ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№1(134)/2021

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2021
Nur-Sultan, 2021
Нур-Султан, 2021

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.
№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008.
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.
Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.
Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.
Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, №1(134)/2020

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer science. Mechanics series, №1(134)/2020

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Компьютерные науки. Механика,, №1(134)/2020

МАЗМҰНЫ
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2021, том 134, №1, 6-18 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: **27.35.14, 27.35.17, 27.35.45, 27.35.47**

В.А. Левин [1] , Н.Е. Афонина [1] , В.Г. Громов [1] , И.С. Мануйлович [1] , В.В. Марков [1,2]

[1] *Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия*
(E-mail: afonina@imec.msu.ru)

Стабилизация горения керосино-воздушной смеси инжекцией водорода [1]

Аннотация: На летательных аппаратах при высоких скоростях полета в настоящее время наибольший интерес представляет прямоточный воздушно-реактивный двигатель (ПВРД), эффективность которого может быть повышена при использовании технологии термохимической конверсии топлива (ТКТ). Некоторые аспекты работы такого двигателя можно смоделировать численно. В настоящей работе проведено исследование процессов в камере сгорания, и предложен метод стабилизации горения керосино-воздушной смеси посредством инжекции в прямоточную камеру сгорания молекулярного водорода. Изучено влияние на процесс горения температуры водорода, места расположения и размера области массоподвода. Для теоретического исследования применена соответствующая численная технология на основе уравнений Навье-Стокса с использованием модели турбулентности Спаларта-Аллмареса, реализованная в комплексе компьютерных программ, разработанных в НИИ механики МГУ. При численном моделировании решались две проблемы. Первая касалась условий воспламенения молекулярного водорода, подаваемого в проточный воспламенитель, а вторая - условий стабилизации горения керосино-воздушной смеси водородным пламенем. На основе результатов расчетов установлено, что процессу воспламенения способствует увеличение температуры водорода и мощности его инжекции. Меньшее влияние оказывает положение и размеры источника водорода. В процессе исследования методом вычислительного эксперимента выявлены характерные особенности структуры течения в канале, в том числе с образованием волны детонации, и показана возможность управления горением инжекцией водорода.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса; газообразный керосин; камера сгорания

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2021-134-1-6-18

1. Введение

В настоящее время повышение эффективности двигателей с реактивной тягой для современной авиационной, ракетной и космической техники связывается с использованием физико-химических процессов конверсии углеводородных топлив, с совершенствованием систем подачи окислителя и горючего, а также выходных тяговых устройств. Дело в том, что при прямом сжигании углеводородного топлива неизбежны значительные потери вследствие необратимого характера реакций горения. Термодинамически выгодной оказывается промежуточная паровая или углекислотная конверсия топлива, которая может быть проведена в условиях, близким к равновесным с последующим сжиганием

[1]Работа выполнена в соответствии с планами исследований НИИ механики МГУ (тема АААА-А19-119012990113-1) и МИАН

продуктов конверсии – водорода и моноокиси углерода, окисление которых является менее необратимым процессом по сравнению с окислением углеводорода. Как показали исследования, на летательных аппаратах для высоких скоростей полета, наибольший интерес представляет прямоточный воздушно-реактивный двигатель (ПВРД). Область работы ПВРД по скорости и высоте полета может быть значительно расширена, а его эффективность повышена при использовании технологии термохимической конверсии топлива (ТКТ). Она позволяет улучшить кинетику горения топлива, перейти от жидкой к газовой схеме подвода топлива в камеру сгорания, что увеличивает импульс и КПД двигателя. Отличительной особенностью рабочего процесса в ПВРД с ТКТ является то, что часть воздуха из воздухозаборника тормозится до звуковой скорости и направляется в термохимический реактор, в который подается углеводород, нагревается и разлагается на так называемый синтез-газ, состоящий в основном из моноокиси углерода и водорода. Он поступает в камеру сгорания и сгорает, смешавшись с воздухом. Возможна схема, когда используется автономный реактор, в кото-рый подается кислород, получаемый при специальном процессе. Для проведения числен-ного исследований течения с использованием технологии ТКТ в модели камеры сгорания с проточным водородным стабилизатором пламени, в которой в качестве горючего использовался газообразный керосин [1], в НИИ механики МГУ разра-ботана двумерная численная модель.

Для описания турбулентного течения в канале использованы осредненные по Фавру уравнения Навье-Стокса и модель турбулентности Спаларта-Аллмареса [2]. Генерация программ и локальных баз термофизических данных осуществлена с помощью вычислительной системы HIGHTEMP [3], разработанной в НИИ механики МГУ для проведения численного моделирования течений высокотемпературных газов. Технология HIGHTEMP основана на комплексе программ численного интегрирования уравнений Навье-Стокса для различных моделей газовой среды, интегрированном с базами данных по термодинамическим, транспортным и кинетическим свойствам индивидуальных газов и газовых смесей. Высокая эффективность и высокая степень надежности такого подхода подтверждена решением широкого круга прикладных задач [3, 4].

2. Постановка задачи

2.1. Модель газовой среды.

- газ рассматривается как реагирующая смесь вязких совершенных газов;
- турбулентное течение описывается осредненными по Фавру [5] давлением p, вектором скорости $\vec{u}$, мольными концентрациями компонентов X_i, $i = 1, \ldots, N$, и температурой T;
- корреляциями пульсаций температуры и химического состава пренебрегается;
- используется приближение Буссинеска для описания турбулентных потоков и однопараметрическая модель Спаларта-Аллмареса для вычислений турбулентных коэффициентов переноса.

Уравнение состояния имеет вид: $p = \rho R_u T/M$, где ρ - плотность, R_u - универсальная газовая постоянная, M - средняя молекулярная масса смеси, которая выражается через молекулярные массы компонентов смеси M_i как $M = \sum_{i=1}^{\nu} M_i X_i$.

Мольная теплоемкость при постоянном давлении c_{pi} и энтальпия h_i компонента i определяются через сумму по состояниям $Q_i(T)$ на единицу объема:

$$c_{pi}(T) = \frac{\partial h_i}{\partial T}, h_i(T) = h^0 + R_u T^2 \frac{\partial \ln(Q_i V_m)}{\partial T},$$

где h_i^0 - теплота образования компонента i и $V_m = R_u T/p$ - мольный объем.

В принятой газофазной модели вычисление термодинамических функций основано на следующей аппроксимации зависимости c_{pi} от температуры T:

$$c_{pi}(T) = \frac{a_{-2,i}}{T^2} + \sum_{k=0}^{5} a_{k,i} T^k \text{ для } T_{1,i} \leq T \leq T_{2,i},$$

$$c_{pi}(T) = \mathrm{c}_{pi}(T_{1,i}) \text{ для } T_{1,i} \geq T,$$
$$c_{pi}(T) = c_{pi}(T_{2,i}) \text{ для } T_{2,i} \leq T,$$

где коэффициенты $a_{k,i}$ определяются путем интерполяции известных табличных данных в диапазоне температур $T_{1,i} \leq T \leq T_{2,i}$ (Табл. 1). Аппроксимационные формулы для $h_i(T)$ и $Q_i(T)$ находятся последовательным интегрированием выражений для $c_{p,i}(T)$ по температуре с использованием в качестве констант интегрирования табличных значений h_i и $Q_i(p,T)$ при некоторой фиксированной температуре $T = T^*$. Согласно закону действующих масс мольная скорость j-ой реакции

$$\sum_i \nu_{ji}[A_j] \Leftrightarrow \sum_i \nu'_{ji}[A_j],$$

где ν_{ji}, ν'_{ji} - стехиометрические коэффициенты, а $[A_i]$ - символы химических веществ, определяется выражением:

$$\bar{\omega}_j = k_j^f \prod_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{\nu_{ji}} - k_j^r \prod_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{\nu'_{ji}},$$

где k_j^f и k_j^r - константы скоростей прямых и обратных реакций, γ_i - масс-мольные концентрации i-го компонента, определяемые как $\gamma_i = X_i/M$. Мольная скорость образования i-го компонента в единице объема во всех химических реакциях равна

$$\dot{\omega}_i = \sum_j (\nu'_{ji} - \nu_{ji})\bar{\omega}_j.$$

Константа скорости реакции в прямом направлении задается в виде обобщенного закона Аррениуса

$$k_j^f = a_j T_j^{b_j} \exp(-E_j/T_j).$$

Константы скорости реакции в обратном направлении k_j^r определяются из условия детального равновесия:

$$k_j^f \prod_{i=1}^{N} (Q_i \exp(-h_i^0/R_u T)^{\nu_{ji}} - k_j^r \prod_{i=1}^{N} (Q_i \exp(-h_i^0/R_u T)^{\nu'_{ji}} = 0$$

Мольные диффузионные потоки $\vec{K}_{M,i}$ определяются из соотношений Стефана-Максвелла [6]:

$$\sum_{j=1}^{N} \bar{M} d_{ij} (\gamma_i \vec{K}_{M,j} - \gamma_j \vec{K}_{M,i}) = \frac{\partial \gamma_i M}{\partial \vec{r}}, \quad i = 1, 2, ..., N-1,$$

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{K}_{M,j} M_j = 0,$$

где $d_{ij} = M/\rho D_{ij}$, D_{ij} - коэффициенты бинарной диффузии.

Тензор вязких напряжений $\hat{\tau}_M = (\vec{\tau}_{M,x}, \vec{\tau}_{M,y})^T$ (плотность «вязкого» потока импульса с обратным знаком) задается в виде

$$\hat{\tau}_M = 2\mu_M \hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}}\right) + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}}\right)^T - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{u}\right)\hat{I}\right],$$

где $\hat{\varepsilon}$ - тензор скоростей деформаций, $\hat{I}$ - единичный тензор, μ_M - коэффициент молекулярной вязкости. Молекулярный тепловой поток $\vec{q}_M$ определяется из следующего соотношения:

$$\vec{q}_M = -\lambda_M \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_{M,i} h_i$$

где λ_M - коэффициент теплопроводности. Для вычисления коэффициентов вязкости газовой смеси и теплопроводности используются аппроксимационные зависимости типа Уилке-Васильевой [7]:

$$\mu_M = \sum_{i=1}^{N} M_i \gamma_i Sc_i D_i, \lambda_M = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left[c_{pi} + 2.5 R_u (1.5 Sc_i - 1)\right] D_i.$$

Здесь $Sc_i(T) = \mu_i / \rho_i \mathrm{D}_{ii}$ - число Шмидта i-го компонента, вычисленное по значениям коэффициента вязкости μ_i, плотности ρ_i и коэффициенту самодиффузии D_{ii} этого компонента в чистом виде при температуре T; D_i- коэффициент, определяемый соотношением

$$D_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \gamma_j d_{ij}}.$$

Значения функций $d_{ij}(T)$ и $Sc_i(T)$ находятся по формулам:

$$d_{ij}(T) = 3.12 \cdot 10^5 \frac{\bar{\Omega}_{ij}^{(1.1)}(T)\sqrt{2M_i M_j}}{\sqrt{T(M_i + M_j)}}, Sc_i(T) = \frac{5\bar{\Omega}_{ii}^{(1.1)}(T)}{6\bar{\Omega}_{ii}^{(2.2)}(T)},$$

$$[d_{ij}] = \text{сек} \cdot \text{м /кмоль}, [\Omega] = \mathring{A}_2,$$

где $\bar{\Omega}_{ii}^{(1.1)}(T)$ и $\bar{\Omega}_{ii}^{(2.2)}(T)$ - так называемые интегралы столкновений диффузионного и вязкого типов соответственно. Значения интегралов столкновений определяются на основе данных о потенциале упругого взаимодействия частиц при столкновении. В настоящей работе для расчета потенциалов взаимодействия компонентов используется простая интерполяционная зависимость вида:

$$\bar{\Omega}_{ii}^{(1.1)}(T) = (a_{ij} + b_{ij} \ln T)^2,$$

в которой коэффициенты a_{ij} и b_{ij} находятся по заданным значениям интеграла столкновений при $T_1 = 300K$ и $T_2 = 3000K$. Величины $\bar{\Omega}_{ii}^{(1.1)}(T_k)$ определяются на основе двухпараметрического потенциала Леннард-Джонса (Табл. 2). Значения параметров потенциалов для пар одноименных частиц заимствуются из известных литературных источников. Параметры потенциалов взаимодействия разноименных частиц находятся по комбинаторным правилам [8]. При вычислении числа Шмидта $Sc_i(T)$ здесь для всех компонентов полагается $\bar{\Omega}_{ii}^{(2.2)}(T) = 1.1\bar{\Omega}_{ii}^{(1.1)}(T)$.

Для описания турбулентного переноса используется модель, в которой тензор напряжений Рейнольдса $\hat{\tau}_T$, турбулентный тепловой поток $\vec{q}_T$ и турбулентные диффузионные потоки $\vec{K}_{T,i}$ в приближении Буссинеска записываются в виде:

$$\hat{\tau}_T = \mu_T \hat{\varepsilon}, \vec{q}_T = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_{T,i} h_i, \vec{K}_{T,i} = -\rho D_T \frac{\partial \gamma_i}{\partial \vec{r}}.$$

Турбулентная вязкость μ_T, турбулентная теплопроводность λ_T и коэффициент турбулентной диффузии D_T выражаются через кинематический коэффициент турбулентной вязкости ν_T:

$$\mu_T = \rho \nu_T, \nu_T = f_{\nu 1} \tilde{\nu},\ f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3},\ \ \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu_M}, \lambda_T = \frac{\mu_T c_p}{\Pr_T}, \rho D_T = \frac{\mu_T}{Sc_T}.$$

Предполагается, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта равны единице: $\Pr_T = 1, Sc_T = 1$. Значения коэффициента турбулентной вязкости $\tilde{\nu}_T$ определяется из квазилинейного уравнения [9]

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\vec{u}\tilde{\nu} - (\nu_M + \tilde{\nu})\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \vec{r}}\right) = \omega_\nu, \text{где} \omega_\nu = c_{b1}(1 - f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu} - \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2 + c_{b2}\left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial \vec{r}}\right),$$

$$\tilde{S} = \Omega + f_{\nu 2}\frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1+\chi f_{\nu 1}}, \Omega = |rot\vec{u}|,$$

$$f_w = g\left(\frac{1+c_{w3}^6}{g^6+c_{w3}^6}\right)^{1/6}, g = r + c_{w2}\left(r^6 - r\right), r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}$$

$$\sigma = 2/3, \kappa = 0.4, c_{b1} = 0.1355, c_{b2} = 0.622, c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}, c_{w2} = 0.3, c_{w3} = 2.$$

2.2. **Основные уравнения и метод численного интегрирования.** Для принятой газофазной модели интегральная форма двумерных основных уравнений имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\int_S U dS + \int_{\delta S} \vec{n}\cdot\vec{F} dl = \int_S \Omega dS,$$

где S – фиксированная контрольная область в плоскости $(x, y), \delta S$ – граница области, $\vec{n} = (n_x, n_y)$ - единичный вектор внешней нормали к $\delta S, U$ – набор консервативных переменных в единице объема, $\vec{F} = \vec{F}^{inv} + \vec{F}^{vis}$ - сумма невязких и вязких потоков вектора U через границу области, Ω представляет источники, а векторы задаются как:

$$U = \{\rho\gamma_1, \ldots, \rho\gamma_N, \rho u, \rho v, \rho e_0\}^T;$$

$$\vec{F} = \left\{\begin{array}{l} \rho\vec{u}\gamma_1 \\ \vdots \\ \rho\vec{u}\gamma_N \\ \rho\vec{u}u + p\vec{n}n_x \\ \rho\vec{u}v + p\vec{n}n_y \\ \rho\vec{u}h_0 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \vec{K}_1 \\ \vdots \\ \vec{K}_N \\ -\vec{\tau}_x \\ -\vec{\tau}_y \\ \vec{q}_h - u\vec{\tau}_x - v\vec{\tau}_y \end{array}\right\};$$

$$\Omega = \{\dot{\omega}_1 + b_1, \ldots, \dot{\omega}_N + b_N, 0, 0, b_h\}^T.$$

Здесь u, v - компоненты вектора скорости $\vec{u}, e_0 = e + 0.5(\vec{u}\cdot\vec{u})$ - полная энергия единицы массы, $h_0 = e_0 + p/\rho$ - полная энтальпия, b_i^E - скорость массоподвода i-го компонента к единице объема, b_{tot}^E - мощность энергоподвода к единице объема,

$$\vec{\tau}_x = (\tau_{xx}, \tau_{xy}), \vec{\tau}_y = (\tau_{yx}, \tau_{yy}), \hat{\tau} = \hat{\tau}_M + \hat{\tau}_T = (\mu_M + \mu_T)\hat{\varepsilon},$$

$$\vec{q}_h = \vec{q}_M + \vec{q}_T, \vec{K}_i = \vec{K}_{M,i} + \vec{K}_{T,i},$$

$$\vec{q}_k = -(\mu + \sigma_T^*\mu_T)\frac{\partial k}{\partial\vec{r}}, \vec{q}_\omega = -(\mu + \sigma_T^*\mu_T)\frac{\partial\omega}{\partial\vec{r}}, b_h = \sum_{i=1}^N h_i b_i$$

Приведенные выше уравнения решаются методом конечного объема на структурированной криволинейной сетке, ячейки которой построены пересечением двух наборов дискретных кривых. Система конечно-разностных уравнений состоит из разностных аналогов уравнений сохранения для четырехугольных ячеек, покрывающих расчетную область, и разностных аппроксимаций граничных условий. Этот метод позволяет приближенно определить значения искомой функции $Z = \{p, u, v, \gamma_1, \ldots, \gamma_N, T\}$ в центре каждой ячейки и в центре каждой стороны ячейки, лежащей на стенке. Невязкие потоки через стороны ячейки F_G^{inv} вычисляются на основе точного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва , где $\Re$- решение задачи Римана. Левые и правые граничные значения Z_G^L и Z_G^R находятся с помощью одномерной экстраполяции исходных переменных Z от центров ячеек к центрам их сторон. Численные значения вязких потоков через внутренние стороны ячеек F_G^{vis} определяются по центральным разностным формулам, а через стороны, лежащие на обтекаемой поверхности - по односторонним трех точечным формулам второго порядка точности.

Численное интегрирование уравнений по времени осуществляется с помощью одностадийной неявной схемы первого порядка точности. Решение разностных уравнений на каждой временной стадии проводится по двухслойной неявной итерационной схеме. При построении неявного оператора итерационной схемы используется расщепление матриц Якоби от потоков на «$\pm$» аддитивные составляющие с последующей факторизацией. Приближенное обращение оператора осуществляется с помощью блочного варианта метода последовательной релаксации Гаусса-Зейделя в линиях с применением векторных прогонок для решения уравнений блока. Сходимость итераций контролируется по относительному изменению на очередной итерации одного из параметров течения (чаще всего плотности).

Квазилинейное уравнение для коэффициента турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$ аппроксимируется на той же разностной сетке с помощью противопоточной схемы второго порядка точности и решается в рамках общего итерационного процесса.

2.3. **Модель течения в камере сгорания.** На данном этапе исследования использовалась двумерная модель течения, в которой пренебрегается эффектами, связанными с зависимостью процесса от третьей координаты.

Инжекция водорода моделировалась локальным объемным источником массы и энергии заданной интенсивности и конфигурации, которые рассматривались как параметры. Модельная схема пилона показана на Рис. 1 и соответствует картине его горизонтального сечения в камере сгорания. Прямоугольником отмечена область инжекции водорода. Предполагалось, что инжекция газообразного керосина производится через стенки пилонов в направлении поперек потока.

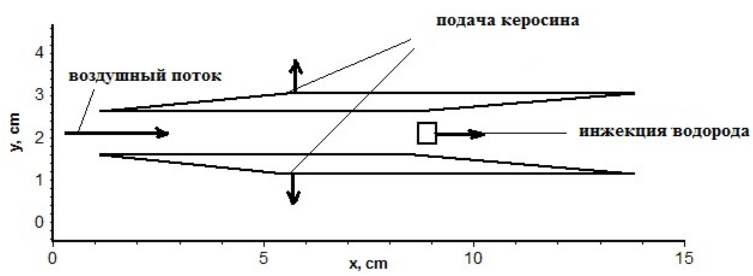


Рисунок 1 – Модельная схема пилона

2.4. **Кинетика газообразного керосина.** В численной модели газообразный керосин представлен в виде смеси двух компонентов – 41.7% парафиновой фракции и 58.3% нафтеновой фракции, с одной химической формулой $C_{12}H_{24}$ и одинаковыми термохимическими свойствами [1]. Различие фракций проявляется в скорости глобальной реакции окисления до CO и H_2. Газофазная модель включает 11 компонентов ($C_{12}H_{24}$ -парафин, $C_{12}H_{24}$ -нафтен, $O, H, OH, O_2, H_2, H_2O, CO, CO_2, N_2$), две глобальные реакции и 12 элементарных химических реакций (Табл. 3). Следует обратить внимание, что две глобальные реакции – парафиновая и нафтеновая, по существу являются реакциями термохимической конверсии топлива (ТКТ), которая в рассматриваемой постановке происходит вместе с химическими превращениями ее продуктов и других промежуточных компонентов, участвующих в процессе горения. В этой связи имеет смысл в будущем провести виртуальный (вычислительный) эксперимент для оценки эффекта от ТКТ, в котором вместо газообразного керосина в воздушный поток будет подаваться синтез-газ – смесь водорода с окисью углерода.

Скорость глобальной реакции - $\bar{\omega} = k_f p^{0.3}[C_{12}H_{24}]^{0.5}[O_2]$

Скорость элементарных реакций определяется законом действующих масс.

Константы скорости реакций представляются в виде обобщенного закона Аррениуса $k_f = AT^n \exp(-E/T)$, моль, см, сек, атм.

3. Результаты расчетов

В силу симметрии течения относительно горизонтальной линии, проходящей на равном расстоянии от пилонов, расчетная область включала только нижнюю половину области течения, показанной на рис. 1. Расчеты проводились на сетке, состоящей из четырех

Таблица 1 – Коэффициенты интерполяционных формул термодинамических функций компонентов термохимических моделей

Компонента	*T1, K*	*T2, K*	*a-2*	*a-1*	*a0*	*a1*
H	300	20000	7.7200E-19	2.5983E+00	2.5000E+00	-3.3843E-15
O	300	20000	8.7754E-05	2.9761E+00	2.5581E+00	-8.1644E-01
H_2	300	20000	2.7945E-04	2.4101E-02	2.9446E+00	7.4018E+00
O_2	300	20000	-3.9997E-04	-3.0752E-02	3.8610E+00	4.0101E+00
OH	300	20000	4.0806E-04	5.0363E-01	2.8792E+00	9.1635E+00
H_2O	300	20000	2.9302E-04	-2.8452E+00	3.0631E+00	2.3133E+01
CO	300	20000	-3.2799E-05	-1.3696E+00	3.2831E+00	9.3389E+00
CO_2	300	10000	-6.9345E-04	-4.7847E+00	4.3253E+00	3.5086E+01
$C_{12}H_{24}$	300	5000	-7.7775E-03	-4.4767E+00	1.7790E+01	9.6337E+02
N_2	300	20000	6.1112E-05	6.8986E-03	3.1545E+00	1.0145E+01

Продолжение таблицы 1

Компонента	*a2*	*a3*	*a4*	*a5*	*a6*
H	1.7417E-14	-2.5769E-14	1.5079E-14	-3.0539E-15	2.0066E+01
O	3.3867E+00	-3.8014E+00	1.7459E+00	-2.9029E-01	2.5857E+01
H_2	-8.2636E+00	2.6802E+00	-1.3048E-01	-2.9115E-02	2.3124E+01
O_2	-2.6447E+00	-4.4614E-01	4.1103E-01	-1.0020E-02	3.3912E+01
OH	-1.5817E+01	1.2507E+01	-5.2511E+00	9.1158E-01	2.9347E+01
H_2O	-4.4890E+01	4.1664E+01	-1.8533E+01	3.1039E+00	2.9895E+01
CO	-2.5122E+01	2.9188E+01	-1.2760E+01	1.7612E+00	3.1665E+01
CO_2	-1.5491E+02	3.2619E+02	-3.1169E+02	1.1099E+02	3.5144E+01
$C_{12}H_{24}$	-4.9547E+03	1.4532E+04	-2.2495E+04	1.4113E+04	8.7856E+01
N_2	-2.7328E+01	3.2146E+01	-1.4742E+01	2.2445E+00	3.0665E+01

Таблица 2 – Параметры потенциала Леннард-Джонса компонентов термохимических моделей

Компонента	σ_{ii}A	ε_{ii}, K	*Компонента*	σ_{ii}, A	ε_{ii}, K
H	2.708	37.0	H_2O	2.641	809.1
O	2.950	106.7	CO	3.690	91.7
H_2	2.968	33.3	CO_2	3.941	195.2
O_2	3.467	106.7	$C_{12}H_{24}$	4.100	230.0
OH	3.147	79.8	N_2	2.500	150.0

блоков с общим числом ячеек 92500. Узлы сетки сгущались вблизи обтекаемых поверхностей пилонов. Конфигурация расчетной области и расположение блоков показаны на Рис. 2.

Рисунок 2 – Конфигурация расчетной области и расположение блоков разностной сетки.

На входе в расчетную область были заданы условия в турбулентном сверхзвуковом воздушном потоке, соответствующие экспериментальным значениям параметров торможения $P_0 = 24.67$ атм, $T_0 = 1320\,\text{K}$ и числу Маха $M = 2.8$:

$$P_{in} = 0.909\text{атм}, T_{in} = 514K, C_{O2}^{in} = 0.232, C_{N2}^{in} = 0.768, \nu_T^{in} = 100\nu_M^{in}(T_{in}, C_m^{in})$$

На нижней и верхней границах расчетной области использовались условия симметрии (прилипания) течения, а на выходной границе – «мягкие» граничные условия экстраполяционного типа, согласно которым параметры вытекающего через границу газа были равны параметрам потока в прилегающей к ней расчетной ячейке. Поверхность

Таблица 3 – Квазиглобальный механизм горения газообразного керосина

Реакция	A	n	E,K	*Источник*
Глобальная парафиновая реакция				
$C_{12}H_{24\_p} + 6O_2 \rightarrow 12CO + 12H_2$	3.89×104	1.0	12200	[1x]
Глобальная нафтеновая реакция				
$C_{12}H_{24}\_n + 6O_2 \rightarrow 12CO + 12H_2$	2.31×107	1.0	19650	[1x]
Константы скоростей реакций диссоциации				
$M + O + O \Leftrightarrow O_2 + M$	2.55×1018	-1.0	0.	[7x. 8x]
$M + H + H \Leftrightarrow H_2 + M$	5.00×1015	0.0	0.	[7x.8x]
$M + H + O \Leftrightarrow OH + M$	1.00×1016	0.0	0.	[7x,8x]
$M + H + OH \Leftrightarrow H_2O + M$	8.40×1021	-2.0	0.	[7x,8x]
$M + CO + O \Leftrightarrow CO_2 + M$	6.00×1013	0.0	0.	[7x,8x]
Константы скоростей реакций обмена				
$H_2 + O_2 \Leftrightarrow OH + OH$	1.70×1013	0.	24070	[7,8]
$OH + H_2 \Leftrightarrow H_2O + H$	2.19×1013	0.	2590	[7x,8x]
$OH + OH \Leftrightarrow H2O + O$	6.02×1012	0.	550	[7x,8x]
$O + H_2 \Leftrightarrow H + OH$	1.80×1010	1.0	4480	[7x,8x]
$H + O_2 \Leftrightarrow O + OH$	1.22×1017	-0.91	8369	[7x,8x]
$CO + OH \Leftrightarrow H + CO_2$	4.00×1012	1.0	4030	[7x,8x]
$CO + O_2 \Leftrightarrow O + CO_2$	3.00×1012	1.0	25000	[7x,8x]

пилонов (кроме участка подачи керосина) считалась непроницаемой, химически нейтральной и охлаждаемой с температурой Tw=300K. Предполагалось, что через участок поверхности пилонов $5.532 < x < 5.632$ см осуществляется вдув газообразного керосина с постоянным суммарным расходом $F_{inj}^{\ker} = \textit{гр}/(\textit{см сек})$, температурой $T_{inj} = 300K$ и $\tilde{\nu}_T^{inj} = 0$.

Как уже говорилось, инжекция водорода в поток имитировалась локальным объемным источником массы и энергии, расположенным на линии симметрии между пилонами. Температуры инжектируемого водорода $_{H_2}$ варьировалась в пределах от 1000 до 2000K. Мощность источника Q_{H_2} менялась в пределах 5.5- 22 г/см сек. Источник занимал несколько соседних ячеек разностной сетки, имел форму прямоугольника и располагался на различном расстоянии от уступа пилонов.

Перечень рассмотренных вариантов расчетов приведен в табл. 4. Кроме параметров источника водорода в таблице даны полученные в расчетах коэффициенты сгорания инжектируемого водорода и инжектируемого газообразного керосина α_{H2} и $\alpha_{\ker}$. Эти параметры вычислялись по формулам

$$\alpha_{H_2} = 1 - \frac{G_{H_2}^{out}}{G_{H_2}^{inj}}, \alpha_{\ker} = 1 - \frac{G_{\ker}^{out}}{G_{\ker}^{inj}},$$

где $G_{H_2}^{inj}$ и $G_{\ker}^{inj}$ - суммарные мощности инжекции водорода и керосина соответственно, а $G_{H_2}^{out}$ и $G_{\ker}^{out}$ - суммарные массовые потоки этих компонентов через выходную границу расчетной области.

Самовоспламенение водорода в турбулентном сверхзвуковом потоке получено в вариантах расчета 2 - 8. Во всех случаях воспламенения инжектируемого водорода перед источником возникал прямой скачок уплотнения, который по мере установления течения перемещался вверх по потоку и устанавливался перед пилонами. В варианте 8 перед пилонами образовался практически прямой скачок уплотнения, который перемещался вверх по потоку до левой границы расчетной области. Стационарное решение для этого варианта получить не удалось.

Ниже на Рис. 3(а-о) представлены рассчитанные поля основных газодинамических функций и состава газа для варианта 5 в таблице 4. Согласно расчетам, воспламенение

Таблица 4 – Таблица рассмотренных вариантов расчетов

Вариант	$G_{H2}^{inj} g/cm\sec$	T_{H_2}, K	α_{H2}	α_{ker}
1	5.5	1000	0.0013	0.0085
2	11	1000	0.67	0.056
3	16.5	1000	0.52	0.083
4	22	1000	0.50	0.10
5	5.5	2000	0.81	0.25
6	11	2000	0.64	0.21
7	16.5	2000	0.66	0.56
8	22	2000	-	-

водорода происходит в два последовательных этапа. *Сначала* образуется узкая область горения при обтекании источника водорода. Газ в этой области нагрет до температуры свыше 2000K и содержит значительное количество радикалов O, H, OH. *На втором этапе* при удалении от источника область горения расширяется и в следе за пилонами замыкается детонационной волной. Воспламенение водорода вызывает значительное повышение температуры в следе за пилонами, что в свою очередь активизирует горение инжектируемого керосина.

Согласно расчетам в конце камеры сгорания в результате воздействия давления наблюдалось возмущение потока в виде отрывной зоны. В этом случае переобогащенная водородом смесь, выходящая из канала стабилизатора в камеру сгорания, смешивается с воздухом и воспламеняется в отрывной зоне, образуя первичную зону горения.

При подаче керосина в камеру сгорания первичная зона инициирует его возгорание, давление в камере сгорания возрастает, образуется течение типа «псевдоскачка». Следует заметить, что керосин продолжает гореть после прекращения подачи водорода в проточный канал стабилизатора, хотя менее эффективно. Это может быть вызвано тем, что стенки стабилизаторов достаточно нагрелись и являются источником вынужденного воспламенения. Кроме того, перед проточными стабилизаторами образуется ударная волна, течение за которыми может быть вихревое. Первичная зона горения водорода в камере сгорания в данном случае является определяющей. Именно она, наполняясь продуктами горения, передает энергию керосино-воздушной смеси, которая и воспламеняется.

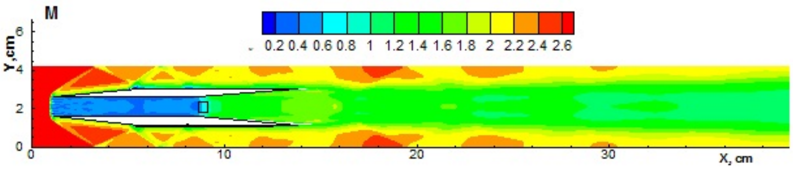
4. Заключение

Предложена двумерная численная модель турбулентного течения в экспериментальной камере сгорания с проточным воспламенителем, основанная на осредненных уравнениях Навье-Стокса для многокомпонентного реагирующего газа и модели турбулентности Спаларта-Аллвареса.

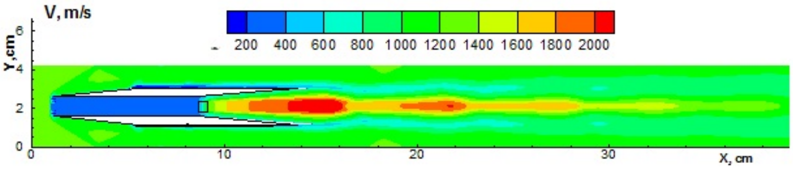
Применен созданный ранее программный комплекс для численного моделирования двумерных турбулентных сверхзвуковых реагирующих потоков в камерах сгорания со стабилизацией горения водородным пламенем, основанный на интегрировании уравнений Навье-Стокса для различных моделей газовой среды с использованием созданных баз данных по термодинамическим, транспортным и кинетическим свойствам индивидуальных газов. Генерация программ и баз термохимических данных выполнена с помощью технологии HIGHTEMP НИИ механики МГУ.

Проведено параметрическое исследование воспламенения и горения керосино-воздушной смеси при стабилизации пламени водородным воспламенителем с использованием технологии HIGHTEMP НИИ механики МГУ.

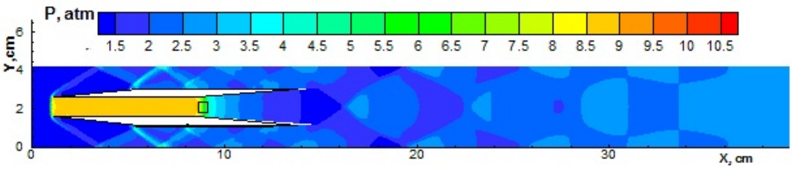
Установлено, что процессу воспламенения способствует увеличение температуры водорода и мощности его инжекции. Меньшее влияние оказывает положение и размеры источника водорода. Самовоспламенение водорода в турбулентном сверхзвуковом потоке получено в вариантах расчета 2 - 8. Во всех случаях воспламенения инжектируемого



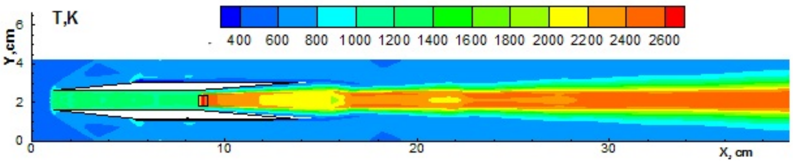
а) Число Маха



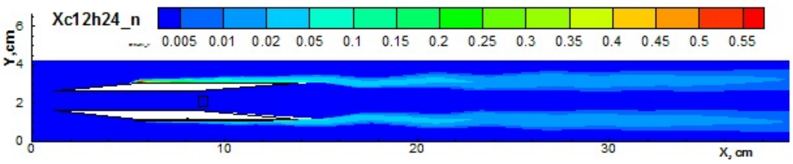
б) Скорость газа



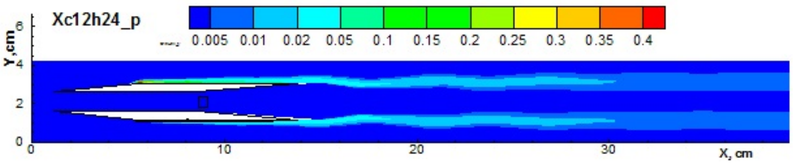
в) Давление



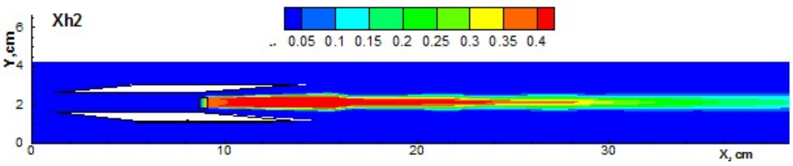
г) Температура



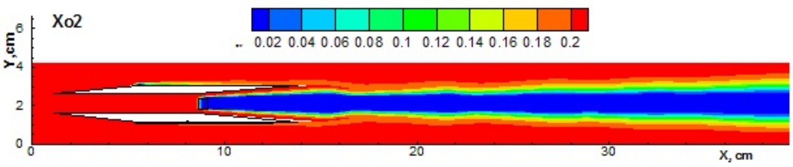
д) Концентрация нафтена



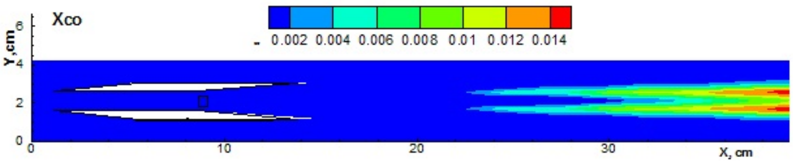
е) Концентрация парафина



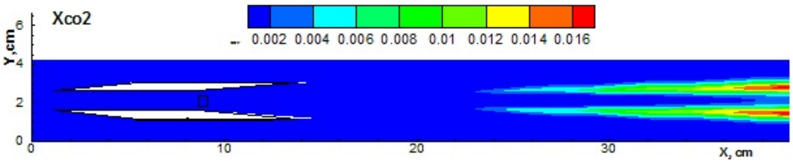
ж) Концентрация водорода



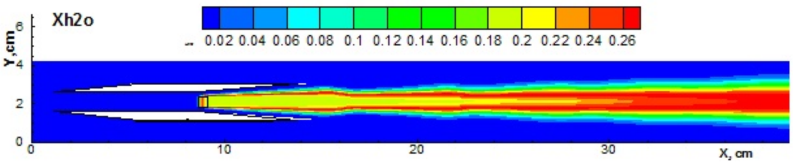
з) Концентрация кислорода



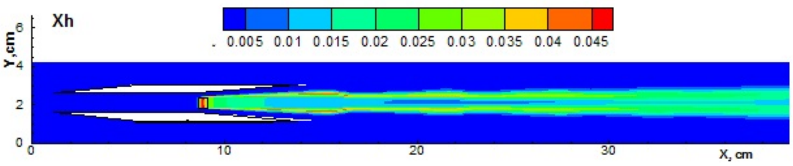
и) Концентрация окиси углерода



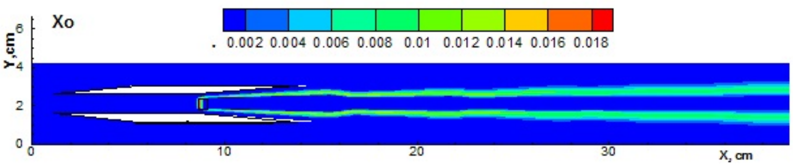
к) Концентрация двуокиси углерода



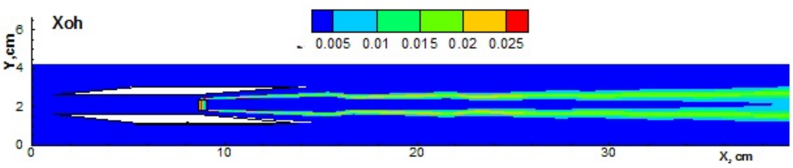
л) Концентрация воды



м) Концентрация атомарного водорода



н) Концентрация атомарного кислорода



о) Концентрация радикала OH

Рисунок 3 – Поля основных газодинамических функций для варианта 5.

водорода перед источником возникал прямой скачок уплотнения, который по мере установления течения перемещался вверх по потоку и устанавливался перед пилонами. В варианте 8 перед пилонами образовался практически прямой скачок уплотнения, который перемещался вверх по потоку до левой границы расчетной области. Стационарное решение для этого варианта получить не удалось.

Список литературы

1 Ten-See Wang, Thermophysics Characterization of Kerosene Combustion. J. of Thermophysics and Heat Transfer, V. 15, # 2, 2001

2 Spalart P.R., Allmaras S.R. One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows, AIAA Paper 92-0439, Jan 1992.

3 Afonina N.E., Gromov V.G., Sakharov V.I. HIGHTEMP Technique for High Temperature Gas Flows Numerical Simulation. Proc. of the 5th European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles, Cologne, Germany, 8-11 November 2004. SP-563, February 2005, p.323-328

4 Gromov V.G. Applications: Simulation of Martian Atmosphere Entry. Phisico-Chemical Models for High Enthalpy and Plasma Flows, Lectures Series 2002-07, von Karman Institute for Fluid Dynamics, 2002
5 Favre, A. "Equations des gas turbulents compressibles", Journal de Mecanique, 4, 1965.
6 Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Пер. с англ., М., ИЛ, 1961, 933с.
7 Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Ленинград, Химия, 1982, 591с
8 Edelman, R.B., Harsha, P.T., Laminar and Turbulent Gas Dynamics in Combustors-Current Status.
9 Wang, T.S., Farmer, R.C., Edelman, R.B. Turbulent Combustion Kinetics for Complex Hydrocarbon Fuels, AIAA Paper 88-0733, 1988.

В.А. Левин [1] , Н.Е. Афонина [1] , В.Г. Громов [1] , И.С. Мануйлович [1] , В.В. Марков [1,2]

[1] *М.В.Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Механика ғылыми-зерттеу институты, 119192, Мәскеу, Ресей*

[2] *В.А. Стеклов атындағы Математика институты, Ресей ғылым академиясы, 119991, Мәскеу, Ресей*

Керосин-ауа қоспасының жануын сутегі айдау арқылы тұрақтандыру

Аннотация: Үшу жылдамдығы жоғары әуе кемелерінде қазіргі кезде тура ағынды ауа-реактивті қозғалтқышы үлкен қызығушылық тудырады, оның тиімділігі отынды термохимиялық конверсиялау технологиясын қолдану арқылы жоғарылатуға болады. Мұндай қозғалтқыштың жұмысының кейбір аспектілерін сандық моделдеуге болады. Бұл жұмыста жану камерасындағы процестерді теориялық және эксперименттік зерттеу жүргізілілді және тікелей ағынды жану камерасына молекулалық сутегіні айдау арқылы керосин-ауа қоспасының жануын тұрақтандыру әдісі ұсынылды. ЦАГИ-де құрылған эксперименттік қондырғы пайдаланылды, ондағы жану процесіне сутегі температурасының, масса беру аймағының орналасуы мен өлшемдерінің әсері зерттелді. Теориялық зерттеу үшін Мәскеу мемлекеттік университетінің Механика ғылыми-зерттеу институтында жасалған компьютерлік бағдарламалар кешенінде іске асырылған Спаларт-Аллмарес турбуленттік моделін қолданылып, Навье-Стокс теңдеулеріне негізделген сәйкес сандық технология жүзеге асырылды. Сандық модельдеу екі мәселені шешті. Біріншісі мәселе ағынды типтегі тұтандырғышқа берілетін молекулалық сутегінің тұтану шарттарына қатысты болса, екіншісі - керосин-ауа қоспасының жануын сутегі жалынымен тұрақтандыру шарттарына қатысты болды. Есептеулер нәтижесінде тұтану процесіне сутегінің температурасы мен оны айдау қуатының жоғарылауы оң әсер беретіні анықталды. Сутегі көзінің орны мен оның көлемі аз әсер ететіні көрсетілді. Табиғи және есептеу эксперименті әдісімен жан-жақты зерттеу барысында арнадағы ағын құрылымының, оның ішінде детонациялық толқынның қалыптасуының сипаттамалық ерекшеліктері анықталды және сутегі инжекциясы арқылы жануды басқару мүмкіндігі көрсетілді.

Түйін сөздер: Навье-Стокс теңдеулері; газ тәрізді керосин; жану камерасы

V.A. Levin [1] , N.E. Afonina [1] , V.G. Gromov [1] , I.S. Manuilovich [1] , V.V. Markov [1,2]

[1] *Scientific Research Institute of Mechanics of M.V. Lomonosov Moscow State University, 119192, Moscow, Russia*

[2] *V.A. Steklov Mathematical Institute Russian Academy of Sciences, 119991, Moscow, Russia*

Stabilization of combustion of kerosene-air mixture by hydrogen injection

Аннотация: On aircrafts at high flight speeds, the ramjet engine (ramjet) is of greatest interest at present, the efficiency of which can be increased by using the thermochemical fuel conversion (TFC) technology. Some aspects of the operation of such an engine can be simulated numerically. In this work, a theoretical and experimental study of the processes in the combustion chamber is carried out, and a method is proposed for stabilizing the combustion of a kerosene-air mixture by injecting molecular hydrogen into a direct-flow combustion chamber. An experimental setup created at TsAGI was used, on which the influence of the hydrogen temperature, the location and size of the mass supply area on the combustion process was studied. For a theoretical study, the corresponding numerical technology was applied based on the Navier-Stokes equations using the Spal-rt-Allmares turbulence model, implemented in a complex of computer programs developed at the Research Institute of Mechanics of Moscow State University. Numerical modeling solved two problems. The first concerned the conditions for the ignition of molecular hydrogen supplied to the flow-type igniter, and the second - the conditions for the stabilization of the combustion of a kerosene-air mixture by a hydrogen flame. Based on the results of calculations, it was found that the ignition process is facilitated by an increase in the temperature of hydrogen and the power of its injection. The position and size of the hydrogen source is less influential. In the course of a comprehensive study by the method of a full-scale and computational experiment, the characteristic features of the flow structure in the channel, including the formation of a detonation wave, were revealed, and the possibility of controlling combustion by hydrogen injection was shown.

Keywords: Navier-Stokes equations; gaseous kerosene; combustion chamber

References

1 Ten-See Wang, Thermophysics Characterization of Kerosene Combustion, J. of Thermophysics and Heat Transfer, 15(2) (2001)
2 Spalart P.R., Allmaras S.R. One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows, AIAA Paper 92-0439, Jan 1992.

3 Afonina N.E., Gromov V.G., Sakharov V.I. HIGHTEMP Technique for High Temperature Gas Flows Numerical Simulation. Proc. of the 5th European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles, Cologne, Germany, 8-11 November 2004. SP-563, February 2005, 323-328.
4 Gromov V.G. Applications: Simulation of Martian Atmosphere Entry. Phisico-Chemical Models for High Enthalpy and Plasma Flows, Lectures Series 2002-07, von Karman Institute for Fluid Dynamics (2002).
5 Favre A. Equations des gas turbulents compressibles. Journal de Mecanique, 4 (1965).
6 Girshfel'der Dzh., Kertis Ch., Berd R. Molekuljarnaja teorija gazov i zhidkostej. Per. s angl. [Molecular theory of gases and liquids. Translation from English] (Moscow, IL, 1961, 933 p.) [In Russian].
7 Rid R., Prausnic Dzh., Shervud T. Svojstva gazov i zhidkostej [Properties of gases and liquids] (Leningrad, Himija, 1982, 591 p.) [In Russian].
8 Edelman, R.B., Harsha, P.T., Laminar and Turbulent Gas Dynamics in Combustors-Current Status.
9 Wang, T.S., Farmer, R.C., Edelman, R.B. Turbulent Combustion Kinetics for Complex Hydrocarbon Fuels, AIAA Paper 88-0733 (1988).

Сведения об авторах:

Левин В.А. - академик РАН, профессор, Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Мичуринский проспект, дом 1, 119192, г. Москва, Россия.

Афонина Н.Е. - ***автор для корреспонденции***, к.ф.-.м.н., с.н.с., Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Мичуринский проспект, дом 1, 119192, г. Москва, Россия.

Громов В.Г. - к.ф.-.м.н., с.н.с., Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Мичуринский проспект, дом 1, 119192, г. Москва, Россия.

Мануйлович И.С. - д.ф.-.м.н., вед.н.сотр., Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Мичуринский проспект, дом 1, 119192, г. Москва, Россия.

Марков В.В. - д.ф.-.м.н., вед.н.сотр., Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 119192, г. Москва, Россия; Мичуринский проспект, дом 1. Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, ул.Губкина, д.8, 119991, г. Москва, Россия.

Levin V.A. - Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor, Scientific Research Institute of Mechanics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Michurinsky prospect, building 1, 119192, Moscow, Russia.

Afonina N.E. - ***corresponding author***, PhD., Senior Researcher, Research Institute of Mechanics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Michurinsky prospect, building 1, 119192, Moscow, Russia.

Gromov V.G. - PhD., Senior Researcher, Research Institute of Mechanics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Michurinsky prospect, building 1, 119192, Moscow, Russia.

Manuylovich I.S. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Scientific Researcher, 1) Scientific Research Institute of Mechanics, Moscow State University named after M.V. Lomonosov, 119192, Moscow, Russia, Michurinsky prospect, house 1.

Markov V.V. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Scientific Researcher, 1) Research Institute of Mechanics, M.V. Lomonosov Moscow State University, Michurinsky prospect, building 1, 119192, Moscow, Russia. 2) Mathematical Institute named after V.A. Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Gubkina st., 8, 119991, Moscow, Russia.

Received 07.03.2021

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2021, том 134, №1, 19-34 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

М.К. Потапов [1] , Б.В. Симонов [2]

[1] *МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*
(E-mail: mkpotapov@mail.ru [1] , simonov-b2002@yandex.ru [2])

НЕРАВЕНСТВА, УТОЧНЯЮЩИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ СМЕШАННЫМИ МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ В МЕТРИКАХ L_p И L_∞

Аннотация: Проблема оценивания модулей гладкости функций из L_q в терминах их модулей гладкости из L_p хорошо известна. Первым этапом оценивания модулей гладкости стало изучение свойств функций из классов Липшица и получение соответствующих вложений в работах Титчмарша, Харди, Литтлвуда, Никольского.

Классическое вложение Харди-Литтлвуда для пространств Липшица может быть получено как следствие из неравенства Ульянова для модулей непрерывности функции одной переменной. В работах Ульянова рассматривался модуль гладкости натурального порядка. Введение дробных модулей гладкости позволило в работах Потапова, Симонова, Тихонова усилить неравенство Ульянова. Позже те же авторы смогли обобщить неравенство Ульянова на функции двух переменных, получив оценки для смешанных модулей гладкости. Точность этих неравенств была доказана в случае, когда $1 < p < q < \infty$ или $1 = p < q = \infty$.

В настоящей статье изучаются смешанные модули гладкости дробных порядков функции двух переменных. Получены неравенства, уточняющие ранее известные оценки типа неравенств Ульянова между смешанными модулями гладкости в метриках L_p и L_q при значениях $1 < p < q = \infty$. Исследована точность полученных оценок. Изучена взаимосвязь этих и ранее известных оценок.

Ключевые слова: неравенство; метрика; смешанный модуль гладкости дробного порядка

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-678X-2020-134-1-19-34

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем следующие обозначения:

$L_p, 1 \leq p \leq \infty, -$ множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π - периодических по каждому переменному, для которых

$$\|f\|_p < \infty,$$

где

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ если } 1 \leq p < \infty;$$

$$\|f\|_p = \underset{\substack{0 \leq x_1 \leq 2\pi, \\ 0 \leq x_2 \leq 2\pi}}{supvrai} |f(x_1, x_2)|, \text{ если } p = \infty;$$

$\sigma(f)-$ ряд Фурье функции $f \in L_p$, то есть

$$\sigma(f) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (a_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + b_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 +$$

$$+v_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2+d_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2)\equiv\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}A_{n_1n_2}(f),$$

где для краткости обозначено $\cos(0\cdot t)\equiv\frac{1}{2}$,

$$a_{n_1n_2}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x_1,x_2)\cos n_1x_1\cos n_2x_2dx_1dx_2,$$

$$b_{n_1n_2}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x_1,x_2)\sin n_1x_1\cos n_2x_2dx_1dx_2,$$

$$v_{n_1n_2}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x_1,x_2)\cos n_1x_1\sin n_2x_2dx_1dx_2,$$

$$d_{n_1n_2}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x_1,x_2)\sin n_1x_1\sin n_2x_2dx_1dx_2$$

— коэффициенты Фурье функции $f\in L_p$;

L_p^0 — множество функций $f\in L_p$ таких, что

$\int\limits_0^{2\pi}f(x_1,x_2)dx_1=0$ для почти всех x_2 и $\int\limits_0^{2\pi}f(x_1,x_2)dx_2=0$ для почти всех x_1;

$V_{n_1\infty}(f),V_{\infty n_2}(f),V_{n_1n_2}(f),n_i\in N\cup\{0\}(i=1,2),-$ суммы Валле-Пуссена ряда Фурье функции $f\in L_p$, т.е.

$V_{n_1\infty}(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x_1+t_1,x_2)V_{n_1}^{2n_1}(t_1)dt_1,\ V_{\infty n_2}(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x_1,x_2+t_2)V_{n_2}^{2n_2}(t_2)dt_2,$

$V_{n_1n_2}(f)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x_1+t_1,x_2+t_2)V_{n_1}^{2n_1}(t_1)V_{n_2}^{2n_2}(t_2)dt_1dt_2,$ где $V_0^0(t)=D_0(t)$,

$V_n^{2n}(t)=\frac{1}{n}\big(D_n(t)+...+D_{2n-1}(t)\big),n\in N,D_k(t)=\frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}},k\in N\cup\{0\}$;

$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)-$ разность с шагом h_1 положительного порядка α_1 по переменной x_1 функции $f\in L_p$, то есть $\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)=\sum\limits_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1}f(x_1+(\alpha_1-\nu_1)h_1,x_2)$,

где $\binom{\alpha}{\nu}=1$ для $\nu=0$, $\binom{\alpha}{\nu}=\alpha$ для $\nu=1$, $\binom{\alpha}{\nu}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu\geq 2$;

$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)-$ разность с шагом h_2 положительного порядка α_2 по переменной x_2 функции $f\in L_p$, то есть $\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)=\sum\limits_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2}f(x_1,x_2+(\alpha_2-\nu_2)h_2)$;

$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p-$ смешанный модуль гладкости положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 функции $f\in L_p$, то есть

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p=\sup_{|h_i|\leq\delta_i,i=1,2}||\Delta_{h_1}^{\alpha_1}\big(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\big)||_p;$$

$Y_{m_1,m_2}(f)_p-$ наилучшее приближение углом функции $f\in L_p$, то есть

$$Y_{m_1,m_2}(f)_p=\inf_{T_{m_1,\infty},T_{\infty,m_2}}||f-T_{\infty,m_2}-T_{m_1,\infty}||_p,$$

где $T_{m_1,\infty}(x_1,x_2)-$ функция, являющаяся тригонометрическим полиномом порядка не выше, чем $m_1(m_1\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ по переменной x_1 и такая, что $T_{m_1,\infty}\in L_p$, $T_{\infty,m_2}(x_1,x_2)-$ функция, являющаяся тригонометрическим полиномом порядка не выше, чем $m_2(m_2\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ по переменной x_2 и такая, что $T_{\infty,m_2}\in L_p$;

$f^{(\rho_1,\rho_2)}(x_1,x_2)-$ производную в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)\in L_p^0$ порядка $\rho_1\geq 0$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2\geq 0$ по переменной x_2 (см. [1]);

$[a]-$ целую часть числа a.

Для неотрицательных функционалов $F(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)$ будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \ll G(f,\delta_1,\delta_2)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f,δ_1 и δ_2, такая, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \le CG(f,\delta_1,\delta_2)$. Если одновременно $F(f,\delta_1,\delta_2) \ll G(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2) \ll F(f,\delta_1,\delta_2)$, то будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \asymp G(f,\delta_1,\delta_2)$.

Известны (см. [2]-[6]) следующие соотношения между модулями гладкости:

Пусть $f \in L_p^0, \alpha_i > 0, \delta_i \in (0,1) (i=1,2)$. *Тогда*

при $1 = p < q = \infty$

$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-1}\omega_{\alpha_1+1,\alpha_2+1}(f,t_1,t_2)_1\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$,

а) при $1 < p < q = \infty, \alpha_i > \gamma_i > 0, i = 1,2$. *Тогда*

$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac1p}\omega_{\gamma_1+\frac1p,\gamma_2+\frac1p}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$.

б) при $1 < p < q = \infty,\ \alpha_2 > \gamma_2 > 0$

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac1p}\omega_{\alpha_1+\frac1p,\gamma_2+\frac1p}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac1p}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}, \tag{1}$$

в) при $1 < p < q = \infty,\ \alpha_1 > \gamma_1 > 0$

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac1p}\omega_{\gamma_1+\frac1p,\alpha_2+\frac1p}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_2}\right)^{1-\frac1p}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}. \tag{2}$$

В этой работе уточняются утверждения б) и в).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p^0,\ 1 < p < q = \infty, \alpha_1 > 0, \frac1p + \frac1{p'} = 1, \alpha_2 > \gamma_2 > 0$, $\delta_i \in (0,1), i = 1,2$. *Тогда*

1. справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1p'}}}(t_1t_2)^{-\frac1p}\omega_{\alpha_1+\frac1p,\gamma_2+\frac1p}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}. \tag{3}$$

В соотношении (3), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ *на знак* $\asymp$.

2. Неравенство (3) точно в том смысле, что для любого $\alpha_1^{(1)} > \alpha_1$ *существует функция* $f_1(x_1,x_2) \in L_p^0$ *такая, что*

$$A_1(f_1,\delta_1,\delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_1,\delta_1,\delta_2)_\infty}{\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1p'}}}(t_1t_2)^{-\frac1p}\omega_{\alpha_1^{(1)}+\frac1p,\gamma_2+\frac1p}(f_1,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}} \to \infty$$

для любого фиксированного δ_2 *и* $\delta_1 \to 0$.

3. Неравенство (3) точно в том смысле, что для любой функции $\xi_1(t_1)-$ *положительной, слабо колеблющейся на* $(0,1)$ *и такой, что* $\xi(t_1) = \bar{\bar{o}}\big(\log_2\frac{2}{t_1}\big)^{1-\frac1p}-$ *существует функция* $f_2(x_1,x_2) \in L_p^0$ *такая, что*

$$A_2(f_2,\delta_1,\delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_2,\delta_1,\delta_2)_\infty}{\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\xi_1(\delta_1))^{\frac{1}{\alpha_1}}}(t_1t_2)^{-\frac1p}\omega_{\alpha_1+\frac1p,\gamma_2+\frac1p}(f_2,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}} \to \infty$$

для любого фиксированного δ_2 *и* $\delta_1 \to 0$.

4. Если в соотношении (3) γ_2 заменить на α_2, то полученное соотношение будет неверным.

5. Справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}, \tag{4}$$

при этом в соотношении (4), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ на знак $\asymp$. Однако существует функция $f_3(x_1,x_2)$, такая, что для нее в соотношении (4) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

6.а. Из неравенства (3) следует неравенство (1) в утверждении б).

6.б. Неравенство (3) более точное, чем неравенство (1) в утверждении б) в том смысле, что существует функция $f_4(x_1,x_2)\in L_p^0$ такая, что для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1\to 0$, а также для любого фиксированного δ_1 и $\delta_2\to 0$ выражение в правой части (3) стремится к нулю, а выражение в правой части (1) обращается в $+\infty$.

Теорема 2. *Пусть $f\in L_p^0$, $1<p<q=\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \alpha_1>\gamma_1>0, \alpha_2>0$, $\delta_i\in(0,1), i=1,2$. Тогда*

1. справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}. \tag{5}$$

В соотношении (5), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ на знак $\asymp$.

2. Неравенство (5) точно в том смысле, что для любого $\alpha_2^{(1)}>\alpha_2$ существует функция $f_5(x_1,x_2)\in L_p^0$ такая, что

$$A_3(f_5,\delta_1,\delta_2)=\frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_5,\delta_1,\delta_2)_\infty}{\int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2^{(1)}+\frac{1}{p}}(f_5,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}}\to\infty$$

для любого фиксированного δ_1 и $\delta_2\to 0$.

3. Неравенство (5) точно в том смысле, что для любой функции $\xi_2(t_2)-$ положительной, слабо колеблющейся на $(0,1)$ и такой, что $\xi(t_2)=\bar{\bar{o}}\big(\log_2\frac{2}{t_2}\big)^{1-\frac{1}{p}}-$ существует функция $f_6(x_1,x_2)\in L_p^0$ такая, что

$$A_4(f_6,\delta_1,\delta_2)=\frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_6,\delta_1,\delta_2)_\infty}{\int\limits_0^{\delta_2(\xi_2(\delta_2))^{\frac{1}{\alpha_2}}}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f_6,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}}\to\infty$$

для любого фиксированного δ_1 и $\delta_2\to 0$.

4. Если в соотношении (5) γ_1 заменить на α_1, то полученное соотношение будет неверным.

5. Справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_2}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}, \qquad (6)$$

при этом в соотношении (6), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ *на знак* $\asymp$ *. Однако существует функция* $f_7(x_1,x_2)$*, такая, что для нее в соотношении (6) знак* $\ll$ *может быть заменен знаком* $\asymp$ *.*

6.а. Из неравенства (5) следует неравенство (2) в утверждении в).

6.б. Неравенство (5) более точное, чем неравенство (2) в утверждении в) в том смысле, что существует функция $f_8(x_1,x_2)\in L_p^0$ *такая, что для любого фиксированного* δ_2 *и* $\delta_1\to 0$*, а также для любого фиксированного* δ_1 *и* $\delta_2\to 0$ *выражение в правой части (5) стремится к нулю, а выражение в правой части (2) обращается в* $+\infty$ *.*

Из теоремы 1 и 2 следует

Теорема 3. *Пусть* $f\in L_p^0$, $1<p<q=\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \alpha_i>0, \rho_i>0, \delta_i\in(0,1), i=1,2.$ *Тогда*

1. если $\alpha_2>\gamma_2>0$*, то*

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}t_1^{-\rho_1-\frac{1}{p}}t_2^{-\rho_2-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\rho_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\rho_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2},$$

2. если $\alpha_1>\gamma_1>0$*, то*

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}}\int\limits_0^{\delta_1}t_1^{-\rho_1-\frac{1}{p}}t_2^{-\rho_2-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\rho_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\rho_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Замечание. Результаты, аналогичные результатам теорем 1 и 2, для функции одной переменной следуют из работы [7].

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1([5]). *Пусть* $f\in L_p^0$, $g\in L_p^0$, $1\le p\le\infty$, $\beta_i\ge\alpha_i>0, r_i>0$, $n_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2$. *Тогда*

(1) $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,0)_p=\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,0,\delta_2)_p=\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,0,0)_p=0.$

(2) $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f+g,\delta_1,\delta_2)_p\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p+\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(g,\delta_1,\delta_2)_p.$

(3) $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,t_1,t_2)_p$*, если* $0\le\delta_i\le t_i, i=1,2$ *.*

(4) $\frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p}{\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}}\ll\frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,t_1,t_2)_p}{t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}}$*, если* $0<t_i\le\delta_i\le\pi, i=1,2$ *.*

(5) $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\lambda_1\delta_1,\lambda_2\delta_2)_p\ll(\lambda_1+1)^{\alpha_1}(\lambda_2+1)^{\alpha_2}\,\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p,$
если $\lambda_i>0$ *и* $0<\lambda_i\delta_i\le\pi$, $i=1,2.$

(6) $Y_{n_1-1,n_2-1}(f)_p\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2})_p\ll\frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\frac{1}{n_2^{\alpha_2}}\sum\limits_{v_1=1}^{n_1+1}\sum\limits_{v_2=1}^{n_2+1}v_1^{\alpha_1-1}v_2^{\alpha_2-1}Y_{v_1-1,v_2-1}(f)_p.$

(7) $\delta_1^{-r_1}\delta_2^{-r_2}\omega_{\alpha_1+r_1,\ \alpha_2+r_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f^{(r_1,r_2)},\delta_1,\delta_2)_p\ll$
$\ll\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2}t_1^{-r_1}t_2^{-r_2}\omega_{\alpha_1+r_1,\alpha_2+r_2}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$*, если* $0<\delta_i\le\pi, i=1,2,$ *и* $f^{(r_1,r_2)}\in L_p^0.$

Лемма 2([5]). *Пусть* $f\in L_p^0, 1\le p\le\infty, \alpha_i>0, n_i\in\mathbb{N}, i=1,2.$ *Тогда*

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\Big(f,\tfrac{1}{n_1},\tfrac{1}{n_2}\Big)_p\asymp n_1^{-\alpha_1}n_2^{-\alpha_2}\big\|V_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f)\big\|_p+n_1^{-\alpha_1}\big\|V_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f-V_{\infty,n_2}(f))\big\|_p+$$
$$+n_2^{-\alpha_2}\big\|V_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f-V_{n_1,\infty}(f))\big\|_p+\big\|f-V_{n_1,\infty}(f)-V_{\infty,n_2}(f)+V_{n_1,n_2}(f)\big\|_p.$$

Лемма 3([5]). *Пусть* $f\in L_p, 1\le p\le\infty, m_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}, i=1,2.$ *Тогда*

(а) $||V_{m_1,\infty}(f)||_p\ll||f||_p$*, (б)* $||V_{\infty,m_2}(f)||_p\ll||f||_p$*, (в)* $||V_{m_1,m_2}(f)||_p\ll||f||_p.$

Лемма 4([5]). *Пусть* $f \in L_p^0, 1 \le p < q \le \infty$, $q^* = q$, *если* $q < \infty$, $q^* = 1$, *если* $q = \infty$, $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2$. *Тогда*

$$Y_{2^{n_1}-1, 2^{n_2}-1}(f)_q \ll \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{(\nu_1+\nu_2)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q^*} Y_{2^{\nu_1}-1, 2^{\nu_2}-1}^{q^*}(f)_p \Big)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Лемма 5([5]). *Пусть* $f \in L_p, 1 \le p \le \infty, m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2$. *Тогда*

(а) $||f - V_{m_1,\infty}(f) - V_{\infty,m_2}(f) + V_{m_1,m_2}(f)||_p \ll Y_{m_1,m_2}(f)_p$,

(б) $||f - V_{2^{m_1},\infty}(f)||_p \ll \sum\limits_{\nu_1=m_1}^{\infty} ||V_{2^{\nu_1+1},\infty}(f) - V_{2^{\nu_1},\infty}(f)||_p$,

(в) $||f - V_{\infty,2^{m_2}}(f)||_p \ll \sum\limits_{\nu_2=m_2}^{\infty} ||V_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f) - V_{\infty,2^{\nu_2}}(f)||_p$.

Лемма 6 ([5]). *Пусть* $f \in L_p, 1 \le p \le \infty, m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha_i > 0, i = 1, 2$. *Тогда*

(а) $||V_{2^{m_1+1},\infty}(f) - V_{2^{m_1},\infty}(f)||_p \ll 2^{-m_1\alpha_1} ||V^{(\alpha_1,0)}_{2^{m_1+1},\infty}(f) - V^{(\alpha_1,0)}_{2^{m_1},\infty}(f)||_p$,

(б) $||V_{\infty,2^{m_2+1}}(f) - V_{\infty,2^{m_2}}(f)||_p \ll 2^{-m_2\alpha_2} ||V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f) - V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{\nu_2}}(f)||_p$,

(в) $||V_{2^{m_1+1},2^{m_2+1}}(f) - V_{2^{m_1},2^{m_2+1}}(f) - V_{2^{m_1+1},2^{m_2}}(f) + V_{2^{m_1},2^{m_2}}(f)||_p \ll$
$\ll 2^{-m_1\alpha_1 - m_2\alpha_2} ||\big(V_{2^{m_1+1},2^{m_2+1}}(f) - V_{2^{m_1},2^{m_2+1}}(f) - V_{2^{m_1+1},2^{m_2}}(f) + V_{2^{m_1},2^{m_2}}(f)\big)^{(\alpha_1,\alpha_2)}||_p$.

Лемма 7([1]) (Неравенство Гельдера). *Пусть* $1 \le p \le \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, f_1 \in L_p(E^n), f_2 \in L_{p'}(E^n)$. *Тогда функция* $f_1(x) \cdot f_2(x)$ *интегрируема на* E^n *и имеет место неравенство Гельдера*

$$\int\limits_{E^n} |f_1(x) f_2(x)| dx \le \|f_1\|_p \|f_2\|_{p'}.$$

Лемма 8([5]). *Пусть* $1 \le p \le \infty$, *функция* $T_{n_1,\infty}(x_1, x_2) \in L_p^0$, *и является тригонометрическим полиномом порядка не выше, чем* $n_1 (n_1 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_1; *функция* $T_{\infty,n_2}(x_1, x_2) \in L_p^0$ *и является тригонометрическим полиномом не выше, чем* $n_2 (n_2 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_2. *Тогда*

$||T^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}||_p \ll n_1^{\alpha_1} ||T_{n_1,\infty}||_p$; $\quad ||T^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}||_p \ll n_2^{\alpha_2} ||T_{\infty,n_2}||_p$.

Лемма 9(неравенство С.М. Никольского)([8], [9]). *Пусть* $T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)-$ *тригонометрический полином порядка* n_1 *по переменной* x_1 *и порядка* $n_2 (n_1, n_2 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_2, $1 \le p_i \le q_i \le \infty (i = 1, 2)$. *Тогда*

$$\|T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\|_{q_1 q_2} \le C n_1^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}} n_2^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}} \|T_{n_1,n_2}(x_1, x_2)\|_{p_1 p_2}.$$

где постоянная C *не зависит от* n_1 *и* n_2.

Вспомогательные результаты для функции одного переменного. Обозначим через:

$L_p^{(1)}$, $1 \le p \le \infty, -$ множество $2\pi-$ периодических измеримых функций одной переменной $f(x)$, для которой $||f||_p^{(1)} < \infty$, где

$||f||_p^{(1)} = \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$, если $1 \le p < \infty$, $||f||_p^{(1)} = \underset{0 \le x \le 2\pi}{supvrai} |f(x)|$, если $p = \infty$;

$L_p^{(1)0}-$ множество функций $f \in L_p^{(1)}$, $1 \le p \le \infty$, таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx = 0$;

$\sigma(f)-$ ряд Фурье функции $f \in L_p^{(1)}$, то есть

$$\sigma(f) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$V_{(1)n}(f), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, -$ суммы Валле-Пуссеена ряда Фурье функции $f \in L_p^{(1)}$, то есть

$$V_{(1)n}(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x+t) V_n^{2n}(t) dt;$$

$\omega_\alpha(f, \delta)_p^{(1)}-$ модуль гладкости положительного порядка α функции $f \in L_p^{(1)}$, то есть

$\omega_\alpha(f, \delta)_p^{(1)} = \sup\limits_{|h| \le \delta} ||\Delta_h^\alpha(f)||_p^{(1)}$, где $\Delta_h^\alpha(f) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu)h)$;

$f^{(\rho)}(x)$ - производную в смысле Вейля порядка ρ функции $f(x) \in L_p^{(1)0}$.

Будем писать, что $g(x) \in M_p^{(1)}$, если $g \in L_p^{(1)0}$, $\sigma(g) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \psi(kx)$, где $\psi(x) = \cos x$ или $\psi(x) = \sin x$, и коэффициенты a_k удовлетворяют условиям $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $a_k \geq a_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что из этих условий следует, что $a_k \geq 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 10([5]). *Пусть* $g(x) \in L_p^{(1)0}, 1 < p < \infty$. *Пусть* $\widetilde{g}(x)-$ *функция сопряженная с функцией* $g(x)$. *Тогда* $\sigma(\widetilde{g}) \equiv \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x)$, $\widetilde{g} \in L_p^{(1)0}$ *и*

$$||\widetilde{g}||_p^{(1)} \ll ||g||_p^{(1)}.$$

Лемма 11([5]). *Пусть* $g(x) \in M_p^{(1)}, g^{(r)} \in L_p^{(1)0}, 1 < p < \infty, r \geq 0, n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\Big(\int\limits_0^{2\pi} |g^{(r)}(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \asymp \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p k^{(r+1)p-2} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 12([5],[10]). *Пусть* $1 < p < q = \infty, \delta \in (0,1)$.

(а). Пусть $\alpha_1 > 0, \zeta(x)-$ *положительная функция, слабо колеблющаяся на* $(0,1)$ *и такая, что* $\zeta(x) = \bar{\bar{o}}\big(\log_2 \frac{2}{x}\big)^{\frac{1}{p'}}$ *при* $x \to 0$. *Пусть функция* $g_1(x)$ *такая, что*

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha_1+1}}, \textit{если } \alpha_1 \neq 2l-1, \ l \in \mathbb{N},$$

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha_1+1}}, \textit{если } \alpha_1 = 2l-1, \ l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$A_1(g_1, \delta) = \frac{\omega_{\alpha_1}(g_1,\delta)_\infty^{(1)}}{\int\limits_0^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha_1}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_1+\frac{1}{p}}(g_1,t)_p^{(1)} \frac{dt}{t}} \gg \frac{\left(\log_2 \frac{2}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\zeta(\delta)}.$$

(б). Пусть $g_2(x) = \sin x$. *Тогда при* $\alpha_2 > 0$

$$\omega_{\alpha_2}(g_2, \delta)_p^{(1)} \asymp \delta^{\alpha_2}, \quad A_2(g_2, \delta) = \int\limits_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_2+\frac{1}{p}}(g_2, t)_p^{(1)} \frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_2} (\log_2 \tfrac{2}{\delta})^{\frac{1}{p'}},$$

$$D(g_2, \delta) = \int\limits_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_2+\frac{1}{p}}(g_2, t)_p^{(1)} \frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_2}.$$

(в). Пусть $\alpha_3 > 0, 1 \leq r < \infty, \beta > 0$. *Пусть функция* $g_3(x)$ *такая, что*

$$g_3(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\alpha_3}} \cos 2^\nu x.$$

Тогда $\quad \omega_{\alpha_3+\beta}(g_3, \delta)_r \asymp \delta^{\alpha_3}$.

(г). Пусть $g_4(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{2-\frac{1}{p}} 2^{\nu\frac{1}{p}}} \cos 2^\nu x$. *Тогда при* $\alpha_4 > 0$

$$\omega_{\alpha_4+\frac{1}{p}}(g_4, \delta)_p^{(1)} \asymp \delta^{\frac{1}{p}} (\log_2 \tfrac{2}{\delta})^{-2+\frac{1}{p}}.$$

(д). Пусть $\alpha_5 > 0$ *и функция* $g_5(x)$ *такая, что*

$$g_5(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha_5+1} \ln^{\frac{1}{p}}(k+1)}, \ \textit{если} \quad \alpha_5 \neq 2l-1, \ l \in \mathbb{N},$$

$$g_5(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha_5+1} \ln^{\frac{1}{p}}(k+1)}, \ \textit{если} \quad \alpha_5 = 2l-1, \ l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\omega_{\alpha_5}(g_5, \delta)_\infty^{(1)} \gg \delta^{\alpha_5} \big(\log_2 \tfrac{2}{\delta} \big)^{1-\frac{1}{p}}, \quad \int\limits_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_5+\frac{1}{p}}(g_5, t)_p^{(1)} \frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_5} \left(\log_2 \log_2 \tfrac{3}{\delta} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\int\limits_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}} \left(\log_2 \tfrac{2}{t} \right)^{\frac{1}{p'}} \omega_{\alpha_5+\frac{1}{p}}(g_5, t)_p^{(1)} \frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_5} \left(\log_2 \tfrac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{p'}} \big(\log_2 \log_2 \tfrac{3}{\delta} \big)^{\frac{1}{p}}.$$

(е). Пусть $\alpha > \gamma > \frac{\alpha}{2} > 0$ *и функция* $g_6(x)$ *такова, что* $E_n(g_6)_p^{(1)} \asymp (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{p}}$. *Тогда*

$$D_1(g_6,\delta)=\int\limits_0^{\delta}t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma+\frac{1}{p}}(g_6,t)_p^{(1)}\frac{dt}{t}\asymp\delta^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$A_3(g_6,\delta)=\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}}t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(g_6,t)_p^{(1)}\frac{dt}{t}\asymp\delta^{\frac{\alpha}{2}}(\log_2\tfrac{2}{\delta})^{\frac{1}{2p'}}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

4.1. Доказательство пункта 1 теоремы 1. Для каждого $\delta_i\in(0,1)$ существует целое неотрицательное число n_i такое, что $\frac{1}{2^{n_i+1}}\le\delta_i<\frac{1}{2^{n_i}}, i=1,2$. Тогда, применяя свойства (4) и (3) леммы 1, имеем $J=\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_\infty\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\left(f,\frac{1}{2^{n_1+1}},\frac{1}{2^{n_2+1}}\right)_\infty$.
Применяя лемму 2, получаем

$$J\ll2^{-n_1\alpha_1-n_2\alpha_2}\|V^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)\|_\infty+2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{2^{n_1+1},\infty}(f-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty+$$
$$+2^{-n_2\alpha_2}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f-V_{2^{n_1+1},\infty}(f))\|_\infty+\|f-V_{2^{n_1+1},\infty}(f)-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f)+V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)\|_\infty\equiv$$
$$\equiv J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Оценим J_4. Применяя леммы 5 (пункт а), 4 и 1 (пункт 6), будем иметь

$$J_4\ll Y_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)_\infty\ll\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{(\nu_1+\nu_2)\frac{1}{p}}Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_p\ll$$
$$\ll\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}2^{(\nu_1+\nu_2)\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\tfrac{1}{2^{\nu_1}},\tfrac{1}{2^{\nu_2}})_p\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ll$$
$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}=I(\delta_1,\delta_2).$$

Оценим J_3. Применяя лемму 5 (б), получаем $J_3=2^{-n_2\alpha_2}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f)-$

$$-V_{2^{n_1+1},\infty}(V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty\ll2^{-n_2\alpha_2}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\|V_{2^{m_1+1},\infty}(V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f))-$$
$$-V_{2^{m_1},\infty}(V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty=2^{-n_2\alpha_2}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)\|_\infty.$$

Так как $f\in L_p^{(0)}$, то $V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)=$

$$=\sum_{m_2=0}^{n_2+1}\Big(V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{m_2}}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)-V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,[2^{m_2-1}]}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)\Big).$$

Тогда получим $J_3\ll2^{-n_2\alpha_2}\sum\limits_{m_2=0}^{n_2+1}\sum\limits_{m_1=n_1+1}^{\infty}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{m_2}}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-$

$$-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)-V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,[2^{m_2-1}]}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)\|_\infty.$$

Применяя лемму 9, будем иметь

$$J_3\ll2^{-n_2\alpha_2}\sum_{m_2=0}^{n_2+1}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{(m_1+m_2)\frac{1}{p}}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{m_2}}(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f))-$$
$$-V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,[2^{m_2-1}]}(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f))\|_p$$

Применяя леммы 8 и 6, получим

$$J_3\ll2^{-n_2\alpha_2}\sum_{m_2=0}^{n_2+1}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{m_1\frac{1}{p}}2^{m_2(\alpha_2-\gamma_2)}\|V^{(0,\gamma_2+\frac{1}{p})}_{\infty,2^{m_2}}(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f))-$$
$$-V^{(0,\gamma_2+\frac{1}{p})}_{\infty,[2^{m_2-1}]}(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f))\|_p.$$

Применяя леммы 3 и 2, будем иметь

$$J_3\ll\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{m_1\frac{1}{p}}2^{-n_2\gamma_2}\|V^{(0,\gamma_2+\frac{1}{p})}_{\infty,2^{n_2+1}}(f-V_{2^{m_1},\infty}(f))\|_p+\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{m_1\frac{1}{p}}2^{-n_2\gamma_2}\|V^{(0,\gamma_2+\frac{1}{p})}_{\infty,2^{n_2+1}}(f-$$
$$-V_{2^{m_1+1},\infty}(f))\|_p\ll2^{n_2\frac{1}{p}}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{m_1\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\tfrac{1}{2^{m_1}},\tfrac{1}{2^{n_2}})_p\ll$$
$$\ll\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}2^{(\nu_1+\nu_2)\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\tfrac{1}{2^{\nu_1}},\tfrac{1}{2^{\nu_2}})_p\ll I(\delta_1,\delta_2).$$

Оценим J_2. Применяя свойства нормы, получим
$$J_2 \le 2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{2^{n_1+1},\infty}(f - V_{\infty,2^{n_2+1}}(f)) - V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f - V_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty +$$
$$+2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f - V_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty = J_2^1 + J_2^2.$$
Применяя лемму 8, будем иметь
$$J_2^1 \ll \|V_{2^{n_1+1},\infty}(f) - V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f) - V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f) + V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f))\|_\infty.$$
Заметим, что $(f - V_{2^{n_1+1},\infty}(f) - V_{\infty,2^{n_2+1}}(f) + V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)) -$
$$-(f - V_{\infty,2^{n_2+1}}(f) - V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f) + V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f)) =$$
$$= -V_{2^{n_1+1},\infty}(f) + V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f) + V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f) - V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f)) =$$
$$= -(V_{2^{n_1+1},\infty}(f) - V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f) - V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f) + V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f))).$$
Используя это равенство и применяя лемму 2, получим
$$J_2^1 \ll \|f - V_{2^{n_1+1},\infty}(f) - V_{\infty,2^{n_2+1}}(f) + V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)\|_\infty +$$
$$+\|f - V_{\infty,2^{n_2+1}}(f) - V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f) + V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f)\|_\infty \ll$$
$$\ll Y_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)_\infty + Y_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f)_\infty \ll Y_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f)_\infty.$$
Применяя лемму 4 и лемму 1 (как при оценке сверху J_4), получим $J_2^1 \ll I(\delta_1,\delta_2)$.
Оценим J_2^2. Применяя лемму 5, получим
$$J_2^2 \ll \sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} 2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(V_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f) - V_{\infty,2^{\nu_2}}(f))\|_\infty =$$
$$= \sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} 2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2+1}}(f) - V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2}}(f)\|_\infty.$$
Так как $V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2+1}}(f) - V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2}}(f) = V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(V_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f) - V_{\infty,2^{\nu_2}}(f))$, то, обозначив $V_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f) - V_{\infty,2^{\nu_2}}(f) = \psi$, рассмотрим функцию $\psi(x_1,x_2)$ для почти всех x_2 как функцию только x_1 и обозначим ее $\psi_1(x_1)$. Оценим $\|V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1(x_1))\|^{(1)}_\infty$.

Так как $f \in L_p^0$, то $V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1(x_1)) = \sum\limits_{\nu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1} c_\nu(x_1)$.

Обозначим
$$(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1) = \sum_{\nu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1} c_\nu(x_1)\nu^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда, используя определение дробной производной, получим

$$(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1) = (V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{(\frac{1}{p})}(\psi_1)\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\right) + (\widetilde{V_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}})^{(\alpha_1)^{(\frac{1}{p})}}(\psi_1)\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\right), \quad (7)$$

где $\widetilde{V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}}(\psi_1)$ есть функция сопряженная к функции $V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)$.

Легко проверить, что

$$V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)=\int\limits_0^{2\pi}(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1,t_1)\overline{K}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(x_1-t_1)dt_1,$$

где $\overline{K}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(t_1)=\sum\limits_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1}\mu^{-\frac{1}{p}}\cos\mu t_1.$

Применяя неравенство Гельдера (лемма 7), получим

$$||V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(f)||^{(1)}_\infty\le||(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1)||^{(1)}_p\cdot||\overline{K}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}||^{(1)}_{p'},\ \text{где}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \qquad (8)$$

Применяя лемму 11, получим

$$||K_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}||_{p'}\ll\left(\sum\limits_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1}(\mu^{-\frac{1}{p}})^{p'}\mu^{p'-2}\right)^{\frac{1}{p'}}=\left(\sum\limits_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1}\mu^{-1}\right)^{\frac{1}{p'}}\ll n_1^{\frac{1}{p'}}.$$

Используя соотношение (7), а затем лемму 10, имеем

$$||(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1)||^{(1)}_p\ll||V^{(\alpha_1+\frac{1}{p})}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)||^{(1)}_p+||\widetilde{V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}}^{(\frac{1}{p})}(\psi_1)||^{(1)}_p\ll||V^{(\alpha_1+\frac{1}{p})}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)||^{(1)}_p.$$

Подставляя эти оценки в неравенство (8), получаем

$$||V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(f)||^{(1)}_\infty\ll||V^{(\alpha_1+\frac{1}{p})}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)||^{(1)}_p n_1^{\frac{1}{p'}}.$$

Тогда получим

$$J_2^2\ll\sum\limits_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{-n_1\alpha_1}\underset{0\le x_2\le 2\pi}{supvrai}\Big|\Big(\int\limits_0^{2\pi}\Big|\big(V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2+1}}(f)-V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2}}(f)\big)(x_1,x_2)\Big|^p dx_1\Big)^{\frac{1}{p}}\cdot n_1^{\frac{1}{p'}}\Big|.$$

Применяя неравенство С.М. Никольского (лемма 9), будем иметь

$$J_2^2\ll\sum\limits_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{\nu_2\frac{1}{p}}2^{-n_1\alpha_1}n_1^{\frac{1}{p'}}\big\|V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2+1}}(f)-V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2}}(f)\big\|_p\ll$$

$$\ll\sum\limits_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{\nu_2\frac{1}{p}}2^{-n_1\alpha_1}n_1^{\frac{1}{p'}}\|V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f-V_{\infty,2^{\nu_2}}(f))\|_p.$$

Далее, применяя леммы 2 и 1, будем иметь

$$J_2^2\ll\sum\limits_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{\nu_2\frac{1}{p}}\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]^{\alpha_1+\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}\Big(f,\frac{1}{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]},\frac{1}{2^{\nu_2}}\Big)_p\int\limits_{\frac{1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}}t_1^{\alpha_1}\frac{dt_1}{t_1}\ll I(\delta_1,\delta_2).$$

Объединяя полученные оценки для J_2^1 и J_2^2, получим $J_2\ll I(\delta_1,\delta_2)$. Аналогично доказывается справедливость неравенства $J_1\ll I(\delta_1,\delta_2)$. Объединяя оценки для J_1,J_2,J_3 и J_4, имеем $J\ll I(\delta_1,\delta_2)$ и тем самым неравенство (3) доказано.

Рассмотрим функцию $f_1(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\sin x_2$. Так как $\omega_{\beta_1,\beta_2}(f_1,\delta_1,\delta_2)_p=\omega_{\beta_1}(\sin x_1,\delta_1)_p\cdot\omega_{\beta_2}(\sin x_2,\delta_2)_p$, то, применяя лемму 12 (б), имеем $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_1,\delta_1,\delta_2)_\infty\asymp$

$\delta_1^{\alpha_1} \cdot \delta_2^{\alpha_2}$,

$\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f_1,\delta_1,\delta_2)_p \asymp \delta_1^{\alpha_1+\frac{1}{p}} \cdot \delta_2^{\gamma_2+\frac{1}{p}}$. Но тогда

$$\int\limits_0^{\delta_2} \int\limits_0^{\delta_1(\log_2 \frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}} (t_1t_2)^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \asymp \delta_1^{\alpha_1}(\log_2 \tfrac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}} \cdot \delta_2^{\gamma_2}.$$

Таким образом, для функции $f_1(x_1,x_2)$ правая и левая части соотношения (2) имеют разные порядки как функции переменной δ_1 при фиксированной δ_2, что и означает, что в соотношении (3) вообще говоря, нельзя знак $\ll$ заменить знаком $\asymp$.

4.2. Доказательство пункта 2 теоремы 1. Рассмотрим функцию $f_1(x_1,x_2) = \sin x_1 \cdot \sin x_2$. Тогда

$$A_1(f_1,\delta_1,\delta_2) \asymp \frac{\delta_1^{\alpha_1} \cdot \delta_2^{\alpha_2}}{\delta_1^{\alpha_1^{(1)}}(\log_2 \frac{2}{\delta_1})^{\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_1 p'}} \cdot \delta_2^{\gamma_2}} \to \infty \text{ для любого фиксированного } \delta_2 \text{ и } \delta_1 \to 0.$$

4.3. Доказательство пункта 3 теоремы 1. Пусть $g_1(x), g_2(x)$ есть функции, определенные в лемме 12.

Рассмотрим функцию $f_2(x_1,x_2) = g_1(x_1)g_2(x_2)$,

Так как $A_2(f_2,\delta_1,\delta_2) = A_1(g_1,\delta_1) \cdot \frac{\omega_{\alpha_2}(g_2,\delta_2)_p^{(1)}}{D(g_2,\delta_2)}$, то применяя лемму 12 (а) и (б), получаем

$$A_2(f_2,\delta_1,\delta_2) \gg \frac{\left(\log_2 \frac{2}{\delta_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\zeta(\delta_1)} \delta_2^{\alpha_2-\gamma_2}.$$

Откуда следует, что при любом фиксированном δ_2 будем иметь

$$A_2(f_2,\delta_1,\delta_2) \to \infty \text{ при } \delta_1 \to 0.$$

4.4. Доказательство пункта 4 теоремы 1. Покажем теперь, что если в соотношении (3) заменить γ_2 на α_2, полученное соотношение не будет верным. Для этого покажем, что для любой функции $f \in L_p^0$, где $1 < p < q = \infty$ не существует такой положительной постоянной C, не зависящей от f, δ_1 и δ_2, что справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2} \int\limits_0^{\delta_1(\log_2 \frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}} (t_1t_2)^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}. \qquad (9)$$

Пусть $g_2(x), g_5(x)$ есть функции, определенные в лемме 12. Рассмотрим функцию $g(x_1,x_2) = g_2(x_1) \cdot g_5(x_2)$. Так как $j_1 = \omega_{\alpha_1,\alpha_2}(g,\delta_1,\delta_2)_\infty = \omega_{\alpha_1}(g_2,\delta_1)_\infty^{(1)} \cdot \omega_{\alpha_2}(g_5,\delta_2)_\infty^{(1)}$, то применяя лемму 12 (б) и (д), получаем, что $j_1 \gg \delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}\left(\log_2 \frac{2}{\delta_2}\right)^{1-\frac{1}{p}}$.

Так как $\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(g,\delta_1,\delta_2)_p = \omega_{\alpha_1+\frac{1}{p}}(g_2,\delta_1)_p^{(1)} \cdot \omega_{\alpha_2+\frac{1}{p}}(g_5,\delta_2)_p^{(1)}$, то применяя лемму 12 (б) и (д), получаем, что

$$j_2 = \int\limits_0^{\delta_2} \int\limits_0^{\delta_1(\log_2 \frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}} (t_1t_2)^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(g,t_1,t_2)_p \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \asymp \delta_1^{\alpha_1}(\log_2 \tfrac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\delta_2^{\alpha_2}\left(\log_2\log_2 \frac{3}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Если бы существовала положительная постоянная C, не зависящая от δ_1 и δ_2 такая, что $j_1 \le C \cdot j_2$, то для любого фиксированного $\delta_1 \in (0,1)$ было бы справедливо неравенство $\left(\log_2 \frac{2}{\delta_2}\right)^{1-\frac{1}{p}} \ll \left(\log_2 \frac{2}{\delta_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\log_2\log_2 \frac{3}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{p}}$. Однако это неравенство несправедливо при $\delta_2 \to 0$. Отсюда следует, что для функции g соотношение (9) не верно, а это и означает, что в неравенстве (3) нельзя заменить γ_2 на α_2.

4.5. Доказательство пункта 5 теоремы 1. Применяя свойства смешанного модуля гладкости, будем иметь

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}=\int\limits_0^{\delta_2}t_2^{-\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_0^{\delta_1}t_1^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}+$$

$$+\int\limits_{\delta_1}^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}t_1^{\alpha_1}t_1^{-(\alpha_1+\frac{1}{p})}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}t_2^{-\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_0^{\delta_1}t_1^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}+\delta_1^{-(\alpha_1+\frac{1}{p})}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\delta_1,t_2)_p\times$$

$$\times\int\limits_{\delta_1}^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}t_1^{\alpha_1}\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Таким образом, верно неравенство (4).

Пусть $g_2(x), g_3(x)$ есть функции, определенные в лемме 12.

Рассмотрим функцию $g(x_1,x_2)=g_3(x_1)\cdot g_2(x_2)$. Тогда

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(g,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1-\frac{1}{p}}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 pp'}}}\delta_2^{\gamma_2},$$

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1-\frac{1}{p}}\left(\log_2\frac{2}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{p'}}\delta_2^{\gamma_2}.$$

Таким образом, для функции $g(x_1,x_2)$ правая и левая части соотношения (4) имеют разные порядки как функции переменных δ_1 и δ_2, что и означает, что в соотношении (4) вообще говоря, нельзя знак $\ll$ заменить знаком $\asymp$.

Рассмотрим функцию $f_3(x_1,x_2)=f_1(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\sin x_2$. Тогда

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\cdot\delta_2^{\gamma_2},$$

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\cdot\delta_2^{\gamma_2}.$$

Для этой функции в соотношении (4) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

4.6. Доказательство пункта 6 теоремы 1.

а. Применяя к неравенству (3) неравенство (4), получим утверждение б).

б. Покажем, что неравенство (3) более точное, чем неравенство (1) утверждения б).

Пусть $g_2(x), g_4(x)$ есть функции, определенные в лемме 12.

Рассмотрим функцию $f_4(x_1,x_2)=g_4(x_1)g_2(x_2)$.

Так как $\omega_{\beta_1,\beta_2}(f_4,\delta_1,\delta_2)_p=\omega_{\beta_1}(g_4,\delta_1)_p(1)\cdot\omega_{\beta_2}(g_2,\delta_2)_p^{(1)}$, то, применяя лемму 12 (г), для левого выражения в (4) получим

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f_4,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\frac{1}{\left(\log_2\frac{2}{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\delta_2^{\gamma_2},$$

а для правого выражения в (4) получим

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f_4,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}=\infty.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

6.1. Доказательство пункта 1 теоремы 3. Применяя пункт 1 теоремы 1, будем иметь

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}} (t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f^{(\rho_1,\rho_2)},t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Для каждого $\delta_i\in(0,1)$ существует целое неотрицательное число n_i такое, что $\frac{1}{2^{n_i+1}}\le\delta_i<\frac{1}{2^{n_i}}, i=1,2.$ Найдется натуральное число M_1 такое, что $2^{M_1-1}\le\big[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 q}}}\big]<2^{M_1}.$ Тогда

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{2^{-n_2}}\int\limits_0^{2^{-M_1}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f^{(\rho_1,\rho_2)},t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ll$$

$$\ll\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\sum_{m_1=M_1}^{\infty}2^{\frac{m_1}{p}}2^{\frac{m_2}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f^{(\rho_1,\rho_2)},\tfrac{1}{2^{m_1}},\tfrac{1}{2^{m_2}})_p.$$

Применяя лемму 1 (7), получим $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll$

$$\ll\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\sum_{m_1=M_1}^{\infty}2^{\frac{m_1}{p}}2^{\frac{m_2}{p}}\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty}\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}2^{\rho_1\nu_1}2^{\rho_2\nu_2}\omega_{\alpha_1+\rho_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\rho_2+\frac{1}{p}}(f,\tfrac{1}{2^{\nu_1}},\tfrac{1}{2^{\nu_2}})_p\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}} t_1^{-\rho_1-\frac{1}{p}}t_2^{-\rho_2-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\rho_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\rho_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2},$$ что и требовалось доказать.

6.2. Доказательство пункта 2 теоремы 3. Доказательство пункта 2 теоремы 3 аналогично доказательству пункта 1 теоремы 3.

7. ДОПОЛНЕНИЯ

1. Докажем, что неравенства

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\equiv B_1(f,\delta_1,\delta_2)\qquad(10)$$

и

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\equiv B_2(f,\delta_1,\delta_2)\qquad(11)$$

не сравнимы при $\alpha_1>\gamma_1>\frac{\alpha_1}{2}$.

Пусть $g_2(x),g_6(x)$ есть функции, определенные в лемме 12. Рассмотрим функцию $F_1(x_1,x_2)=g_2(x_1)g_2(x_2)$.

Так как $B_1(F_1,\delta_1,\delta_2)=D(g_2,\delta_1)D(g_2,\delta_2)$, $B_2(F_1,\delta_1,\delta_2)=A_1(g_2,\delta_1)D(g_2,\delta_2)$, то, применяя лемму 12 (б) при $\gamma_1<\alpha_1(i=1,2)$, будем иметь

$$\frac{B_1(F_1,\delta_1,\delta_2)}{B_2(F_1,\delta_1,\delta_2)}\asymp\frac{1}{\delta_1^{\alpha_1-\gamma_1}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{1-\frac{1}{p}}}\to\infty\qquad(12)$$

для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1\to0$.

Теперь рассмотрим функцию $F_2(x_1,x_2)=g_6(x_1)g_2(x_2)$.

Так как $B_1(F_2,\delta_1,\delta_2)=D_1(g_6,\delta_1)D(g_2,\delta_2)$, $B_2(F_2,\delta_1,\delta_2)=A_3(g_6,\delta_1)D(g_2,\delta_2)$, то при $\alpha_1>\gamma_1>\frac{\alpha_1}{2}$ имеем

$$\frac{B_2(F_2,\delta_1,\delta_2)}{B_1(F_2,\delta_1,\delta_2)} \asymp \left(\log_2\frac{2}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2p'}} \to \infty \qquad (13)$$

для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1 \to 0$.

Из соотношений (12) и (13) следует, что правые части неравенств (10) и (11) не сравнимы. В каждом конкретном случае более точные результаты могут быть получены иногда при применении теоремы 1, а иногда при применении утверждения а).

3. Аналогично рассуждая, можно показать, что неравенства (10) и

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}} \int\limits_0^{\delta_1} (t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \qquad (14)$$

не сравнимы при $\alpha_2 > \gamma_2 > \frac{\alpha_2}{2}$.

В каждом конкретном случае более точные результаты могут быть получены иногда при применении теоремы 2, а иногда при применении утверждения а).

3. Аналогично рассуждая, можно показать, что неравенства (11) и (14) не сравнимы при $\alpha_i > \gamma_i > \frac{\alpha_i}{2}(i=1,2)$.

В каждом конкретном случае более точные результаты могут быть получены иногда при применении теоремы 1, а иногда при применении теоремы 2.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье изучена взаимосвязь между смешанными модулями гладкости дробного порядка в метриках L_p и L_∞, где $1<p<\infty$. В теоремах 1 и 2 доказаны оценки сверху (3) и (5) для смешанного модуля гладкости $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_\infty$, выраженные через смешанные модули гладкости $\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\delta_1,\delta_2)_p$ и $\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,\delta_1,\delta_2)_p$ соответственно. Показано, что эти оценки более точные, чем интегральные оценки (1) и (2) для смешанного модуля гладкости $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_\infty$, полученные ранее в работах [2]-[6].

Доказана неулучшаемость интегральной оценки (3) в том смысле, что если заменить в неравенстве (3) α_1 на $\alpha_1^{(1)} > \alpha_1$, то существует функция $f_1(x_1,x_2) \in L_p^0$ такая, что соответствующее неравенство уже неверно. Кроме того, оно неулучшаемо в том смысле, что нельзя заменить входящий в интеграл $(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{1-\frac{1}{p}}$ на другую положительную слабо колеблющуюся функцию $\xi(\delta_1) = \bar{\bar{o}}\big(\log_2\frac{2}{\delta_1}\big)^{1-\frac{1}{p}}$. Далее, показано, что нельзя улучшить оценку (3), заменив в ней $\gamma_2 < \alpha_2$ на α_2. В таком же смысле неулучшаема оценка (5). Исследована взаимосвязь ранее полученной оценки (10) с вновь полученными оценками (3) и (5), а также взаимосвязь между (3) и (5). А именно, доказано, что неравенства (3), (5) и (10) в общем случае имеют самостоятельное значение и не вытекают друг из друга.

В теореме 3 получены интегральные оценки сверху для смешанного модуля гладкости $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2)_\infty$, где $f^{(\rho_1,\rho_2)}-$ производная в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)\in L_p^0$ порядка $\rho_1 \geq 0$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2 \geq 0$ по переменной x_2.

Список литературы

1 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. -Москва: Наука, 1975.

2 Simonov B., Tikhonov S. Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness// Journal of Approx. Theory. -2010. -Vol. 162. -Is. 9. -P. 1654-1684.

3 Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю. Соотношениях между смешанными модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского// Тр. МИАН. -2010. 269. С. 204-214.

4 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Модули гладкости дробных порядков, Часть II. -Москва: Попечительский Совет механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, 2015.

5 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Дробные модули гладкости. -Москва: МАКС Пресс, 2016.

6 Потапов М.К., Симонов Б.В. Связь между смешанными модулями гладкости в метриках L_p и L_∞ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. -2017. 3, 21-35.

7 Domingues O., Tikhonov S. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities, http://arXiv: 1909.12818v2 [math.FA] 22 Nov 2019.
8 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. -Москва: Наука, 1977.
9 Унинский А.П. Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени// Материалы Всесоюзного симпозиума по теоремам вложения, Баку. -1966. -С. 212-218.
10 Tikhonov S. Trigonometric series of Nikol'skii classes// Acta Math. Hungar. -2007. -Vol. 114. -No 1-2. –P. 61-78.

М.К. Потапов [1] , Б.В. Симонов [2]

[1] *М.В. Ломоносов Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей*
[2] *Волгоград мемлекеттік техникалық университеті, Волгоград, Ресей*

L_p ЖӘНЕ L_∞ МЕТРИКАЛАРЫНДАҒЫ АРАЛАС ТЕГІСТІК МОДУЛЬДЕРІ АРАСЫНДАҒЫ БАЙЛАНЫСТАРДЫ НАҚТЫЛАЙТЫН ТЕҢСІЗДІКТЕР

Аннотация: L_q кеңістігінде жататын функциялардың тегістік модульдерін олардың L_p -дағы тегістік модульдері тұрғысынан бағалау проблемасы белгілі. Тегістік модульдерін бағалаудың бірінші кезеңі Липшиц кластарынан алынған функциялардың қасиеттерін зерттеу және Титчмарш, Харди, Литтвуд, Никольский жұмыстарындағы олардың сәйкес енгізулерін алу болып табылады.

Липшиц кеңістіктері үшін классикалық Харди-Литтвуд кірістіруі бір айнымалы функцияның үзіліссіздік модулі үшін Ульянов теңсізігінің қолдану нәтижесінде алуға болады. Ульянов жұмыстарында оң бүтін ретті тегістік модульдері қарастырылады. Бөлшек ретті тегістік модульдерін енгізу Потапов, Симонов, Тихонов еңбектерінде Ульянов теңсіздігін күшейтуге мүмкіндік берді. Аралас тегістік модульдеріне бағалаулар ала отырып, кейінрек, сол авторлар Ульянов теңсіздігін екі айнымалы функция жағдайына жалпылады. Бұл теңсіздіктердің дәлдігі $1 < p < q < \infty$ және $1 = p < q = \infty$ жағдайларында дәлелденді.

Мақалада екі айнымалы функциялар үшін бөлшек ретті аралас тегістік модульдері зерттеледі. $1 < p < q = \infty$ жағдайында L_p және L_q метрикаларындағы аралас тегістік модульдері арасындағы бұрын белгілі Ульянов типті теңсіздіктерін нақтылайтын тңсіздіктер алынды. Алынған бағалаулардың нақтылығы зерттелді. Осы және бұрын белгілі болған бағалаулардың өзара байланысы зерттелді.

Түйін сөздер: теңсіздік; метрика; бөлшек ретті аралас тегістік модульдері

M.K. Potapov [1] , B.V. Simonov [2]

[1] *Moscow State University, Moscow, Russia*
[2] *Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia*

INEQUALITIES REFINING RELATIONSHIPS BETWEEN MIXED MODULES OF SMOOTHNESS IN METRICS OF L_p AND L_∞

Abstract: The problem of estimating the moduli of smoothness of functions from Lq in terms of their moduli of smoothness from Lp is well known. The first stage in the estimation of moduli of smoothness was the study of the properties of functions from the Lipschitz classes and obtaining the corresponding embeddings in the works of Titchmarsh, Hardy, Littlewood, Nikol'skii.

The classical Hardy-Littlewood embedding for Lipschitz spaces can be obtained as a consequence of the Ulyanov's inequality for the moduli of continuity of a function of one variable. In the works of Ulyanov, the modulus of smoothness of natural order was considered. The introduction of fractional moduli of smoothness made it possible in the works of Potapov, Simonov, Tikhonov to strengthen the Ulyanov's inequality. Later, the same authors were able to generalize Ulyanov's inequality to functions of two variables, obtaining estimates for mixed moduli of smoothness. The sharpness of these inequalities was proved in the case when $1 < p < q < \infty$ or $1 = p < q = \infty$.

In this article, we study mixed moduli of smoothness of fractional orders of a function of two variables. Inequalities are obtained that refine the previously known estimates of the Ulyanov type inequalities between mixed moduli of smoothness in the metrics Lp and Lq for values $1 < p < q = \infty$. The accuracy of the obtained estimates is investigated. The relationship between these and previously known estimates has been studied.

Keywords: inequality; metrics; mixed fractional moduli of smoothness

References

1 Besov O.V., Ilyin V.P., Nikolsky S.M. Integral'nye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya[Integral representations of functions and embedding theorems]. (Science, Moscow, 1975).
2 Simonov B., Tikhonov S. Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness, Journal of Approx. Theory, 162(9), 1654-1684(2010).
3 Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S. Yu. Sootnosheniyah mezhdu smeshannymi modulyami gladkosti i teoremy vlozheniya klassov Nikol'skogo[Relations between mixed moduli of smoothness and class embedding theorems Nikolsky], Tr. MIAN. 269, 204-214(2010).
4 Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S.Yu. Moduli gladkosti drobnyh poryadkov, CHast' II [Modules of smoothness of fractional orders, Part II.] (Board of Trustees Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University Lomonosov, Moscow, 2015).

5 Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S.Yu. Drobnye moduli gladkosti[Fractional moduli of smoothness]. (MAKS Press, Moscow, 2016).
6 Potapov M.K., Simonov B.V. Svyaz' mezhdu smeshannymi modulyami gladkosti v metrikah L_p i L_∞ [Relationship between mixed moduli of smoothness in the metrics L_p and L_∞], Vestn. Moscow un-that. Ser. 1. Mat., Fur. 2017. 3, 21-35.
7 Domingues O., Tikhonov S. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities, http://arXiv: 1909.12818v2 [math.FA] 22 Nov 2019.
8 Nikolsky S.M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya [Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. (Science, Moscow, 1977).
9 Uninskiy A.P. Neravenstva v smeshannoj norme dlya trigonometricheskih polinomov i celyh funkcij konechnoj stepeni[Inequalities in the mixed norm for trigonometric polynomials and entire functions of finite degree], Materialy Vsesoyuznogo simpoziuma po teoremam vlozheniya [Proceedings of the All-Union Symposium on Embedding Theorems], Baku. 1966. WITH. 212-218.
10 Tikhonov S. Trigonometric series of Nikol'skii classes, Acta Math. Hungar., 114(1-2), 61-78(2007).

Сведения об авторах:

Потапов М.К. – профессор, кафедра теории функций и функционального анализа, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова, Воробьевы Горы, д. 1, 119991, г. Москва, Россия.

Симонов Б.В. . – ***автор для корреспонденции***, доцент, кафедра прикладной математики, факультет технологии пищевых производств, Волгоградский государственный технический университет, пр. Ленина, 28, 400005, г. Волгоград, Россия.

Potapov M.K. – Professor, Department of theory of functions and functional analysis, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Vorobyevy Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russia.

Simonov B.V. – ***corresponding author***, Docent, Applied Mathematics, Food Engineering Faculty, Volgograd State Technical University, Lenin avenue, 28, Volgograd, 400005, Russia.

Поступила в редакцию 01.03.2021

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2021, том 134, №1, 35-41 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: **27.43**

K.A. Afonin

Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow, Russia
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
(E-mail: wert8394@gmail.com)

A GENERALIZATION OF THE BLACKWELL–RYLL-NARDZEWSKI MEASURABLE SELECTION THEOREM

Abstract: One of the main forms of the measurable selection theorem is connected with the existence of the graph of a measurable mapping in a given measurable set S in the product of two measurable spaces X and Y. Such a graph enables one to pick a point in the section S_x for each x in X such that the obtained mapping will be measurable. The indicated selection is called a measurable selection of the multi-valued mapping associating to the point x the section S_x, which is a set in Y.

The classical theorem of Blackwell and Ryll-Nardzewski states that a Borel set S in the product of two complete separable metric spaces contains the graph of a Borel mapping (hence admits a Borel selection) provided that there is a transition probability on this product with positive measures for all sections of S.

The main result of this paper gives a generalization to the case where only one of the two spaces is complete separable and the other one is a general measurable space whose points parameterize a family of Borel probability measures on the first space such that the sections of the given set S in the product have positive measures.

Keywords: Measurable selection theorem; transition probability; Blackwell–Ryll-Nardzewski theorem

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-678X-2020-134-1-35-41

1. INTRODUCTION

In the vast literature on measurable selection theorems, it is customary to separate results for small sections and large sections. A typical representative of the latter category belongs to Blackwell and Ryll-Nardzewski and states that a Borel set S in the product of two complete separable metric spaces contains the graph of a Borel mapping (hence admits a Borel selection) provided that there is a transition probability on this product with positive measures for all sections of S. This important result does not extend to arbitrary spaces. The main result of this paper gives an extension to the case where only one of the two spaces is complete separable and the other one is a general measurable space whose points parameterize a family of Borel probability measures on the first space such that the sections of the given set S in the product have positive measures.

The following measurable choice theorem was established by Blackwell and Ryll-Nardzewski in [1] (see also [3, Theorem 5.8.8]).

Theorem 1 (Blackwell and Ryll-Nardzewski)**.** *Let X, Y be Polish spaces, let $\mathcal{A}$ be a countably generated sub σ-algebra of $\mathcal{B}(X)$, and let P be a transition probability on $X \times Y$ such that for every $B \in \mathcal{B}$ the function*

$$x \mapsto P(x, B)$$

is $\mathcal{A}$-measurable. Suppose that a set $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(Y)$ is such that $P(x, S_x) > 0$ for all $x \in X$. Then, there is an $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$-measurable mapping f whose graph is contained in S, i.e., $(x, f(x)) \in S$ for all $x \in X$.

In this paper, we extend this theorem to the case of an arbitrary measurable space $(X, \mathcal{A})$. We obtain this result as a consequence of an interesting generalization of the Kuratowski–Ryll-Nardzewski measurable selection theorem. Let us give the classical formulation (see, for example, [2, Theorem 6.9.3] or [3, Theorem 5.2.1]).

Theorem 2 (The Kuratowski–Ryll-Nardzewski measurable selection theorem)**.** *Let X be a Polish space, let $(\Omega, \mathcal{B})$ be a measurable space, and let F be a multifunction on Ω taking values in the set of nonempty closed subsets of X. Suppose that for every open set $U \subset X$ we have*

$$\{\omega \mid F(\omega) \cap U \neq \varnothing\} \in \mathcal{B}.$$

Then F has a selection that is $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(X))$-measurable, which means that there is a $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(X))$-measurable function $f\colon \Omega \to X$ such that $f(\omega) \in F(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$.

2. MAIN RESULTS

The formulation of our measurable choice theorem uses the concept of a σ-ideal. Recall this definition.

Definition 1. A σ-ideal on a nonempty set E is a nonempty family $\mathcal{J}$ of subsets of E such that

I$_1$ $\varnothing \in J$,

I$_2$ whenever $A \in \mathcal{J}$, $2^A \subset \mathcal{J}$,

I$_3$ $\mathcal{J}$ is closed under countable unions.

The simplest example of a σ-ideal is the set $\{\varnothing\}$. Another example will be given below. It will be a key to our generalization of the Blackwell–Ryll-Nardzewski selection theorem.

Theorem 3. *Let X be a complete separable metric space and let $(\Omega, \mathcal{B})$ be a measurable space. Assume that for each $\omega \in \Omega$ there is a σ-ideal $\mathcal{J}_\omega$ of subsets of X. Suppose that a mapping $F\colon \Omega \to 2^X$ satisfies the following conditions:*

(i) *for each $\omega \in \Omega$ the set $F(\omega)$ is closed.*

(ii) *$F(\omega) \notin \mathcal{J}_\omega$ for each $\omega \in \Omega$.*

(iii) *For every open set $V \subset X$, we have*

$$\mathbf{F}(V) := \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap V \notin \mathcal{J}_\omega\} \in \mathcal{B}.$$

Then F has a $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(X))$-measurable selection $f\colon \Omega \to X,\ f(\omega) \in F(\omega)$.

Proof. Let $X_0 = \{x_n\}$ be a countable everywhere dense set in X. Consider a sequence of $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(X))$-measurable mappings $f_k\colon \Omega \to X_0,\ k = 0, 1, \ldots$ such that

$$f_k^{-1}(x_i) \subset \mathbf{F}(B_{2^{-k}}(x_i)) \quad \text{for all} \;\; i, k, \tag{1}$$

$$\operatorname{dist}(f_k(\omega), f_{k+1}(\omega)) < 2^{-k+1} \quad \text{for all} \;\; \omega, k. \tag{2}$$

We prove that if such a sequence exists, then it converges pointwise to a measurable selection. Indeed, it follows from condition (1) that for arbitrary $i \in \mathbb{N}$ and $\omega \in f_k^{-1}(x_i)$ the set $F(\omega) \cap B_{2^{-k}}(x_i)$ is not empty (by **I**$_1$), therefore,

$$\operatorname{dist}(f_k(\omega), F(\omega)) < 2^{-k}.$$

Moreover, condition (2) implies that the sequence $(f_k(\omega))$ is Cauchy; its limit will be denoted by $f(\omega)$. It is clear that $f(\omega) \in F(\omega)$ and f is measurable with respect to the pair $\mathcal{B}$ and $\mathcal{B}(X)$.

Let prove the existence of such a sequence of mappings. We construct these mappings inductively.

First we construct f_0. Pick $\omega \in \Omega$. Condition (ii) of the theorem and condition **I**$_3$ from the definition imply that there is a natural number n such that

$$F(\omega) \cap B_1(x_n) \notin \mathcal{J}_\omega,$$

where $B_r(x)$ is the open ball of radius r centered at x. Denote by $n(\omega)$ the minimal number with this property. We define a mapping f_0 as follows: $f_0(\omega) = x_{n(\omega)}$. Then f_0 is $\mathcal{B}$-measurable, since

$$f_0^{-1}(x_n) = \mathbf{F}(B_1(x_n)) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathbf{F}(B_1(x_i)) \in \mathcal{B}.$$

Moreover, it is clear that f_0 satisfies (1). Suppose that f_k is already constructed. We find f_{k+1}. Let

$$E_i = f_k^{-1}(B_{2^{-k+1}}(x_i)) \cap \mathbf{F}(B_{2^{-k-1}}(x_i)).$$

We prove that

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Indeed, take $\omega \in \Omega$ and $i \in \mathbb{N}$ such that $\omega \in f_k^{-1}(x_i)$. Then by property (1) we have

$$F(\omega) \cap B_{2^{-k}}(x_i) \notin \mathcal{J}_\omega.$$

Since the family $\mathcal{J}_\omega$ is a σ-ideal, by $\mathbf{I}_3$ there exists $l \in \mathbb{N}$ such that

$$F(\omega) \cap B_{2^{-k}}(x_i) \cap B_{2^{-k-1}}(x_l) \notin \mathcal{J}_\omega.$$

Then by $\mathbf{I}_2$ we have

$$F(\omega) \cap B_{2^{-k-1}}(x_l) \notin \mathcal{J}_\omega,$$

or, in other words, $\omega \in \mathbf{F}(B_{2^{-k-1}}(x_l))$. Moreover, since

$$F(\omega) \cap B_{2^{-k}}(x_i) \cap B_{2^{-k-1}}(x_l) \neq \varnothing$$

by $\mathbf{I}_1$ and

$$\operatorname{dist}(x_l, f_k(\omega)) = \operatorname{dist}(x_l, x_i) < 2^{-k} + 2^{-k-1} < 2^{-k+1},$$

we have $\omega \in f_k^{-1}(B_{2^{-k+1}}(x_l))$. Thus, $\omega \in E_l$. Since $E_i \in \mathcal{B}$, there exist sets $E_i' \subset E_i$, $E_i' \in \mathcal{B}$ such that

$$E_i' \cap E_j' = \varnothing \quad \forall\, i \neq j, \quad \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i'.$$

Now we put $f_{k+1}|_{E_i'} = x_i$. It is clear that f_{k+1} is $\mathcal{B}$-measurable. We check that the mapping f_{k+1} satisfies conditions (1) and (2). Condition (1) is fulfilled, since

$$f_{k+1}^{-1}(x_i) = E_i' \subset E_i \subset \mathbf{F}(B_{2^{-k-1}}(x_i)).$$

Finally, condition (2) follows from the fact that for every $i \in \mathbb{N}$ the inclusion

$$E_i' \subset f_k^{-1}(B_{2^{-k+1}}(x_i))$$

is true.

Theorem 3 is proved.

Thus, it is shown that for the existence of a measurable selection for a mapping it suffices that conditions (i)–(iii) of Theorem 3 be satisfied for a certain family of σ-ideals given at each point of this measurable space. Note also that the Kuratowski–Ryll-Nardzewski theorem follows from Theorem 3 by taking the family of σ-ideals $\mathcal{J}_\omega = \{\varnothing\}$.

As a useful application of Theorem 3, we present a generalization of the Blackwell–Ryll-Nardzewski theorem for an arbitrary measurable space.

Let $(\Omega, \mathcal{B})$ be a measurable space and let X be a complete separable metric space. Consider a family μ^ω of Borel probability measures on X such that for each set $B \in \mathcal{B}(X)$ the function

$$\omega \mapsto \mu^\omega(B)$$

is $\mathcal{B}$-measurable. It is clear that the family of all μ^ω-null sets is a σ-ideal. We will use this fact in the proof below to define a σ-ideal at each point of Ω and find a measurable selection.

Theorem 4. *Let X and $(\Omega, \mathcal{B})$ be as in Theorem 3. Suppose that we are given a set $S \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$.*

(i) *For every $\theta \in [0,1)$, there exists a set $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$ such that $E \subset S$, all sections E_ω are closed and*

$$\mu^\omega(E_\omega) \geqslant \theta \mu^\omega(S_\omega) \quad \text{for all } \omega \in \Omega.$$

(ii) *If $\mu^\omega(S_\omega) > 0$ for all $\omega \in \Omega$, then there is a $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(X))$-measurable mapping $f\colon \Omega \to X$ whose graph is contained in S.*

Proof. We prove (i) following the reasoning of Blackwell and Ryll-Nardzewski from their original paper with some modifications and additional explanations. The class $\mathcal{E}$ of all sets in $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$ for which the theorem holds is closed under finite unions. Indeed, if $S^k \in \mathcal{E}$, $k = 1, \ldots, n$, then there is a collection of sets $E^k \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$ with closed sections such that $E^k \subset S^k$ and for all $\omega \in \Omega$ we have

$$\mu^\omega(S^k_\omega \setminus E^k_\omega) \leqslant \frac{1-\theta}{n} \mu^\omega(S^k_\omega), \quad k = 1, ..., n.$$

Then the set

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E^k$$

has closed sections, lies in $S = \bigcup_{k=1}^n S^k$ and belongs to $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$. In addition,

$$\mu^\omega(S_\omega \setminus E_\omega) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu^\omega(S^k_\omega \setminus E^k_\omega) \leqslant \frac{1-\theta}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu^\omega(S^k_\omega) \leqslant (1-\theta)\mu^\omega(S_\omega).$$

We now show that $\mathcal{E}$ is closed under countable intersections and countable unions of increasing sets. Let $S^n \in \mathcal{E}$, $S = \bigcap_n S^n$ and $\theta \in (0,1)$. Since the function

$$h\colon \omega \mapsto \mu^\omega(S_\omega)$$

is $\mathcal{B}$-measurable, we have

$$\Omega_k = \{(k+1)^{-1} \leqslant h < k^{-1}\} \in \mathcal{B}.$$

If $h(\omega) = 1$ for all $\omega \in \Omega$, then $\Omega_k = \varnothing$ for all k. In this case, we pick sets $E^n \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$ with closed sections such that $E^n \subset S^n$ and

$$\mu^\omega(S^n_\omega \setminus E^n_\omega) \leqslant \frac{1-\theta}{2^n} \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

Let $E = \bigcap_n E_n$. Then all sections E_ω are closed and for all ω we have

$$\mu^\omega(S_\omega \setminus E_\omega) \leqslant \sum_n \mu^\omega(S^n_\omega \setminus E^n_\omega) \leqslant 1-\theta.$$

If $\Omega_k \neq \varnothing$ for some k, then the sets Ω_k form a partition of Ω. For each k there is a set $E^{nk} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$ with closed sections such that $E^{nk} \subset S^n$ and

$$\mu^\omega(S^n_\omega \setminus E^{nk}_\omega) \leqslant \frac{1-\theta}{(k+1)2^n} \mu^\omega(S^n_\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

Now we define the set

$$E^n = \bigcup_k (E^{nk} \cap (\Omega_k \times X)).$$

It is clear that $E^n \subset S^n$ and $E^n \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$. Moreover, if $\omega \in \Omega_k$, then $E^n_\omega = E^{nk}_\omega$, so all sections of E^n are closed. In addition,

$$\mu^\omega(S^n_\omega \setminus E^n_\omega) \leqslant \frac{1-\theta}{(k+1)2^n} \mu^\omega(S^n_\omega) \leqslant \frac{1-\theta}{(k+1)2^n} \quad \forall\, \omega \in \Omega_k.$$

Let $E = \bigcap_n E^n$. Then $E \subset S$ has closed sections and for each k and $\omega \in \Omega_k$ we have

$$\mu^\omega(S_\omega \setminus E^n_\omega) \leqslant \mu^\omega(S^n_\omega \setminus E^n_\omega) \leqslant \frac{1-\theta}{(k+1)2^n} \leqslant \frac{1-\theta}{2^n} \mu^\omega(S_\omega).$$

It follows that
$$\mu^\omega(S_\omega \setminus E_\omega) \leqslant \sum_n \mu^\omega(S_\omega \setminus E^n_\omega) \leqslant (1-\theta)\mu^\omega(S_\omega).$$
Let $S^n \in \mathcal{E}$ be increasing sets. We find $E^n \subset S^n$ such that E^n has closed sections, $E^n \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$ and
$$\mu^\omega(E^n_\omega) \geqslant \sqrt{\theta}\mu^\omega(S^n_\omega) \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$
We can assume that the sets E^n are increasing. This is easily seen from the fact that the sequence of sets
$$\hat{E}^n = \bigcup_{k=1}^n E^n, \quad n \in \mathbb{N}$$
satisfies the same conditions as E_n. Consider the sets
$$C_n = \{\omega \in \Omega \mid \mu^\omega(E^n_\omega) \geqslant \theta\mu^\omega(S_\omega)\},$$
where $S = \bigcup_n S^n$. We have $C_n \in \mathcal{B}$, $C_n \subset C_{n+1}$ and
$$\Omega = \bigcup_n C_n.$$
Now we define the set
$$E = \bigcup_n (E_n \cap (C_n \setminus C_{n-1} \times X)),$$
where $C_0 = \varnothing$. It is easy to see that $E \subset S$, $E \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$, and E has closed sections, since if $\omega \in C_n \setminus C_{n-1}$, then $E_\omega = E^n_\omega$.

Since the class $\mathcal{E}$ admits finite unions, countable unions of increasing sets and countable intersections, the family of sets
$$\mathcal{F} = \{S \in \mathcal{E} \mid (\Omega \times X) \setminus S \in \mathcal{E}\}$$
is a σ-algebra(see [2, Theorem 1.9.3]). To complete the proof, it remains to show that the set of products of the form
$$\{B \times F \mid B \in \mathcal{B},\, F \text{ is closed in } X\}$$
lies in $\mathcal{F}$. If $S = B \times F$, where $B \in \mathcal{B}$ and F is closed, we can take $E = S$, so $S \in \mathcal{E}$. But
$$(\Omega \times X) \setminus S = \Omega \times (X \setminus F) \cup (\Omega \setminus B) \times F,$$
$(\Omega \setminus B) \times F \in \mathcal{E}$ and $\Omega \times (X \setminus F) \in \mathcal{E}$, since the open set $X \setminus F$ is a countable union of increasing closed sets.

Let us proceed to the proof of (ii). According to the first part of the theorem, in $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(X)$ there is a set $E \subset S$ with closed sections E_ω and $\mu^\omega(E_\omega) > 0$ for all $\omega \in \Omega$. Consider the mapping
$$F\colon \omega \mapsto E_\omega, \quad F\colon \Omega \to 2^X.$$
For a σ-ideal $\mathcal{J}_\omega$ of subsets of X we take the ideal of all μ^ω-null sets. Then F satisfies conditions (i)–(iii) of Theorem 3. Indeed, conditions (i) and (ii) are satisfied by our choice of E. Let us check condition (iii). Take an open set $V \subset X$. Then, in the notation of Theorem 3, we have
$$\mathbf{F}(V) = \{\omega \in \Omega \mid \mu^\omega(E_\omega \cap V) > 0\} = \{\omega \in \Omega \mid \mu^\omega((E \cap \Omega \times V)_\omega) > 0\}.$$
But the function $\omega \mapsto \mu^\omega((E \cap \Omega \times V)_\omega)$ is $\mathcal{B}$-measurable, hence $\mathbf{F} \in \mathcal{B}$. By Theorem 1, there is a $(\mathcal{B}, \mathcal{B}(X))$-measurable mapping f such that $f(\omega) \in E_\omega \subset S_\omega$.

Let us give a useful application of the last theorem. Let X be a Polish space and let $(Z, \mathcal{E})$ be a measurable space. We are interested in necessary and sufficient conditions under which, for a given $(\mathcal{B}(X), \mathcal{E})$-measurable function $f\colon X \to Z$, there exists a function Q with the following properties:

(i) $Q(x, \cdot)$ is a probability measure on $\mathcal{B}(X)$ for each $x \in X$,

(ii) $Q(\cdot, B)$ is an $\mathcal{A}$-measurable function on X for each $B \in \mathcal{B}(X)$, where $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{E})$,

(iii) $Q(x, A) = 1$ for all $x \in A$ and $A \in \mathcal{A}$.

Corollary 1. Let X, f, $\mathcal{A}$, $(Z,\mathcal{E})$ be as above. Suppose that

$$\Delta_Z := \{(z,z) \mid z \in Z\} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}.$$

Then a function Q with properties (i)-(iii) exists if and only if there is an $(\mathcal{A},\mathcal{B}(X))$-measurable mapping $g\colon X \to X$ such that $f \circ g = f$.

Proof. Suppose that $g\colon X \to X$ is an $(\mathcal{A},\mathcal{B}(X))$-measurable mapping such that $f = f \circ g$. Set

$$Q(x,B) = \chi_{g^{-1}(B)}(x), \quad B \in \mathcal{B}(X),\, x \in X,$$

where χ_A is the indicator function of the set A. It is readily verified that Q satisfies (i)–(iii).

Conversely, let us suppose that a function Q with properties (i)–(iii) exists. Set

$$S = \{(x,y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}.$$

Then $S \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$, since $\Delta_Z \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, see [2, Theorem 6.4.4]. Moreover, for all x we have $Q(x,S_x) = 1$. Applying Theorem 4 to the measurable space $(X,\mathcal{A})$, we find an $(\mathcal{A},\mathcal{B}(X))$-measurable mapping $g\colon X \to X$ such that for all points $x \in X$ we have $(x,g(x)) \in S$, i.e., $f(g(x)) = f(x)$ for all $x \in X$.

3. CONCLUSION

The classical Blackwell–Ryll-Nardzewski measurable selection theorem for Borel sets in the product of two complete separable metric spaces remains valid if only one of the two spaces is complete separable and the other one is a general measurable space whose points parameterize a family of Borel probability measures on the first space such that the sections of the given set in the product have positive measures.

References

1 Blackwell D., Ryll-Nardzewski C. Non-existence of everywhere proper conditional distributions// Ann. Math. Statist. -1963. -Vol. 34(1). -P. 223-225.
2 Bogachev V. I. Measure theory. V. 1, 2. -Berlin: Springer, 2007.
3 Srivastava S.M. A Course on Borel Sets. -Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

К.А. Афонин

М.В. Ломоносов Мәскеу мемлекеттік университетінің механика-математика факультеті, Мәскеу, Ресей
Фундаменталды және қолданбалы математика Мәскеу математика орталығы, Мәскеу, Ресей

ӨЛШЕНЕТІН ТАҢДАУ ТУРАЛЫ БЛЭКУЭЛЛ – РЫЛ-НАРДЖЕВСКИЙ ТЕОРЕМАСЫНЫҢ ЖАЛПЫЛАНУЫ

Аннотация: Өлшенетін таңдау туралы теоремалардың негізгі формаларының бірі X және Y екі өлшенетін кеңістіктің көбейтіндісіндегі S өлшемді жиынында берілген өлшемді бейнелеуінің графигінің бар болуымен байланысты. Мұндай график X-тен алынған әрбір x бойынша жүргізілген S_x қимасынан нәтижесінде пайда болған бейнелеу өлшемді болатындай нүкте таңдап алуға мүмкіндік береді. Бұл таңдау әр x нүктесіне $Y-$ тің жиыны болатын S_x қимасын сәйкес қоятын көпмәнді бейнелеудің өлшемді селекциясы деп аталады.

Блэквелл мен Рыл-Нархевскийдің классикалық теоремасы, екі толық сепарабелді метрикалық кеңістіктердің көбейтіндісіндегі борельдік жиын осы жиында барлық S қималары үшін оң өлшемді ауыспалы ықтималдық болған жағдайда борельдік бейнелеудің графигін қамтиды (демек, борельдік селекцияны мүмкін етеді).

Мақаладағы негізгі нәтиже екі толық сепарабелді метрикалық кеңістік болу шартын бір кеңістік толық сепарабельді, ал екіншісі жеңілдетілген – жалпы өлшемді кеңістік болған жағдайға жалпылау болып табылады, дәлірек айтқанда екінші кеңістіктің шарттарын нүктелері бірінші кеңістікте борельдік ықтималдық өлшемдер жүйесін параметрлейтін, сонымен қатар, S жиынының көбейтіндідегі қимасының өлшемі оң болуына алмастырады.

Түйін сөздер: өлшенетін таңдау туралы теорема; ауыспалы ықтималдық; Блэквелл мен Рыл-Нархевский теоремасы

К.А. Афонин

Факультет механики и математики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Московский центр фундаментальной и прикладной математик, Москва, Россия

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БЛЭКУЭЛЛА – РЫЛЬ-НАРДЖЕВСКОГО ОБ ИЗМЕРИМОМ ВЫБОРЕ

Аннотация. Одна из основных форм теорем об измеримом выборе связана с существованием графика измеримого отображения в заданном измеримом множестве S в произведении двух измеримых пространств X и Y. Такой график дает возможность выбрать точку из сечения S_x при каждом x из X так, что полученное отображение окажется измеримым. Указанный выбор называют измеримой селекцией многозначного отображения, сопоставляющего точке x сечение S_x , являющееся множеством в Y .

Классическая теорема Блэкуэлла и Рыль-Нарджевского утверждает, что борелевское множество S в произведении двух полных сепарабельных метрических пространств содержит график борелевского отображения (значит, допускает борелевскую селекцию) при условии, что имеется переходная вероятность на этом произведении с положительными мерами для всех сечений S .

Основной результат этой работы дает обобщение на случай, когда лишь одно из двух пространств является полным сепарабельным метрическим, а другое есть общее измеримое пространство, точки которого параметризуют семейство борелевских вероятностных мер на первом пространстве, причем сечения данного множества S в произведении имеют положительные меры.

Ключевые слова: теорема об измеримом выборе; переходная вероятность; теорема Блэкуэлла – Рыль-Нарджевского

References

1 Blackwell D., Ryll-Nardzewski C. Non-existence of everywhere proper conditional distributions, Ann. Math. Statist, 34(1), 223-225(1963).

2 Bogachev V. I. Measure theory. V. 1, 2. (Springer, Berlin, 2007).

3 Srivastava S.M. A Course on Borel Sets. (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1998).

Сведения об авторах:

Афонин К.А. – математика бөлімінің 5 курс студенті, М.В. Ломоносов Мәскеу мемлекеттік университетінің механика-математика факультеті, Мәскеу, Ресей; Фундаменталды және қолданбалы математика Мәскеу математика орталығының кіші ғылыми қызметкері, Мәскеу, Ресей.

Afonin K.A. – 5^{th} year student of mathematics department, Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow, 119991, Russia; junior researcher of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991, Russia.

Поступила в редакцию 17.02.2021

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2021, том 134, №1, 42-51 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: **27.25.19**

M.Y. Berikkhanova [1] , K.Y. Sherniyazov [2]

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
(E-mail: [1] bmarjan@mail.ru, [2] ksh10@mail.ru)

THE INFORMATIVE POWER OF ALL POSSIBLE LINEAR FUNCTIONALS AND THE MEAN-SQUARE ERROR IN THE DISCRETIZATION OF SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION IN THE CIRCLE

Abstract: The Dirichlet problem for the Laplace equation in the case of a circle belongs to the classical ones and in various aspects has been the subject of study in various fields of mathematics. Among them are such topics as

- "Boundary properties of analytic functions", in the study of which powerful methods of function theories were created and honed,
- The Banach problem on the existence of a basis for a class of functions consisting of continuous in a closed circle and analytic in,
- Numerical methods, since this problem as a mathematical model describes many real processes.

In this article, we consider the discretization problem of solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a circle from finite numerical information obtained from the boundary function as a result of applying all possible linear functionals. The optimal order of discretization error is found and the corresponding optimal operator of discretization is constructed.

The problem of constructing probabilistic measures on functional classes is also considered. Probabilistic measures on the Korobov $E^r(0, 2\pi)$ and Nikolsky $H_2^r(0, 2\pi)$ classes are introduced. Two-sided estimates of the mean-square error of discretization the solution of the problem by operator $(T_N f)(\alpha, \theta)$ are established.

Keywords: informative power of a given class of functionals; discretization of solutions of a differential equation; mean-square error in relation to a probability measure

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-678X-2020-134-1-42-51

1. INTRODUCTION

The statement of the problem, which is the subject of this work, is preceded by an extensive citation from the article [1] of P. Laks:

"Everyone knows about the incredible progress made over the past 50 years in the speed of computers and the amount of information they store, as well as improvements in graphics and software. As a result, tasks that were previously on the edge of the computer's capabilities can now be solved much faster and cheaper, and we can approach tasks of daunting complexity. But what many people don't realize is that much of this progress is due not only to improvements in hardware and software, but equally to new mathematical ideas about how to solve emerging computational problems.

Here are some amazing examples.

Multi-grid method. After discretizing elliptic systems of partial differential equations - the standard example is the Dirichlet problem for the Laplace equation-the problem of numerical solution of the resulting system of linear algebraic equations arises. An effective iterative method for performing this task, called the multigrid method, was proposed in the 1960s by R.P. Fedorenko [2] and analyzed by N.S. Bakhvalov [3]; it was further developed and applied by Aki Brandt [4]. Schematically, the idea is to obtain information about the behavior of the solution over large distances by computing on a coarse grid.

The purpose of this paper is to elucidate the approximative capabilities of computational aggregates constructed using arbitrary algorithms applied to numerical information of a given volume N obtained from boundary functions by means of N linear functionals in the approximation problem (in the L^q metric) of the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation.

We present the statement of the general problem (in edition [5, 6]) in relation to the concretization considered in this paper.

Let $u(\alpha,\theta) \equiv u(\alpha,\theta;f)$ be a solution of the Laplace equation in polar coordinates (see [7, page 236])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \tag{1}$$

satisfying the boundary condition

$$u(\alpha,\theta)|_{\alpha=R} = f(\theta), \tag{2}$$

where - f is some 2π - periodic function that ensures the correctness of the problem (1)-(2), moreover, the belonging of the solution $u(\alpha,\theta;f)$ to a given normalized space Y.

For each positive integer N by $L_N \equiv \{(l^{(N)};\varphi_N)\}$ we denote the set of all pairs $(l^{(N)};\varphi_N)$, where $l^{(N)} = (l_1,\ldots,l_N)$ is an ordered set of linear functionals $l_j(\cdot)$ $(j=1,\ldots,N)$, defined on the linear envelope of a set F, and the function $\varphi_N \equiv \varphi_N(\tau_1,\ldots,\tau_N;\alpha,\theta)$ acts from $C^N \times [0,R] \times [0,2\pi]$ in C, where C, as usual, the field of complex numbers.

Also assume that for arbitrary fixed $\tau_1,\ldots,\tau_N$ and α function φ_N, considered as a function of θ, belongs to a normed space Y.

For $\left(l^{(N)};\varphi_N\right) \in D_N \subset L_N$ assume

$$\delta_N((l^{(N)};\varphi_N);\, F)_Y = \sup_{f\in F}\sup_{0\le\alpha\le R} \|u(\alpha,\cdot,f) - \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f),\alpha,\cdot)\|_Y$$

and

$$\delta_N(D_N;F)_Y = \inf_{\left(l^{(N)};\varphi_N\right)\in D_N} \delta_N((l^{(N)};\varphi_N);\, F)_Y. \tag{3}$$

In the case of $A_N \subset L_N,\ D_N = A_N \times \{\varphi_N\}$ value (3) is called the informative power of a given class of functionals A_N, and in the case of $A_N = L_N$ - the informative power of all possible linear functionals.

The task is to obtain the upper and lower estimates for the value (3) and to specify the pair $(l^{(N)};\varphi_N)$ that implements the upper estimate.

From a position of evaluating the results of this article it is important to note (see [5, 6, 8]) that the linear diameter, diameter Fourier transform (orthopaedic), the partial sums of the Fourier series over all orthonormal systems (including systems consisting of bursts) and decomposition on the bases, linear methods of summation of Fourier series when the appropriate choice $D_N \subset L_N$ is also contained in the definition (3), and for every choice D_N holds the inequality

$$\delta_N(D_N;F)_Y \ge \delta_N(L_N;F)_Y.$$

Also note that the problem of reconstruction in the above statement is devoted to the work [5, 6, 8–20].

In this paper, as a class F considered the Sobolev class $W_q^r(0,2\pi)$ (r - is positive integer), defined as follows (see [21, 22]):

$$f(\theta) \in W_q^r(0,2\pi) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left\| \left\{ \hat{f}(m)\cdot \overline{m}^r \right\}_{m=-\infty}^{+\infty} \right\|_{l^q} \le 1,$$

and the Besov class $B^r_{q,æ}(0,2\pi)$ (see [21]):

$$f(\theta)\in B^r_{q,æ}(0,2\pi)\overset{def}{\Leftrightarrow}\left\|\left\{2^{\tau r}\left\|\sum_{m\in\rho(\tau)}\hat f(m)\cdot e^{im\cdot}\right\|_{L_q}\right\}_{\tau=1}^{\infty}\right\|_{l^{æ}}\le 1,$$

where $(1\le q,\, æ\le\infty,\, r>0)\,,\overline{m}=\max\{1;\ |m|\},\rho(\tau)=\left\{m\in Z:\ 2^{\tau-1}\le\overline{m}<2^{\tau}\right\},\ \|f\|_{L_q}$ - the Lebesgue norm with the q degree of summability of the 2π - periodic function f,

$$\hat f(m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cdot e^{-im\theta}d\theta$$

-the trigonometric Fourier coefficients of the function f, and $\|\{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}\|_{l^{æ}}$ is the norm of the numerical sequence $a=\{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}$, defined as

$$\|\{a_\tau\}_{\tau=1}^{\infty}\|_{l^{æ}}=\begin{cases}\left(\sum_{\tau=1}^{\infty}|a_\tau|^{æ}\right)^{\frac{1}{æ}} & \text{if } 1\le æ<\infty,\\ \sup\limits_{\tau}|a_\tau| & \text{if } æ=\infty.\end{cases}$$

By $c(\dots)$ we will denote some positive values that are different, generally speaking, in different formulas and depend only on the parameters specified in parentheses. With a positive A and any B record $B=O_{\alpha,\beta,\dots}(A), B\underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll}A$ will mean $|B|\le c(\alpha,\beta,\dots)A$. With a positive A and B record $A\underset{\alpha,\beta,\dots}{\asymp}B$ means $A\underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll}B\underset{\alpha,\beta,\dots}{\ll}A$.

In the following two paragraphs, the problems of discretization of solutions of equation (1)-(2) are investigated in the sup-norm and in the root-mean-square, respectively.

2. DISCRETIZATION IN THE SUP-NORM

The following theorem holds.

Theorem 1. *Let the numbers 2 $\le q\le\nu\le+\infty$ be given.*

a) Let r - be a positive integer. Then there is a two-sided estimate $(N=1,2,\dots)$

$$\delta_N(L_N,W^r_q(0,2\pi))_{L^\nu[0,2\pi]}\asymp N^{-\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)}.$$

в) Let $rq>1$ and $1\le æ\le\infty$. Then there is a two-sided estimate $(N=1,2,\dots)$

$$\delta_N(L_N,B^r_{q,æ}(0,2\pi))_{L^\nu[0,2\pi]}\asymp N^{-\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)}.$$

Wherein in each of the cases a) and в) the upper estimate is implemented by the operator $(N=2^n,n=1,2,\dots)$

$$\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\alpha,\theta)=V_{2^n}(\alpha,\theta;f)=\sum_{k=0}^{n}Q_k(\alpha,\theta;f),$$

where $V_{2^k}(\alpha,\theta;f)$ - the average Vallée Poussin function $u(\alpha,\theta;f)$ of order 2^k by variable θ, and $Q_0=V_{2^0},Q_k=V_{2^k}-V_{2^{k-1}}$ for all $k\ge1$ [21, p. 295-300].

3. DISCRETIZATION IN THE MEAN SQUARE

The main way to assess the quality of the reconstruction is the "worst case", i.e. the case when the maximum class error is calculated. At the same time, the comparison of operators for reconstruction functions from a class by the maximum (in terms of the class) error (deviation) can turn out to be rough: two operators can have the same maximum deviations, while for the first operator it is achieved on functions that are in a certain sense “few” in the class, and for the second-on “most” functions of the class (quantitative characterization of the sizes of subsets of functions is made on the basis of the Lebesgue measure). Although the first sampling method is obviously preferable, the two methods are indistinguishable when evaluating the quality of the approximation by the value of the maximum deviation.

Thus, the statement of this problem consists in estimates from below and from above of the value (see also (3))

$$\int\limits_F \sup_{0\leq\alpha\leq R} \left\|u\left(\alpha,\,\cdot\,,f\right)-\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right),\alpha,\cdot\right)\right\|_Y^2 d\mu_F(f),$$

$\mu_F(f)$ is a probability measure defined on F.

Let $\{\Gamma_k\}$ be a sequence of pairwise disjoint finite sets $\Gamma_k\subset Z$, the union of which is all Z. By d_k we denote the number of points in the Γ_k.

Let $\nu_{-1}=0$ and $\nu_k=d_0+\cdots+d_k, a_{j(m)}$ are a fixed ordering of Γ_k. Then each set

$$Y=\{y_m\}_{m\in Z} \tag{4}$$

complex numbers, taking into account the equality, $y_m=a_j(m)+ib_j(m)$, we will consider it represented as a sequence $Y=(a_1,b_1,\dots,a_{\nu_k},b_{\nu_k},\dots)$.

Next, let for each k on a $2d_k$ – dimensional Euclidean space R^{2d_k} - be given a non-negative continuous function ψ_k such that $\psi_k(0)=0$.

We define the classes $H(\Gamma_k,\psi_k)$ as the collection of all sets (4) such that for each $k(k=0,1,2,\dots)$ the inequality is satisfied

$$\psi_k(a_{\nu_{k-1}+1},b_{\nu_{k-1}+1},\dots,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\leq 1,$$

i.e.

$$H(\Gamma_k,\psi_k)=\{(a_1,b_1,\dots,a_{\nu_k},b_{\nu_k},\dots):\psi_k(a_{\nu_{k-1}+1},b_{\nu_{k-1}+1},\dots,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\leq 1\}.$$

Suppose

$$H\overset{def}{=}\bigcap_{k=1}^{\infty}H(\Gamma_k,\psi_k).$$

Let

$$D_k=\{(a_{\nu_{k-1}+1},b_{\nu_{k-1}+1},\dots,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\in R^{2d_k}:\psi_k(a_{\nu_{k-1}+1},b_{\nu_{k-1}+1},\dots,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\leq 1\}.$$

Then

$$H=D_0\times D_1\times\cdots\times D_k\times\cdots$$

Cylindrical sets $T_k(E_k)$ are defined as follows:

$$T_k(E_k)=\{(a_1,b_1,\dots,a_{\nu_k},b_{\nu_k},\dots)\in H:(a_{\nu_{k-1}+1},b_{\nu_{k-1}+1},\dots,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\in E_k\},$$

where $E_k\subset D_k$ $(E_k\in F(D_k))$.

Let $F(H)$ – be the smallest σ-algebra containing all cylindrical sets.

Theorem A (see [23]). *Each of the possible probability measures μ on the measurable space $(H,\mathcal{F}(H))$ is uniquely determined by setting the sequence of measures μ_k on $(D_k,\mathcal{F}(D_k))$ such that for all $k(k=0,1,2,\dots)$ an $E_k\in\mathcal{F}(D_k)$ the next equality holds*

$$\mu(T_k(E_k))=\mu_k(E_k).$$

Following this theorem, we introduce a probability measure on the Korobov $E^r(0,2\pi)$ and Nikolsky $H_2^r(0,2\pi)$ classes.

By definition of the class $E^r(0,2\pi)(r>1)$

$$f(x)\in E^r(0,2\pi)\Leftrightarrow\left|\hat{f}\left(m\right)\right|\leq\frac{1}{\bar{m}^r}\equiv\rho m(m\in Z),$$

where $f(x)$ - is a 2π-periodic function.

Let for each $m\in Z$ the function

$$\lambda_m(\tau):[0,\rho_m]\to[0,1]$$

is continuous, non-decreasing on $[0,\rho_m]$ and satisfies the conditions $\lambda_m(0)=0$ and $\lambda_m(\rho_m)=1$.

For any α by $K(\alpha)$ we denote a closed circle of the complex plane with the center at zero and with radius α:

$$K(\alpha) = \{z = \tau e^{i\varphi} : 0 \le \tau \le \alpha, 0 \le \varphi \le 2\pi\} = \{z \in C : z \le \alpha\}.$$

Then

$$f(x) \in E^r(0,2\pi) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m \in Z} \hat{f}\,(m)\, e^{im\theta},\ \hat{f}\,(m) \in K\,(\rho_m)\,.$$

Hence, the mapping

$$E^r \ni f \to \left(\hat{f}\,(0)\,, \hat{f}\,(1)\,, \hat{f}\,(-1)\,, ...\right) \in K\,(\rho_0) \times K\,(\rho_1) \times K\,(\rho_{-1}) \times \cdots$$

establishes a one-to-one correspondence

$$E^r(0,2\pi) \leftrightarrow K\,(\rho_0) \times K\,(\rho_1) \times K\,(\rho_{-1}) \times \cdots$$

Hence, by virtue of the theorem on setting a measure on the Cartesian product of a countable number of spaces with a measure (see [24, pp. 152-156]), to enter a measure on $E^r(0,2\pi)$, it is sufficient to enter probabilistic measures μ_m in each $K\,(\rho_m)\,(m \in Z)$. As μ_m, we take a plane Lebesgue measure in a circle $K\,(\rho_m)$ such that if

$$0 \le \rho_m^{(1)} < \rho_m^{(2)} \le \rho_m \text{ and } 0 \le \varphi 1 < \varphi 2 \le 2\pi,$$

then

$$\mu_m(\tau e^{i\varphi} : \rho_m^{(1)} \le \tau \le \rho_m^{(2)}, \varphi 1 < \varphi \le \varphi 2) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}\left(\lambda_m\left(\rho_m^{(2)}\right) - \lambda_m\left(\rho_m^{(1)}\right)\right). \tag{5}$$

In particular,

$$\mu_m\,(K\,(\rho_m)) = \frac{2\pi}{2\pi}(\lambda_m(\rho_m) - \lambda_m(0)) = 1.$$

Measure μ_m in $K\,(\rho_m)$ with condition (5) is denoted by μ_m^λ.

Then the desired measure in the class $E^r(0,2\pi)$ itself is defined as follows. Let be given a positive integer n and integers $m^{(1)}, \ldots, m^{(n)}$. For planar μ_m^λ-measurable sets

$$E^{(1)} \subset K\,(\rho_{m^{(1)}})\,, E^{(2)} \subset K\,(\rho_{m^{(2)}})\,, \ldots, E^{(n)} \subset K\,(\rho_{m^{(n)}})$$

consider cylindrical sets

$$T(E^{(3)}, \ldots, E^{(n)}) = \{f \in E^r : \hat{f}\left(m^{(1)}\right) \in E^{(1)}, \ldots, \hat{f}\left(m^{(n)}\right) \in E^{(n)}\} \subset E^r.$$

Then, according to Theorem A, the equalities

$$\mu^\lambda(T(E^{(1)}, \ldots, E^{(n)})) = \prod_{j=1}^{n} \mu_{m^{(j)}}^\lambda(E^{(j)}). \tag{6}$$

the probability measure μ^λ is uniquely determined on the smallest σ - algebra of subsets E^r containing all cylindrical sets $T(E^{(1)}, \ldots, E^{(n)})$.

Next, we give the definition of the probability measure given on $H_2^r(0,2\pi)$.

Let

$$\rho(\tau) = \left\{m \in Z : 2^{\tau-1} \le \overline{m} < 2^\tau\right\} \equiv \left\{2^{\tau-1}, -2^{\tau-1}, 2^{\tau-1}+1, -2^{\tau-1}-1, ..., 2^\tau-1, -2^\tau+1\right\}$$

for $\tau = 2, 3, \ldots$ and $\rho(1) = \{0, 1, -1\}$ subsets of Z ("binary bundles") and let $n_\tau = |\rho(\tau)|$. Then by the equivalent definition of class $H_2^r(0,2\pi)$ (see e.g. [22])

$$f \in H_2^r(0,2\pi) \Leftrightarrow \sum_{m \in \rho(\tau)} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \le 2^{-2\tau r}.$$

We introduce the following notation for:

$$f \in H_2^r(0,2\pi):$$

$$z^{(\tau)}(f) \equiv (\hat{f}(2^{\tau-1}),\ \hat{f}(-2^{\tau-1}), \hat{f}(2^{\tau-1}+1), \hat{f}(-2^{\tau-1}-1), ..., \hat{f}(2^\tau-1),\ \hat{f}(-2^\tau+1))$$

for $\tau = 2, 3, \ldots$ and $z^{(1)}(f) \equiv (\hat{f}(0),\ \hat{f}(1), \hat{f}(-1))$.

If a ball in C^{n_τ} (or in R^{2n_τ}) of radius $2^{-\tau r}$ centered at the origin is denoted by D_τ , i.e.

$$D_\tau = \left\{ z^{(\tau)} = \left(z_1^{(\tau)}, z_2^{(\tau)}, ..., z_{n_\tau}^{(\tau)} \right) \in C^{n_\tau} : \left| z_1^{(\tau)} \right|^2 + \left| z_2^{(\tau)} \right|^2 + \cdots + \left| z_{n_\tau}^{(\tau)} \right|^2 \le 2^{-2\tau r} \right\},$$

then the above definition of class $H_2^r(0, 2\pi)$ is rewritten as

$$f \in H_2^r(0, 2\pi) \Leftrightarrow z^{(\tau)}(f) \in D_\tau \quad (\forall \tau = 1,\ 2, ...) .$$

Hence, taking into account the introduced notation, and the Riesz-Fischer theorem, we can establish the following one-to-one correspondence:

$$H_2^r(0, 2\pi) \ni f(x) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \overset{\wedge}{(}\underbrace{f(0),\ \hat{f}(1),\ \hat{f}(-1)}_{z^{(1)}(f)}, \underbrace{\hat{f}(2), \hat{f}(-2), \hat{f}(3), \hat{f}(-3)}_{z^{(2)}(f)}, ..., \underbrace{\hat{f}(2^{\tau-1}), \hat{f}(-2^{\tau-1}), ..., \hat{f}(2^\tau - 1), \hat{f}(-2^\tau + 1)}_{z^{(\tau)}(f)}, ...) \equiv$$

$$\equiv \left(z^{(1)}\,(f)\,,\ z^{(2)}\,(f)\,,\ ..., z^{(\tau)}\,(f)\,, ... \right) \in D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_\tau \times \cdots .$$

Let for each $\tau = 1, 2, ...$ measure μ_τ be an absolutely continuous probability measure on $D\tau$:

$$\mu_\tau(E_\tau) = \int_{E_\tau} p_\tau \left(z_1^{(\tau)}, z_2^{(\tau)} ..., z_{n_\tau}^{(\tau)} \right) dx_1^{(\tau)} dy_1^{(\tau)}, ..., dx_{n_\tau}^{(\tau)} dy_{n_\tau}^{(\tau)},$$

where $E_\tau \subset D_\tau$ -is a measurable set,

$$z_k^{(\tau)} = x_k^{(\tau)} + i y_k^{(\tau)}\ (k = 1, ..., n_\tau),$$

and the density

$$p_\tau(z^{(\tau)}) = p_\tau(x_1^{(\tau)}, y_1^{(\tau)}, ..., x_{n_\tau}^{(\tau)}, y_{n_\tau}^{(\tau)}) = p_\tau((x_1^{(\tau)})^2 + (y_1^{(\tau)})^2 + ... + (x_{n_\tau}^{(\tau)})^2 + (y_{n_\tau}^{(\tau)})^2)$$

- radially depends on $\left(x_1^{(\tau)}, y_1^{(\tau)}, ..., x_{n_\tau}^{(\tau)}, y_{n_\tau}^{(\tau)} \right) \in D_\tau$. Let be given positive integers k and numbers $\tau_1, ..., \tau_k (\tau_i \ne \tau_j \text{ at } i \ne j)$. For measurable sets $E_{\tau_k} \subset D_{\tau_k}$ consider cylindrical sets

$$T(E_{\tau_1}, ...,\ E_{\tau_k}) = \left\{ f \in H_2^r(0, 2\pi) : z^{(\tau_1)}(f) \in E_{\tau_1}, ..., z^{(\tau_k)}(f) \in E_{\tau_k} \right\} \tag{7}$$

Suppose

$$\mu(T(E_{\tau_1}, ..., E_{\tau_k})) \overset{def}{=} \prod_{i=1}^{k} \int_{E_{\tau_i}} p_{\tau_i}(z^{(\tau_i)})\, dx^{(\tau_i)} dy^{(\tau_i)}. \tag{8}$$

The set of cylindrical sets of the form (7) forms a semiring.

Then, by Theorem A on the continuation of the measure, we can assume that in the smallest σ - algebra $\mathcal{F}(H_2^r)$, which contains all cylindrical sets of the form (7), the measure μ is given.

In the following theorems, we obtain two-sided estimates for the mean-square discretization error of the solution of problem (1)-(2) regardingto the introduced measures. In both theorems

$$(T_N f)\,(\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^{N} f\left(2\pi \frac{i}{N} \right) K_N \left(\alpha, \theta - 2\pi \frac{i}{N} \right),$$

where ([. . .] – is the integer part)

$$K_N\,(\alpha, t) = \frac{1}{N} \left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{[N/2]-1} \left(\frac{\alpha}{R} \right)^n \cdot \cos nt \right).$$

Theorem 2. *Let $u\,(\alpha, \theta; f)$ be the solution of problem (1)-(2), $r > 1$ and μ^λ be the probability measure (6), defined on E^r . Then*

$$\int_{E^r(0,2\pi)} \sup_\alpha \|\, u\,(\alpha,\, \cdot; f) - (T_N f)\,(\alpha,\, \cdot)\,\|_{L^2(0,2\pi)}^2\, d\mu^\lambda\,(f) \asymp \sum_{m \in Z \setminus \left(-\left[\frac{N}{2} \right], \left[\frac{N}{2} \right] \right)} \int_0^{\rho_m} \tau^2 \lambda_m'\,(\tau)\, d\tau.$$

Corollary. Let

$$\lambda_m(\tau)=\begin{cases}\frac{\tau(1-\rho_m^2)}{\rho_m^2}, & \text{if } \tau\in\left[0,\rho_m^2\right]\\ \frac{\rho_m\left(\tau-\rho_m^2\right)}{1-\rho_m}+1-\rho_m^2, & \text{if } \tau\in\left[\rho_m^2,\rho_m\right].\end{cases}$$

Then

$$\int\limits_{E^r(0,2\pi)}\sup_{\alpha}\|\,u\left(\alpha,\,\cdot;f\right)-\left(T_Nf\right)\left(\alpha,\,\cdot\right)\|^2_{L^2(0,2\pi)}\,d\mu^{\lambda}\left(f\right)\asymp C\left(r\right)\frac{1}{N^{2\left(2r-\frac{1}{2}\right)}}.$$

Theorem 3. *Let $u\left(\alpha,\theta;f\right)$ - be the solution of problem (1)-(2), $r>\frac{1}{2}$ and μ - be the probability measure (8). Then there is a two-sided estimate ($N=2^n,\ n=1,2,...$)*

$$\int\limits_{H_2^r(0,2\pi)}\sup_{\alpha}\|u(\alpha,\cdot;f)-(T_Nf)(\alpha,\cdot)\|^2_{L^2(0,2\pi)}\,d\mu(f)\asymp$$

$$\asymp\sum_{\tau=n}^{\infty}\int\limits_{D_\tau}\left(x_1^2+y_1^2+...+x_{n_\tau}^2+y_{n_\tau}^2\right)p_\tau(x,y)dxdy.$$

4. CONCLUSION

The problem of discretization of solutions by means of arbitrary linear functionals is studied. It is shown that the orders of discretization error are unimprovable.

Regarding probabilistic measures on the Korobov E^r and Nikolsky H_2^r functional classes, two-sided estimates of the mean-square error of discretization the solution of the problem by operator $\left(T_Nf\right)\left(\alpha,\,\theta\right)$ are established.

References

1 Лакс П. Математика и вычисления // В Сб. "Математика: границы и перспективы" - Москва: ФАЗИС, 2005. - С. 175-192.

2 Fedorenko R.P. The speed of convergence of one iterative process // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. –1964. –V. 4, №3. –P. 227-235.

3 Bakhvalov N.S. On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. –1966. –V. 6, №5. –P. 101-135.

4 Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Math. Comp. –1977. –V. 31. –P. 333.

5 Temirgaliyev N., Zhubanisheva A.Zh. Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery // Russian Mathematics. –2019. –V. 63, №1. –P. 79-85.

6 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2018. -Т. 124. -№ 3. -С. 8-88.

7 Петровский И.Г., Лекции об уравнениях с частными производными. - Москва: Физматгиз, - 1961.

8 Azhgaliev Sh.U., Temirgaliev N. Informativeness of all the linear functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω // Sb. Math. –2007. –V. 198, №11. –P. 1535-1551.

9 Azhgaliev Sh., Temirgaliev N. Informativeness of Linear Functionals // Math. Notes, –2003. –V. 73, №6. –P. 759-768.

10 Azhgaliev Sh. U. Discretization of the Solutions of the Heat Equation // Math. Notes. –2007. –V. 82, №2. –P. 153-158.

11 Ibatulin I. Zh., Temirgaliev N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretization of solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of $L^{2,\infty}$ // Differ. Equ. –2008. –V. 44, №4. –P. 510-526.

12 Берикханова М.Е. Об информативных мощностях всевозможных линейных функционалов при дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа: дисс... канд. физ.-мат. наук, Алматы, 2007.

13 N. Temirgaliyev, S. S. Kudaibergenov, N. Zh. Nauryzbayev. Orderly Exact Calulation of Integrals of Produts of Funtionsby the Method of Tensor Produts of Funtionals // Russian Mathematics. –2019. –V. 63, №11. –P. 83-87.

14 Temirgaliev N., N. Zh. Nauryzvaev, A. A. Shomanov On Some Special Effects in Theory on Numerical Integration and Functions Recovery // Russian Mathematics. –2018. –P. 62, №3. –P. 84-88.

15 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Azhgaliev Sh.U., Taugynbaeva G. E. The Radon Transform in the Sheme of C(N)D-Investigations and the Quasi-Monte Carlo Theory // Russian Mathematics. –2020. –V. 64, №3. –P. 87-92.

16 Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Алматы, 1998.
17 Temirgaliev N., Kudajbergenov S.S., Shomanova A.A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration // Izvestiya: Mathematics. –2009. –V. 73, №2. –P. 393-434.
18 Temirgaliev N., Sherniyazov K.E., Berikhanova M.E. Exact Orders of Computational (Numerical) Diameters in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein-Gordon Equation from Fourier Coefficients // Proc. Steklov Inst. Math. –2013. –V. 282, suppl. 1. –P. 165-191.
19 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Zhubanysheva A.Zh., Taugynbaeva G.E. Discretization of solutions to a wave equation, numerical differentiation, and function reconstruction for a computer (computing) diameter // Russian Math. (Iz. VUZ). –2013. –V. 57, №8. –P. 75-80.
20 Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N. Informative cardinality of trigonometric Fourier coefficients and their limiting error in the discretization of a differentiation operator in multidimensional Sobolev classes // Comput. Math. Math. Phys. –2015. –V. 55, №9. –P. 1432–1443.
21 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. -Москва: Наука, 1977.
22 Кудрявцев Л.Д., С.М. Никольский Пространство дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения. Матем. анализ. (Итоги науки и техники), Москва: ВИНИТИ, - 1988, - Т.26. - С. 5-157.
23 Temirgaliev N. T. On the construction of probability measures of functional classes // Proc. Steklov Inst. Math. –1997. –V. 218, –P. 396-401.
24 Халмош П. Теория меры. Москва: ИЛ, 1953.

М. Е. Берікханова, Қ. Е. Шерниязов
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Барлық сызықтық функционалдардың ақпараттық қуаттылығы және дөңгелек жағдайындағы Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің шешімін жуықтап калыптастырудағы орташа квадраттық қателік

Аннотация: Дөңгелек жағдайындағы Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебі классикалық есепке жатады және түрлі аспектілерде математиканың әртүрлі салаларында зерттеу нысанын құрды. Олардың ішінде келесі тақырыптарды атап өтуге болады:

- «Аналитикалық функциялардың шекаралық қасиеттері», оларды зерттеу негізінде функциялар теориясының мықты әдістері пайда болды және шыңдалды.

- Дөңгелек ішінде аналитикалық, тұйық дөңгелекте үзіліссіз болатын функциялар класы үшін базистің бар болуы туралы Банах есебі.

- Сандық әдістер, өйткені бұл есеп математикалық модель ретінде көп процесстерді бейнелейді. Осы жұмыста барлық мүмкін сызықты функционалдарды қолдану нәтижесінде шекаралық функциядан алынған ақырлы сандық ақпарат арқылы дөңгелектегі Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебінің шешімін жуықтап қалыптастыру есебі қарастырылған. Жуықтап қалыптастыру қателіктерінің дәл реті табылған және жуықтап қалыптастырудың сәйкес тиімді операторы құрылған. Сонымен қатар функционалдық кластарда ықтималдық өлшемдерін енгізу есебі қарастырылған. Коробов $E^r(0,2\pi)$ және Никольский $H_2^r(0,2\pi)$ класстарына ықтималдық өлшемдері енгізілген. $(T_N f)(\alpha,\theta)$ операторы арқылы шешімді жуықтап қалыптастыру есебінің орташа квадраттық қателігінің екі жақты бағасы алынған.

Түйінді сөздер: берілген функционалды кластың ақпараттық қуаты, дифференциалдық теңдеудің шешімдерін жуықтап қалыптастыру, ықтималдық өлшеміне қатысты орташа квадраттық қателік.

М.Е. Берикханова, К.Е. Шерниязов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Информативная мощность всевозможных линейных функционалов и среднеквадратическая погрешность при дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге

Аннотация: Задача Дирихле для уравнения Лапласа в случае круга относится к классическим и в различных аспектах составляла предмет изучения в разных областях математики. Среди них такие темы, как

- «Граничные свойства аналитических функций», при изучении которых создавались и оттачивались мощные методы теорий функций,

- Проблема Банаха о существовании базиса для класса функций, состоящего из непрерывных в замкнутом круге и аналитических внутри,

- Численные методы, поскольку данная задача как математическая модель описывает многие реальные процессы.

В данной работе рассмотрена задача дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге по конечной числовой информации, полученной от граничной функции в результате применения всех возможных линейных функционалов. Найден оптимальный порядок погрешности дискретизации и построен соответствующий оптимальный оператор дискретизации.

Также рассмотрена задача построения вероятностных мер на функциональных классах. Введены вероятностные меры на классах Коробова $E^r(0,2\pi)$ и Никольского $H_2^r(0,2\pi)$. Установлены двусторонние оценки среднеквадратической погрешности дискретизации решения задачи посредством оператора $(T_N f)(\alpha,\theta)$.
Ключевые слова: информативная мощность данного класса функционалов, дискретизация решений дифференциального уравнения, среднеквадратическая погрешность относительно вероятностной меры.

References

1 Lax P. Matematika i vychislenija [Mathematics and Computing]. Sb. «Matematika: granicy i perspektivy» [In the Collection "Mathematics: boundaries and Perspectives"] (Moscow, FAZIS, 2005, 175-192) [In Russian].

2 Fedorenko R.P. The speed of convergence of one iterative process. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 4 (3), 227-235 (1964).

3 Bakhvalov N.S. On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 6(5), 101-135 (1966).

4 Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems. Math. Comp, 31, 333 (1977).

5 Temirgaliyev N., Zhubanisheva A.Zh. Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery. Russian Mathematics, 63 (1), 79-85 (2019).

6 Temirgaliev N., Zhubanysheva A. Zh. Teorija priblizhenij, Vychislitel'naja matematika i Chislennyj analiz v novoj koncepcii v svete Komp'juternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Theory of approximations, Computational mathematics and Numerical analysis in a new concept in the light of a Computational (Numerical) diameter]. Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta imeni L.N.Gumileva. Serija Matematika. Komp'juternye nauki. Mehanika [Bulletin of the L. N. Gumilyov Eurasian National University. Matematika. Computer science. Mechanics series], 124 (3), 8-88 (2018) [In Russian].

7 Petrovsky I.G. Lekcii ob uravnenijah s chastnymi proizvodnymi [Lectures on partial differential equations] (Moscow, Fizmatgiz, 1961) [In Russian].

8 Azhgaliev Sh.U., Temirgaliev N. Informativeness of all the linear functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω . Sb. Math., 198 (11), 1535-1551 (2007).

9 Azhgaliev Sh., Temirgaliev N. Informativeness of Linear Functionals. Math. Notes, 73(6), 759-768 (2003).

10 Azhgaliev Sh. U. Discretization of the Solutions of the Heat Equation. Math. Notes, 82 (2), 153-158 (2007).

11 Ibatulin I. Zh.б Temirgaliev N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretization of solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of $L^{2,\infty}$. Differ. Equ., 44 (4), 510-526 (2008).

12 Berikkhanova M. E. Ob informativnyh moshhnostjah vsevozmozhnyh linejnyh funkcionalov pri diskretizacii reshenij zadachi Dirihle dlja uravnenija Laplasa [On the informative powers of various linear functionals in the discretization of solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation]. Diss... Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Almaty, 2007) [In Russian].

13 N. Temirgaliyev, S. S. Kudaibergenov, N. Zh. Nauryzbayev. Orderly Exact Calulation of Integrals of Produts of Funtionsby the Method of Tensor Produts of Funtionals. Russian Mathematics, 63 (11), 83-87 (2019).

14 Temirgaliev N., N. Zh. Nauryzvaev, A. A. Shomanov On Some Special Effects in Theory on Numerical Integration and Functions Recovery. Russian Mathematics, 62 (3), 84-88 (2018).

15 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Azhgaliev Sh.U., Taugynbaeva G. E. The Radon Transform in the Sheme of C(N)D-Investigations and the Quasi-Monte Carlo Theory. Russian Mathematics, 64 (3), 87-92 (2020).

16 Shernijazov K. Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravnenija teploprovodnosti s funkcijami raspredelenija nachal'nyh temperatur iz klassov E, SW i B [Approximate Reconstruction of Functions and Solutions of the Heat Equation with Initial Temperature Distribution Functions from E, SW and B classes]. Diss... Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Almaty, 1998) [In Russian].

17 Temirgaliev N., Kudajbergenov S.S., Shomanova A.A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration. Izvestiya: Mathematics, 73 (2), 393-434 (2009).

18 Temirgaliev N., Sherniyazov K.E., Berikhanova M.E. Exact Orders of Computational (Numerical) Diameters in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein-Gordon Equation from Fourier Coefficients. Proc. Steklov Inst. Math., 282, suppl. 1, 165-191 (2013).

19 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Zhubanysheva A.Zh., Taugynbaeva G.E. Discretization of solutions to a wave equation, numerical differentiation, and function reconstruction for a computer (computing) diameter. Russian Math. (Iz. VUZ), 57 (8), 75-80 (2013).

20 Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N. Informative cardinality of trigonometric Fourier coefficients and their limiting error in the discretization of a differentiation operator in multidimensional Sobolev classes. Comput. Math. Math. Phys., 55 (9), 1432–1443 (2015).

21 Nikolskii S.M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozhenija [Approximation of functions of many variables and embedding theorems] (Moscow, Nauka, 1977) [In Russian].

22 Kudryavtsev, L.D.; Nikol'skii, S.M. Prostranstvo differenciruemyh funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozhenija. Itogi Nauki i Tekhniki, Sovrem. Probl. Mat. Fund. Naprav. [Spaces of differentiable functions of several variables and embedding theorems. Current problems in mathematics. Fundamental directions], 26, 5-157 (Moscow,VINITI, 1988) [In Russian].

23 Temirgaliev N. T. On the construction of probability measures of functional classes. Proc. Steklov Inst. Math., 218, 396-401 (1997).

24 Halmosh P. Teorija mery [Theory of Measure] (Moscow, IL, 1953) [In Russian].

Information about the authors:

Berikkhanova M.Y. – ***corresponding author,*** Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of CS and Statistics of the Al-Farabi Kazakh National University, 71 al-Farabi Ave., Almaty, Kazakhstan.

Sherniyazov K.Y. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of CS and Statistics of the Al-Farabi Kazakh National University, 71 Al-Farabi Ave., Almaty, Kazakhstan.

Берікханова М.Е. – ***корреспонденция үшін автор,*** физика-математика ғылымдарының кандидаты, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті ЕҒ және статистика кафедрасының аға оқытушысы. әл-Фараби даңғылы, 71, Алматы, Қазақстан.

Шерниязов Қ.Е. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті ЕҒ және статистика кафедрасының аға оқытушысы. әл-Фараби даңғылы, 71, Алматы, Қазақстан.

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2021. 1(134)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 52-б. Басуға қол қойылды: 30.03.2021.
Шартты б.т. - 3,44. 10 дана.
Ашық қолданыстағы электронды нұсқа: http://bulmathmc.enu.kz/
Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген: http://bulmathmc.enu.kz/

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды