпмүшелік жағдайындағы Тейлор формуласының мазмұны мен мағынасы – күрделі объект ретінде функцияны, ал функцияның өзін жуықтау құралы ретінде таңдалған алгебралық көпмүшелік деп алғанда бір ғана нүктедегі барлық туындылары арқылы функцияның әр нүктедегі мәнінің дәл өрнектелуі және сол жазылудың Тейлор формуласы деп аталуы, сонымен алгебралық көпмүшеліктің ерекше қасиеті бір нүкте маңайындағы құрылысымен анықталатын туындылары арқылы алгебралық көпмүшелік мәнінің әр нүктеде дәл бейнеленуі.

3. Сандық функцияның бір ғана нүктедегі туындыларымен анықталған Тейлор көпмүшелігі мен Тейлор формуласы – функция көпмүшелік болған жағдайдағыдай жалпы функция үшін де Тейлор көпмүшелігі деп аталатын жуықтау көпмүшелігінің бір ғана

нүктедегі функция туындылары арқылы анықталуы және көпмүшеліктен ерекшелігі жуықтау көпмүшелігінің бастапқы функциядан ауытқуы нөлден өзге болуынан мейлінше кіші болуы талап етілетін қалдық мүшенің пайда болуы, осы жазудың Тейлор формуласы деп аталуы

4. Тейлор формуласының жәй (глобалді) және локалді екі түрі – Тейлор формуласындағы қалдық мүшенің жиындағы абсолют шамасын шенеу болатын глобалді және нөлге ұмтылу жылдамдығын анықтайтын локалді екі көзқарас

5. Тейлордың глобалді формуласының дәлелдеуі – Коши теоремасындағы екі функцияның бірін қалдық мүше, екіншісін тәуелсіз айнымалының туынды алынып отырған нүктеден ауытқуының дәрежесі түрінде алу арқылы

6. Тейлордың локалді формуласының дәлелдеуі – қалдық мүшесі белгісіз нақты санға көбейтілген өсімшенің ең үлкен дәрежесі түрінде жазылады да, сол белгісіз коэффициентті Ролль теоремасына ыңғайланған шеткі нүктелердегі мәні тең көмекші функция арқылы анықтау барысында қолданылған Тейлор формуласының дәрежесіне тең ретті туындысы бар деген теорема шартына өз-өзінен келуі

7. Тейлор глобалді формуласының айқын жазылған қалдық мүшелері – Тейлор формуласының дәрежесінен бірге артық туынды мәні мен өсімше дәрежесінің параметрі арқылы өрнектелген Шлемильх және Рош берген қалдық мүшелері және де Тейлор көпмүшелігіндегі факториал заңдалығын бұзбай жалғастаратын параметрдің сәйкес $n+1$ мен 1 мәндерін қабылдағандағы Лагранж және Коши берген түрлері

8. Тейлор локалды формуласының Пеано қалдық мүшесі –нүктеде Тейлор көпмүшелігінің ретіне тең туындысының бар болуы қалдық мүшенің нөлге жылдам ұмтылуын қамтамасыз етуі

9. Тейлордың глобалді және локалді формулаларындағы қалдық мүшелерінің арақатынастары –қалдық мүшелері Лагранж және Пеано берген түрде болатын Тейлор формулаларымен қанағаттанған жағдайда дәлелдеуді локалді формуламен шектеу

§11. Жоғарғы ретті туындылары айқын, жинақы түрде жазылатын негізгі элементар функцияларды тейлор (маклорен) формулалары арқылы алгебралық көпмүшеліктермен жуықтау және сонда пайда болатын қателіктердің айқын түрлері мен олардың жоғарыдан бағалаулары

1. Сандық функцияның глобалді және локалді Маклорен формуласы – туындылар мәні нөлге тең нүктеде алынғандағы Тейлор формуласы және сол жеке жағдайдағы глобалді және локалді қалдық мүшелеренің жазылулары

2. Негізгі элементар функцияларды кез келген дәлдікпен есептеуді қамтамасыз ететін Маклорен формуласы – негізгі элементар функциялардың күрделі түрдегі анықталу тәртібі тікелей мәндерін табуға ешқандай мүмкіндік бермеуінен туындалған күрделі теориялық мәселенің Маклорен формуласындағы нөл нүктесіндегі туындылар арқылы құрылған алгебралық көпмүшелікпен жуықтағандағы қалдық мүшесі айқын түрде шенелу теңсіздіктері тұрғасынан практикалық шешілуі

3. Көрсеткіштік функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен барлық нақты сандар жиынында жуықтау – көрсеткіштік функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы

4. $\sin x$ функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен периодта жуықтау – $\sin x$ функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы

5. $\cos x$ функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен периодта жуықтау – $\cos x$ функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы

6. Логарифмдік функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен анықталу жиынында жуықтау – логарифмдік функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын,

жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы

7. Дәрежелік функцияны кез келген дәлдікте алгебралық көпмүшелікпен анықталу жиынында жуықтау – дәрежелік функцияның жоғарғы ретті туындыларының айқын, жинақы жазылған формулаларынан Маклорен көпмүшелігінің, қалдық мүшелерінің және қалдық мүшелерінің шенелу формуласының әрқайсысының айқын, жинақы жазылуы

8. Тейлордың локалді формуласына негізделген шек табу тәсілі – анықталмағандықтарды ашудың Тейлор формуласына негізделген алгебралық бас бөлікті ажырату арқылы

§12. Аралықта дифференциалданатын сандық функцияның тұрақтылығы, өсуі және кемуі

1. Дифференциалданатын функцияның аралықта тұрақтылығының критерийі – аралықта функция тұрақтылығы мен әр нүктеде туындысының нөлге тепе-тең болуының пара-парлығы

2. Дифференциалданатын функцияның аралықта кемімеуі мен өспеуінің критерийлері – аралықта функцияның кемімелі не өспелі болуы мен әр нүктеде туындысының сәйкес теріс емес не оң емес болуының пара-парлығы

3. Дифференциалдық есептеуді теңсіздіктерді дәлелдеуге қолдану мысалдары – теңсіздіктің екі жағындағы функциялар айырмасы түрінде құрылған функция туындысының қатаң оң не теріс емес болуынан сәйкес қатаң теңсіздік пен қатаң емес теңсіздіктерді алу

§13. Сандық функцияны локалді экстремумге туынды арқылы зерттеу

1. Дифференциалданатын функцияның нүктедегі локалді экстремумын қамтамасыз ететін туынды таңбалары арқылы берілген шарттар – геометриялық суреттемесінде нүкте локалді максимум болғанда сол нүктеге жеткенше өсіп, ары қарай кемуін математикалық тілге аударғанда сол нүктеге дейінгі аралықта туынды оң, ал одан өткеннен кейінгі аралықта туынды теріс болуы, дәл сол сияқты локалді минимум болғанда кеміп барып өсуін туынды таңбасының терістен оңға ауысуы арқылы тұжырымдау

2. Көп ретті дифференциалданатын функцияның нүктедегі локалді экстремумының екінші және одан да жоғарғы ретті туынды таңбалары арқылы берілген жеткілікті шарттары – функция экстремумының бірінші ретті туындының өзгерісі арқылы берілген шарттарындағы өзі де функция болатын туынды қасиеттерінің екінші және одан да жоғарғы ретті туындылар арқылы өрнектелуі

3. Функцияны локалді экстремумге зерттеудің жалпы сипаттамасы – зерттелген экстремумге күдікті нүктеде ақырлы туындысы бар және нөлге тең жағдайды толықтыратын экстремумге күдікті ақырлы туындылары жоқ нүктедегі біржақты ақырсыз туындыларының таңбасына байланысты экстремум нүктелерін зерттеу: нүктедегі оң және сол жақты ақырсыз туындылары біртаңбалы болғанда экстремум нүктесінің болмауы және де, керісінше, қарама-қарсы таңбалы болғанда экстремум нүктесі болуы

4. Сегментте үзіліссіз және бөлік-бөлік дифференциалданатын функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу ережесі – функцияның нөлге тең туындысы бар, ешқандай туындысы жоқ және сегменттің шеткі нүктелеріндегі мәндерін салыстыру.

§14. Сандық функциялардың дөңестігі мен иілу нүктелері

1. Дөңес функцияның пара-пар анықтамалары – геометриялық тұрғыдан көрнекі қасиеттің аналитикалық жазылуы мен оған пара-пар туынды анықтамасына бейімделген функция өсімшесі мен аргумент өсімшесінің қатынастары теңсіздігі

2. Дифференциалданатын функция дөңестігінің туындылар тіліндегі критерийлері – функция туындысының монотондылығына және соның негізінде бастапқы функцияның екінші ретті туындысының бір таңбалылығына пара-парлығы

3. Дифференциалданатын функция дөңестігінің геометриялық критерийі – функция графигінің әр нүктесіне жүргізілген жанамасынан біржақта жатуы 4. Дөңес функцияның анықтамасында қамтылмаған функцияның үзіліссіздігі мен біржақты дифференциалдануы – функцияның дөңестік аралығының әрбір нүктесінде оң жақты

ақырлы және сол жақты ақырлы туындыларының бар болуы, соның салдарынан үзіліссіз болуы

4. Сандық функцияның иілу нүктесі және оның бар болуының өзара бөлек қажетті және жеткілікті шарттары – функцияның дөңестік бағыты ауысу нүктесі, екі рет дифференциалданатын функцияның иілу нүктедегі екінші ретті туындысының нөлге тең болуы, иілу нүктесі болуын қамтамасыз ететін туындысының н. кте маңайында әртүрлі монотондылығы мен соның негізіндегі екінші ретті туындының нүктеге дейінгі және кейінгі аралықтардағы тұрақты таңбаларының қарама-қарсылығы

§15. Элементар функциялар графигінің эскизін дифференциалдық есептеулер аясында салу жобасы

1. Элементар функцияның график эскизін салу жобасы – анықталу және мәндер жиындарын, координаталар өстерімен қиылысу нүктелерін, жұп, тақтылығын мен периодтылығын, үзіліссіздік аралықтары мен үзіліс нүктелерін, тік, көлденең және көлбеу асимптоталарын, бірінші ретті туынды құрылғысымен монотондылық аралықтары мен экстремумдарын, екінші ретті туынды құрылғысымен дөңестік аралықтары мен иілу нүктелерін анықтау.

VI ТАРАУ. САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ МЕН АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

§1. «Анықталмаған интеграл» тақырыбының мазмұны

1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл – сәйкес берілген аралықтың әр нүктесінде туындысы бастапқы функцияға тепе-тең функция және осы шартты қанағаттандыратын, бір-бірінен тұрақтыға тең шамамен өзге функциялар жиыны

2. «Анықталмаған интеграл» тақырыбының мазмұны – қандай функциялардың алғашқы функциялары бар деген сұраққа жауап болатын әрбір аралықта үзіліссіз функцияның алғашқы функциясының міндетті түрде бар болуы; әрбір рлементар функция анықталу аралығында үзіліссіз болғандықтан оның алғашқы функциясының міндетті түрде бар болуы; рлементар функцияның алғашқы функциясының рлементар бола бермеуі; «алынатын интеграл» деп аталатын алғашқы функциясы рлементар болатын анықталмаған интеграл; «Анықталмаған интеграл» тақырыбы: «алынатын интегралдарды» іріктеу және «айқын түрде интегралдау» деп аталатын алғашқы функциялар болатын рлементар функцияға жету әдістері.

3. Элементар функциялардың анықталмаған интегралдар кестесі – анықталмаған интеграл анықтамасына бойынша туындылар кестесінің «кері» көшірмесі

§2. Анықталмаған интегралды табудың жалпы әдістері мен рекуррентті формулалар

1. Сызықтық түрдегі жіктеу әдісі – интегралданатын функциялардың сызықтық комбинациясының да интегралдануы және оларды анықталмаған интеграл анықтамасы мен туындының сызықтық қасиетінің тікелей салдары болатын жіктеу әдісімен алу

2. Айнымалыны ауыстыру әдісі – интегралданатын сыртқы және үзіліссіз дифференциалданатын ішкі функциядан құрылған күрделі функцияның интегралдануы және күрделі функция туындысының анықтамасы негізінде ішкі функцияны жаңа айнымалы түрінде алып интегралды табу

3. Бөліктеп интегралдау әдісі – үзіліссіз дифференциалданатын функциялар көбейтіндісінің туындысын табу формуласының анықталмаған интеграл анықтамасы бойынша оқылуы

4. Рекуррентті формулалар – оң бүтін сандармен нөмірленген бір түрдегі анықталмаған интегралдар тізбесіндегі белгілі бір нөмірден бастап әр интегралдың өз алдындағы нөмірлі интегралдармен байланысын теңдік түрінде тағайындайтын қатынастар

§3. Әрқашанда рлементар функция түріндегі алғашқы функциялары бар рационал функциялар және оларды интегралдау тәсілдері

1. Нақты мәнді корффициентті алгебралық көпмүшеліктің нақты мәнді корффициентті сызықты $x-\alpha$ және нақты мәнді корффициентті квадраттық x^2+px+q көбейткіштерге жіктелуі

2. Рационал функцияны жай бөлшектерге жіктеу – екі алгебралық көпмүшеліктің қатынасы болатын $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(n < m)$ түріндегі рационал бөлшектерді жай бөлшектер деп аталатын $\frac{A}{x-\alpha_1}$, $\frac{A_r}{(x-\alpha_1)^r}$, $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$, $\frac{C_sx+D_s}{(x^2+px+q)^s}$ ретіндегі бөлшектер түрінде жазу

3. Рационал функцияны интегралдау – берілген бөлшек бұрыс болған жағдайда көпмүшелік болатын бүтін бөлігі мен дұрыс бөлшек түрінде ажыратып жазу; дұрыс бөлшектерді жай бөлшектерге жіктеу және сондағы белгісіз корффициенттерді табу; сәйкесінше алынған бірінші және екінші түрдегі жай бөлшекті тікелей анықтамамен есептеу және соның негізінде табиғаты өзге рлементар функцияға келу, үшінші түрдегі жай бөлшекті айнымалыны ауыстыру әдісі бойынша және төртінші түрдегі жай бөлшекті рекуррентті формула негізінде есептеу

4. Рационал бөлшекті интегралдауда бөлімінің түбірлерін тауып, жай бөлшектерге жіктеуге қарағанда белгісіз корффициенттер санының азаюын қамтамасыз ететін Остроградский әдісі – бөліміндегі жай көбейткіштерінің реті бастапқы жай көбейткіштер ретінен бір дәрежеге кем дұрыс бөлшек пен интеграл астындағы дәрежесі бірге тең дұрыс бөлшек қосындылары түрінде өрнектеу арқылы белгісіз корффициенттердің санын азайту

§4. Кейбір рационал емес функцияларды рационалдыққа әкелу арқылы анықталмаған интегралын табу

1. $\int R\left(\varphi_0\left(x\right), \varphi_1\left(x\right), ..., \varphi_n\left(x\right)\right)dx$ анықталмаған интегралын айнымалы енгізу арқылы әрқашан да алынатын рационал фукцияның интегралына айналдыру – көп айнымалылы рационал бөлшектер деп аталатын айнымалылардың оң бүтін дәрежелері көбейтінділерінің ақырлы қосындысы болатын көп айнымалылы көпмүшеліктер қатынасы және нәтижесінде пайда болған нақты айнымалылы сандық функцияны айнымалы ауыстыру арқылы рационал функцияға келтіру

2. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right)dx$ $(r_1, \ r_2, ..., r_s$ - рационал сандар) түріндегі интегралдар – $\varphi_0\left(x\right) = x, \varphi_i\left(x\right) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ жағдайында $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, m-дәреже бөлімдерінің ең кіші ортақ еселігі арқылы жасалған алмасыруы

3. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ түріндегі интегралдар – $\varphi_0\left(x\right) = x, \varphi_1\left(x\right) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ жағдайында $a > 0$ болғанда $\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a} = t; c \geq 0$ болғанда $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$; екі нақты мәнді түбірі бар болғанда $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)} = \pm\, t\left(x-x_1\right)$ түріндегі Эйлер ауыстырулары

4. $x^m(a+bx^n)^p$ түріндегі дифференциалдық бином деп аталатын өрнек интегралы – айнымалы ауыстырғаннан кейін $\int(a+bt)^pt^qdt\left(q = \frac{m+1}{n} - 1\right)$ түріндегі интегралды p -бүтін сан болғанда $z^s = x^n$, мұндағы s – q рационал санының бөлімі; q - бүтін сан болғанда $x = \left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{1/n}$; $p+q$ бүтін сан болғанда $z^s = \frac{a+bt}{t} = \frac{a+bx^n}{x^n}$ ауыстыруы арқылы рационалдандыру

5. $\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx$ түріндегі интеграл – $\varphi_0\left(x\right) = \sin x, \varphi_1\left(x\right) = \cos x$ жағдайын әрқашанда рационалдандыратын, сол себепті универсалды $t = tg\frac{x}{2}$ алмастыруы

6. $\int R\left(\sin x, \cos x\right)dx$ түріндегі интеграл – $\varphi_0\left(x\right) = \sin x, \varphi_1\left(x\right) = \cos x$ жағдайын R функциясының жұп-тақ қасиеттері арқылы универсалды ауыстыру қарағанда ықшамды сәйкес айнымалылар енгізіп рационалдандыру

VII Т А Р А У РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

§1. Риман интегралының жоғарғы және төменгі қосындылар тіліндегі анықтамасы мен риман бойынша интегралданатын функциялар

1. Геометриялық көзқарастармен қамтылған Риман интегралының жоғарғы және төменгі қосындылар тіліндегі $(U - L)$ анықтамасы – геометриялық тұрғыдан қарағанда Риман интегралының анықтамасы дөңгелекке іштей сызылған квадраттан бастап қабырғалар санын екі еселей отырып, бірінің ішіне бірі орналасқан көпбұрыштар сызғанда олардағы үшбұрыштар саны да еселене отырып, есептелуі белгілі үшбұрыш ауданы арқылы іштей және осы көпбұрыштар төбелерінен жүргізілген жанамалар арқылы салынған көпбұрыштар аудандарымен сырттай дөңгелек ауданы деп аталатын санға ақырсыз жақындай отырып анықталған жазықтықтағы дөңгелек ауданы мәнін есептеу тәрізді жүргізілуі: екі бүйір жағынан ордината өсіне парраллель екі түзумен, төменнен

абсцисса өсінде жатқан кесіндімен, жоғарыдан сол кесіндіде анықталған, теріс емес, шенелген функция графигімен шектелген жазықтықтағы қисық сызықты трапеция атты фигура және де функция берілген сегмент сонда жататын нүктелермен жіктелгеннен соң, сол жіктеу нүктелері бойынша қисық сызықты трапецияның оған іштей сызылған ең үлкен тікбұрыштар ауданының қосындысымен төменнен және де сырттай сызылған ең кіші тіктөртбұрыштар аудандарының қосындысымен жоғарыдан жуықталуы және осы геометриялық құрылымды аналитикалық тілге аударғанда берілген сегмент өзара қиылыспайтын сегменттерге жіктеледі, ал сегменттердің өздері шеткі нүктелерімен ғана толық анықталғандықтан шеткі нүктелерін көрсеткенде сегментті бөлшектеу деп аталатын сол шеткі нүктелерден құрылған ақырлы нақты сандар жиынына келуіміз және осы жіктелу бойынша қисықсызықты трапецияны биіктігі әр бөліктің мәндер жиынының супремумы мен инфимумы, табаны бөлшектеу сегменті болатын жоғарғы және төменгі қосындылар деп аталатын тіктөрбұрыштар аудандарының қосындысымен сәйкес жоғарыдан және төменнен жуықтауы және осы қосындылар бір сан маңайына шоғырланса, сол сан Риман интегралының мәні деп аталып, ізделінді ауданды беруі

2. Жоғарғы және төменгі интегралдық қосындылардың, жоғарғы және төменгі интегралдардың монотондық сипаттағы қасиеттері – геометриялық тұрғыдан көрнекі бөлшектену ұсақталған сайын жоғарғы қосындылар жоғарғы интегралға жоғарыдан кеми, ал төменгі қосындылар төменгі интегралға үлкейе отырып жақындай түсуі, кез келген төменгі қосындының жоғарғы қосындыдан, төменгі интегралдың жоғарғы интегралдан аспауы

3. Функцияның Риман бойынша интегралдануының техникалық критерийі – сегментте шенелген функцияның Риман бойынша интегралдануы мен ортақ бөлшектенулі жоғарғы және төменгі қосындылардың бір-біріне қалауымызша жақын болуының пара-парлығы

4. Риман бойынша интегралдануды қамтамасыз ететін функция қасиеттері – интегралдану сегментінде функцияның үзіліссіз не монотонды болуы

§2. Риман интегралының қасиеттері мен орта мән төңірегіндегі қолданулары

1. Риман интегралының сызықтық қасиеттері – Риман бойынша интегралданатын функциялардың тұрақты санмен көбейтіндісінің де, олардың қосындыларының да, соның нәтижесінде кез келген сызықтық комбинациясының да Риман бойынша интегралдануы және ол интеграл мәнінің бастапқы функция интегралдар мәндерімен дәл сондай сызықтық комбинацияда өрнектелуі

2. Күрделі функция мен функциялар көбейтіндісінің Риман бойынша интегралдануы – сәйкес үзіліссіз сыртқы және интегралданатын ішкі функциялардан құрылған күрделі функцияның және интегралданатын екі функцияның көбейтіндісінің Риман бойынша интегралдануы

Риман интегралының аддитивтік қасиеті – жалпыны жекелерге жіктеп, керісінше жекелерден жалпыны жинайтын аддитивтілік атты қасиеті Риман интегралы жағдайында сегментте интегралданатын функцияның сегменттің ақырлы жүктелуіндегі әр сегментте де интегралдануы және сегменттегі интегралдың жіктеудегі интегралдар қосындысына тең болуы, керісінше, жіктеудегі әр сегментте интегралануынан сегменттің өзінде де интегралданып, әр сегментіндегі интегралдар мәндері қосындысының сегменттегі интегралын беруі, сонымен қатар сегменттің бір ғана шеткі нүктесінде үзілісті бола алатын шенелген функцияның сол сегментте интегралдануы мен үзіліс нүктелер саны ақырлы шенелген функцияның интегралдану қасиетін қамтамасыз етуі

3. Риман интегралының сегменттегі интегралданатын функциялар теңсіздік қатынасын сақтауы – интегралданатын екі функцияның сегменттің әр нүктесіндегі біріншісінің мәні екіншісінің мәнінен аспауынан, олардың Риман интегралдарының мәні де сол қатынаста болуы, интегралданатын теріс емес функция интегралының да теріс емес болуы, сол себепті интегралданатын функция интегралы модулінің функция модулінің интегралынан аспауы, шенелген функция интегралы модулінің сегмент ұзындығы мен шенінің көбейтіндісімен жоғарылан және шенелген және теріс емес интегралданатын функциялар көбейтіндісінің интегралын төменгі және жоғарғы шендер мен теріс емес функция интегралы көбейтіндісімен сәйкес төменнен және жоғарыдан бағалау

4. Риман интегралының орта мән туралы теоремасы дискретті жағдайдағы арифметикалық орта ұғымының үзіліссіз баламасы ретінде – аналитикалық тұрғыдан сегментте үзіліссіз функцияның ақырсыз көп мәндерін соның Риман интегралы арқылы жазылған орта мән деп, әрі қарай қолданыста дамытылған ілімдерде математикалық күтілім деп те аталатын бір ғана мәнмен өрнектелуі, оның геометриялық тұрғыдағы мағынасы сол үзіліссіз функциямен шектелген қисық сызықты трапеция аудан мәнін сақтай отырып, тіктөртбұрыштың сыртындағы қисық сызықты трапеция бөлігінің ішіндегі қисық сызықты трапециядан бос бөлікпен тең болатындай етіп тіктөртбұрышқа түзететін орта мән атты ізделіністі тіктөртбұрыш биіктігінің мәні мен орта мән туралы теореманың кез келген шенелен фукциялар үшін жоғарғы және төменгі шендері арасындағы санмен бағалануы

§3. Риман интегралының басқа да рквивалентті анықтамалары

1. Риман интегралының S (мәндер) тіліндегі анықтамасы – берілген сегментте анықталған (шенелу шарты алдын ала қойылмаған) сандық функцияның аралықтың бөлшектенуіне сәйкес интегралдық қосынды деп аталатын жіктеу сегменттерінің ұзындығы мен сол сегментте жататын қайсы бір нүктедегі функция мәні көбейтіндісінің қосындысы және бөлшектеу диаметрі бойынша анықталған интегралдық қосындының диаметр нөлге ұмтылғандағы интегралдық қосындыдағы функция мәндеріне тәуелсіз жаңа түрдегі нақты мәнді шегі мен бар болған жағдайда функцияның S тілінде интегралдануы және де сол шек мәнінің функцияның S тіліндегі интегралы деп аталуы

2. Риман интегралының $(U_{2^n} - L_{2^n})$-тіліндегі анықтамасы – интегралдың $(U - L)$ тіліндегі анықтамасындағы бөлшектеуді кездейсоқ емес, бірте-бірте бөлшектеудің әр сегментін қақ бөле отырып, тең 2^n бөлікке бөлгенде бөлшектеулер бойынша алынған супремум мен инфимум орнына сәйкес жоғарғы қосындылары монотонды кеми отырып, төменгі қосындылары монотонды өсе отырып бар болатын тізбек шектері өзара тең болып беттесуі бойынша интегралды анықтау

3. Интегралдың $(U - L)$ және S-тіліндегі анықтамаларының рквиваленттігі – сегментте анықталған шенелуі алдын ала қойылмаған функцияның S-тілінде интегралдануынан оның шенелуі мен $(U - L)$-тілінде интегралдануы, керісінше $(U - L)$-тілінде интегралданатын шенелген функцияның S-тілінде интегралдануы және де әрқашанда екі анықтамадағы интеграл мәндерінің өзара тең болуы, қорытындылап айтқанда, интеграл анықтамаларының бірі бойынша интегралданатын функцияның екіншісі бойынша да интегралдануы мен интеграл мәндерінің өзара тең болуы

4. Риман интегралының $(U - L)$ және $(U_{2^n} - L_{2^n})$ тілдеріндегі анықтамаларының рквиваленттілігі – сегментте шенелген сандық функциялар үшін сәйкес inf-sup пен монотонды тізбек шегі арқылы берілген интеграл анықтамаларының бірі бойынша интегралдануынан екіншісі бойынша да интегралдануы мен интеграл мәндерінің өзара тең болуы

§4. Интегралдау мен дифференциалдаудың ньютон-лейбниц түріндегі байланысы

1. $\sin x$ функциясы $\cos x$ үшін $\sin' x = \cos x$ болатындай айқын туындысы берілмеген үзіліссіз функция туындысын табу мәселесін жаңа функцияны анықтайтын жоғарғы шегі айнымалы болатын дамытылған Риман интегралы арқылы анықтау – сегментте үзіліссіз болуынан басқа еш шарт қойылмайтын алдын ала берілген функция үшін әр нүктедегі туындысы дәл осы функция мәні болатын функция құру мақсатымен анықталған сегменттің бастапқы нүктесінен жаңа функция айнымалысы ретінде қабылданатын кез келген нүктесіне дейінгі аралықта алынған жоғарғы шегі айнымалы болатын берілген функция интегралының жаңа функция ретінде қойылған күрделі мәселені шешуі

2. Интегралдау және дифференциалдау ілімдерін байланыстыратын Ньютон-Лейбниц формуласы – үзіліссіз функцияның Риман интегралы мен туынды арқылы анықталған алғашқы функциясының теңдік түріндегі теориялық байланысы, соның ішінде, алғашқы функциясы айқын түрде берілген (анықталмаған интеграл тақырыбы болған) жағдайларда функция үшін Риман интегралын оның анықтамасындағы inf-sup, шек күрделі есептеулерін

жүргізбей-ақ алғашқы функциялардың бірінің сегмент шекараларындағы мәндерінің айырмасы арқылы практикалық есептеу

3. Интегралдық және дифференциалдық есептеудің негізгі теоремасы болып табылатын Ньютон-Лейбниц формуласының үзіліссіздікті сегментте интегралдану шартымен кеңейтетін жалпы жағдайы

§5. Риман интегралының түрлендірулері мен орта мән туралы екінші теорема

Риман интегралында айнымалыны ауыстыру мәселесі – сегментте үзіліссіз функцияның айнымалысын мәндері функция анықталған сегментте жатып, үзіліссіз дифференциалданатын, жаңа сегментте анықталған функциямен алмастыру арқылы бастапқы функцияның Риман интегралын жаңа айнымалыға тәуелді күрделі функция мен ауыстырымдағы функция туындысының көбейтіндісін жаңа айнымалы анықталған сегментте интегралдау арқылы өрнектеу

2. Риман интегралын бөліктеп интегралдау – берілген функцияны туындыларымен қоса үзіліссіз функциялар көбейтіндісі түрінде жазып, сол көбейтінді туындысы формуласының екі жағын да Риман бойынша интегралдағанда сызықтық қасиет бойынша пайда болған үш интегралдағы көбейтінді туындысының интегралы Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша тікелей есептеліп, интегралдан арылады да, көбейтінді түрінде жазылған бастапқы функция интегралының «симметриялы» мағынада анықталған оған қарағанда есептеу тұрғысынан ұтымды интеграл мен тікелей есептелген интеграл мәні арқылы өрнектелуі

3. Қалдығы интегралдық түрдегі Тейлор формуласы – еселі рет туындылатын және ең үлкен ретті туындысы үзіліссіз функцияны Тейлор формуласымен жазуда бөліктеп интегралдау формуласын функция туындысы мен жіктеу көбейткішіне қажетті рет қолдану нәтижесінде ең үлкен ретті туынды мен жіктеу көбейкішінің бірге кем дәрежесінің сол туынды алынатын нүктеден сегменттің қайсыбір нүктесіне дейінгі интегралы арқылы өрнектелген қалдық мүшесі және оның Лагранж, Коши берген қалдық мүшелерге өтуі

4. Орта мән туралы екінші теорема атты Риман интегралының аддитивтілік қасиетінің монотонды функция мен интегралданатын функциялар көбейтіндісіне жалпылауы болып, монотонды функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері арқылы интеграл таңбасы астынан алып шығуы – Риман интегралының аддитивтілік қасиеті сегменттегі кез келген нүкте үшін орындалса, сегментте кемімейтін функция мен интегралданатын функция көбейтіндісінің сол сегмент бойынша алынған Риман интегралының өспелі функцияның ең кіші және ең үлкен мәндерін сегменттің бастапқы нүктесінен қайсыбір нүктесіне дейінгі және ары қарай сол нүктеден соңғы нүктеге дейінгі аралықтағы интегралданатын функция интегралының сәйкес мәніне көбейтіндісінің қосындысына тең болатындай нүктенің табылу

§6. Қисық және риман интегралы арқылы есептелетін оның ұзындығы

1. Қисықтың аналитикалық түрде ортақ сегментте үзіліссіз және реттелген қос функция ретінде анықталуы мен оның геометриялық сипаттамасы – анықталу сегментіндегі тәуелсіз айнымалының әр мәніне үзіліссіз функциялар арқылы екі мән сәйкес қойылып, олардың ретіне сәйкес бірінші координатасы бірінші функция, екінші координатасы екінші функция мәні болатын нүкте салынады да, сондай нүктелердің барлығы бірігіп, жазықтықтағы қисықты құруы

2. Қисық ұзындығының анықтамасы – қисық анықталған кесіндінің бөліктенуіне сәйкес қисықтың өзі де бөліктеніп, ұзындықтары шеткі нүктелерінің координаталарына Пифагор теоремасын қолдану арқылы анықталған кесінділерден тұратын сынық сызықтар ұзындықтарымен іштей жуықталғанда пайда болған қосынды супремумы ретінде

3. Қисық ұзындығын Риман интегралы арқылы есептеу – интегралдық қосындыны бірден бермегенімен, Лагранж формуласы бойынша қандай функцияның интегралы болатындығына бағыт беретін анықтамадағы қисық сызық ұзындығына тең шама мен қисықты беретін реттелген, үзіліссіз функциялар арқылы өрнектелген функцияның интегралы арқылы ұзындық есептеу формулаларының теңдіктерін оны дәлелдеуге қарағанда оңай екі қарама-қарсы теңсіздікті супремум мен интегралының қосындылар тіліндегі анықтамасын қолдана отырып дәлелдеу арқылы алу

§7. Жаратылыстану мәселелеріне математикалық модель құру арқылы Риман интегралын қолдану үлгілері

1. Сегментте үзіліссіз функциялар графиктері арқылы анықталған жазықтықтағы фигураның ауданын есептеу – ауданы Риман интегралымен өрнектелген бір таңбалы қисық сызықты трапецияларға жіктеу арқылы

2. Айналу денесінің көлемін есептеу формуласы белгілі деп қабылданған цилиндр көлемі арқылы Риман интегралы теориясымен анықтау және оны есептеу формуласы – қисық сызықты трапеция өспен толық айналғанда шыққан айналу денесі атты дененің көлемін айналу өсіндегі кесіндіні бөлшектегенде пайда болған цилиндрлер көлемі арқылы іштей және сырттай жуықтағандағы құрылған қосындылардың интегралдар теориясындағы жоғарғы және төменгі қосындылар екендігін көрген соң ғана сол теориядағы үзіліссіз функцияның интегралы бар болуы туралы теоремадан қосындылардың сәйкес инфимумы мен супремумының ортақ мәнінің бар болуынан айналу денесінің көлемі бар деп, ал сол Риман интегралы бойынша өрнектелген ортақ санды ізденісті көлемнің мәні деп анықтама бойынша қабылдау

3. Материялық қисықтың статикалық моменті мен ауырлық центрін интеграл арқылы есептеу – бірқалыпты таралған салмақты материялық қисық бөлшектенуіне сәйкес одан алынған нүктелер бойынша бір нүктеде шоғырланған әрбір бөлігінің салмағын дискретті жағдайдағыдай құрылғандағы қосындылар интегралдық қосындыны бергендіктен үзіліссіз функцияның Риман интегралы бар болып, сол интеграл мәні арқылы статикалық момент пен ауырлық центр мәнін анықтау және есептеу

§8. Риман интегралын жуықтап есептеу әдістері

1. Үзіліссіз функцияның Риман интегралын жуықтап есептеу деген не? – есептеу тұрғысынан күрделі, берілген сегменттегі ақырсыз нүктелерге тәуелді, дәл мәні тікелей есептеуге келмейтін sup-inf, шек болатын интеграл түріндегі ақырсыз объектіні квадратуралық формула атты функцияның түйін деп аталатын нүктедегі мәндерін сәйкес салмақтары деп аталатын корффициенттерге көбейте отырып алынған ақырлы қосындымен қалауымызша алдын ала алынған дәлдікте алмастыру

2. Лагранж интерполяциялық көпмүшелігі – алдын ала берілген жазықтықтағы ақырлы санды нүктелерден реті нүктелер санынан бірге кем көпмүшелік құру мәселесінің 1795 жылы Джозеф Лагранж берген Лагранж көпмүшелігі атты шешімі және сандық функцияның Лагранж интерполяциялық көпмүшелігі

3. Лагранж интерполяциялық көпмүшелігін Риман интегралын жуықтап есептеуге қолдануының әдістемесі – интеграл астындағы үзіліссіз функцияны берілген сегменттің бөлшектеу нүктелерінде сол функцияның мәндері бойынша құрылған Лагранж интерполяциялық көпмүшелігімен алмастыру арқылы дәл есептелетін көпмүшеліктің интегралымен жуықтау

4. Тіктөртбұрыштар әдісі – сегментті бірқалыпты жіктеген соң, интегралдың аддитивтік қасиеті бойынша әр бөлігіндегі интегралды интеграл астындағы функцияны бөлік ортасындағы мәні болатын нөлінші ретті Лагранж интерполяциялық көпмүшелігімен алмастыру арқылы жуықтау және жуықтау қателігінің екінші ретті туынды ең үлкен мәнінің бөлшектеу санының екінші дәрежесіне қатынасы арқылы алынған бағалауы

5. Трапециялар әдісі – сегментті бірқалыпты жіктеген соң, интегралдың аддитивтік қасиеті бойынша әр бөлігіндегі интегралды сегмент ұштарындағы интеграл астыфункция мәні бойынша құрылған кесіндіні беретін бірінші ретті Лагранж интерполяциялық көпмүшелігімен алмастыру арқылы жуықтау және жуықтау қателігінің екінші ретті туынды ең үлкен мәнінің бөлшектеу санының екінші дәрежесіне қатынасы арқылы алынған бағалауы

6. Параболалар (Симпсон) әдісі - сегментті бірқалыпты жіктеген соң, интегралдың аддитивтік қасиеті бойынша әр бөлігіндегі интегралды сегмент ұштары мен ортасындағы нүктедегі интеграл асты функция мәні бойынша құрылған параболаны беретін екінші ретті Лагранж интерполяциялық көпмүшелігімен алмастыру арқылы жуықтау және жуықтау қателігінің төртінші ретті туынды ең үлкен мәнінің бөлшектеу санының төртінші дәрежесіне қатынасы арқылы алынған бағалауы

VIII ТАРАУ. САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

§1. Сандық қатар атты ақырсыз қосындының ақырлы қосындымен ұқсастығы және айырмашылығы

1. Сандық қатар және де сол саны ақырсыз қосылғыштардың қосындысын тағайындау – берілген сандық тізбек мүшелерінің бірінші мүшесімен, екінші мүшесімен сол сияқты нөмірленген әр мүшесімен анықталатын сандық қатар атты ақырсыз қосынды түрінде жазылуы, қосылғыш саны қанша көп болса да, ақырлы қосынды мағыналы да, ақырсыз қосындының өзіндік мағынасыздығы, 1821 жылы сандық қатар деген шек деп Коши айтқандай ақырсыз қосынды ұғымын дербес қосындысы деп аталатын тізбектің алғашқы мүшелері қосындыларынан құрылған сандық тізбек шегі нақты мәнді болғанда қатар жинақталады және қатар қосындысы осы тізбек шегіне тең, ал тізбек шегі ақырсыз не шегі жоқ болғанда қатар жинақталмайды деген тұрғыда мағыналы етілуі

2. Бірінші, екінші, жалпы айтқанда, әр мүшесімен анықталатын сандық қатарлардың сәйкес нөмірлі мүшелеріне сызықтық амалдарды қолданғанда пайда болған сандық қатар – сандық қатарды анықтайтын тізбекке белгілі сызықтық амалдар қолдану нәтижесінде пайда болған тізбек арқылы анықталған қатар берілген сандық қатарға қолданылған сол сызықтық амалдар нәтижесі ретінде, сандық қатарды нөлден өзгеше санға көбейту оның жинақталуын өзгертпеуі және жинақталған жағдайда санға көбейтілген қатар қосындысының бастапқы қатар қосындысы мен сол сан көбейтіндісіне тең болуы; екі жинақталатын қатардың сәйкес мүшелерінің қосындысынан құрылған қатардың да жинақталуы, жинақталатын және жинақталмайтын қатардың сәйкес мүшелерінің қосындысынан құрылған қатардың жинақталмауы, екі жинақталмайтын қатардың сәйкес мүшелерінің қосындысынан құрылған қатардың жинақталу да, жинақталмауы да мүмкіндігі

3. Сандық қатардың дербес қосынды мен қалдық қатарына жіктелуі және сондай жағдайда қосындысы өзгермейтін ақырлы қосындыға қарағандағы ерекшеліктері – сандық қатарды белгілі бір нөмірлі мүшеге дейінгі нөмірлі мүшелерінен тұратын ақырлы қосынды мен қалған мүшелерінен құралған бастапқы қатардың қалдық қатары деп аталатын жаңа қатарға бөлу, бастапқы қатар мен қалдық қатар жинақталуының пара-парлығы, сол себепті қатар жинақталуының да, жинақталмауының да қатардың әр жеке мүшесіне тәуелсіздігі, қалдық қатардың бастапқы нөмірі өскен сайын нөлге ұмтылуы

4. Сандық қатар мүшелерінің ақырлы қосылғыштарға жіктелуі арқылы, керісінше топтастырылған қатарды қайта ашу арқылы алынған жаңа қатарлар және олардың қалай жіктелсе де, қалай ашылса да қосындысы өзгермейтін ақырлы қосындыға қарағандағы ерекшеліктері – жинақталатын қатар мүшелерінің орнын ауыстырмай топтастырғанда әр мүшесі сәйкес топтағы қосындыға тең болатын жаңа қатардың құрылуы және сол жаңа қатардың да жинақталып, бастапқы қатар қосындысына тең болуы, керісінше, топтастырғанда шыққан қатар жинақталуының әр топтағы қосынды таңбасы бірдей болғанда ашылған қатарда сақталуы

5. Сандық қатар жинақталуының бір қажетті шарты – сандық қатардың жалпы мүшесінің шегі бар және нөлге тең болуы, сол себепті қатардың жалпы мүшесінің нөлге ұмтылуы оның жинақталмауын қамтамасыз етуі

§2. Бір таңбалы мүшелі сандық қатарлар және олардың біржақтан жинақталуының монотонды тізбектер жинақталуымен пара-парлығы, жинақталуы белгілі рталон қатарлармен салыстырулары

1. Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының критерийі – қатар жинақталу, жинақталмауының тікелей анықтамасы бойынша дербес қосындылар тізбегінің сәйкес нақты мәнді шегі бар не болмауына пара-парлығы және қатар теріс емес сандардан құрылуынан оның дербес қосындылар тізбегі келесі нөмірге көшкенде теріс емес сан қосылып, кемімейтін болады да, монотонды тізбектің нақты мәнді шегі бар болуы жайлы критерийінен тізбектің жоғарыдан шенелу не шенелмеуіне баламалылығы

2. Теріс емес мүшелі қатардың жинақталуының интегралдық критерийі – үзіліссіз, теріс емес, өспейтін функцияның бүтін мәнді мүшелерінен құрылған қатардың жинақталуының $A_n \equiv \int_1^n f\left(x\right)dx$ интегралымен анықталған кемімейтін тізбек шенелуімен пара-парлығы

3. Нөмірлес мүшелері белгілі реттік қатынаста болатын екі теріс емес мүшелі сандық қатарлар жинақталуының салыстыру теоремалары – мүшелері үлкен қатардың жинақталуынан мүшелері кіші қатардың жинақталуы және мүшелері кіші қатардың жинақталмауынан мүшелері үлкен қатардың жинақталмауы, сонымен бірге мүшелері үлкен қатардың жинақталмауы немесе кіші мүшелі қатардың жинақталуы екінші қатардың жинақталу, жинақталмауы жайлы еш мәлімет бермеуі

4. Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Коши белгісі және оның мәселені толық шешпеуі – қатардың жалпы мүшесінің n-ші дәрежелі арифметикалық түбірімен анықталған Коши көмекші тізбегінің шегі бар және бірден кіші, үлкен және тең болуына сәйкес берілген қатардың жинақталуы, жинақталмауы және мәселені шешпеуі

5. Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Даламбер белгісі және оның мәселені толық шешпеуі – қатардың жалпы мүшесінің кейінгі мүшесіне қатынасы арқылы анықталған Даламбер көмекші тізбегінің шегі бар және бірден кіші, үлкен және тең болуына сәйкес берілген қатардың жинақталуы, жинақталмауы және мәселені шешпеуі

6. Теріс емес мүшелі қатар жинақталуының Раабе белгісі және оның мәселені толық шешпеуі – $R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ формуласымен анықталған Раабе көмекші тізбегінің шегі бар және бірден кіші, үлкен және тең болуына сәйкес берілген қатардың жинақталмауы, жинақталуы және мәселені шешпеуі

7. «Қатардың тынысталуы» деген атауға ие сандық қатар жинақталуы мен жинақталмауының орнықтылығы – оң мүшелі жинақталатын қатардың мүшелерінің «кішкенелігінің» құпия заңдылығынан олардың барлығын қосқанда белгілі бір саннан аспауы, солай бола тұрып, оның әр мүшесін ақырсыз үлкен көбейткіштерге көбейтіп, мүшелерін «үлкейткенімен» қатардың жинақталуын сақтайтындай мүшелерде артық «қор» болуы және керісінше, оң мүшелі жинақталмайтын қатардың мүшелері тіпті нөлге ұмтылса да оның мүшелерінің «кішкенелігінің» құпия заңдылығынан қандай сан алсақ та одан асып қосынды құру мүмкіндігі және солай болғанда да оның әр мүшесін нөлге ақырсыз кемитін көбейткіштерге көбейтіп, мүшелерін «кішірейткенімен» қатардың жинақталмауын сақтауы

§3. Айнымалы таңбалы мүшелі қатарлар мен олардың тербеліс түрдегі жинақталуының суреттемесі және жинақталудың абель түрлендіруі арқылы жалпы қатарға арналған коши критерийіне келтіретін шарттары

1. Екі таңбалы да мүшелерінің саны ақырсыз айнымалы таңбалы қатарлар және олардың жинақталу жолы – бір таңбалы қатардың дербес қосындылары бір бағытта өзгеріп, монотонды түрде өз шегіне бір жақты жолмен ұмтылса, бар-жоғы екі оң және теріс таңбаны да қамтитын айнымалы таңбалы қатарларда дербес қосындысына жаңадан енетін қосылғыштар топ-топпен кезекпен кездесетін теріс емес таңбалы топқа түскенде қосынды өсіп, оң емес топқа түскенде кеміп, ырғала шегіне ақырсыз ұмтылуы

2. Жалпы жағдайдағы сандық қатар жинақталуының Коши критерийі – сандық қатар жинақталуы дербес қосынды атты сандық тізбек жинақталуымен анықталғандықтан қатар жинақталуы сол дербес қосындыдан құрылған сандық тізбектің нақты мәнді шегі бар болуы жайлы Коши критерийінің қатарлар тіліндегі екі дербес қосындының айырмасы болатын ақырсыз қосындының бір нөмірден үзбей екінші нөмірге дейінгі кесіндісімен жазылған көшірмесі ретінде

3. Әр қосылғышы екі санның көбейтіндісі болатын ақырлы қосындының Абель түрлендіруі – біріншісінен сол нөмірлі мүшеге дейінгі бірінші көбейткіштердің қосындысын екінші көбейткіштің алдындағы мүшемен айырмасына көбейткендегі көбейтінділер қосындысы мен өзіндік түрдегі шеткі жағдайлардың қосындысы түрінде

4. Сандық қатар жинақталуының Дирихле белгісі мен оның салдары болатын Лейбниц теоремасы – біріншісінің мүшелерінен құрылған дербес қосындылары шенелген, екіншісі кеми отырып, нөлге ұмтылатын екі тізбектің нөмірлес мүшелерінің көбейтіндісі түрінде

берілген сандық қатар жинақталуын Абель түрлендіруі бойынша Коши критерийімен бекіту және бірінші көбейткіш кезекпен кезек екі таңбаның ауысуын бергендегі оның салдары

5. Сандық қатар жинақталуының Абель белгісі - біріншісінен құрылған қатар жинақталып, екіншісі монотонды, шенелген екі тізбектің нөмірлес мүшелерінің көбейтіндісі түрінде берілген сандық қатар жинақталуын Абель түрлендіруі бойынша Коши критерийімен бекіту

6. Лейбниц теоремасының тағы бір дәлелдеуі – теорема шартын тікелей қолданып, тақ және жұп нөмірлерінен құралған тізбекшелер монотонды және шенелген тізбек ретінде жинақталғандықтан дербес шектер қасиеттері негізінде олардың бар және ортақ шектерінің дербес қосынды шегін беруі.

§4. Абсолютті және шартты жинақталатын сандық қатарлар мен олардың алмастырулары

1. Сандық қатардың абсолютті және шартты атты жинақталу түрлері – қатар мүшелерінің абсолют шамасынан құрылған жаңа қатардың жинақталуы бастапқы қатардың абсолютті деп аталатын жинақталуын анықтауы және абсалютті жинақталу міндетті түрде бастапқы қатар мүшелерінің «кішкене» болуымен қатардың өзінің де жинақталуын қамтамасыз етуі, абсолютті жинақталмайтын бастапқы қатар жинақталғанда оның шартты жинақтылық деп аталуы және осы жинақталу қатар мүшелерінің абсолют шамасына таңба әсер етуімен тербеле қамтылуы

2. Мүшелері бастапқы қатар нөмірлерімен міндетті түрде бір және тек бір рет қана нөмірленетін жаңа алмастырылған қатар – берілген қатарды анықтайтын тізбектің оң бүтін сандар жиынынан тұратын анықталу жиынын өзара бірмәнді сәйкестікте пайда болған тізбекпен жасалған қатар алмастыруы деп аталатын жаңа қатардың құрылуы

3. Абсолютті жинақталатын қатардың барлық мүмкін алмастыруларының жинақталуы мен олардың қосындыларының бірмәнділігі – абсолютті жинақталатын қатар қосындысының ақырлы қосындыдағыдай қосынды мәнін сақтап, қосылғыштардың орындарын қалауымызша алмастыруға болатындығы

4. Шартты жинақталатын қатардың алдын ала берілген кез келген санға жинақталатын алмастыруының бар болуы туралы Риман теоремасы – берілген айнымалы таңбалы қатар абсолютті жинақталмағандықтан ретімен тек теріс емес таңбалы мүшелері $+\infty$-ке ұмтылатын, теріс таңбалы мүшелері $-\infty$-ке ұмтылатын қатарлар болады да, нөлге ұмтылатын бір мүшеге біресе асып, біресе кеми отырып, екі қатардың мүшелерін кезекпен қоса алдын ала берілген нақты санға ұмтылатын, сол сияқты $+\infty$ пен $-\infty$ ұмтылатын қатарды құру

§5. Сандық қатарлардың көбейтіндісі мен еселі қатарлар

1. Екі сандық қатардың Коши көбейтінді атты жаңа қатар мен Мертенс теоремасы – әрбір мүшесі көбейткіш қатарлардың тиісті мүшелерімен алгебралық көпмүшеліктің көбейтіндісі жолымен айнымалы дәрежесі алдындағы корффициенттер түрінде анықтатын Коши көбейтіндісі және екі жәй жинақталатын қатардың Коши көбейтіндісінің әрқашан жинақтала бермеуі, ал ең болмағанда біреуі абсолютті жинақталғанда оның жинақталып, осы көбейтіндінің екі қатар қосындысының көбейтіндісіне тең болатындығын беретін Мертенс теоремасы

2. Екі сандық қатардың өзі де сандық қатар болатын көбейтіндісінің жалпы анықтамасы – оң бүтін саннан құрылған барлық мүмкін жұптар жиынын өзара қиылыспайтын және әрбір жұп міндетті түрде біреуінде және тек қана біреуінде жататын ақырлы жиыншаларға бөлу арқылы сол жиында жататын жұптарға сәйкес сандық қатарлар мүшелерінің қос-қостан көбейтінділерінің қосындыларын жаңа қатар мүшесі болатындай нөмірлей отырып, екі қатар көбейтіндісін анықтаудың жалпы шексіз әдістері

3. Еселі сандық қатарлар және олардың жинақталуы – теріс емес бүтін саннан құрылған барлық мүмкін жұптар жиынында анықталған функция түріндегі $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ екі еселі тізбек, осы тізбектің барлық мүшелерінің қосу таңбасымен жазылған $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{n,m} = a_{0,0} + a_{0,1} + a_{1,0} + ...$ символы түріндегі екі еселі қатары және оның

жинақталуының бірінің ішінде бірі орналасқан жұптардың ақырлы жиындары бойынша құрылған сандық қатар жинақталуымен анықталуы

§6. Нақты сандардың ақырсыз көбейтіндісінің ақырлы көбейтіндімен ұқсастығы және айырмашылығы

1. Ақырсыз көбейтінді және де сол саны ақырсыз көбейткіштердің көбейтіндісін тағайындау – берілген сандық тізбек мүшелерінің бірінші мүшесімен, екінші мүшесімен сол сияқты нөмірленген әр мүшесімен анықталатын ақырсыз көбейтінді атты көбейтінді түрінде жазылуы, көбейткіштер саны қанша көп болса да, ақырлы көбейтінді мағыналы да, ақырсыз көбейтіндінің өзіндік мағынасыздығы, ақырсыз көбейтінді ұғымын дербес көбейтінді деп аталатын тізбектің алғашқы мүшелері көбейтінділерінен құрылған сандық тізбек шегі нақты мәнді болғанда ол жинақталады және көбейтінді мәні осы тізбек шегіне тең, ал тізбек шегі ақырсыз не шегі жоқ болғанда көбейтінді жинақталмайды деген тұрғыда мағыналы етілуі

2. Оң мәнді көбейткішті ақырсыз көбейтінді жинақталуы мен оның сәйкес мүшелерінің логарифмінен құралған сандық қатар жинақталуының пара-парлығы - дербес көбейтінді логарифмінің мүшелері логарифмінің қосындысы арқылы жазылуы

3. Валлис формуласы - $\frac{\pi}{2}$ санының оған жинақталатын, жалпы мүшесі $\mathbf{\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}}$ ақырсыз көбейтінді арқылы бейнеленуі

IX ТАРАУ. ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕКТЕР МЕН ҚАТАРЛАР ШЕККЕ КӨШУ АРҚЫЛЫ ФУНКЦИЯ БЕРІЛУІНІҢ ӘДІСІ РЕТІНДЕ

§1. Функциялық тізбек пен қатар, олардың нүктелі жинақталуы және олармен функцияны анықтау әдістемесі

1. Функциялық тізбек пен функция анықтауын қамтамасыз ететін нүктелі жинақталуы деп аталатын ең аз үнемді шарты және солар арқылы нүктелі шек атты функция берілуінің тағы бір әдістемесі – табиғаты кез келген жиын алдын ала беріліп, әр оң бүтін санға сол жиында анықталған функцияны сәйкес қоятын функциялық тізбек атты ереже және сол жиынның әрбір нүктесінде функциялық тізбек айналатын сандық тізбектің нақты мәнді шегі бар болғанда функциялық тізбектің нүктелі шек атты функцияға нүктелі жинақталуы және әр нүктеге сол шекті сәйкес қою арқылы функцияны анықтаудың тағы бір тәсілі

2. Функциялық қатар мен функция анықтауын қамтамасыз ететін нүктелі жинақталуы деп аталатын ең аз үнемді шарты және солар арқылы нүктелі шек атты функция анықтауының тағы бір әдістемесі – берілген функциялық тізбектің мүшелерін қосу таңбасымен жалғайтын сол жиында берілген функциялық қатар атты символ, оның нүктелі жинақталуының алғашқы мүшелерінің қосындысынан құрылған дербес қосындылар деп аталатын функциялық тізбек тілінде анықталуы және сондағы нүктелі шек функциялық қатардың да сондай атаулы функциясы болуы, осылайша функцияны анықтаудың тағы бір тәсілі

3. Нүктелі жинақталу кезінде шектік функция функциялық тізбек пен қатар мүшелерінің үзіліссіздік, дифференциалдану, интегралдану қасиеттерін әрқашан сақтай бермейтіндігін, сақтаған жағдайдың өзінде теңдік орындала бермейтіндігін көрсететін мысалдар мен содан туындайтын зерттеу мәселелері – ақырлы қосындыда қосылғыштардың барлық қасиеттері қосындыға өткенімен, ақырсыз қосындыда шекке көшу кезінде қасиеттердің жоғалуы

§2. Функциялық тізбек пен қатардың бірқалыпты жинақталуы

1. Функциялық тізбек пен қатардың бірқалыпты жинақталуы – функциялық тізбек не қатар тек функцияны ғана анықтап қоймай мүшелерінің қасиеттерін шектік функцияда сақтауды көздегенде нүктелі жинақталу атты ең аз талапты күшейтетін жинақталу түрі

2. Функциялық тізбек пен қатардың жиында бірқалыпты жинақталуының Коши критерийлері – бірқалыпты жинақталудың шектік функцияның қатысуынсыз тек функциялық тізбек не қатар мүшелерінің өзара қатынасымен ғана анықталуы

3. Нүктелі және бірқалыпты жинақталу ұғымдарының арақатынасы – бірқалыпты жинақталатын функциялық тізбектің де, қатардың да әрқашанда нүктелі және нүктелі шектік функцияға жинақталуы, бірақ та бұның кері бағытта әрқашан орындала бермеуі

4. Нүктелі жинақтылығы алдын-ала белгілі функциялық тізбектің бірқалыпты жинақталу критерийі – нүктелі жинақталатын функциялық тізбек мүшелерінің жиында шектік функциясынан ауытқуының супремумдарынан құрылған сандық тізбектің нөлге ұмтылуымен пара-парлығы және оның функциялық қатар жағдайына көшірмесі

5. Функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақталуының Вейерштрасс белгісі – функциялық қатардың әрбір мүшесін сол жиында шенейтін сандардан құрылған сандық қатар жинақталуынан

6. Функциялық қатардың бірқалыпты жинақталуының Дирихле және Абель белгілері – сандық қатар жолына сәйкес Коши критерийі және Абель түрлендіруінің тікелей салдары ретінде

§3. Бірқалыпты жинақталу мен үзіліссіздік

1. Бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың мүшелерінің үзіліссіздік қасиетінің шектік функциясында сақталуы – кесіндіде әр мүшесі үзіліссіз болатын функциялық қатардың нүктелі шегі болатын функция үзілісті болуы мүмкін болса да, жинақталу түрін бірқалыптыға дейін күшейткенде қатар мүшілерінің үзіліссіздік қасиетін сақтап, шектік функцияның да үзіліссіз болуы

2. Дини теоремасы – сегментте үзіліссіз шектік функциясына монотонды, сол себепті нүктелі ұмтылатын мүшелері де үзіліссіз функциялық тізбектің бірқалыпты жинақталуы

3. Бірқалыпты жинақталатын функциялық қатарда шек пен қатар таңбасының ауыстырымдылығы – аралықта бірқалыпты жинақталатын функциялық қатар мен сол жиынның шектік нүктесі болатын нүктеде функциялық қатардың анықталмауы да мүмкін әрбір мүшесінің нақты мәнді шегі бар болып, сол шектерден құралған сандық қатардың жинақталуынан шектік функцияның да сол шектік нүктедегі шегі бар болуы және оның мәнінің сандық қатар қосындысына тең болуы

§4. Бірқалыпты жинақталу және интегралдану

1. Үзіліссіз функциялардан құрылған функциялық қатарды мүшелеп интегралдау – сегментте үзіліссіз, сол себепті Риман бойынша интегралданатын функциялардан құрылған бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың әрбір мүшесінің интеграл мәндерінен құрылған сандық қатар жинақталуы және оның қосындысының шектік функция интегралына тең болуы

2. Интегралданатын функциялардан құрылған функциялық қатарды мүшелеп интегралдау – сегментте Риман бойынша интегралданатын функциялардан құрылған бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың әрбір мүшесінің интеграл мәндерінен құрылған сандық қатар жинақталуы және оның қосындысының шектік функция интегралына тең болуы

§5. Бірқалыпты жинақталу және дифференциалдану

1.Нүктелі жинақталатын функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау – мүшелері үзіліссіз дифференциалданып, өзі нүктелі және туындыларынан құрылған жаңа функциялық қатар бірқалыпты жинақталатын қатардың шектік функциясының да дифференциалдануы және әр нүктеде туындыларынан құрылған қатар қосындысының шектік функция туындысына тең болуы

2.Кемінде бір нүктеде жинақталатын функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау – мүшелері дифференциалданып, өзі кемінде бір нүктеде және туындыларынан құрылған қатар бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың бірқалыпты жинақталуы мен сол шектік функцияның дифференциалдануы және әр нүктеде туындыларынан құрылған қатар қосындысының шектік функция туындысына тең болуы

§ 6 Дәрежелік қатарлар

1. Дәрежелік қатар – мүшелері коэффициент деп аталатын нақты санға көбейтілген теріс емес бүтін көрсеткішті дәрежелік функция ретінде жазылған, сол коэффициенттерімен толық анықталатын ерекше функциялық қатар. Дәрежелік қатардың Коши-Адамар формуласы арқылы анықталатын жинақталу интервалы және де одан айырмашылығы ең көп дегенде шеткі нүктелері болатын жинақталу аралығы

2. Дәрежелік қатардың жинақталу интервалында іштей жатқан кез келген сегментте бірқалыпты жинақталуы мен жинақталу интервалының өзінде қосындысының үзіліссіздігі

3. Абель теоремасы – дәрежелік қатардың қосындысының жинақталу аралығының әр нүктесіндегі үзіліссіздігі

4. Дәрежелік қатар қосындысының жинақталу аралығында іштей жатқан кез келген сегментте интегралдануы мен жинақталу интервалында дифференциалдануы

5. Бір нүктеде шенелген туындылары бар функция үшін сол туындылар арқылы коэффициенттері анықталатын Тейлор қатары атты дәрежелік қатар - нүктеде ақырсыз дифференциалданатын функция үшін дербес қосындылары функцияның сол нүктедегі туындылары арқылы берілген Тейлор формуласымен анықталатын дәрежелік қатар құру және оның жинақталу радиусының Коши-Адамар формуласымен анықталуы

6. $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x), (1+x)^\mu$ функциялардың анықталу жиынның әр нүктесінде Тейлор қатарына жіктелуі

§ 7. Анализдің кейбір маңызды теоремалары

1. Бірде-бір нүктеде ақырлы туындысы жоқ үзіліссіз функцияның Вейерштрасс берген тригонометриялық қатар түріндегі $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x) \quad -\infty < x < +\infty$ мысалы – үзіліссіз $f(x) = |x|$ функциясы жалғыз ғана $x = 0$ нүктесінде дифференциялданбаса, Вейерштрасс берген мысалдың сандық жиынның әр нүктесінде ақырлы туындысының болмауы

2. Әрбір үзіліссіз функцияны кез келген дәлдікпен алгебралық көпмүшелікпен жуықтау туралы Вейерштрасс теоремасы - құрылысы шексіз еркіндіктегі үзіліссіз функция мен құрылысы ең үлкен дәрежеге тең кез келген нүктелердегі мәндерімен толық анықталатын қайсыбір алгебралық көпмүшелік айырмасының алдын ала алынған дәлдік атты оң саннан аспауы

3. Стирлинг формуласы – күрделілігі бірден бастап алдын ала берілген оң бүтін санға дейінгі барлық оң бүтін сандардың көбейтіндісінен тұратын кез келген оң бүтін сан факториалын жинақы түрде көрсеткіштік және дәрежелік функциялардың көбейтіндісімен дәл өрнектеутін бар болу түріндегі теңдік

4.Тригонометриялық функциялардың аналитикалық анықтамасы – мектептен бастап геометриялық сызба арқылы алынған функция анықтамасына сай емес тригонометриялық функциялар үшін оның бар қасиеті мен сызбасын сақтайтын тригонометриялық қатарды ереже ретінде сәйкес қою арқылы аналитикалық түрде анықтау

Әдебиеттер тізімі

1 Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
2 Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. II. -Алматы: Ана тілі, 1991, 400 бет.
3 Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. III. -Алматы: Білім, 1997, 432 бет.
4 Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). -Нұр-Сұлтан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2019. -1900 бет.

N. Temirgaliyev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Scientific, scientific-methodological and organizational report “The Institute of theoretical mathematics and scientific computing (ITMandSC) L.N.Gumilyov Eurasian National University in 2019 year (Part III)”

Abstract: Article contains the *Synopsis*-Content of the textbook "Mathematical analysis". Namely, chapters and paragraphs is entitled, on the one hand, in an expanded form conveying their theme in highlighting the essence and development of ideas, on the other hand, in a brief and informative form. The complete content of the textbook in the form of a *Synopsis*-Content also makes up a complete list of residual knowledge that must be preserved at the subconscious level of the reader.

Keywords: Mathematical analysis, *Synopsis*-Content, mathematical structures in implementation, culture of mathematical proof, mathematical maturity.

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный, научно-методический и организационный отчет «Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева в 2019 году (Часть III)»

Аннотация: Здесь приведено содержание учебника "Математикалық анализ" в *Синопсис*-Оглавлении. Именно, каждый пункт и параграф озаглавлены с одной стороны в развернутой форме, передающей их темы в выделении сути и развитии идей, с другой стороны в возможно краткой и информативной форме. Содержание учебника в форме *Синопсис*-Оглавления составляет полный список остаточных знаний, которые должны быть сохранены на уровне подсознания читателя.

Ключевые слова: Математический анализ, *Синопсис*-Оглавление, математические структуры в реализации, культура математического доказательства, математическая зрелость.

References

1 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 1 [Mathematical analysis. Vol 1] (Mektep, Almaty, 1987, 288 p.). [in Kazakh]

2 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 2 [Mathematical analysis. Vol 2] (Ana-tili, Almaty, 1991, 400 p.). [in Kazakh]

3 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 3 [Mathematical analysis. Vol 3] (Bilim, Almaty, 1997, 432 p.). [in Kazakh]

4 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz (ondelgen zhane tolyktyrylgan ekinshi basylym)[Mathematical analysis (revised and enlarged second edition)]. -Nur-Sultan: L.N. Gumilyov Eurasian National University. -2019, 1900 p.

Автор туралы мәлімет:

Темиргалиев Н. – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Теориялық математика және ғылыми есептеулер институтының директоры, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Temirgaliyev N. –Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2021, том 135, №2, 64-70 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: **27.25.19**

A.G. Yessengaliyev [1] , A.D. Tapashev [2]

[1] *Ghalam LLP, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[2] *JSC NC "KazMunayGas", Nur-Sultan, Kazakhstan*
(E-mail: arman.gibatovich@gmail.com, t.arman@bk.ru)

Mathematical substantiation of diagnostics of the technical condition of the oil pipeline

Abstract: The paper is proposed a mathematical model of source recovery for the partial differential equation of parabolic type on a tree graph. The developed model makes it possible to apply the results in the diagnostics of the operation of large-scale pipelines through which liquids are pumped, in particular, the detection of a blockage in a separate link of the main oil pipeline.

Keywords: main oil pipeline, blockage in a link of an oil pipeline, heat equation, tree-graph, source identification, boundary control method, leaf peeling method.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2021/2.3

2000 Mathematics Subject Classification: 58J90.

1. Introduction

Operation of a main oil pipeline presupposes the activities necessary for the continuous, proper and efficient functioning of the oil pipeline, including diagnostics and operational dispatch control.

The mathematical model is reduced to the inverse problem for the heat equation on a tree-graph. According to the model, diagnostics of the linear part of the main oil pipeline is carried out by installing a sensor at any point (vertex of the graph) of the main oil pipeline of one region this makes it possible to find out the state on any fragment of the linear part (edge of the graph) in another region where the dispatch center is located.

Diagnostics of the linear part of main oil pipelines is carried out to ensure safety, detect and classify defects (failures) and their precise localization, determine the possibility of their further operation at design technological modes, and calculate the permissible operating pressure [1].

Based on the results of technical diagnostics, a conclusion is drawn up on the technical condition of the equipment, taking into account the identification of incidents, which will prevent the risks of failure and monitor the technical condition of the main oil pipeline.

An incident implies a failure or damage to a production facility, as well as a deviation from the mode of the technological process. It is usually presented in the form of damage and congestion of the linear part.

Damage to the linear part is characterized by a violation of integrity, leading to loss of oil in the pipeline. Congestion is characterized by the accumulation of impurities and impurities on the inner side of the pipeline walls, leading to a decrease in oil flow.

Practical application of the developed model will make it possible to identify these types of incidents along the entire length of the main oil pipeline for their further elimination.

Controllability and inverse problems for parabolic equations on a tree-graph are related to the cable equation. From a practical point of view, such models find application in studying the influence of a continuous medium of a fluid flow through a main network. We consider the theoretical description from the point of view of source recovery in the cable equation.

2. Mathematical formulation of the problem

Denote by $\Omega = \{E, V\}$ a finite connected compact metric tree graph, where $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ is the set of edges and $V = \{\nu_1, \nu_1, \ldots \nu_{N+1}\}$ a set of vertices. For a metric graph, each edge $e_j \in E$ is identified with the interval (a_{2j-1}, a_{2j}) of a real line of positive length $l_j = \lfloor a_{2j-1} - a_{2j} \rfloor$. A tree graph has no cycles. The edges of the graph converge at the vertices ν_j, which create the endpoint equivalence class $\{a_j\}$. The star graph consists of all edges included in one internal vertex ν. A pencil-graph is a star graph, all of whose edges, except one, are boundary edges of the graph Ω.

We consider a connected finite compact metric tree graph. For such a graph $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\} = \partial\Omega \subset V$ boundary vertices, that is, if $d(\nu)$ is the vertex index denotes the number of edges included in this vertex, then $\partial\Omega = \{\nu \in V | d(\nu) = 1\}$.

We assume that no vertex has index 2, or we can consider an equivalent graph with two coincident edges. Therefore, $V \backslash \partial\Omega = \{\nu \in V | d(\nu) > 2\}$.

The problem of identifying the source is reduced to the study of the parabolic equation:

$$u_t - u_{xx} + q(x)u = p(t)h(x) \text{ on } E \times (0, T) \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum_{e_j \sim \nu} \partial u_j(\nu, t) = 0 \text{ at each vertex } \quad \nu \in V \backslash \partial\Omega, \quad t \in [0, T] \\ u(\cdot, t) \text{ are continuous at each vertex for all } \quad t \in [0, T] \end{cases} \tag{2}$$

$$\partial u = f \text{ on } \partial\Omega \times [0, T],\ u|_{t=0} = 0 \text{ on } \Omega \tag{3}$$

The matching conditions are expressed in (2), where $\partial u_j(\nu, \cdot)$ means the derivative of the function u towards the vertex ν, taken along the edge e in the direction from the vertex. In this case, $e_j \sim \nu$ means the edge e_j, entering the vertex ν, and the sum is taken over all edges entering ν. From the point of view of our practical model, this is the law of conservation of the current state.

Let $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ and $\mathcal{F}^T = L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$.

For the direct problem, the result is known [2]:

Theorem 1. *If* $f, p \in \mathcal{F}^T$, $q, h \in \mathcal{H}$ *then for each* $t \in [0, T]$, $u = u^f(\cdot, t) \in \mathcal{H}$ *and* $u^f \in C([0, T]; \mathcal{H})$, *where* u^f- *is a generalized solution (1)-(3).*

Here $p \in H^1(0, T)$. Application of the boundary control method is reduced to specifying the response operator $\tilde{R}^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ as

$$\left(\tilde{R}^T f\right)(t) = u^f(\cdot, t), \quad t \in [0, T] \tag{4}$$

The inverse problem is to restore the source – the vector $h(\cdot)$, sought by $\tilde{R}^T f$ for all $f \in \mathcal{F}^T$. This also means that we know $\tilde{R}^T f$ for $f \equiv 0$.

Solution (1) - (3) can be written in the form $u = y + z$, taking into account that y and z are solutions to the problems:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + q(x)y = 0 \text{ on } E \times (0, T) \\ \partial y = f \text{ on } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} z_t - z_{xx} + q(x)z = p(t)h(x) \text{ on } E \times (0, T) \\ \partial z = f \text{ on } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \tag{6}$$

with y and z, satisfying the Kirchhoff-Neumann matching conditions on $V \backslash \partial\Omega$ and zero initial conditions. Let us represent the solution of equation (5) in the form y^f. Hence, for (5) the response operator $\tilde{R}^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ is given by the formula

$$\left(R^T f\right)(t) = y^f_{|\partial\Omega} = u^f_{|\partial\Omega} = y^0_{|\partial\Omega} = \tilde{R}^T f - \tilde{R}^T 0. \tag{7}$$

The first inverse problem of recovering the vector $q(\cdot)$ from $R^T f$ for all $f \in \mathcal{F}^T$ was solved in [3].

Theorem 2. *The operator* $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ *, known for any T>0, uniquely determines the topology, edge lengths and edge potentials* $q_j, \quad j = 1, 2, \dots, N,$ *of a graph.*

Our main goal is to solve inverse problem (6), with Kirchhoff-Neumann matching conditions on $V \backslash \partial\Omega$, and zero initial conditions. On the basis of *Theorem 2*, the potential q is assumed to be known. We denote the solution z as u^0 . Thus, based on our observations

$$\chi(t) = z_{|\partial\Omega} = u^0{}_{|\partial\Omega}$$

and the well-known solution for reconstructing the potentials of the edges $q(\cdot)$ of the graph, our inverse problem is to use observations $\chi(t), t \in [0, T]$ to find the vector $h(\cdot)$ on E .

Let the operator $\mathcal{L}$, be given by the expression

$$\left(\mathcal{L}\phi\right)(x) := -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) + q\left(x\right)\phi\left(x\right) \tag{8}$$

defined on E with domain $D\left(\mathcal{L}\right) = \mathcal{H}^2$. Here $\mathcal{H}^2$ is the space of continuous functions ν on Ω such that $\nu_{|e} \in H^2(e)$ for each $e \in E$, satisfying the Kirchhoff-Neumann matching conditions at each interior vertex, and the boundary condition $\partial\phi_{|\partial\Omega} = 0$. The spectrum of $\mathcal{L}$ s strictly discrete, the eigenvalues $\{\lambda_n\}$ are of finite multiplicity, and the corresponding eigenfunctions $\{\phi_n\}$ form an orthonormal basis in $\mathcal{H}$. It is known that the eigenfunctions are bounded and the estimate $|\lambda_n| + 1 \asymp n^2$ is valid for the eigenvalues.

Under zero boundary conditions for the heat flux, there is no nontrivial solution to the eigenvalue problem associated with (8) for $(\lambda \notin \mathbb{R})$. Therefore, let $\phi^f(x, \lambda)$ be the only solution to the initial-boundary value problem $\mathcal{L}\phi = \lambda\phi$ on E satisfying the Kirchhoff-Neumann matching conditions on the inner vertices, and the boundary conditions

$$\phi^{'}\left(\gamma_j, \lambda\right) = f^j, j = 1, 2, \dots, m, \quad f = col\left(f^1, f^2, \dots, f^m\right) \tag{9}$$

The Titchmarsh-Weyl matrix function $(TW), M(\lambda)$, is uniquely determined by the relation

$$\phi^f|_{\partial\Omega} = M(\lambda) f\left(\gamma_j, \lambda\right) = f^j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad f = col\left(f^1, f^2, \dots, f^m\right) \tag{10}$$

The TW -function $M\left(\lambda\right) = \{M_{ij}\}_{i,j=1}^m$, known for $\Im\lambda > 0$, is constructed from our data and is used to solve the inverse problem on the graph.

Using the Kirchhoff-Neumann matching condition and integrating by parts, we give the solution of the initial-boundary value problem with boundary condition (9) in the form

$$\phi^f\left(x, \lambda\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n|_{\partial\Omega}\rangle}{\lambda_n - \lambda}\phi_n\left(x\right) \tag{11}$$

Here $\langle f, \phi_n|_{\partial\Omega}\rangle$ stands for the scalar product in $\mathbb{R}^m$. Therefore, the TW-matrix function $\{M_{ij}\}_{i,j=1}^m$ is defined as follows

$$M\left(\lambda\right) f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n|_{\partial\Omega}\rangle}{\lambda_n - \lambda}\phi_n|_{\partial\Omega} \ , \quad \text{i. e.} \quad M_{ij}\left(\lambda\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n\left(\gamma_i\right)\phi_n\left(\gamma_j\right)}{\lambda_n - \lambda} \tag{12}$$

All series in these expressions converge due to the boundedness of the eigenfunctions and the above growth of the eigenvalues.

For the complete construction, we now have to reconstruct the spectral data $(SD) = \{\lambda_n, \phi_n|_{\partial\Omega}\}_{n\in\mathbb{N}}$ from dynamic inverse data (operator R^T), using the coupling operator C^T and spectral controllability of the system (5).

Theorem 3. *For any* $T > 0$ *and for each* $n \in \mathbb{N}$ *, there is a control* $f_n \in \mathcal{F}_0^T := H_0^1\left(0, T; \mathbb{R}^m\right)$ *such that* $\nu^{f_n}(\cdot, T) = \phi_n$ *in* Ω *. Controllability can be achieved without using control at any one boundary vertex, that is, we can put, say,* $f^m(t) = 0, \quad t \in [0, T]$ *.*

Control data $f, g \in \mathcal{F}^T$, with y^f and y^g , will be the corresponding solutions (7), and without loss of generality, we will assume that $f^m = g^m = 0$. The communication operator $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$ in its bilinear form

$$\left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T} := \left(y^f\left(\cdot\ ,\ T\right),\ y^g\left(\cdot\ , T\right)\right)_{\mathcal{H}}. \tag{13}$$

With the help of (13) we can find the spectral data. Now suppose that in problem (6) we know $q(\cdot)$ on E and we want to restore $h(x)$ on E. Recall that $\chi(t) = z_{|\partial\Omega}$ are our observations, $p \in H^1(0,T)$, $p(0) \neq 0$, and $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Then the solution to problem (8):

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(x) \int_0^t p(t-\tau) e^{-\lambda_n t} d\tau \tag{14}$$

where $h_n = (h,\ \phi_n)_{\mathcal{H}}$. Hence,

$$\chi(t)\ := \int_0^t p(t-s) W(s) ds, \tag{15}$$

where

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(0) e^{-\lambda_n t} \tag{16}$$

Differentiating (15), we arrive at the Volterra integral equation of the second kind with respect to $W(\cdot)$:

$$\chi^{'}(t) = p(0) W(t) + \int_0^t p^{'}(t-s) W(s) ds \tag{17}$$

Theorem 4. *The family* $\left\{\phi_n(0) e^{-\lambda_n t}\right\}_{t\in[0,T]}$ *is minimal on* $\mathcal{F}^T = L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$, *for all* $T > 0$ *with biorthogonal sequence* $\{\Theta_n\}$. *Hence,*

$$h_n = (W, \Theta_n)_{\mathcal{F}^T} \qquad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(x).$$

The development of a numerical method for determining Θ_n is quite difficult even in the one-dimensional case. Nevertheless, for a single edge, say e_i, which we identify with the interval $(0,\ l_i)$, we propose a direct approach to finding h_n, and hence $h(x)$. For $h_n = \left(h_{|e_i}, \phi_n\right)_{L^2(e_i)}$ the solution to problem (8) on e_i takes the form

$$z(x,t) = \int_0^t p(\tau) \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(x) e^{-\lambda_n (t-\tau)} \right) d\tau \tag{18}$$

Thence we obtain

$$\chi(t)\ := z(0,t) = \int_0^t p(s) \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(0) e^{-\lambda_n (t-s)} \right) ds \tag{19}$$

If we put $Z(x,t)\ := \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n(x) e^{-\lambda_n t}$, then Z satisfies the following equation

$$\begin{cases} Z_t - Z_{xx} + q(x) Z = 0 & 0 < x < l, \quad 0 < t < T \\ Z_x(0,t) = 0 = Z_x(l,t) & 0 < t < T \\ Z(x,0) = \sum_{n\geq 1} h_n \phi_n(x) = h(x) & 0 < x < l_i. \end{cases} \tag{20}$$

Thus, $z(x,t) = \int_0^t p(\tau) Z(x, t-\tau) d\tau$, so if we put $r(t)\ := Z(0,t)$, then

$$\chi(t) = \int_0^t p(t-\tau) r(\tau) d\tau \tag{21}$$

Differentiating the expression in (44), we arrive at the Volterra integral equation of the second kind with respect to $r(\cdot)$:

$$\chi^{'}(t) = p(0) r(t) + \int_0^t p^{'}(t-\tau) r(\tau) d\tau \tag{22}$$

Thus, there is a unique solution $r(t)$ for $0 < t < T$. Having $r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{-\lambda_n t}$, where $r_n = h_n \phi_n(0)$, and knowing the spectral data $\{\lambda_n, \phi_n(0)\}$, defined values $r_n^{'} s$ and determined by the values $h_n^{'} s$, and hence the function $h(x)$ on e_i.

Now suppose we got $r\,(t)$ from solution (22). For a solution for any number $r_n^{'}s$, say, $N \in \mathbb{N}$, we put: $r_N\,(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n e^{-\lambda_n t}$. One way to calculate:

$$V\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & & \dots & \lambda_N \\ & \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 & & \dots & \lambda_N^2 \\ & & \dots & & \\ & \lambda_1^{N-1}\lambda_2^{N-1}\lambda_3^{N-1} & & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_N\,(0) \\ -r_N^{'}\,(0) \\ r_N^{(2)}\,(0) \\ \dots \\ (-1)^{N-1} r_{N-1}^{(N-1)}\,(0) \end{bmatrix}.$$

Since V is the Vandermonde determinant and the eigenvalues are prime, V is non-degenerate, so the vector $r_n^{'}s$ can be uniquely found. Another calculation option is to select small t_1 from the interval $(0, T)$, and the assumption that $t_j = jt_1, \quad j = 1, \ \dots, \ N$. Then one can define an $N \times N$ matrix $M_N = \left(e^{-\lambda_j t_i}\right)$ and solve the matrix equation $M_{N\vec{r}} = \vec{d}$, where $\vec{d}^T = (r\,(t_1)\,, r\,(t_2)\,, \ \dots, \ r\,(t_N))\,.$

The matrix M_N is non-degenerate, as can be shown, it will be degenerate if and only if some of the $\lambda_n^{'}s$ are equal. In one of two cases, we have $q\,(x)$ and $h\,(x)$.

The problem will theoretically be completed when we restore k original g_j parameters of conductivity.

In the initial scaling of the cable equation, we chose arbitrary $i, \quad 1 \leq i \leq k$ and defined $u = v - E_i$. So the N-vectors u and h defined on $E\times(0, T)$, must be indexed by i; say $u = u^{[i]}$ and $h = h^{[i]}$, where each component $h^{[i]}$ is given as $h_l^{[i]} = \sum_{1 \leq j \leq k} g_{lj} E_{ji}$. Then, to solve *Inverse Problem 1*, you must first obtain $q\,(\cdot)$, and then solve the *Inverse Problem 2* k-fold, to find $h^{[i]}, \ i = 1, \ 2, \ \dots, \ k$. The matrix of conductivity parameters takes the form $\mathcal{G} = (g_{jl}) \in \mathbb{R}^{N\times k}$. We define $\mathcal{E} = (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{k\times k+1}$, and $e_{i1} = \hat{R}$ and $e_{ij} = E_{i\ j-1}$ for $2 \leq j \leq k+1, \quad 1 \leq i \leq k$. If $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{k+1\times k}$ is such that $\mathcal{E}\mathcal{K} = I_k$, where I_k is a $k \times k$ identification matrix, then $\mathcal{G} = [h]\,\mathcal{K}$, where $[h]$ is an $N \times k$ matrix with the i-th column $h^{[i]}$.

The presented mathematical model is a theoretical substantiation of an inverse problem with a finite number of distributed parameters for a partial differential equation on a tree graph.

The leaf peeling method [4] allows solving the problem sequentially on a segment, on a tree-graph, on a sheaf-graph, over the entire tree-graph.

3. Conclusion

This paper continues the research of famous scientists in the field of control theory and inverse problems on graphs. The most constructive procedures for solving a whole class of inverse problems are reflected in the scientific results of SA Avdonin, his co-authors and his scientific school. They have created a mathematically rigorous approach to control problems and inverse problems for partial differential equations on graphs. A boundary control method (BCM) has been developed based on the relationship between inverse problems (identification) and controllability of dynamic systems: if the system is controllable, then it is identifiable. This method has been successfully applied to almost all linear equations of mathematical physics: the wave equation; heat conduction equations, Maxwell, Schrödinger. BCM advantages: it remains linear at all stages; applicable to a wide range of linear systems; it is essentially independent of the dimension of the system and, finally, allows one to construct simple algorithms and provide stable numerical implementations. A characteristic feature of BCM is its locality. For inverse problems on graphs, this means that only data related to this subgraph is required to restore the topology and other parameters of a subgraph. This property provides the advantage of BCM over other methods and allows us to extend the proposed approach from interval to graphs when solving inverse problems of mathematical physics. Another distinctive feature of BCM lies in a variety of interdisciplinary connections: in addition to partial differential equations, controllability theory of systems, asymptotic methods, complex analysis, functional analysis, operator theory, Banach algebras, etc. are used.

Another important method is the leaf peeling method, developed by S. Avdonin and P. Kurasov in [2]. This method assumes a sequential procedure for restoring tree parameters from vertices to the root.

In [5], the leaf peeling method was successfully applied to inverse boundary value problems with non-standard equations at the vertices, and in [6-9] - to two-speed wave equations on tree-type graphs. The leaf peeling method allows one to reduce the control problem and the inverse problem to the integral equations of Volterra or Fredholm with subsequent numerical implementation.

Spectral and dynamic inverse problems for parabolic, wave and Schrödinger equations were solved [4] on graphs without cycles.

Source identification problems for the wave equation on graphs were solved in [10].

In [11, 3], inverse problems were considered for parabolic equations of the form: $u_t - u_x x + q(x)u = p(t)h(x)$. At the inner vertices of the tree graph, Kirchhoff-Neumann matching conditions are specified. From the point of view of the neural model, this is the law of conservation of currents. The problem of recovering the topology of the graph, the lengths of the edges, as well as the potential q and the source h on the edges of the graph is solved from the dynamic inverse data.

In this paper, we continued to develop the ideas of these [2]-[11] papers from the point of view of practical application in the diagnosis of congestion in oil pipelines.

References

1 Правила эксплуатации магистральных нефтепроводов, утвержденные приказом Министра энергетики Республики Казахстан от 29 октября 2014 года № 84 [Электронный ресурс]. -URL: https://adilet.zan.kz/rus/docs/V1400010107 (Дата обращения: 01.06.2021).

2 Avdonin S., Kurasov P. Inverse problems for quantum trees // Inverse Problem and Imaging, 2008. - № 2 (1). – P. 1-21.

3 Avdonin S., Bell J., Nurtazina K. Determining distributed parameters in a neuronal cable model on a tree graph // Mathematical methods in applied sciences, 2017. - № 40 (11). - P. 3973-3981.

4 Avdonin S.A., Mikhaylov V.S., Nurtazina K.B. On Inverse Dynamical and Spectral Problems for the. Wave and Schrodinger Equations on Finite Trees. The Leaf Peeling Method // Journal of Mathematical Sciences (USA), 2017. Vol. 224, No. 1. – P.1-10.

5 Avdonin S., Kurasov P. and Nowaczy M. On the reconstruction of boundary conditions for star graphs // Inverse Problems and Imaging, 2010. Vol.4, No. 4. – P. 579-598.

6 S. Avdonin, G. Leugering and V. Mikhaylov, On an inverse problem for tree-like networks of elastic strings, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 90 (2010), no 2, 136-150.

7 Avdonin S., Abdon Ch.R., Leugering G., Mikhaylov V. On the inverse problem of the two-velocity tree-like graph // ZAMM Z.Angew. Math. Mech. 1–11 (2015).

8 Avdonin S.A.,Blagoveshchensky A.S.,Choque-Rivero A.E.,Mikhaylov V.S. Dynamical inverse problem for two-velocity systems on finite trees // Proceedings of the International Conference Days on Diffraction, DD 2016. – P. 25-30.

9 S. Avdonin, A. Choque Rivero, G. Leugering and V. Mikhaylov, On the inverse problem of the two velocity tree-like graph, Zeit. Angew. Math. Mech., (2015), 95, no. 12, 1490-1500.

10 Avdonin S., Nicaise S. Source identification problems for the wave equation on graphs // Inverse Problems, 2015. Vol. 31. 095007 (29 pp).

11 Avdonin S., Bell J. Determining a Distributed Condactance Parameter for a Neuronal Cable Model on a Tree Graph // Inverse Problems and Imaging, 2015. Vol. 9, No. 3. – P. 645-659.

А.Г. Есенғалиев [1] **, А.Д. Тапашев** [2]

[1] *ЖШС Ghalam, Нұр-Сұлтан, Казақстан*
[2] *АҚ ҰК «ҚазМұнайГаз», Нұр-Сұлтан, Казақстан*

Мұнай құбырының техникалық жағдайын диагностикалаудың математикалық негіздемесі

Аннотация. Мақалада граф-ағаштағы параболалық типтегі дербес туындылардағы дифференциалдық теңдеу үшін көзді сәйкестиндірудің математикалық моделі ұсынылған. Әзірленген модель сұйықтықтарды айдау жүзеге асырылатын ауқымды құбыржолдардың пайдаланылуын диагностикалауда, атап айтқанда, магистральдық мұнай құбырының жеке буынында кептелісті анықтауда нәтижелерді қолдануға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: магистральдық мұнай құбыры, мұнай құбыры буынындағы кептеліс, жылу теңдеуі, граф-ағаш, көзді сәйкестендіру, шекаралық басқару әдісі, leaf peeling әдісі.

А.Г. Есенгалиев [1] , А.Д. Тапашев [2]

[1] *ТОО Ghalam, Нур-Султан, Казахстан*
[2] *АО НК "КазМунайГаз", Нур-Султан, Казахстан*

Математическое обоснование диагностики технического состояния нефтепровода

Аннотация. В статье предлагается математическая модель восстановления источника для дифференциального уравнения в частных производных параболического типа на графе-дереве. Разработанная модель позволяет применить результаты в диагностике эксплуатации масштабных трубопроводов, по которым осуществляется перекачка жидкостей, в частности, обнаружения затора в отдельном звене магистрального нефтепровода.

Ключевые слова: магистральный нефтепровод, затор в звене нефтепровода, тепловое уравнение, граф-дерево, идентификация источника, метод граничного управления, leaf peeling method.

References

1 Pravila ekspluatacii magistral'nyh nefteprovodov, utverzhdennye prikazom Ministra energetiki Respubliki Kazahstan ot 29 oktyabrya 2014 goda No 84 [Rules for the operation of trunk oil pipelines approved by order of the Minister of Energy of the Republic of Kazakhstan dated October 29, 2014 No. 84] [Electr. resourse]. Available at: https://adilet.zan.kz/rus/docs/V1400010107 (Accessed: 01.06.2021).
2 Avdonin S., Kurasov P. Inverse problems for quantum trees, Inverse Problem and Imaging, 1(2), 1-21(2008).
3 Avdonin S., Bell J., Nurtazina K. Determining distributed parameters in a neuronal cable model on a tree graph, Mathematical methods in applied sciences, 11(40), 3973-3981(2017).
4 Avdonin S.A., Mikhaylov V.S., Nurtazina K.B. On Inverse Dynamical and Spectral Problems for the. Wave and Schrodinger Equations on Finite Trees. The Leaf Peeling Method, Journal of Mathematical Sciences (USA), 224(1), 1-10(2017).
5 Avdonin S., Kurasov P. and Nowaczy M. On the reconstruction of boundary conditions for star graphs, Inverse Problems and Imaging, 4(4), 579-598(2010).
6 Avdonin S., Leugering G. and Mikhaylov V. On an inverse problem for tree-like networks of elastic strings, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 90(2), 136-150(2010).
7 Avdonin S., Abdon Ch.R., Leugering G., Mikhaylov V. On the inverse problem of the two-velocity tree-like graph, ZAMM Z.Angew. Math. Mech. 1–11 (2015).
8 Avdonin S.A.,Blagoveshchensky A.S.,Choque-Rivero A.E.,Mikhaylov V.S. Dynamical inverse problem for two-velocity systems on finite trees, Proceedings of the International Conference Days on Diffraction, DD 2016. P. 25-30.
9 Avdonin S., Choque Rivero A., Leugering G. and Mikhaylov V. On the inverse problem of the two velocity tree-like graph, Zeit. Angew. Math. Mech., 95(12), 1490-1500(2015).
10 Avdonin S., Nicaise S. Source identification problems for the wave equation on graphs, Inverse Problems, 2015. Vol. 31. 095007 (29 pp).
11 Avdonin S., Bell J. Determining a Distributed Condactance Parameter for a Neuronal Cable Model on a Tree Graph, Inverse Problems and Imaging, 9(3), 645-659(2015).

Information about authors:

Yessengaliyev A.G. – ***Corresponding author,*** Lead design engineer of the Special Design and Technology department, Ghalam LLP, 89, Turan avenue, Nur-Sultan, 010000, Kazakhstan.

Tapashev A. D. – Head of Investment Portfolio Management, JSC NC "KazMunayGas", D. Kunayev street, 8, Nur-Sultan, 010000, Kazakhstan.

Есенгалиев А.Г. – ***Корреспонденция үшін автор,*** АДТД-ның жетекші инженер-конструкторы, ЖШС Ghalam, Тұран 89, Нұр-Сұлтан, 010000, Казақстан.

Тапашев А.Д. – Инвестициялар портфелі басқармасының бастығы, АҚ ҰК «ҚазМұнайГаз», Қонаев көшесі, 8, Нұр-Сұлтан, 010000, Казақстан

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2021. 2(135)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 71-б. Басуға қол қойылды: 30.06.2021.
Шартты б.т. - 4,44. 12 дана.
Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: http://bulmathmc.enu.kz/
Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген: http://bulmathmc.enu.kz/

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды