

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№4(133)/2020

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2020
Nur-Sultan, 2020
Нур-Султан, 2020

БАС РЕДАКТОРЫ

Темірғалиев Н., ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Жұбанышева А.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.

Алексеева Л.А.

*PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР БЖҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан*

Алимхан Килан

Бекжан Турдыбек

Бекенов М.И.

Гоголина У.

PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

PhD, проф., ҚХР Шыңжаң университеті, Шыңжаң, КНР

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университеті, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

*ф.-м.ғ.д., проф., Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет)
Долгопрудный, Ресей*

Зунг Динь

*ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам
үлттық университеті, Ханой, Вьетнам*

Ибраев А.Г.

Иванов В.И.

Иосевич А.

Кобельков Г.М.

ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

ф.-м.ғ.д., проф., Тула мемлекеттік университеті, Тула, Ресей

PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ

*ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті,
Мәскеу, Ресей*

Курина Г.А.

Марков В.В.

ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей

ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік институты, Мәскеу, Ресей

Мейрманов А.М.

ф.-м.ғ.д., проф., Байланыс және информатика Мәскеу техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Смелянский Р.Л.

ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Умирбаев У.У.

Холщевникова Н.Н.

ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ

ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық университеті, Мәскеу, Ресей

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.

Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты редактор: Н.Ж. Наурызбаев

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.

27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу күәлігі.

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,

тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

EDITOR-IN-CHIEF

Nurlan Temirgaliyev

Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Aksaule Zhubanysheva

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Nurlan Nauryzbayev

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Editorial board:

Evgueni Abakumov

*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee
Paris, France*

Lyudmila Alexeyeva

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling Ministry of Education
and Science Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

Alexander Iosevich

PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA

Alimhan Keylan

PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Bekzhan Turdybek

PhD, Prof., Shenzhen University, SZU, Chinese

Makhsut Bekenov

*Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof.
L.N. Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan*

Ushangi Goginava

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.

Boris Golubov

*Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and
Technology (State University)
Dolgoprudnyi, Russia*

Dũng Dinh

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute,
Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*

Askar Ibrayev

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., L.N. Gumilyov ENU
Nur-Sultan, Kazakhstan*

Valerii Ivanov

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, Russia

Georgii Kobel'kov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Galina Kurina

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh,
Russia*

Vladimir Markov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical
Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Anvarbek Meirmanov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Technical University of Com-
munications and Informatics, Moscow, Russia*

Ruslan Smelyansky

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Ualbay Umirbaev

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.,
Wayne State University, Detroit, USA*

Natalya Kholshchevnikova

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State
Technological University "Stankin", Moscow, Russia*

Hans-Juergen Schmeisser

*Dr. habil., Prof., Friedrich-Shiller University
Jena, Germany*

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008.

Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible Editor-in-Chief: Nurlan Nauryzbayev

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Темиргалиев Н., д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Зам. главного редактора

Жубанышева А.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Зам. главного редактора

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алексеева Л.А.

д.ф.-м.н., проф., Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Алимхан Килян

PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Бекжан Турдыбек

PhD, проф., Шыңжаңский университет КНР, Шыңжаң, КНР

Бекенов М.И.

к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Гогинава У.

д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

д.ф.-м.н., проф., Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Зунг Динь

д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам

Ибраев А.Г.

д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Иванов В.И.

д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, Тула, Россия

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США

Кобельков Г.М.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Курина Г.А.

д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Марков В.В.

д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Мейрманов А.М.

д.ф.-м.н., проф., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Смелянский Р.Л.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Умирбаев У.У.

д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США

Холщевникова Н.Н.

д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402

Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). *E-mail:* vest_math@enu.kz

Ответственный редактор: Н.Ж. Наурызбаев

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР.
МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №4(133)/2020

МАЗМҰНЫ

<i>Зунг Д., Нгуен В.К., Тао М.С.</i> ReLU терең нейрондық желілері бойынша көп өлшемді жуықтаудың есептеу күрделілігі туралы	8
<i>Павловский В.А., Васильев И.Л.</i> h -комплекс айнымалы функциялардың h -голоморфтылығы және h -аналитикалығы	19
<i>Алексеева Л.А., Украинец В.Н.</i> Көлік жүктемелерінің әсерінен тоннель мен ұсақ төсемді жерасты құбыры динамикасының моделі	28
<i>Кореновский А.А.</i> Пифагор теоремасының бір мысалы үшін есептеулер	40

CONTENTS

<i>Dũng D., Nguyen V.K., Thao M.X.</i> On computation complexity of high-dimensional approximation by deep ReLU neural networks	8
<i>Pavlovsky V.A., Vasiliev I.L.</i> On h -holomorphy and h -analyticity of functions of an h -complex variable	19
<i>Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N.</i> Model of the dynamics of a tunnel and a shallow underground pipeline under the action of traffic loads	28
<i>Korenovskyi A.A.</i> Calculations for one illustration of the Pythagorean Theorem	40

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Зунг Д., Нгуен В.К., Тао М.С.</i> О сложности вычислений многомерной аппроксимации глубокими нейронными сетями ReLU	8
<i>Павловский В.А., Васильев И.Л.</i> Об h -голоморфности и h -аналитичности функций h -комплексного переменного	19
<i>Алексеева Л.А., Украинец В.Н.</i> Модель динамики тоннеля и подземного трубопровода мелкого заложения под воздействием транспортных нагрузок	28
<i>Кореновский А.А.</i> Расчеты к одной иллюстрации теоремы Пифагора	40

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика.
Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 133, №4, 8-18 беттер
<http://bulmathmc.emu.kz>, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: 27.41.17, 28.23.37

D. Dũng¹, V. K. Nguyen², M. X. Thao³

¹ Vietnam National University, Information Technology Institute
144 Xuan Thuy, Cau Giay, Hanoi, Vietnam

² Faculty of Basic Sciences, University of Transport and Communications
No.3 Cau Giay Street, Lang Thuong Ward, Dong Da District, Hanoi, Vietnam

³ Department of Natural Sciences, Hong Duc University
565 Quang Trung, Thanh Hoa, Vietnam

(E-mail: ¹ dinhzung@gmail.com, ² kiennv@utc.edu.vn, ³ maixuanthao@hdu.edu.vn)

ON COMPUTATION COMPLEXITY OF HIGH-DIMENSIONAL APPROXIMATION BY DEEP ReLU NEURAL NETWORKS

Abstract: We investigate computation complexity of deep ReLU neural networks for approximating functions in Hölder-Nikol'skii spaces of mixed smoothness $H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$ on the unit cube $\mathbb{I}^d := [0, 1]^d$. For any function $f \in H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$, we explicitly construct nonadaptive and adaptive deep ReLU neural networks having an output that approximates f with a prescribed accuracy ε , and prove dimension-dependent bounds for the computation complexity of this approximation, characterized by the size and depth of this deep ReLU neural network, explicitly in d and ε . Our results show the advantage of the adaptive method of approximation by deep ReLU neural networks over nonadaptive one.

Keywords: Deep ReLU neural network; computation complexity; high-dimensional approximation; Hölder-Nikol'skii space of mixed smoothness.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-133-4-8-18>

1. INTRODUCTION

In recent years, deep neural networks have been successfully applied to a striking variety of Machine Learning problems, including computer vision [14], natural language processing [25], speech recognition and image classification [15]. In approximation theory, there has been a number of interesting papers that address the role of depth and architecture of deep neural networks in approximating sets of functions which have a very special regularity properties such as analytic functions [7, 16], differentiable functions [19, 26], oscillatory functions [12], functions in isotropic Sobolev or Besov spaces [1, 6, 10, 13, 27], functions with dominating mixed smoothness [17, 23] or in approximating solutions to partial differential equations [9, 18, 22], to mention just a few. The main advantage of deep neural networks in approximation functions is that that they can output compositions of functions cheaply and consequently improve the convergence rate of approximation error, see [6, 7, 26]. We refer the reader to recent surveys [12, 20] for concept and results in deep neural network approximation theory.

In the recent paper [4], we have studied the approximation by deep ReLU neural networks, of functions from the Hölder-Zygmund space of mixed smoothness defined on the unit cube $\mathbb{I}^d := [0, 1]^d$ when the dimension d may be very large. The approximation error is measured in the norm of the isotropic Sobolev space. For any function f from Hölder-Zygmund space of mixed smoothness, we explicitly construct a deep ReLU neural network having an output that approximates f with a prescribed accuracy ε , and prove tight dimension-dependent estimates

of the computation complexity of this approximation, characterized as the size and depth of this deep ReLU neural network, explicitly in d and ε .

As a continuation of this paper the present paper investigates nonadaptive and adaptive high-dimensional approximation by deep ReLU neural networks for functions from Hölder-Nikol'skii spaces of mixed smoothness $H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$ on the unit cube \mathbb{I}^d . The approximation error is measured in the norm of $L_\infty(\mathbb{I}^d)$. In this context, we pay attention on the computation complexity of the deep ReLU networks, characterized by the size and depth of this deep ReLU neural network, explicitly in d and tolerance ε . A key tool for explicit construction of approximation methods by deep ReLU networks for functions in $H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$ is truncations of tensorized Faber series.

The space $H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$ of our interest is defined as follows. For univariate functions f on $\mathbb{I} := [0, 1]$, the difference operator Δ_h is defined by

$$\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x),$$

for all x and $h \geq 0$ such that $x, x+h \in \mathbb{I}$. If u is a subset of $\{1, \dots, d\}$, for multivariate functions f on \mathbb{I}^d the mixed difference operator $\Delta_{\mathbf{h},u}$ is defined by

$$\Delta_{\mathbf{h},u} := \prod_{i \in u} \Delta_{h_i}, \quad \Delta_{\mathbf{h},\emptyset} = \text{Id},$$

for all \mathbf{x} and \mathbf{h} such that $\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h} \in \mathbb{I}^d$. Here the univariate operator Δ_{h_i} is applied to the univariate function f by considering f as a function of variable x_i with the other variables held fixed. If $0 < \alpha \leq 1$, we introduce the semi-norm $|f|_{H_\infty^\alpha(u)}$ for functions $f \in C(\mathbb{I}^d)$ by

$$|f|_{H_\infty^\alpha(u)} := \sup_{\mathbf{h} > 0} \prod_{i \in u} h_i^{-\alpha} \|\Delta_{\mathbf{h},u}(f)\|_{C(\mathbb{I}^d(\mathbf{h},u))}$$

(in particular, $|f|_{H_\infty^\alpha(\emptyset)} = \|f\|_{C(\mathbb{I}^d)}$), where $\mathbb{I}^d(\mathbf{h},u) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{I}^d : x_i + h_i \in \mathbb{I}, i \in u\}$. The Hölder-Nikol'skii space $H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$ of mixed smoothness α then is defined as the set of functions $f \in C(\mathbb{I}^d)$ for which the norm

$$\|f\|_{H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)} := \max_{u \subset \{1, \dots, d\}} |f|_{H_\infty^\alpha(u)}$$

is finite. From the definition we have that $H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d) \subset C(\mathbb{I}^d)$. Denote by $\mathring{C}(\mathbb{I}^d)$ the set of all functions $f \in C(\mathbb{I}^d)$ vanishing on the boundary $\partial\mathbb{I}^d$ of \mathbb{I}^d , i.e., the set of all functions $f \in C(\mathbb{I}^d)$ such that $f(x) = 0$ if $x_j = 0$ or $x_j = 1$ for some index $j \in \{1, \dots, d\}$. Denote by $\mathring{U}_\infty^{\alpha,d}$ the set of all functions f in the intersection $\mathring{H}_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d) := H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d) \cap \mathring{C}(\mathbb{I}^d)$ such that $\|f\|_{H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)} \leq 1$.

Notation. As usual, \mathbb{N} is the natural numbers, \mathbb{Z} is the integers, \mathbb{R} is the real numbers and $\mathbb{N}_0 := \{s \in \mathbb{Z} : s \geq 0\}$; $\mathbb{N}_{-1} = \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. The letter d is reserved for the underlying dimension of \mathbb{R}^d , \mathbb{N}^d , etc. Vectorial quantities are denoted by boldface letters and x_i denotes the i th coordinate of $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, i.e., $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_d)$. For $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, we denote $|\mathbf{x}|_1 := |x_1| + \dots + |x_d|$ and $2^{\mathbf{x}} := (2^{x_1}, \dots, 2^{x_d})$. For $\mathbf{k}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}_0^d$, we denote $2^{-\mathbf{k}\mathbf{s}} := (2^{-k_1 s_1}, \dots, 2^{-k_d s_d})$. Universal constants or constants depending on parameter α are denoted by C or C_α , respectively.

2. DEEP RELU NEURAL NETWORKS

In this section we introduce necessary definitions and elementary facts on deep ReLU neural networks. There is a wide variety of neural network architectures and each of them is adapted to specific tasks. We only consider feed-forward deep ReLU neural networks for which only connections between neighboring layers are allowed.

Definition 1. Let $d, L \in \mathbb{N}$, $L \geq 2$, $N_0 = d$, and $N_1, \dots, N_L \in \mathbb{N}$. Let $\mathbf{W}^\ell = (w_{i,j}^\ell)$, $\ell = 1, \dots, L$, be $N_\ell \times N_{\ell-1}$ matrix, and $\mathbf{b}^\ell = (b_j^\ell) \in \mathbb{R}^{N_\ell}$.

- A neural network Φ with input dimension d and L layers is a sequence of matrix-vector tuples

$$\Phi = ((\mathbf{W}^1, \mathbf{b}^1), \dots, (\mathbf{W}^L, \mathbf{b}^L)).$$

We will use the following terminology.

- The number of layers $L(\Phi) = L$ is the depth of Φ ;

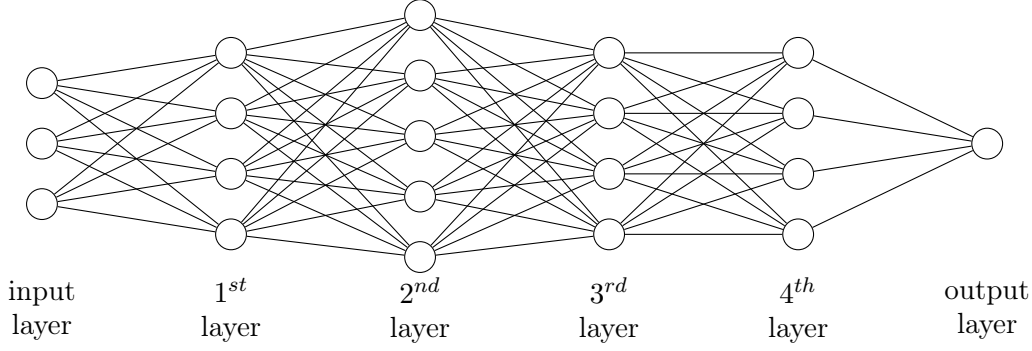


FIGURE 1 – The graph associated to a deep neural network with input dimension 3 and 5 layers.

- $N_w(\Phi) = \max_{\ell=0,\dots,L}\{N_\ell\}$ is the width of Φ ; $\mathbf{N}(\Phi) = (N_0, N_1, \dots, N_L)$ the dimension of Φ ;
- The real numbers $w_{i,j}^\ell$ and b_j^ℓ are edge and node weights of Φ , respectively;
- The number of nonzero weights $w_{i,j}^\ell$ and b_j^ℓ is the size of Φ and denoted by $W(\Phi)$;
- When $L(\Phi) \geq 3$, Φ is called a deep neural network, and otherwise, a shallow neural network.
- A neural network architecture \mathbb{A} with input dimension d and L layers is a neural network

$$\mathbb{A} = ((\mathbf{W}^1, \mathbf{b}^1), \dots, (\mathbf{W}^L, \mathbf{b}^L)),$$

where elements of \mathbf{W}^ℓ and \mathbf{b}^ℓ , $\ell = 1, \dots, L$, are in $\{0, 1\}$.

The above defined deep neural network is sometimes called standard networks to distinguish with networks allowing for connections of neurons in non-neighboring layers. A deep neural network can be visualized in a graph. The graph associated with a deep neural network Φ defined in Definition 1 consists of $L + 1$ layers which are numbered from 0 to L . The ℓ th layer has N_ℓ nodes which are numbered from 1 to N_ℓ . If $w_{i,j}^\ell \neq 0$, then there is an edge connecting the node j in the layer $\ell - 1$ to the node i in the layer ℓ .

In Figure 1 we illustrate a deep neural network with input dimension 3 and 5 layers.

Definition 2. Given $L \in \mathbb{N}$, $L \geq 2$, and a deep neural network architecture $\mathbb{A} = ((\overline{\mathbf{W}}^1, \overline{\mathbf{b}}^1), \dots, (\overline{\mathbf{W}}^L, \overline{\mathbf{b}}^L))$. We say that a neural network $\Phi = ((\mathbf{W}^1, \mathbf{b}^1), \dots, (\mathbf{W}^L, \mathbf{b}^L))$ has architecture \mathbb{A} if

- $\mathbf{N}(\Phi) = \mathbf{N}(\mathbb{A})$
- $\overline{w}_{i,j}^\ell = 0$ implies $w_{i,j}^\ell = 0$, $\overline{b}_i^\ell = 0$ implies $b_i^\ell = 0$ for all $i = 1, \dots, N_\ell$, $j = 1, \dots, N_{\ell-1}$, and $\ell = 1, \dots, L$. Here $\overline{w}_{i,j}^\ell$ are entries of $\overline{\mathbf{W}}^\ell$ and \overline{b}_i^ℓ are elements of $\overline{\mathbf{b}}^\ell$, $\ell = 1, \dots, L$.

For a given deep neural network $\Phi = ((\mathbf{W}^1, \mathbf{b}^1), \dots, (\mathbf{W}^L, \mathbf{b}^L))$, there exists a unique deep neural network architecture $\mathbb{A} = ((\overline{\mathbf{W}}^1, \overline{\mathbf{b}}^1), \dots, (\overline{\mathbf{W}}^L, \overline{\mathbf{b}}^L))$ such that

- $\mathbf{N}(\Phi) = \mathbf{N}(\mathbb{A})$
- $\overline{w}_{i,j}^\ell = 0 \iff w_{i,j}^\ell = 0$, $\overline{b}_i^\ell = 0 \iff b_i^\ell = 0$ for all $i = 1, \dots, N_\ell$, $j = 1, \dots, N_{\ell-1}$, and $\ell = 1, \dots, L$.

We call this architecture \mathbb{A} the minimal architecture of Φ (this definition is proper in the sense that any architecture of Φ is also an architecture of \mathbb{A} .)

A deep neural network is associated with an activation function which calculates output at each node. The choice of activation function depends on the problem under consideration. In this paper we focus our attention on ReLU activation function defined by $\sigma(t) := \max\{t, 0\}$, $t \in \mathbb{R}$. We will use the notation $\sigma(\mathbf{x}) := (\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_d))$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Definition 3. A deep ReLU neural network with input dimension d and L layers is a neural network

$$\Phi = ((\mathbf{W}^1, \mathbf{b}^1), \dots, (\mathbf{W}^L, \mathbf{b}^L))$$

in which the following computation scheme is implemented

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^0 &:= \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{z}^\ell &:= \sigma(\mathbf{W}^\ell \mathbf{z}^{\ell-1} + \mathbf{b}^\ell), \quad \ell = 1, \dots, L-1, \\ \mathbf{z}^L &:= \mathbf{W}^L \mathbf{z}^{L-1} + \mathbf{b}^L. \end{aligned}$$

We call \mathbf{z}^0 the input and with an ambiguity denote $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{z}^L$ the output of Φ and in some places we identify a deep ReLU neural network with its output.

From the above definition, a deep ReLU neural network Φ is a function mapping from \mathbb{R}^d to \mathbb{R}^{N_L} . Several deep ReLU neural networks can be combined to form a larger deep ReLU neural network whose output is a linear combination or composition of outputs of sub-networks. In the following, we introduce parallelization and concatenation, see, e.g., [4] and [19].

Lemma 1 (Parallelization). *Let $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded set, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$. Let Φ_j , $j = 1, \dots, N$ be deep ReLU neural networks with input dimension d . Then we can explicitly construct a deep ReLU neural network denoted by Φ so that*

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Moreover we have

$$L(\Phi) = \max_{j=1, \dots, N} \{L(\Phi_j)\} \quad \text{and} \quad W(\Phi) \leq 3N \max_{j=1, \dots, N} W(\Phi_j).$$

The network Φ is called the parallelization network of Φ_j , $j = 1, \dots, N$.

Lemma 2 (Concatenation). *Let Φ_1 and Φ_2 be two ReLU neural networks such that output layer of Φ_1 has the same dimension as input layer of Φ_2 . Then, we can explicitly construct a ReLU neural network Φ such that $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_2(\Phi_1(\mathbf{x}))$ for $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Moreover we have*

$$L(\Phi) = L(\Phi_1) + L(\Phi_2) \quad \text{and} \quad W(\Phi) \leq 2W(\Phi_1) + 2W(\Phi_2).$$

The network Φ in this lemma is called the concatenation network of Φ_1 and Φ_2 .

3. TENSORIZED FABER SERIES AND INTERPOLATION SAMPLING RECOVERY

In this section we recall a decomposition of continuous functions on the unit cube \mathbb{I}^d by tensorized Faber series, interpolation approximation by truncated Faber series.

Let $\varphi(x) = (1 - |x - 1|)_+$, $x \in \mathbb{I}$, be the hat function (the piece-wise linear B-spline with knots at $0, 1, 2$), where $x_+ := \max(x, 0)$ for $x \in \mathbb{R}$. For $k \in \mathbb{N}_{-1}$ we define the functions $\varphi_{k,s}$ by

$$\varphi_{k,s}(x) := \varphi(2^{k+1}x - 2s), \quad k \geq 0, \quad s \in Z(k) := \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}, \quad (1)$$

and

$$\varphi_{-1,s}(x) := \varphi(x - s + 1), \quad s \in Z(-1) := \{0, 1\}. \quad (2)$$

For a univariate function f on \mathbb{I} , $k \in \mathbb{N}_{-1}$, and $s \in Z(k)$ we define

$$\lambda_{k,s}(f) := -\frac{1}{2} \Delta_{2^{-k-1}}^2 f(2^{-k}s), \quad k \geq 0, \quad \lambda_{-1,s}(f) := f(s),$$

where

$$\Delta_h^2 f(x) := f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x),$$

for all x and $h \geq 0$ such that $x, x + h \in \mathbb{I}$. If $m \in \mathbb{N}_0$ we put

$$R_m(f) := \sum_{k=0}^m q_k(f), \quad q_k(f) := \sum_{s \in Z(k)} \lambda_{k,s}(f) \varphi_{k,s}.$$

For $k \in \mathbb{N}_0$, we define the functions $\varphi_{k,s}^* \in \mathring{C}(\mathbb{I})$ by

$$\varphi_{k,s}^*(x) := \varphi(2^{k+1}x - s + 1), \quad s \in Z_*(k) := \{1, \dots, 2^{k+1} - 1\},$$

and for $f \in \mathring{C}(\mathbb{I})$ one can check

$$R_m(f) = \sum_{s \in Z_*(m)} f(2^{-m-1}s) \varphi_{m,s}^*.$$

Hence $R_m(f) \in \mathring{C}(\mathbb{I})$ interpolates f at the points $2^{-m-1}s$, $s \in Z_*(m)$, that is,

$$R_m(f)(2^{-m-1}s) = f(2^{-m-1}s), \quad s \in Z_*(m).$$

Put $Z(\mathbf{k}) := \times_{j=1}^d Z(k_j)$. For $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{-1}^d$, $\mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})$, we introduce the tensorized Faber basis by

$$\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}}(\mathbf{x}) := \varphi_{k_1,s_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_{k_d,s_d}(x_d), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{I}^d. \quad (3)$$

We also define the linear functionals $\lambda_{\mathbf{k},\mathbf{s}}$ for multivariate function f on \mathbb{I}^d , $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{-1}^d$, and $\mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})$ by

$$\lambda_{\mathbf{k},\mathbf{s}}(f) := \prod_{j=1}^d \lambda_{k_j,s_j}(f),$$

where the univariate functional λ_{k_j,s_j} is applied to the univariate function f by considering f as a function of variable x_j with the other variables held fixed. We have the following lemma.

Lemma 3. *The tensorized Faber system $\{\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}_{-1}^d, \mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})\}$ is a basis in $C(\mathbb{I}^d)$. Moreover, every function $f \in C(\mathbb{I}^d)$ can be represented by the Faber series*

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_{-1}^d} q_{\mathbf{k}}(f), \quad q_{\mathbf{k}}(f) := \sum_{\mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})} \lambda_{\mathbf{k},\mathbf{s}}(f) \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}} \quad (4)$$

converging in the norm of $C(\mathbb{I}^d)$.

When $d = 1$, the system (1), (2) and above result goes back to Faber [8]. The decomposition (4) when $d = 2$ and an extension for function spaces with mixed smoothness was obtained independently in [24, Theorem 3.10] and in [2, Section 4]. A generalization for the case $d \geq 2$ and also to B-spline interpolation and quasi-interpolation representation was established in [2, 3].

When $f \in \mathring{U}_{\infty}^{\alpha,d}$, $\lambda_{\mathbf{k},\mathbf{s}}(f) = 0$ if $k_j = -1$ for some $j \in \{1, \dots, d\}$, hence we can write

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d} q_{\mathbf{k}}(f)$$

with unconditional convergence in $C(\mathbb{I}^d)$, see [24, Theorem 3.13]. In this case it holds the following estimate

$$|\lambda_{\mathbf{k},\mathbf{s}}(f)| \leq 2^{-\alpha d} 2^{-\alpha |\mathbf{k}|_1},$$

for $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})$.

For $f \in \mathring{C}(\mathbb{I}^d)$, we define the operator R_m by

$$R_m(f) := \sum_{|\mathbf{k}|_1 \leq m} q_{\mathbf{k}}(f) = \sum_{|\mathbf{k}|_1 \leq m} \sum_{\mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})} \lambda_{\mathbf{k},\mathbf{s}}(f) \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}}. \quad (5)$$

The truncated Faber series $R_m(f) \in \mathring{C}(\mathbb{I}^d)$ completely determined by values of f at the points $2^{-\mathbf{k}-1}\mathbf{s}$, for $(\mathbf{k}, \mathbf{s}) \in G^d(m)$, where

$$G^d(m) := \{(\mathbf{k}, \mathbf{s}) : |\mathbf{k}|_1 \leq m, \mathbf{s} \in Z_*(\mathbf{k})\},$$

$Z_*(\mathbf{k}) := \prod_{j=1}^d Z_*(k_j)$ and $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$. Moreover, $R_m(f)$ interpolates f at the points $2^{-\mathbf{k}-1}\mathbf{s}$, for $(\mathbf{k}, \mathbf{s}) \in G^d(m)$, i.e.,

$$R_m(f)(2^{-\mathbf{k}-1}\mathbf{s}) = f(2^{-\mathbf{k}-1}\mathbf{s}), \quad (\mathbf{k}, \mathbf{s}) \in G^d(m).$$

The following lemma gives a d -dependent estimate of the approximation error by $R_m(f)$ of $f \in \mathring{U}_\infty^{\alpha,d}$, see [5].

Lemma 4. *Let $d, m \in \mathbb{N}$, and $0 < \alpha \leq 1$. Then we have*

$$\sup_{f \in \mathring{U}_\infty^{\alpha,d}} \|f - R_m(f)\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} \leq 2^{-\alpha} B^d 2^{-\alpha m} \binom{m+d}{d-1}, \quad B = (2^\alpha - 1)^{-1}.$$

For univariate functions $f \in \mathring{C}(\mathbb{I})$, let the operator T_k , $k \in \mathbb{N}_0$, be defined by

$$T_k(f) := f - R_{k-1}(f)$$

with the operator R_k defined as in (5) and the convention $R_{-1} := 0$. From this definition we have T_0 is the identity operator. Notice that for $f \in \mathring{U}_\infty^{\alpha,1}$, it holds the inequality $\|T_k(f)\|_{H_\infty^\alpha(\mathbb{I})} \leq 2$.

For a multivariate function $f \in \mathring{C}(\mathbb{I}^d)$, the tensor product operator $T_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$, is defined by

$$T_{\mathbf{k}}(f) := \prod_{j=1}^d T_{k_j}(f),$$

where the univariate operator T_{k_j} is applied to the univariate function f by considering f as a function of variable x_j with the other variables held fixed. The following lemma was proved in [5].

Lemma 5. *Let $n, d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1]$, and $f \in \mathring{U}_\infty^{\alpha,d}$. Then $f - R_n(f)$ can be represented in the following special form*

$$f - R_n(f) = \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{|\mathbf{k}_j|_1 \leq n} F_{\mathbf{k}_j}, \quad (6)$$

where $F_{\mathbf{k}_0} := T_{(n+1)\mathbf{e}^1}$ and

$$F_{\mathbf{k}_j} := T_{(n+1-|\mathbf{k}_j|_1)\mathbf{e}^{j+1}}(q_{\mathbf{k}_j}(f)), \quad j = 1, \dots, d-1.$$

Here $\mathbf{k}_j = (k_1, \dots, k_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^d$ and $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1, \dots, d}$ is the standard basis of \mathbb{R}^d .

4. DEEP RELU NETWORK APPROXIMATIONS

In this section, we construct nonadaptive and adaptive methods of approximation by deep ReLU neural networks of functions $f \in \mathring{U}_\infty^{\alpha,d}$. Since the case $d = 1$ was already studied in [1, 6, 10] for nonadaptive method and in [6, 27] for adaptive method, in this paper we focus our attention on the case $d \geq 2$. We first recall a result of approximating tensorized Faber functions $\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}}$ by deep ReLU neural networks, see [4].

Lemma 6. *For every dimension $d \geq 2$, $\delta \in (0, 1)$ and for the d -variate hat functions $\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^d$, $\mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})$, defined as in (3), we can explicitly construct a deep neural network $\Phi_\delta(\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}})$ so that*

$$\|\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}} - \Phi_\delta(\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}})\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} \leq \delta$$

and

$$W(\Phi_\delta(\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}})) \leq Cd \log(d\delta^{-1}) \quad \text{and} \quad L(\Phi_\delta(\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}})) \leq C \log d \log(d\delta^{-1}).$$

Moreover, $\text{supp } \Phi_\delta(\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}}) \subset \text{supp } \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}}$.

The above result allows us to construct a deep ReLU network $\Phi_\varepsilon(R_n(f))$ to approximate $R_n(f)$. The network $\Phi_\varepsilon(R_n(f))$ is constructed by parallelization of the networks $\{\Phi_\delta(\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}})\}_{|\mathbf{k}|_1 \leq n, \mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})}$ and has output

$$\Phi_\varepsilon(R_n(f))(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|_1 \leq n} \sum_{\mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})} \lambda_{\mathbf{k},\mathbf{s}}(f) \Phi_\delta(\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{s}})(\mathbf{x}).$$

Lemma 6 and 1 allow us to control number of weights and length of $\Phi_\varepsilon(R_n(f))$. More precisely we have the following.

Lemma 7. Let $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1]$ and $\varepsilon \in (0, 1)$. Then for every $f \in \mathring{U}_{\infty}^{\alpha, d}$ we can explicitly construct a deep ReLU network $\Phi_{\varepsilon}(R_n(f))$ of the same architecture \mathbb{A}_{ε} so that

$$\|R_n(f) - \Phi_{\varepsilon}(R_n(f))\|_{L_{\infty}(\mathbb{I}^d)} \leq \varepsilon.$$

Moreover, we have

$$W(\Phi_{\varepsilon}(R_n(f))) \leq Cd2^n \binom{n+d-1}{d-1} \log(dB^d\varepsilon^{-1}) \quad (7)$$

and

$$L(\Phi_{\varepsilon}(R_n(f))) \leq C \log d \log(dB^d\varepsilon^{-1}). \quad (8)$$

The estimates (7) and (8) also hold for $W(\mathbb{A}_{\varepsilon})$ and $L(\mathbb{A}_{\varepsilon})$ respectively.

We are now in the position to formulate our nonadaptive result. Nonadaptivity means that architecture of approximating deep ReLU neural networks is the same for all $f \in \mathring{U}_{\infty}^{\alpha, d}$.

Theorem 1. Let $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, and $\alpha \in (0, 1]$. Then there is $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(d, \alpha) \in (0, 1]$ such that for every $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ we can explicitly construct a deep neural network architecture \mathbb{A}_{ε} with the following property. For every $f \in \mathring{U}_{\infty}^{\alpha, d}$, we can explicitly construct a deep ReLU neural network $\Phi_{\varepsilon}(f)$ having the architecture \mathbb{A}_{ε} such that

$$\|f - \Phi_{\varepsilon}(f)\|_{L_{\infty}(\mathbb{I}^d)} \leq \varepsilon.$$

Moreover, we have

$$W(\mathbb{A}_{\varepsilon}) \leq C_{\alpha} d \left(\frac{K_1^d}{(d-1)!} \right)^{\frac{1}{\alpha}+1} \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} \log(2\varepsilon^{-1})^{(d-1)(\frac{1}{\alpha}+1)+1} \quad (9)$$

and

$$L(\mathbb{A}_{\varepsilon}) \leq C \log d \log(2\varepsilon^{-1}),$$

where $K_1 = B^{1/(\alpha+1)}4\alpha^{-1}$ with B given in Lemma 4 and C_{α} depends only on α .

Let us explain the idea of proving this theorem. Our technique is first to approximate f by its truncation of Faber series $R_n(f)$ and then approximate $R_n(f)$ by a deep ReLU network. With $\varepsilon' = \varepsilon/2$ in Lemma 7 and $\Phi_{\varepsilon}(f) = \Phi_{\varepsilon'}(R_n(f))$ we have

$$\begin{aligned} \|f - \Phi_{\varepsilon}(f)\|_{L_{\infty}(\mathbb{I}^d)} &\leq \|f - R_n(f)\|_{L_{\infty}(\mathbb{I}^d)} + \|R_n - \Phi_{\varepsilon'}(R_n(f))\|_{L_{\infty}(\mathbb{I}^d)} \\ &\leq 2^{-\alpha} B^d 2^{-\alpha n} \binom{n+d}{d-1} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Then we choose n such that $2^{-\alpha} B^d 2^{-\alpha n} \binom{n+d}{d-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. With this choice of n , Lemma 7 gives estimates for number of weighs and length of $\Phi_{\varepsilon}(f)$.

To complete the proof, we notice that $\Phi_{\varepsilon}(f)$ has the architecture \mathbb{A}_{ε} which is defined as the minimal architecture of the deep ReLU neural network Φ_{ε} obtained by parallelization of the networks $\{\Phi_{\delta}(\varphi_{\mathbf{k}, \mathbf{s}})\}_{|\mathbf{k}|_1 \leq n, \mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})}$ with the output

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|_1 \leq n} \sum_{\mathbf{s} \in Z(\mathbf{k})} \Phi_{\delta}(\varphi_{\mathbf{k}, \mathbf{s}})(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{I}^d.$$

The advantage of the above method is that the deep ReLU neural networks are easily constructed and they have the same architecture for all functions in $\mathring{U}_{\infty}^{\alpha, d}$. Since it uses $R_n(f)$ as a mediate approximation, a disadvantage is that with the same accuracy the computation complexity of deep ReLU networks is not better than that when approximating functions in $\mathring{U}_{\infty}^{\alpha, d}$ by linear methods. To overcome this disadvantage we develop a technique used in [27] and [6] for the univariate case. This method reduces the computation complexity of the approximating deep ReLU networks comparing with that of the nonadaptive method given in Theorem 1. Our results on adaptive methods are read as follows.

Theorem 2. Let $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $\alpha \in (0, 1]$. Then there is $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(d, \alpha) \in (0, 1/2]$ such that for every $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ and for every $f \in \mathring{U}_\infty^{\alpha, d}$ we can explicitly construct an adaptive deep ReLU neural network $\Phi_\varepsilon(f)$ so that

$$\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} \leq \varepsilon.$$

Moreover, we have

$$W(\Phi_\varepsilon(f)) \leq C_\alpha d^2 \left(\frac{K_2^d}{(d-1)!} \right)^{\frac{2}{\alpha}+2} \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} (\log(2\varepsilon^{-1}) \log \log(2\varepsilon^{-1}))^{(1+\frac{1}{\alpha})(d-1)} \quad (10)$$

and

$$L(\Phi_\varepsilon(f)) \leq C'_\alpha \varepsilon^{-\frac{1}{d\alpha}} (\log(2\varepsilon^{-1}))^{\frac{d-1-\alpha}{d\alpha}} (\log \log(2\varepsilon^{-1}))^{\frac{(\alpha+1)(d-1)}{d\alpha}},$$

where

$$K_2 := 4(2^{\alpha+3} B)^{\frac{1}{2\alpha+2}} (\alpha^{-1} \log(2\alpha^{-1}))^{1/2}$$

and positive constants C_α, C'_α depend on α only.

Comparing (9) and (10) we find the later estimation improves $\log(2\varepsilon^{-1})$. Notice that terms in (9) and (10) which depend on dimension d only decay as fast as super exponential in d .

We sketch a plan of proof of this theorem. Let $f \in \mathring{U}_\infty^{\alpha, d}$ and $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (with some $\varepsilon_0 \in (0, 1)$) be given. Using the writing

$$f = R_n(f) + (f - R_n(f)),$$

we explicitly construct deep ReLU neural networks $\Phi_{\varepsilon/2}(R_n(f))$ and $\Phi_{\varepsilon/2}(f - R_n(f))$ to approximate the terms $R_n(f)$ and $f - R_n(f)$ with accuracy $\varepsilon/2$. We then construct a deep ReLU neural network $\Phi_\varepsilon(f)$ as a parallelization of $\Phi_{\varepsilon/2}(R_n(f))$ and $\Phi_{\varepsilon/2}(f - R_n(f))$ with an output

$$\Phi_\varepsilon(f)(\mathbf{x}) = \Phi_{\varepsilon/2}(R_n(f))(\mathbf{x}) + \Phi_{\varepsilon/2}(f - R_n(f))(\mathbf{x}).$$

Then we have

$$\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} \leq \varepsilon.$$

For construction of the network $\Phi_{\varepsilon/2}(R_n(f))$ we use Lemma 7. To construct a desired deep ReLU neural network $\Phi_{\varepsilon/2}(f - R_n(f))$ our strategy is to employ the special representation in Lemma 5. Using parallelization and concatenation of deep ReLU neural networks in Lemma 1 and 2 we explicitly construct deep ReLU neural networks $\Phi_{\varepsilon'}(F_{\mathbf{k}_j})$ to approximate each term $F_{\mathbf{k}_j}$ with accuracy ε' in the sum in (6). The network $\Phi_{\varepsilon/2}(f - R_n(f))$ is defined as a parallelization of $\Phi_{\varepsilon'}(F_{\mathbf{k}_j})$, $|\mathbf{k}_j|_1 \leq n$, $j = 0, \dots, d-1$ with the output

$$\Phi_{\varepsilon/2}(f - R_n(f))(\mathbf{x}) := \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{|\mathbf{k}_j|_1 \leq n} \Phi_{\varepsilon'}(F_{\mathbf{k}_j})(\mathbf{x}).$$

In the next step we chose ε' depending on ε such that

$$\|(f - R_n(f)) - \Phi_{\varepsilon/2}(f - R_n(f))\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} \leq \varepsilon/2.$$

Finally, the size and depth of $\Phi_\varepsilon(f)$ are estimated explicitly in d and ε from the estimation of sizes and depths of $\Phi_{\varepsilon/2}(R_n(f))$ and $\Phi_{\varepsilon'}(F_{\mathbf{k}_j})$.

5. AN APPLICATION TO NUMERICAL SOLVING PDES

In this section, we apply the results on approximation by deep ReLU neural networks in Section 4 for numerical approximation of the solution to elliptic PDEs.

Consider a modeled diffusion elliptic equation

$$-\operatorname{div}(a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) \quad \text{in } \mathbb{I}^d, \quad u|_{\partial\mathbb{I}^d} = 0,$$

with a function f and a diffusion coefficient a having sufficient regularity. Denote by $V := H_0^1(\mathbb{I}^d) = \mathring{W}_2^1(\mathbb{I}^d)$ the energy space. If a satisfies the ellipticity assumption

$$0 < a_{\min} \leq a(\mathbf{x}) \leq a_{\max} < \infty, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{I}^d,$$

by the well-known Lax-Milgram lemma, there exists a unique solution $u \in V$ which satisfies the variational equation

$$\int_{\mathbb{I}^d} a(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{I}^d} f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in V.$$

We want to approximate the solution u by deep ReLU neural networks. The approximation error is measured in the norm of $L_\infty(\mathbb{I}^d)$. Assume for the modeled case that a and f have Hölder-Nikol'skii mixed smoothness 1, i.e., $a, f \in H_\infty^1(\mathbb{I}^d)$. Then, the solution u has at least mixed derivatives $\partial^\alpha u$ with $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $\max_{j=1, \dots, d} \alpha_j \leq 1$, belonging to $L_2(\mathbb{I}^d)$ [11], and therefore, by embedding for function spaces of mixed smoothness, see [21, Theorem 2.4.1], u belongs to $\dot{H}_\infty^{1/2}(\mathbb{I}^d)$. For simplicity we assume that $u \in \dot{U}_\infty^{1/2}$.

For the nonadaptive approximation, according to Theorem 1, for any $\varepsilon > 0$ sufficient small one can explicitly construct a deep neural network architecture \mathbb{A}_ε independent of f and a , and a deep ReLU neural network $\Phi_\varepsilon(u)$ having the architecture \mathbb{A}_ε such that

$$\|u - \Phi_\varepsilon(u)\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} \leq \varepsilon,$$

$$W(\mathbb{A}_\varepsilon) \leq Cd \left(\frac{K_1^d}{(d-1)!} \right)^3 \varepsilon^{-2} \log(2\varepsilon^{-1})^{3(d-1)+1},$$

and

$$L(\mathbb{A}_\varepsilon) \leq C \log d \log(2\varepsilon^{-1}),$$

where $K_1 := 8(\sqrt{2} + 1)^{3/2}$.

For the adaptive approximation, according to Theorem 2, for any $\varepsilon > 0$ sufficient small one can explicitly construct an adaptive deep ReLU neural network $\Phi_\varepsilon(u)$ so that

$$\|u - \Phi_\varepsilon(u)\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} \leq \varepsilon,$$

$$W(\Phi_\varepsilon(u)) \leq Cd^2 \left(\frac{K_2^d}{(d-1)!} \right)^6 \varepsilon^{-2} (\log(2\varepsilon^{-1}) \log \log(2\varepsilon^{-1}))^{3(d-1)},$$

and

$$L(\Phi_\varepsilon(u)) \leq C' \varepsilon^{-\frac{2}{d}} (\log(2\varepsilon^{-1}))^{\frac{2d-3}{d}} (\log \log(2\varepsilon^{-1}))^{\frac{3(d-1)}{d}},$$

where $K_2 := 16((2 + \sqrt{2}))^{1/3}$.

Acknowledgments. This work is funded by Vietnam National Foundation for Science and Technology Development (NAFOSTED) under Grant No. 102.01-2020.03. A part of this work was done when the authors were working at the Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (VIASM). They would like to thank the VIASM for providing a fruitful research environment and working condition.

References

- 1 Ali M., Nouy A. Approximation of smoothness classes by deep ReLU networks // arXiv:2007.15645. –2020.
- 2 Dũng D. B-spline quasi-interpolant representations and sampling recovery of functions with mixed smoothness // J. Complexity. –2011. – Vol.27, №541. –P. 567.
- 3 Dũng D. Sampling and cubature on sparse grids based on a B-spline quasi-interpolation // Found. Comp. Math. –2016. –Vol. 16. –P. 1193-1240.
- 4 Dũng D., Nguyen V. K. Sparse-grid sampling recovery and deep ReLU neural networks in high-dimensional approximation // arxiv.org/abs/2007.08729. –2020.
- 5 Dũng D., Nguyen V. K. High-dimensional nonlinear approximation by parametric manifolds in Hölder-Nikol'skii spaces of mixed smoothness // arxiv.org/abs/2102.04370. –2021.
- 6 Daubechies I., DeVore R., Foucart S., Hanin B., Petrova G. Nonlinear approximation and (Deep) ReLU networks // arXiv:1905.02199. –2019.
- 7 E W., Wang Q. Exponential convergence of the deep neural network approximation for analytic functions // Sci. China Math. –2018. – Vol. 61. –P. 1733-1740.
- 8 Faber G. Über stetige Funktionen // Math. Ann. –1909. – Vol. 66. –P. 81-94.
- 9 Geist M., Petersen P., Raslan M., Schneider R., Kutyniok G. Numerical solution of the parametric diffusion equation by deep neural networks // Preprint. –2020.
- 10 Gribonval R., Kutyniok G., Nielsen M., Voigtlaender F. Approximation spaces of deep neural networks // arXiv:1905.01208. –2019.

- 11 Griebel M., Knappek S. Optimized general sparse grid approximation spaces for operator equations // Math. Comp. –2009. –Vol. 78. –P. 2223-2257.
- 12 Grohs P., Perekrestenko D., Elbrächter D., Bolcskei H. Deep neural network approximation theory // arXiv: 1901.02220. –2019.
- 13 Gühring I., Kutyniok G., Petersen P. Error bounds for approximations with deep ReLU neural networks in $W^{s,p}$ norms // Anal. Appl. (Singap.). –2020 –Vol. 18. –P. 803-859.
- 14 Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G. E. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. NeurIPS. –2012. –P. 1106-1114.
- 15 LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning // Nature. –2015. –Vol. 521. –P. 436-444.
- 16 Mhaskar H. N. Neural networks for optimal approximation of smooth and analytic functions // Neural Comput. –1996. –Vol. 8. –P. 164-177.
- 17 Montanelli H., Du Q. New error bounds for deep ReLU networks using sparse grids // SIAM J. Math. Data Sci. –2019. –Vol. 1. –P. 78-92.
- 18 Opschoor J. A. A., Petersen P. C., Schwab C. Deep ReLU networks and high-order finite element methods // Anal. Appl. (Singap.). –2020. –Vol. 18. –P. 715-770.
- 19 Petersen P., Voigtlaender F. Optimal approximation of piecewise smooth functions using deep ReLU neural networks // Neural Netw. –2018. –Vol. 108. –P. 296-330.
- 20 Petersen P. C. Neural network theory. Preprint. –2020.
- 21 Schmeisser H. Triebel H. Topics in Fourier Analysis and Function Spaces. Chichester, New York, Wiley. –1987.
- 22 Schwab C. Zech J. Deep learning in high dimension: Neural network expression rates for generalized polynomial chaos expansions in UQ // Anal. Appl. (Singap.). –2019. –Vol. 17. –P. 19-55.
- 23 Suzuki T. Adaptivity of deep ReLU network for learning in Besov and mixed smooth Besov spaces: optimal rate and curse of dimensionality // International Conference on Learning Representations. –2019.
- 24 Triebel H. Bases in Function Spaces, Sampling, Discrepancy, Numerical Integration. European Math. Soc. Publishing House, Zürich. –2010.
- 25 Wu Y., Schuster M., Chen Z., Le Q. V., Norouzi M. Google’s neural machine translation system: Bridging the gap between human and machine translation // arXiv: 1609.08144. –2016.
- 26 Yarotsky D. Error bounds for approximations with deep ReLU networks // Neural Netw. –2017. –Vol. 94. –P. 103-114.
- 27 Yarotsky D. Quantified advantage of discontinuous weight selection in approximations with deep neural networks // arXiv: 1705.01365. –2017.

Д. Зунг¹, В. К. Нгуен², М. С. Тао³

¹ Вьетнам ұлттық университеті, Ақпараттық технологиялар институты, Ханой, Вьетнам

² Көлік және коммуникация университеті, Іргелі ғылымдар факультеті, Ханой, Вьетнам

³ Хонг Дук университеті, Жаратылыстану ғылымдары факультеті, Тханьхоа, Вьетнам

ReLU терең нейрондық желілері бойынша көп өлшемді жуықтаудың есептеу күрделілігі туралы

Аннотация: Мақалада $\mathbb{I}^d := [0, 1]^d$ бірлік кубында аралас тегістікті $H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$ Гольдер-Никольский кеңістігіндегі функцияларды жуықтау үшін ReLU терең нейрондық желілерінің есептеу күрделілігі зерттелген. Кез келген $f \in H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$ функциясы үшін f -ті берілген ε дәлдікпен жуықтайтын шығыс сигналы бар адаптивті емес және адаптивті ReLU терең нейрондық желілері құрылды және осы ReLU терең нейрондық желісінің өлшемі мен тереңдігі арқылы сипатталатын жуықтаудың есептеу күрделілігінің бағалаулары d және ε шамаларынан тәуелді болатындығы дәлелденеді. Зерттеу нәтижелері ReLU терең нейрондық желілерімен жуықтаудың адаптивті әдісі адаптивті емес әдіске қарағанда артықшылығын көрсетті.

Түйін сөздер: ReLU терең нейрондық желісі; есептеудің күрделілігі; көп өлшемді жуықтау; аралас тегістікті Гельдер-Никольский кеңістігі.

Д. Зунг¹, В. К. Нгуен², М. С. Тао³

¹ Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам

² Факультет фундаментальных наук Университета транспорта и коммуникаций Ханой, Вьетнам

³ Факультет естественных наук Университета Хонг Дук, Тханьхоа, Вьетнам

О сложности вычислений многомерной аппроксимации глубокими нейронными сетями ReLU

Аннотация: В статье исследуется вычислительная сложность глубоких нейронных сетей ReLU для аппроксимации функций в пространствах Гельдера-Никольского со смешанной гладкостью $H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$ на единичном кубе $\mathbb{I}^d := [0, 1]^d$. Для любой функции $f \in H_\infty^\alpha(\mathbb{I}^d)$, строятся неадаптивные и адаптивные глубокие нейронные сети ReLU, имеющие выходные сигналы, приближающие f с заданной точностью ε , и доказывается, что оценки вычислительной сложности приближения, характеризующиеся размером и глубиной этой глубокой нейронной сети ReLU, зависят от d и ε . Результаты показывают преимущество адаптивного метода аппроксимации глубокими нейронными сетями ReLU над неадаптивным методом.

Ключевые слова: Глубокая нейронная сеть ReLU; вычислительная сложность; многомерное приближение; Пространство Гельдера-Никольского смешанной гладкости.

References

- 1 M. Ali and A. Nouy. Approximation of smoothness classes by deep ReLU networks. arXiv:2007.15645 (2020).
- 2 D. Dũng. B-spline quasi-interpolant representations and sampling recovery of functions with mixed smoothness. *J. Complexity*, 27(541), 567 (2011).
- 3 D. Dũng. Sampling and cubature on sparse grids based on a B-spline quasi-interpolation. *Found. Comp. Math.*, 16, 1193-1240 (2016).
- 4 D. Dũng and V. K. Nguyen. Sparse-grid sampling recovery and deep ReLU neural networks in high-dimensional approximation. arxiv.org/abs/2007.08729 (2020).
- 5 D. Dũng and V. K. Nguyen. High-dimensional nonlinear approximation by parametric manifolds in Hölder-Nikol'skii spaces of mixed smoothness. arxiv.org/abs/2102.04370 (2021).
- 6 I. Daubechies, R. DeVore, S. Foucart, B. Hanin, and G. Petrova. Nonlinear approximation and (Deep) ReLU networks. arXiv:1905.02199 (2019).
- 7 W. E and Q. Wang. Exponential convergence of the deep neural network approximation for analytic functions. *Sci. China Math.*, 61, 1733-1740 (2018).
- 8 G. Faber. Über stetige Funktionen. *Math. Ann.*, 66, 81-94 (1909).
- 9 M. Geist, P. Petersen, M. Raslan, R. Schneider, and G. Kutyniok. Numerical solution of the parametric diffusion equation by deep neural networks. Preprint (2020).
- 10 R. Gribonval, Kutyniok, M. Nielsen, and F. Voigtlaender. Approximation spaces of deep neural networks. arXiv:1905.01208 (2019).
- 11 M. Griebel and S. Knappek. Optimized general sparse grid approximation spaces for operator equations. *Math. Comp.*, 78, 2223-2257 (2009).
- 12 P. Grohs, D. Perekrestenko, D. Elbrachter, and H. Bolcskei. Deep neural network approximation theory. arXiv:1901.02220 (2019).
- 13 I. Gühring, G. Kutyniok, and P. Petersen. Error bounds for approximations with deep ReLU neural networks in $W^{s,p}$ norms. *Anal. Appl. (Singap.)*, 18, 803-859 (2020).
- 14 A. Krizhevsky, I. Sutskever, and G. E. Hinton. ImageNet classification with deep convolutional neural networks. *NeurIPS*, 1106-1114 (2012).
- 15 Y. LeCun, Y. Bengio, and G. Hinton. Deep learning. *Nature*, 521, 436-444 (2015).
- 16 H. N. Mhaskar. Neural networks for optimal approximation of smooth and analytic functions. *Neural Comput.*, 8, 164-177 (1996).
- 17 H. Montanelli and Q. Du. New error bounds for deep ReLU networks using sparse grids. *SIAM J. Math. Data Sci.*, 1, 78-92 (2019).
- 18 J. A. A. Opschoor, P. C. Petersen, and C. Schwab. Deep ReLU networks and high-order finite element methods. *Anal. Appl. (Singap.)*, 18, 715-770 (2020).
- 19 P. Petersen and F. Voigtlaender. Optimal approximation of piecewise smooth functions using deep ReLU neural networks. *Neural Netw.*, 108, 296-330 (2018).
- 20 P. C. Petersen. Neural network theory. Preprint (2020).
- 21 H. Schmeisser and H. Triebel. *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces* (Chichester, New York, Wiley, 1987).
- 22 C. Schwab and J. Zech. Deep learning in high dimension: Neural network expression rates for generalized polynomial chaos expansions in UQ. *Anal. Appl. (Singap.)*, 17, 19-55 (2019).
- 23 T. Suzuki. Adaptivity of deep ReLU network for learning in Besov and mixed smooth Besov spaces: optimal rate and curse of dimensionality. *International Conference on Learning Representations* (2019).
- 24 H. Triebel. *Bases in Function Spaces, Sampling, Discrepancy, Numerical Integration*. European Math. Soc. Publishing House, Zürich (2010).
- 25 Y. Wu, M. Schuster, Z. Chen, Q. V. Le, and M. Norouzi. Google's neural machine translation system: Bridging the gap between human and machine translation. arXiv: 1609.08144 (2016).
- 26 D. Yarotsky. Error bounds for approximations with deep ReLU networks. *Neural Netw.*, 94, 103-114 (2017).
- 27 D. Yarotsky. Quantified advantage of discontinuous weight selection in approximations with deep neural networks. arXiv: 1705.01365 (2017).

Authors Information:

Dinh Dũng – Dr.Sc., Professor, Vietnam National University, Information Technology Institute, 144 Xuan Thuy, Cau Giay, Hanoi, Vietnam.

Van Kien Nguyen – corresponding author, PhD, Faculty of Basic Sciences, University of Transport and Communications, No.3 Cau Giay Street, Lang Thuong Ward, Dong Da District, Hanoi, Vietnam.

Mai Xuan Thao – PhD, Department of Natural Sciences, Hong Duc University, 565 Quang Trung, Thanh Hoa, Vietnam.

Динь Зунг – Ғылым докторы, профессор, Вьетнам ұлттық университеті, Ақпараттық технологиялар институты, Сюан Тхуй, 144, Кау Джай, Ханой, Вьетнам.

Ван Кьен Нгуен – корреспондентция үшін автор, PhD, Көлік және коммуникация университеті, Іргелі ғылымдар факультеті, Кау Гийай, 3, Ланг Тхьонг, район Донг Да, Ханой, Вьетнам.

Mai Xuan Tao – PhD, Хонг Дук университеті, Жаратылыстану ғылымдары факультеті, Куанг Трунг, 565, Тханьхоа, Вьетнам.

Received 11.12.2020

IRSTI: 27.27.17

V. A. Pavlovsky, I. L. Vasiliev

Belarusian State University, Minsk, Belarus
(E-mail: pavlad95@gmail.com, vassilyev@bsu.by)

ON h -HOLOMORPHY AND h -ANALYTICITY OF FUNCTIONS OF AN h -COMPLEX VARIABLE

Abstract: Interest in the study of the properties of functions defined on the set of h -complex numbers arose again in connection with existing applications in geometry and mechanics. In this paper, we present necessary and sufficient conditions for h -differentiability and h -holomorphy of functions of an h -complex variable, the theorem on finite increments is proved, sufficient conditions for h -analyticity are found, a uniqueness theorem for h -analytic functions is proved.

Keywords: h -differentiability, h -holomorphy, h -analyticity, Ring of h -complex numbers, Zero divisors, Zeros of a function

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-133-4-19-27>

Introduction

Let \mathbb{C}_h be the set of all h -complex numbers [1-6], i.e. the set of ordered pairs of real numbers, on which the addition and multiplication operations are given according to the rules:

$$\forall z_1 = (a; b), z_2 = (c; d) \in \mathbb{C}_h$$

1. $z_1 + z_2 = (a + c; b + d)$;
2. $z_1 \cdot z_2 = (ac + bd; ad + bc)$.

The real unit is identified by the h -complex number $(1; 0)$. A hyperbolic unit is the h -complex number $j = (0; 1)$. Then any number from \mathbb{C}_h can be represented in algebraic form:

$$z = (a; b) = (a; 0) + (0; b) = a \cdot (1; 0) + b \cdot (0; 1) = a + jb = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Hyp} z,$$

where $a = \operatorname{Re} z$ is the real part of z , $b = \operatorname{Hyp} z$ is the hyperbolic part of z .

As shown in [7,8], the set of h -complex numbers \mathbb{C}_h is a zero-divisor ring. Zero-divisors are numbers of the form $a \pm aj$. Special mention should be the case when $a = \frac{1}{2}$, then zero divisors have the following properties:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : \left(\frac{1 \pm j}{2}\right)^n = \frac{1 \pm j}{2}$;

(b) the numbers $\frac{1 \pm j}{2}$ form a basis in \mathbb{C}_h , i.e. any h -complex number $a + bj$ can be uniquely represented as:

$$a + jb = (a + b) \frac{1 + j}{2} + (a - b) \frac{1 - j}{2}.$$

The norm of the element $z = a + jb$ in the ring \mathbb{C}_h is defined as: $\|z\| = |a| + |b|$, and the modulus of a h -complex number is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ as usual.

Let us present the properties of the norm:

1. $\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
2. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| = \|z\| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}|z|$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha z\| = |\alpha| \cdot \|z\|$;
4. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}_h : \|z_1 \cdot z_2\| \leq \|z_1\| \cdot \|z_2\|$;
5. $\|z^n\| = \|z\|^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
6. $\frac{1}{\|z\|} \leq \left\|\frac{1}{z}\right\|$.

On the set \mathbb{C}_h , the topology is introduced using the above norm.

h -complex argument functions

Let D be a domain in \mathbb{C}_h and $f : D \rightarrow \mathbb{C}_h$.

Definition 1. The function f is called h -differentiable at the point $z \in D$ if there exists a number $k \in \mathbb{C}_h$ such that

$$f(z+h) - f(z) = kh + \alpha(h) \cdot h, \tag{1}$$

where $h \in D$ is not a divisor of zero, and $z+h \in D$, moreover, $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$, k does not depend on h .

Definition 2. The derivative of a function f of an h -complex argument $z \in D$ is called

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

where $h \in \mathbb{C}_h$ is not a zero divisor. The limit is taken according to the norm from \mathbb{C}_h .

The derivative of the sum, difference, product, quotient of division, and composition of functions is calculated using the same formulas as in classical analysis.

Theorem 1. The function f is h -differentiable at the point $z \in D$ if and only if there exists

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

The proof is carried out in the same way as in the case of an analytic function of a complex variable in this case $f'(z) = k$ from (1).

Any h -complex function $f(z) = f(x+jy)$ is representable in algebraic form:

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Theorem 2. Let $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ be defined in a neighborhood of the point $z = x + jy$, functions $u(x, y)$, $v(x, y)$ are differentiable at the point (x, y) . Then two statements are equivalent:

- 1) function $f(z)$ h -differentiable at the point z ;
- 2) the following equalities are true:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

P r o o f. Let us show that the 2) follows from the 1). Let be $h = s + jt$ and

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

We put $t = 0$:

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + j \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Let be $s = 0$ then:

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{jt} + j \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{jt} = j \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

We have:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial u}{\partial y}$$

consequently equalities (2) are true.

Now we show that 2) implies 1). Let the equality (2) be true then

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= [u(x+s, y+t) - u(x, y)] + j[v(x+s, y+t) - v(x, y)] = \\ &= (u'_x s + u'_y t + \alpha(h)h) + j(v'_x s + v'_y t + \beta(h)h) = u'_x(s+jt) + jv'_x(s+jt) + (\alpha(h) + j\beta(h))h = \\ &= (u'_x + jv'_x)h + \gamma(h)h, \end{aligned}$$

where $\gamma(h) = \alpha(h) + j\beta(h)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = 0$. Consequently function $f(z)$ h -differentiable and

$$f'(z) = u'_x + jv'_x = v'_y + ju'_y.$$

The theorem is proved.

Remark 1. The equalities (2) are analogous to the Cauchy-Riemann conditions.

General form of h -holomorphic functions

Let the function f be h -differentiable in domain D .

Definition 3. The function $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ is called h -holomorphic at the point $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$ if the functions u and v have continuous second partial derivatives, and the conditions (2) are true.

Theorem 3. The function f is h -holomorphic at the point $z \in D$ if and only if

$$f(z) = \frac{1+j}{2}f(x+y) + \frac{1-j}{2}f(x-y). \quad (3)$$

P r o o f. Consider the function $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$. Let the condition (2) is true then the functions u and v satisfy the equations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Let $\xi = \frac{1}{2}(x+y)$, $\eta = \frac{1}{2}(x-y)$ and then

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}x'_\xi + \frac{\partial u}{\partial y}y'_\xi = u'_x + u'_y, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}x'_\eta + \frac{\partial u}{\partial y}y'_\eta = u'_x - u'_y. \end{cases}$$

Mixed derivatives of functions u and v equal to zero

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Thus, the equations (4) are equivalent to the following:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (5)$$

Similarly, we obtain equations for the function v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (6)$$

Let's find a general solution (5) and (6):

$$u'_\xi = \mu^*(\xi)$$

$$u(\xi, \eta) = \int \mu^*(\xi) d\xi = \tilde{\mu}(\xi) + \tilde{\psi}(\eta) = \tilde{\mu}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \tilde{\psi}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\mu(x+y) + \psi(x-y)\},$$

$$v'_\xi = \phi^*(\xi)$$

$$v(\xi, \eta) = \int \phi^*(\xi) d\xi = \tilde{\phi}(\xi) + \tilde{\nu}(\eta) = \tilde{\phi}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \tilde{\nu}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\phi(x+y) + \nu(x-y)\}.$$

From equations

$$u'_x = v'_y, \quad v'_x = u'_y$$

follows

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\{\mu'(x+y) + \psi'(x-y)\} = \frac{1}{2}\{\phi'(x+y) - \nu'(x-y)\}, \\ \frac{1}{2}\{\mu'(x+y) - \psi'(x-y)\} = \frac{1}{2}\{\phi'(x+y) + \nu'(x-y)\}. \end{cases}$$

Consequently

$$\begin{cases} \mu'(x+y) = \phi'(x+y), & \mu(x+y) = \phi(x+y) + \alpha, \\ \psi'(x-y) = \nu'(x-y), & \psi(x-y) = \nu(x-y) + \beta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{1}{2} \{ \phi(x+y) + \psi(x-y) + \alpha \}, \\ v(x, y) = \frac{1}{2} \{ \phi(x+y) - \psi(x-y) + \beta \}. \end{cases}$$

We have:

$$\begin{cases} f(z) = f(x+jy) = u(x, y) + jv(x, y), & \begin{cases} f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0), \\ \bar{f}(x) = u(x, 0) - jv(x, 0). \end{cases} \\ \bar{f}(z) = \bar{f}(x+jy) = u(x, y) - jv(x, y), & \end{cases}$$

Therefore,

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{2} \{ f(x) + \bar{f}(x) \}, & \begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{2} \{ \phi(x) + \psi(x) + \alpha \}, \\ v(x, 0) = \frac{1}{2} \{ \phi(x) - \psi(x) + \beta \}, \end{cases} \\ v(x, 0) = \frac{1}{2} \{ f(x) - \bar{f}(x) \}, & \end{cases}$$

which means

$$\begin{cases} \phi(x) = u(x, 0) + v(x, 0) - \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right), \\ \psi(x) = u(x, 0) - v(x, 0) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right), \end{cases}$$

then

$$\begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + \bar{f}(x)) + \frac{j}{2} (f(x) - \bar{f}(x)) - \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right), \\ \psi(x) = \frac{1}{2} (f(x) + \bar{f}(x)) - \frac{j}{2} (f(x) - \bar{f}(x)) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right), \\ \phi(x) = \frac{1+j}{2} f(x) + \frac{1-j}{2} \bar{f}(x) - \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right), \\ \psi(x) = \frac{1-j}{2} f(x) + \frac{1+j}{2} \bar{f}(x) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right). \end{cases}$$

From this we find that

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + jv(x, y) = \frac{1}{2} \{ \phi(x+y) + \psi(x-y) + \alpha \} + \frac{j}{2} \{ \phi(x+y) - \psi(x-y) + \beta \} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} \bar{f}(x+y) - \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) + \alpha + \frac{1+j}{2} f(x-y) + \frac{1-j}{2} \bar{f}(x-y) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \right\} + \\ &+ \frac{j}{2} \left\{ \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} \bar{f}(x+y) - \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) - \frac{1+j}{2} f(x-y) - \frac{1-j}{2} \bar{f}(x-y) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \beta \right\} = \\ &= \frac{1+j}{4} f(x+y) + \frac{1-j}{4} \bar{f}(x+y) + \frac{1-j}{4} f(x-y) + \frac{1+j}{4} \bar{f}(x-y) + \frac{1+j}{4} f(x+y) - \\ &- \frac{1-j}{4} \bar{f}(x+y) + \frac{1-j}{4} f(x-y) - \frac{1+j}{4} \bar{f}(x-y) = \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} f(x-y). \end{aligned}$$

Thus, the equality (3) is true.

Conversely, let (3) be true then for the function $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, we put $y = 0$:

$$f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0)$$

and then

$$\begin{cases} f(x+y) = u(x+y, 0) + jv(x+y, 0), \\ f(x-y) = u(x-y, 0) + jv(x-y, 0). \end{cases}$$

Using the equality (3) we represent the function $f(z)$ as:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1+j}{2} [u(x+y, 0) + jv(x+y, 0)] + \frac{1-j}{2} [u(x-y, 0) + jv(x-y, 0)] = \\ &= \frac{1}{2} [u(x+y, 0) + v(x+y, 0) + u(x-y, 0) - v(x-y, 0)] + \\ &+ \frac{j}{2} [u(x+y, 0) + v(x+y, 0) - u(x-y, 0) + v(x-y, 0)] = u(x, y) + jv(x, y). \end{aligned}$$

Due to the fact that

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

we get the proved theorem.

Theorem 4. *The function f is h -holomorphic in $D \subset \mathbb{C}_h$ with piecewise smooth boundary ∂D and is continuous in closure $\bar{D} = D \cup \partial D$. Then*

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

P r o o f.

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial D} [u(x, y) + jv(x, y)] (dx + jdy) = \int_{\partial D} u(x, y) dx + v(x, y) dy + j \int_{\partial D} v(x, y) dy + u(x, y) dx.$$

Using Green's formula we obtain

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + j \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

The theorem is proved.

Further, we need the following theorem of real analysis, which can be deduced from the second theorem "on finite increments" [9].

Theorem 5 (on finite increments for mappings from \mathbb{R}^2 into \mathbb{R}^2). *Let $F : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be h -differentiable at the point $(a, b) \in \tilde{D}$. Then*

$$|F(a + s, b + t) - F(a, b)| \leq \max_{\xi \in [0, 1]} \left| F'(a + \xi s, b + \xi t) \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right|. \quad (7)$$

P r o o f. We introduce an auxiliary function

$$g(\tau) = F(a + \tau s, b + \tau t), \quad \tau \in [0, 1].$$

We have:

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(0) = F(a, b), \quad g(1) = F(a + s, b + t), \\ g' = F'(a + \tau s, b + \tau t) \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}.$$

We put

$$G(\tau) = \langle g(\tau) | g(1) - g(0) \rangle, \\ G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad G'(\tau) = \langle g'(\tau) | g(1) - g(0) \rangle.$$

Hence, by Lagrange's theorem, it follows that

$$G(1) - G(0) = G'(\xi) \cdot 1, \quad \text{where } \xi \in [0, 1].$$

Using Cauchy's inequality for the scalar product we obtain

$$G(1) - G(0) = \langle g(1) | g(1) - g(0) \rangle - \langle g(0) | g(1) - g(0) \rangle = \langle g(1) - g(0) | g(1) - g(0) \rangle = \\ = |g(1) - g(0)|^2 = \langle g'(\xi) | g(1) - g(0) \rangle \leq \langle |g'(\xi)| | g(1) - g(0) \rangle.$$

Consequently

$$|g(1) - g(0)| \leq \max_{\xi \in [0, 1]} |g'(\xi)|.$$

This inequality is equivalent to the following

$$|F(a + s, b + t) - F(a, b)| \leq \max_{\xi \in [0, 1]} \left| F'(a + \xi s, b + \xi t) \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right|.$$

The theorem is proved.

Remark 2. We represent the function $F(x, y)$ in vector form $F(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$ then

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} u'_x(x, y) & u'_y(x, y) \\ v'_x(x, y) & v'_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Now from the inequality (7) and the Cauchy-Bunyakovsky inequality we obtain

$$|F(a+s, b+t) - F(a, b)| = \left| \begin{bmatrix} u(a+s, b+t) - u(a, b) \\ v(a+s, b+t) - v(a, b) \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \right| = \sqrt{|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2} \leq \quad (8)$$

$$\leq \max_{\xi \in [0,1]} \sqrt{\{u'_x s + u'_y t\}^2 + \{v'_x s + v'_y t\}^2} \leq \max_{\xi \in [0,1]} \sqrt{\{|u'_x|^2 + |u'_y|^2 + |v'_x|^2 + |v'_y|^2\} \{s^2 + t^2\}},$$

where all partial derivatives are calculated at the point $(a + \xi s, b + \xi t)$.

Let $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ is h -holomorphic function, then $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$. Consequently

$$f'(z) = u'_x + jv'_x = u'_x + ju'_y = v'_y + jv'_x = v'_y + ju'_y,$$

$$|f'(z)| = \sqrt{|u'_x|^2 + |v'_x|^2} \leq |u'_x| + |u'_y| = \|f'(z)\|,$$

$$\|f(z+h) - f(z)\| = \|\Delta u + j\Delta v\| = |\Delta u| + |\Delta v| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2},$$

where $|h| = |s + jt| = \sqrt{s^2 + t^2} \leq |s| + |t| = \|h\|$.

Theorem 6 (on finite increments for an h -holomorphic function). *Let the function f be h -holomorphic in the domain $D \subset \mathbb{C}_h$. Then*

$$\|f(z+h) - f(z)\| \leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} \|f'(\zeta)\| \|h\|$$

P r o o f. Due to the inequality (7), we have

$$\begin{aligned} \|f(z+h) - f(z)\| &\leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2} \leq \max_{\xi \in [0,1]} \sqrt{2 \{ |u'_x|^2 + |u'_y|^2 \} \{s^2 + t^2\}} \leq \\ &\leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f'(\zeta)| \|h\| \leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} \|f'(\zeta)\| \|h\|. \end{aligned}$$

The theorem is proved.

h -analyticity of h -holomorphic functions

Definition 4. A function f is called h -analytic at a point $z_0 \in D$ if there exists a neighborhood of this point, where f expands into a convergent power series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \quad (9)$$

The definition implies that the function f is infinitely h -differentiable in some neighborhood of the point z_0 and the series (9) is the Taylor series of the function f , i. e. $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. The convergence domain of the series (9) is an open h -circle

$$G = \{\|z - z_0\| < r\}, \quad r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

Theorem 7. *Let the function $f : D \rightarrow \mathbb{C}_h$ be infinitely many times h -differentiable in the domain $D \subset \mathbb{C}_h$,*

$$\left\| f^{(n)}(z) \right\| \leq M e^{AR^m} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \{\|z - z_0\| \leq R\} \subset D, \quad (10)$$

M, A, m are some positive constants. Then f expands into a Taylor series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad z_0 \in D,$$

uniformly convergent in the circle $\|z - z_0\| \leq R$.

P r o o f. We represent $f(z)$ as

$$f(z) = T_n(z, z_0) + r_n(z),$$

where $T_n(z, z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$, $r_n(z)$ is remainder term. Let's compose an auxiliary function

$$F(t) = f(z) - T_n(z, t) = f(z) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (z - t)^k.$$

For it we have $F(z) = 0$, $F(z_0) = r_n(z)$. Differentiate $F(t)$ by variable t

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (z - t)^n.$$

Due to the Theorem 6 and condition (10), we obtain

$$\begin{aligned} \|r_n(z)\| = \|F(z_0) - F(z)\| &\leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} \|F'(\zeta)\| \cdot \|z_0 - z\| \leq 2 \max_{\zeta \in [z, z+h]} \left\| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (z - t)^n \right\| \cdot \|z_0 - z\| \leq \\ &\leq 2 \sup_{\zeta \in [z, z+h]} \frac{1}{n!} \left\| f^{(n+1)}(\zeta) \right\| \cdot \|(z - t)^n\| \cdot \|z_0 - z\| \leq \frac{2}{n!} M e^{AR^m} R^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

provided $\|z - t\| \leq R$ and $\|z - z_0\| \leq R$. From here we deduce

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k,$$

where the series converges uniformly in the circle $\|z - z_0\| \leq R$. The theorem is proved.

Corollary 1. The remainder term of the Taylor formula in the Peano form is

$$r_n(z) = o(\|z - z_0\|^n).$$

Definition 5. Function f is h -analytic in the domain $D \in \mathbb{C}_h$ if it is h -analytic at all points of this domain.

Let f be h -analytic at the point z_0 therefore in a neighborhood of the point z_0 we have

$$f(z) = c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \dots, \quad (11)$$

where $c_k \neq 0$, $k \geq 0$.

Definition 6. Point z_0 is called a zero of order k function f if in (11) $k \geq 1$.

From (11) implies the representation

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot \varphi(z),$$

where $\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \dots$, $\varphi(z)$ is h -analytic in a neighborhood of the point z_0 , $\varphi(z_0) = c_k \neq 0$. Due to the continuity of the function $\varphi(z)$, there exists a neighborhood $U(z_0)$: $\varphi(z) \neq 0 \forall z \in U(z_0)$. This implies the following theorem.

Theorem 8. If f is expandable in a neighborhood of the point z_0 in a series (11), where $k \geq 1$, and c_k is not a zero divisor, then there is a neighborhood of the point z_0 in which f has no other zeros, besides z_0 .

Theorem 9 (uniqueness theorem for h -analytic functions). Let f_1 and f_2 are h -analytic in the domain $D \subset \mathbb{C}_h$, $f_1(z) \equiv f_2(z) \forall z \in E \subset D$, where E has a limit point in D and does not contain zero divisors. Then $f_1(z) \equiv f_2(z)$ everywhere in D .

P r o o f. We denote

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

Let $\zeta \in D$ be the limit point of the set E . Let's choose the sequence $\zeta_k \in E$: $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = \zeta$.

Due to continuity,

$$f(\zeta) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\zeta_k) = 0.$$

Theorem 8 implies that $f(z) \equiv 0$ in some neighborhood of the point ζ . Let $M \subset D$ be the set of zeros of the function f , $\overset{\circ}{M}$ its interior. From the above it follows that $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$. If $\overset{\circ}{M} = D$, then the theorem is proved. If $\overset{\circ}{M} \subsetneq D$, then there is a boundary point d of the set $\overset{\circ}{M}$, which is an interior point of the set D . Then there exists a sequence $d_n \in \overset{\circ}{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$. Due to continuity,

$$f(d) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(d_n) = 0.$$

On the other hand, $f(z)$ is not identically equal to zero in any neighborhood of the point d , since d is not an interior point, but a boundary point of the set $\overset{\circ}{M}$. Theorem 8 implies that in some neighborhood of the point d there are no other zeros of the function f , except d . This contradicts the fact that d is a boundary point of the set $\overset{\circ}{M}$. From this we conclude that $\overset{\circ}{M} = D$. The theorem is proved.

References

- 1 Antonuccio F. Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics. Wadham College Oxford OX1 3PN. – 2008. – 56p.
- 2 Field M. Several Complex Variables and Complex Manifolds II. Cambridge University Press. – 1982.
- 3 Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. – Москва, «Наука». – 1969. – 548с.
- 4 Ивлев Д. Д. О двойных числах и их функциях // Матем. Просв., Сер. 2, – 1961. – Выпуск № 6. – С. 197-203.
- 5 Deckelman S., Robson B. Split-complex numbers and Dirac brackets // Communications in Information and Systems. – 2014, –Vol. 14, № 3, – P. 135-159.
- 6 Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2003. – Vol. 13, № 1, – P. 1-9.
- 7 Зверович Э. И., Павловский В. А. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h -комплексного переменного // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 189– 193.
- 8 Зверович Э. И. Вещественный и комплексный анализ в 6 ч. Часть 3 Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента: учебное пособие для студентов. – Минск, «Вышэйшая школа». – 2008. – 129с.

В. А. Павловский, И. Л. Васильев

Беларусь мемлекеттік университеті, Минск, Беларусь Республикасы

h -комплекс айнымалы функциялардың h -голоморфтылығы және h -аналитикалығы

Аннотация: Соңғы кездерде геометрия мен механикадағы қолданыстарына байланысты h -комплекс сандар жиынында анықталған функциялардың қасиеттерін зерттеу жұмыстарына қызығушылық арта бастады. Ұсынылған мақалада h -комплекс айнымалы функцияның h -дифференциалдануы және h -голоморфтілігі үшін қажетті және жеткілікті шарттар келтірілген; ақырлы өсімшелер туралы теорема дәлелденді; функцияның h -аналитикалық болуының жеткілікті шарттары табылды; h -аналитикалық функциялар үшін жалғыздық теоремасы дәлелденді.

Түйін сөздер: h -дифференциалдану, h -голоморфтылық, h -аналитикалық, h -комплекс сандар сақинасы, нөлдің бөлгіштері, функцияның нөлдері.

В. А. Павловский, И. Л. Васильев

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

Об h -голоморфности и h -аналитичности функций h -комплексного переменного

Аннотация: В последнее время в связи с имеющимися приложениями в геометрии и механике возрос интерес к исследованиям свойств функций, заданных на множестве h -комплексных чисел. В представленной статье приводятся необходимые и достаточные условия h -дифференцируемости и h -голоморфности функций h -комплексного переменного; доказана теорема о конечных приращении; найдены достаточные условия h -аналитичности; доказана теорема единственности для h -аналитических функций.

Ключевые слова: h -дифференцируемость, h -голоморфность, h -аналитичность, Кольцо h -комплексных чисел, Делители нуля, Нули функции.

References

- 1 Antonuccio F. Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics (Wadham College Oxford OX1 3PN United Kingdom, 2008. 56p).
- 2 Field M. Several Complex Variables and Complex Manifolds II (Cambridge University Press, 1982).
- 3 Rosenfeld B.A. Neevklidova geometrija [Non-Euclidean geometries] (Nauka, Moscow, 1969. 48p.) [in Russian].
- 4 Ivlev D.D. On double numbers and their functions. Mat. Pros., Ser. 2 (6), 197-203 (1961).
- 5 Deckelman S. Robson B. Split-complex numbers and Dirac brackets. Communications in Information and Systems, 14 (3), 135-159 (2014).
- 6 Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. Advances in Applied Clifford Algebras, 13(1), 1-9 (2003).
- 7 Zverovich E.I., Pavlovsky V.A. Nahozhdenie oblastej shodimosti i vychislenie summ stepennyh rjadov ot h -kompleksnogo peremennogo [Finding the areas of convergence and calculating sums of power series of an h -complex variable], Ves. Nac. akad. navuk Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 56(2), 189-193 (2020) [in Russian].
- 8 Zverovich E.I. Veshhestvennyj i kompleksnyj analiz v 6 ch. Chast' 3 Differencial'noe ischislenie funkcij vektornogo argumenta: uchebnoe posobie dlja studentov [Real and complex analysis in 6 parts Part 3 Differential calculus of functions of a vector argument: Manual for Schools] (Minsk, Vyshejschaya shkola, 2008. 129p.) [in Russian].

Authors Information:

Vasiliev I.L. – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Ave., Minsk, Republic of Belarus.

Pavlovsky V.A. – corresponding author, Postgraduate Student of the Department of Function Theory, Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Ave., Minsk, Republic of Belarus.

Vasiliev I.L. - физика-математика ғылымдарының кандидаты, Функциялар теориясы кафедрасының доценті, Беларусь мемлекеттік университеті, Тәуелсіздік даңғылы, 4, Минск, Беларусь Республикасы.

Pavlovskiy V.A. - корреспонденция үшін автор, Функциялар теориясы кафедрасының аспиранты, Беларусь мемлекеттік университеті, Тәуелсіздік даңғылы, 4, Минск, Беларусь Республикасы.

Received 29.11.2020

IRSTI: 30.19.17

Л.А. Алексеева¹, В.Н. Украинец²

¹ *Института математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан*

² *Торайгыров университет, Павлодар, Казахстан*

(E-mail: ¹ alexeeva47@mail.ru, ² vitnikukr@mail.ru)

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТОННЕЛЯ И ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК

Аннотация: Разработана математическая модель воздействия транспортных нагрузок на подкрепленный многослойной обделкой тоннель и подземный многослойный трубопровод при их мелком заложении. В качестве расчетной схемы данных подземных сооружений рассматривается упругая цилиндрическая многослойная оболочка, расположенная в упругом полупространстве (массиве). Перемещение слоев оболочки и упругого полупространства описывается уравнениями Ламе в подвижной системе координат. Получено аналитическое решение задачи определения компонентов напряженно-деформированного состояния массива и оболочки при произвольных скоростях нагрузки в дозвуковом случае, когда транспортная нагрузка движется со скоростью, меньшей скоростей распространения продольных и поперечных волн в массиве и оболочке. Представлены результаты компьютерных экспериментов, которые иллюстрируют напряженно-деформированное состояние трубопровода и земной поверхности при действии осесимметричной транспортной нагрузки.

Ключевые слова: упругое полупространство, дозвуковая транспортная нагрузка, многослойная цилиндрическая оболочка, напряженно-деформированное состояние

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-133-4-28-39>

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования показывают, что при действии на протяженные транспортные подземные сооружения в виде тоннелей и трубопроводов транспортных нагрузок (нагрузок от движущегося в тоннеле транспорта или транспортируемых по трубопроводу объектов) возникают вибрации, как в самих сооружениях, так и в окружающем их породном массиве. Превышение уровнями вибраций допустимых норм может привести к потере несущей способности конструкций сооружений или их непригодности для нормальной эксплуатации, а при их мелком заложении – к тем же последствиям для расположенных вблизи наземных сооружений. Следует заметить, что экспериментальные методы исследования вибрационных процессов, возникающих в данных сооружениях вследствие действия транспортных нагрузок, требуют значительных материальных затрат, а в некоторых случаях их проведение не представляется возможным. В связи с этим необходимы эффективные методы их динамических расчётов, основанные на математических моделях с использованием современных представлений механики. В качестве основных модельных задач, используемых для исследований динамики транспортных подземных сооружений под воздействием транспортной нагрузки, обычно рассматриваются задачи о действии на расположенную в упругом пространстве или полупространстве круговую цилиндрическую оболочку нагрузки, равномерно движущейся по внутренней поверхности оболочки вдоль её образующей. Первая задача моделирует динамическое поведение сооружения глубокого заложения, вторая – мелкого заложения.

Задачи о действии подвижной осесимметричной нормальной нагрузки на тонкостенную и толстостенную круговую цилиндрическую оболочку в упругом пространстве решены соответственно в статьях [1, 2]. Аналогичные задачи при действии на оболочку различных неосесимметричных подвижных нагрузок рассматривались в [3–5] и других работах.

В отличие от этих задач, подобные задачи для упругого полупространства являются более сложными, так как возникает необходимость учитывать отражаемые границей полупространства волны. Поэтому количество публикаций, посвященных исследованию этой проблеме, немногочисленно и охватывает, в основном, последние годы, в частности [6–14]. Здесь, при построении математической модели, обделка тоннеля или трубопровод рассматривались как однородная упругая круговая цилиндрическая оболочка. В настоящей работе эти конструкции представляются в виде неоднородной, многослойной упругой оболочки, слоями которой являются толстостенные круговые цилиндрические оболочки с разными физико-механическими и геометрическими характеристиками. В частном случае, когда оболочка является однослойной (однородной толстостенной оболочкой), приводятся и анализируются результаты численного эксперимента.

1. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую многослойную оболочку, состоящую из N концентрических слоёв с разными физико-механическими и геометрическими характеристиками, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве (массиве), отнесенному к неподвижным цилиндрической r, θ, z и декартовой x, y, z системам координат, ось z которых совпадает с осью оболочки и параллельна свободной от нагрузок горизонтальной границе полупространства, ось x – перпендикулярна к этой границе: $x \leq h$ (рисунок 1). Контакт между слоями оболочки полагаем жёстким. Контакт между оболочкой массивом будем полагать либо жестким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении.

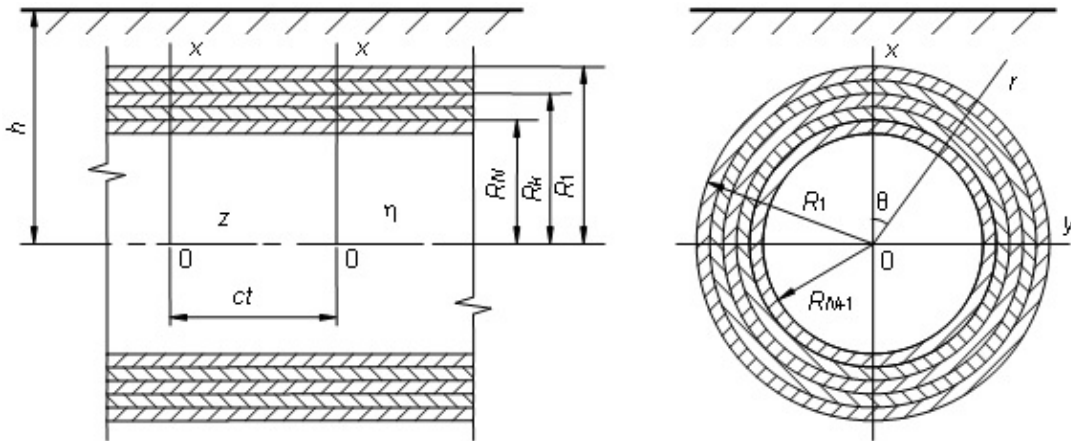


Рисунок 1 – Многослойная оболочка в упругом полупространстве.

По внутренней поверхности оболочки в направлении её оси z с постоянной скоростью c движется нагрузка интенсивностью P , вид которой не меняется с течением времени (транспортная нагрузка). Скорость движения нагрузки принимаем дозвуковой, т.е. меньшей скоростей распространения волн сдвига в массиве и слоях оболочки.

Последовательно пронумеруем слои оболочки, присвоив контактирующему с массивом слою порядковый номер 2. Физико-механические свойства материала массива и слоев оболочки характеризуются соответственно следующими постоянными: $\nu_1, \mu_1, \rho_1; \nu_i, \mu_i, \rho_i (i = 2, 3, \dots, N + 1)$, где ν_k – коэффициент Пуассона, $\mu_k = E_k/2(1 + \nu_k)$ – модуль сдвига, ρ_k – плотность, E_k – модуль упругости ($k = 1, 2, \dots, N + 1$). В дальнейшем индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2, 3, \dots, N + 1$ – к слоям оболочки.

Определим реакцию оболочки и окружающей её среды на данную нагрузку, используя для описания движения массива и слоев оболочки динамические уравнения теории упругости в векторной форме

$$(\lambda_k + \mu_k) \text{grad div } \mathbf{u}_k + \mu_k \Delta \mathbf{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (1)$$

где $\lambda_k = 2\mu_k\nu_k/(1 - 2\nu_k)$, \mathbf{u}_k – векторы смещений точек массива и слоев оболочки, Δ – оператор Лапласа.

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому можно перейти к связанной с нагрузкой подвижной декартовой $(x, y, \eta = z - ct)$ или цилиндрической $(r, \theta, \eta = z - ct)$ системе координат. Тогда уравнения (1) примут вид

$$\left(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2}\right) \text{grad div } \mathbf{u}_k + M_{sk}^{-2} \Delta \mathbf{u}_k = \partial^2 \mathbf{u}_k / \partial \eta^2, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (2)$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в массиве и слоях оболочки.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ. ПОТЕНЦИАЛЫ ЛАМЕ

Для определения перемещений используем потенциалы Ламе [6]. Выражая \mathbf{u}_k через потенциалы Ламе

$$\mathbf{u}_k = \text{grad } \varphi_{1k} + \text{rot} (\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot} (\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta), \quad k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (3)$$

преобразуем уравнения (2) к виду

$$\Delta \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{jk}}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{e}_η – орт оси η , $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Используя (3) и закон Гука получаем выражения для компонент векторов \mathbf{u}_k и тензоров напряжений в массиве ($k = 1$) и слоях оболочки ($k = 2, 3, \dots, N + 1$) в подвижной цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} u_{rk} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial r}, \\ u_{\theta k} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta}, \\ u_{\eta k} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \eta} + m_{sk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta k} &= (2\mu_k + \lambda_k M_{pk}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k m_{sk}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{\theta\theta k} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu_k}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta} \right), \\ \sigma_{rr k} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{r\eta k} &= \mu_k \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_{sk}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \\ \sigma_{\eta\theta k} &= \mu_k \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_{sk}^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{r\theta k} &= 2\mu_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r^2} - \frac{m_{sk}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $m_{sk}^2 = 1 - M_{sk}^2 > 0$.

В подвижных декартовых координатах выражения для компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС) массива имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_{x1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial x \partial \eta}, \\
 u_{y1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta}, \\
 u_{\eta 1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \eta} + m_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial \eta^2}; \\
 \sigma_{\eta \eta 1} &= (2\mu_1 + \lambda_1 M_{p1}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 m_{s1}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^3}, \\
 \sigma_{yy1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y^2 \partial \eta} \right), \\
 \sigma_{xx1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x^2 \partial \eta} \right), \\
 \sigma_{x\eta 1} &= \mu_1 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \\
 \sigma_{\eta y 1} &= \mu_1 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta^2} \right), \\
 \sigma_{xy 1} &= 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x^2} - \frac{m_{s1}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x \partial y \partial \eta} \right).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, для определения компонент НДС массива и слоев оболочки необходимо решить уравнения (4) используя следующие граничные условия:

- для свободной от нагрузок поверхности полупространства ($x = h$)

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta 1} = 0; \tag{8}$$

- для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned}
 \text{при } r = R_1 \quad & u_{r1} = u_{r2}, \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \sigma_{r\eta 1} = 0, \sigma_{r\theta 1} = 0, \sigma_{r\eta 2} = 0, \sigma_{r\theta 2} = 0, \\
 \text{при } r = R_k \quad & u_{jk} = u_{jk+1}, \sigma_{rjk} = \sigma_{rjk+1}, \\
 \text{при } r = R_{N+1} \quad & \sigma_{rjN+1} = P_j(\theta, \eta), j = r, \theta, \eta, k = 2, 3, \dots, N;
 \end{aligned} \tag{9}$$

- для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned}
 \text{при } r = R_k \quad & u_{jk} = u_{jk+1}, \sigma_{rjk} = \sigma_{rjk+1}, \\
 \text{при } r = R_{N+1} \quad & \sigma_{rjN+1} = P_j(\theta, \eta), j = r, \theta, \eta, k = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $P_j(\theta, \eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta, \eta)$.

3. РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО η ЗАДАЧИ

Рассмотрим действие на оболочку синусоидальной по η подвижной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$\begin{aligned}
 P(\theta, \eta) &= p(\theta) e^{i\xi\eta}, p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \\
 P_j(\theta, \eta) &= p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, j = r, \theta, \eta,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (11), поэтому

$$\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi\eta}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (4), получим

$$\Delta_2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, j = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (13)$$

где Δ_2 – двумерный оператор Лапласа, $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$, $m_{1k} \equiv m_{pk}$, $m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}$.

При дозвуковой скорости движения нагрузки $M_{sk} < 1$, $m_{sk} > 0$, $k = 1, 2, \dots, N + 1$, и решения уравнений (13) можно представить в виде [6]

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, j = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (14)$$

Здесь для массива ($k = 1$)

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1}r) e^{in\theta}, \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right) d\zeta;$$

для слоев оболочки ($k = 2, 3, \dots, N + 1$)

$$\Phi_{jk}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3(2k-3)} K_n(k_{jk}r) e^{in\theta}, \Phi_{jk}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6(k-1)} I_n(k_{jk}r) e^{in\theta}.$$

Здесь $I_n(kr)$, $K_n(kr)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{jk} = |m_{jk}\xi|$; $g_j(\xi, \zeta)$, $a_{n1}, \dots, a_{n(6N+3)}$ – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [6, 9], представление потенциалов для полупространства в форме (14) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (15)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}$, $\Phi_{nj} = [(\zeta + f_j)/k_{j1}]^n$, $j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся граничными условиями (8), с учётом (7), (12), (15). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнявая, в силу произвольности y , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем функции $g_j(\xi, \zeta)$ через неизвестные коэффициенты a_{n1} , a_{n2} , a_{n3} :

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta_*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_* &= (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{11}^* &= \frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}} - \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}}, \Delta_{12}^* = -2\zeta(2\rho_*^2 - \beta^2), \Delta_{13}^* = 2\xi(2\rho_*^2 - \beta^2) \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{21}^* &= -\frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2} \Delta_{12}^*, \Delta_{22}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \Delta_{23}^* = -4\xi\zeta \frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2} \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{31}^* &= -\frac{\Delta_{13}^*}{m_{s1}^2 \xi^2}, \Delta_{32}^* = \frac{\Delta_{21}^*}{\beta^2}, \Delta_{33}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}} + \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \\ \alpha &= M_{p1}\xi, \beta = M_{s1}\xi, \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2, \Delta_{**} = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \rho_{**}^2 &= \xi^2 + (2/m_{s1}^2 - 1)\zeta^2. \end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_*(\rho_*)$ – определитель Рэлея, который обращается в ноль при $\rho_{*R}^2 = \xi^2 M_R^2$, или в двух точках $\pm\zeta_R = \pm|\xi| \sqrt{M_R^2 - 1}$, где $M_R = c/c_R$ – число Маха, c_R – скорость поверхностных волн Рэлея [15], которую условимся называть рэлеевской скоростью. Из последнего следует, что $\Delta_*(\rho_*)$ не обращается в ноль на действительной

оси, если $M_R < 1$ ($c < c_R$), то есть при дорэлеевских скоростях движения нагрузки. В этом случае потенциалы (15) можно представить в виде

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta.$$

Следует отметить, что рэлеевская скорость несколько ниже скорости волн сдвига в массиве.

Используя известное при $x < h$ соотношение [6, 9]

$$\exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r) e^{in\theta} \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) / k_j \right]^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}},$$

представим Φ_{j1} (14) в цилиндрической системе координат

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_{j1} r) + I_n(k_{j1} r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-hf_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (16) $g_j(\xi, \zeta)$, для $c < c_R$ получим

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_{j1} r) + b_{nj} I_n(k_{j1} r)) e^{in\theta}, \quad (17)$$

где $b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}$, $A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\zeta$.

Подставляя (17) с учётом (12) в (5), (6) получаем формулы для вычислений компонент НДС массива в цилиндрических координатах при $c < c_R$

$$u_{l1}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[T_{lj1}^{(1)}(K_n(k_{j1} r)) a_{nj} + T_{lj1}^{(2)}(I_n(k_{j1} r)) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)},$$

$$\frac{\sigma_{lm1}^*}{\mu_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[S_{lmj1}^{(1)}(K_n(k_{j1} r)) a_{nj} + S_{lmj1}^{(2)}(I_n(k_{j1} r)) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}. \quad (18)$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$;

$$T_{r11}^{(1)} = k_{11} K_n'(k_{11} r), \quad T_{r21}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_{21} r), \quad T_{r31}^{(1)} = -\xi k_{31} K_n'(k_{31} r),$$

$$T_{\theta11}^{(1)} = \frac{n}{r} K_n(k_{11} r) i, \quad T_{\theta21}^{(1)} = -k_{21} K_n'(k_{21} r) i, \quad T_{\theta31}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{31} r) i,$$

$$T_{\eta11}^{(1)} = \xi K_n(k_{11} r) i, \quad T_{\eta21}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta31}^{(1)} = -k_{31}^2 K_n(k_{31} r) i,$$

$$S_{rr11}^{(1)} = 2 \left(k_{11}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11} r) - \frac{2k_{11} K_n'(k_{11} r)}{r},$$

$$S_{rr21}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{21} r) - \frac{2k_{21} K_n'(k_{21} r)}{r}, \quad S_{rr31}^{(1)} = -2\xi \left(k_{31}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{31} r) + \frac{2\xi k_{31} K_n'(k_{31} r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta11}^{(1)} = -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11} r) + \frac{2k_{11} K_n'(k_{11} r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta21}^{(1)} = -\frac{2n K_n(k_{21} r)}{r^2} + \frac{2nk_{21} K_n'(k_{21} r)}{r}, \quad S_{\theta\theta31}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{31} r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{31} K_n'(k_{31} r)}{r},$$

$$S_{\eta\eta11}^{(1)} = -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_1 M_{p1}^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11} r), \quad S_{\eta\eta21}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta31}^{(1)} = 2m_{31}^2 \xi^3 K_n(k_{31} r),$$

$$S_{r\theta11}^{(1)} = \left(-\frac{2n K_n(k_{11} r)}{r^2} + \frac{2nk_{11} K_n'(k_{11} r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta21}^{(1)} = \left(-\left(k_{21}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{21} r) + \frac{2k_{21} K_n'(k_{21} r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta31}^{(1)} = \left(\frac{2n\xi K_n(k_{31} r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{31} K_n'(k_{31} r)}{r} \right) i,$$

$$S_{\theta\eta11}^{(1)} = -\frac{2n\xi K_n(k_{11} r)}{r}, \quad S_{\theta\eta21}^{(1)} = \xi k_{21} K_n'(k_{21} r), \quad S_{\theta\eta31}^{(1)} = \frac{n\xi^2 (1 + m_{31}^2) K_n(k_{31} r)}{r},$$

$$S_{r\eta11}^{(1)} = 2\xi k_{11} K_n'(k_{11} r) i, \quad S_{r\eta21}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_{21} r)}{r} i, \quad S_{r\eta31}^{(1)} = -\xi^2 k_{31} (1 + m_{31}^2) K_n'(k_{31} r) i;$$

$K'_n(k_{j1}r) = \frac{dK_n(k_{j1}r)}{d(k_{j1}r)}$; $T_{lj1}^{(2)}, S_{lmj1}^{(2)}$ получаются из $T_{lj1}^{(1)}, S_{lmj1}^{(1)}$ заменой K_n на I_n .

Подставляя (14) при $k = 2, 3, \dots, N+1$ с учётом (12) в (5), (6) получаем формулы для вычислений компонент НДС слоев оболочки при $c < c_R$

$$u_{lk}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[T_{lj}^{(1)}(K_n(k_{jk}r)) a_{nj+3(2k-3)} + T_{lj}^{(2)}(I_n(k_{jk}r)) a_{nj+6(k-1)} \right] e^{i(\xi\eta+n\theta)},$$

$$\frac{\sigma_{lmk}^*}{\mu_k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[S_{lmjk}^{(1)}(K_n(k_{jk}r)) a_{nj+3(2k-3)} + S_{lmjk}^{(2)}(I_n(k_{jk}r)) a_{nj+6(k-1)} \right] e^{i(\xi\eta+n\theta)}. \quad (19)$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$, $k = 2, 3, \dots, N+1$;

$$T_{r1k}^{(1)} = k_{1k}K'_n(k_{1k}r), \quad T_{r2k}^{(1)} = -\frac{n}{r}K_n(k_{2k}r), \quad T_{r3k}^{(1)} = -\xi k_{3k}K'_n(k_{3k}r),$$

$$T_{\theta1k}^{(1)} = \frac{n}{r}K_n(k_{1k}r)i, \quad T_{\theta2k}^{(1)} = -k_{2k}K'_n(k_{2k}r)i, \quad T_{\theta3k}^{(1)} = -\frac{n}{r}\xi K_n(k_{3k}r)i,$$

$$T_{\eta1k}^{(1)} = \xi K_n(k_{1k}r)i, \quad T_{\eta2k}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta3k}^{(1)} = -k_{3k}^2 K_n(k_{3k}r)i,$$

$$S_{rr1k}^{(1)} = 2 \left(k_{1k}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_k M_{pk}^2 \xi^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r) - \frac{2k_{1k}K'_n(k_{1k}r)}{r},$$

$$S_{rr2k}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{2k}r) - \frac{2k_{2k}K'_n(k_{2k}r)}{r}, \quad S_{rr3k}^{(1)} = -2\xi \left(k_{3k}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{3k}r) + \frac{2\xi k_{3k}K'_n(k_{3k}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta1k}^{(1)} = -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_k M_{pk}^2 \xi^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r) + \frac{2k_{1k}K'_n(k_{1k}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta2k}^{(1)} = -\frac{2nK_n(k_{2k}r)}{r^2} + \frac{2nk_{2k}K'_n(k_{2k}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta3k}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{3k}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{3k}K'_n(k_{3k}r)}{r},$$

$$S_{\eta\eta1k}^{(1)} = -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_k M_{pk}^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r), \quad S_{\eta\eta2k}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta3k}^{(1)} = 2m_{3k}^2 \xi^3 K_n(k_{3k}r),$$

$$S_{r\theta1k}^{(1)} = \left(-\frac{2nK_n(k_{1k}r)}{r^2} + \frac{2nk_{1k}K'_n(k_{1k}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta2k}^{(1)} = \left(-\left(k_{2k}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{2k}r) + \frac{2k_{2k}K'_n(k_{2k}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta3k}^{(1)} = \left(\frac{2n\xi K_n(k_{3k}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{3k}K'_n(k_{3k}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{\theta\eta1k}^{(1)} = -\frac{2n\xi K_n(k_{1k}r)}{r}, \quad S_{\theta\eta2k}^{(1)} = \xi k_{2k}K'_n(k_{2k}r), \quad S_{\theta\eta3k}^{(1)} = \frac{n\xi^2 (1 + m_{3k}^2) K_n(k_{3k}r)}{r},$$

$$S_{r\eta1k}^{(1)} = 2\xi k_{1k}K'_n(k_{1k}r)i, \quad S_{r\eta2k}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_{2k}r)i}{r}, \quad S_{r\eta3k}^{(1)} = -\xi^2 k_{3k} (1 + m_{3k}^2) K'_n(k_{3k}r)i;$$

$K'_n(k_{jk}r) = \frac{dK_n(k_{jk}r)}{d(k_{jk}r)}$; $T_{ljk}^{(2)}, S_{lmjk}^{(2)}$ получаются из $T_{ljk}^{(1)}, S_{lmjk}^{(1)}$ заменой K_n на I_n .

Для определения коэффициентов $a_{n1}, \dots, a_{n(6N+3)}$ воспользуемся, в зависимости от условия сопряжения оболочки со средой, переписанными для периодической задачи граничными условиями (9) или (10). Подставляя в граничные условия соответствующие выражения и приравнявая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) линейных алгебраических уравнений, для решения которой можно использовать метод редукции или более удобный для решения поставленной задачи метод последовательных отражений [7], позволяющий при каждом последовательном отражении решать систему линейных уравнений блочно-диагонального вида с определителями $\Delta_n(\xi, c)$ вдоль главной диагонали.

После определения коэффициентов, компоненты напряжённо-деформированного состояния массива и слоев оболочки при действии подвижной синусоидальной нагрузки можно вычислить по формулам (18), (19).

4. РЕШЕНИЕ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Зная решение (18), (19) задачи для синусоидальной нагрузки (11), реакцию оболочки и окружающей её среды на движущуюся с постоянной скоростью аперриодическую (локальную) нагрузку вида $P(\theta, \xi) = p(\theta)p(\eta)$ (характерного для транспортных средств) можно найти при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент НДС массива и оболочки в виде интегралов Фурье

$$P(\theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p(\theta)p(\eta) = p(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi,$$

$$P_m(\theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_m^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p_m(\theta)p(\eta) = p_m(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi, m = r, \theta, \eta;$$

$$u_{lk}(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{lk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \sigma_{lmk}(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{lmk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \quad (20)$$

$$l = r, \theta, \eta, m = r, \theta, \eta, k = 1, 2, \dots, N + 1.$$

Здесь $p^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$.

Для вычислений перемещений и напряжений (20) можно использовать любой численный метод интегрирования, если определители $\Delta_n(\xi, c)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), вытекающей из (9) или (10) разрешающей системы уравнений, отличны от нуля, то есть, когда скорость движения нагрузки c меньше её критических скоростей $c_{(n)*}$. Значения $c_{(n)*}$ определяются из дисперсионных уравнений $\Delta_n(\xi, c) = 0$ [9] и могут оказаться меньше рэлеевской скорости. Окончательное решение будет зависеть от конкретного вида движущейся нагрузки.

Заметим, что исключая из постановки задачи граничные условия (8) и исключая из (14) $\Phi_{j1}^{(2)}$, получим решение аналогичной задачи для упругого пространства.

5. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОРОДНОМ МАССИВЕ

В качестве примера рассмотрим динамическое поведение подземного однослойного стального ($\nu_2 = 0,3, \mu_2 = 8,08 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $c_{s2} = 3218,54$ м/с, $c_{p2} = 6021,33$ м/с) трубопровода при действии движущейся в нем нагрузки. Радиус наружных поверхностей труб – $R_1 = R = 1$ м, внутренних – $R_2 = 0,95$ м. Глубина заложения трубопровода в породном массиве – $h = 2R_1$. Массив имеет следующие характеристики: $\nu_1 = 0,25, \mu_1 = \mu = 4,0 \cdot 10^9$ Па, $\rho_1 = 2,6 \cdot 10^3$ кг/м³; $c_{s1} = 1240,35$ м/с, $c_{p1} = 2148,34$ м/с, $c_R = 1140,42$ м/с [16]. Движущаяся в трубопроводе с докритической и дорэлеевской скоростью $c = 100$ м/с осесимметричная цилиндрическая нормальная нагрузка давления интенсивностью q (Па), равномерно распределена в интервале $|\eta| \leq l_0 = 0,2R$. Интенсивность нагрузки подбираем таким образом, чтобы общая нагрузка по всей длине участка нагружения $2l_0$ равнялась эквивалентной сосредоточенной нормальной кольцевой нагрузке интенсивностью $P^{\circ\circ}$ (Н/м), то есть $q = P^{\circ\circ}/2l_0$.

Введем обозначения: $u_r^{\circ} = u_r \mu / P^{\circ}$ (м), $\sigma_{\theta\theta}^{\circ} = \sigma_{\theta\theta} / P^{\circ}$, $\sigma_{\eta\eta}^{\circ} = \sigma_{\eta\eta} / P^{\circ}$, $u_x^{\circ} = u_x \mu / P^{\circ}$ (м), $u_y^{\circ} = u_y \mu / P^{\circ}$ (м), $\sigma_{yy}^{\circ} = \sigma_{yy} / P^{\circ}$, где $P^{\circ} = P^{\circ\circ} / \mu$ (Па).

Результаты расчета в поперечном сечении $\eta = 0$ трубопровода (в координатной плоскости xy) приведены в таблицах 1, 2 и на рисунках 2, 3.

В таблицах 1, 2 приведены значения компонент НДС массива при различных контактных условиях с трубопроводом.

На рисунке 2, на наружном ($r = R_1$) и внутреннем ($r = R_2$) контурах трубопровода, показаны эпюры радиальных перемещений u_r° и нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}^{\circ}$, $\sigma_{\eta\eta}^{\circ}$. Кривые 1 соответствуют жёсткому контакту трубопровода с массивом, кривые 2 – скользящему контакту.

Таблица 1 – Компоненты НДС массива в контактных точках $r = R_1, \eta = 0$.

Комп. НДС	θ , град									
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
Жёсткий контакт трубопровода с массивом										
u_r°	0,30	0,29	0,28	0,26	0,25	0,25	0,24	0,25	0,25	0,25
$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	0,18	0,17	0,17	0,16	0,17	0,16	0,15	0,14	0,14	0,14
$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-0,35	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,37	-0,37
Скользящий контакт трубопровода с массивом										
u_r°	0,32	0,32	0,30	0,28	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27
$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	-0,08	-0,06	-0,07	0,01	0,0	-0,01	-0,03	-0,06	-0,07	-0,07
$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-1,36	-1,36	-1,34	-1,30	-1,29	1,29	-1,29	-1,29	-1,30	-1,31

Таблица 2 – Компоненты НДС земной поверхности ($x = h, \eta = 0$).

Комп. НДС	y/R_1									
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	
Жёсткий контакт трубопровода с массивом										
u_x°	0,11	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	
u_y°	0,0	0,02	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	
σ_{yy}°	0,21	0,17	0,10	0,03	-0,01	-0,02	-0,03	-0,03	-0,02	
$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	0,25	0,23	0,17	0,12	0,08	0,05	0,03	0,02	0,02	
Скользящий контакт трубопровода с массивом										
u_x°	0,13	0,12	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	
u_y°	0,0	0,03	0,04	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	
σ_{yy}°	0,24	0,20	0,11	0,02	-0,02	-0,04	-0,03	-0,02	-0,02	
$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	0,29	0,26	0,20	0,13	0,08	0,05	0,04	0,02	0,02	

Из рисунка 2 следует, что при жёстком контакте экстремальные радиальные перемещения u_r и нормальные тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ положительны и несколько меньше, чем при скользящем контакте. Осевые нормальные напряжения $\sigma_{\eta\eta}$ положительны на наружном контуре сечения и отрицательны – на внутреннем контуре. Причём, при жёстком контакте напряжения $|\sigma_{\eta\eta}|$ на наружном контуре почти вдвое ниже, чем на внутреннем, а при скользящем контакте они практически одинаковы. Наибольшие нормальные напряжения – $\sigma_{\theta\theta}$ действуют на внешнем контуре сечения и при любых контактных условиях в 2–3 раза превышают $\sigma_{\eta\eta}$.

На рисунке 3 представлены кривые изменений НДС земной поверхности. Нумерация кривых имеет тот же смысл, что и на рисунке 2.

Как следует из рисунка 3 и таблицы 2, при возрастании $|y|$ происходит быстрое затухание компонент НДС земной поверхности, и при $|y| > 3R$ перемещения и напряжения становятся весьма малы независимо от условия сопряжения трубопровода с массивом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В строгой математической постановке получено аналитическое решение задачи о действии подвижной нагрузки на круговую цилиндрическую многослойную оболочку в упругом полупространстве. Решение получено для докритических скоростей движения нагрузки.

Разработанную методику расчета рекомендуется применять для динамического расчета подкрепленных слоистыми (в частном случае, однородными) обделками тоннелей или слоистых и однородных подземных трубопроводов мелкого заложения при действии транспортных нагрузок.

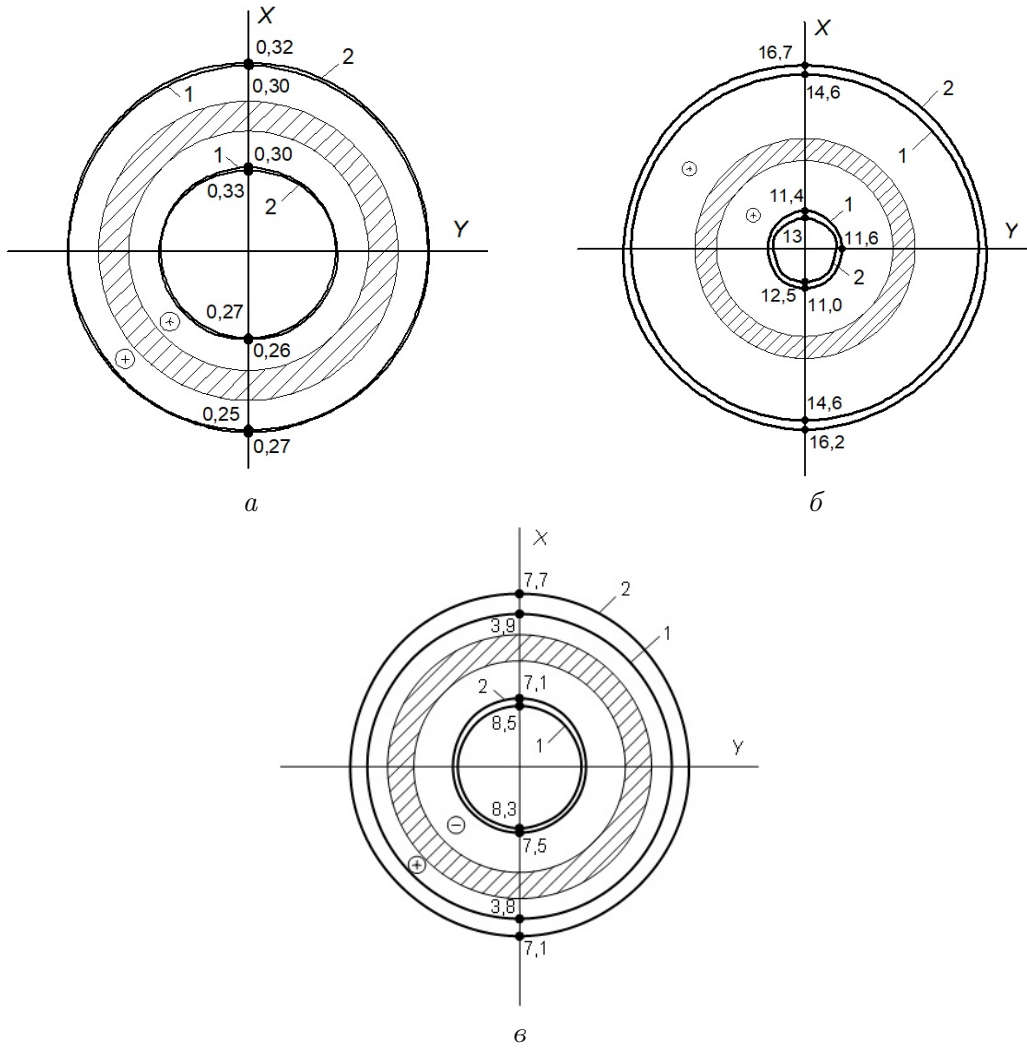


Рисунок 2 – Эшоры u_r^0 (а), $\sigma_{\theta\theta}^0$ (б), $\sigma_{\eta\eta}^0$ (в) в поперечном сечении $\eta = 0$ трубопровода

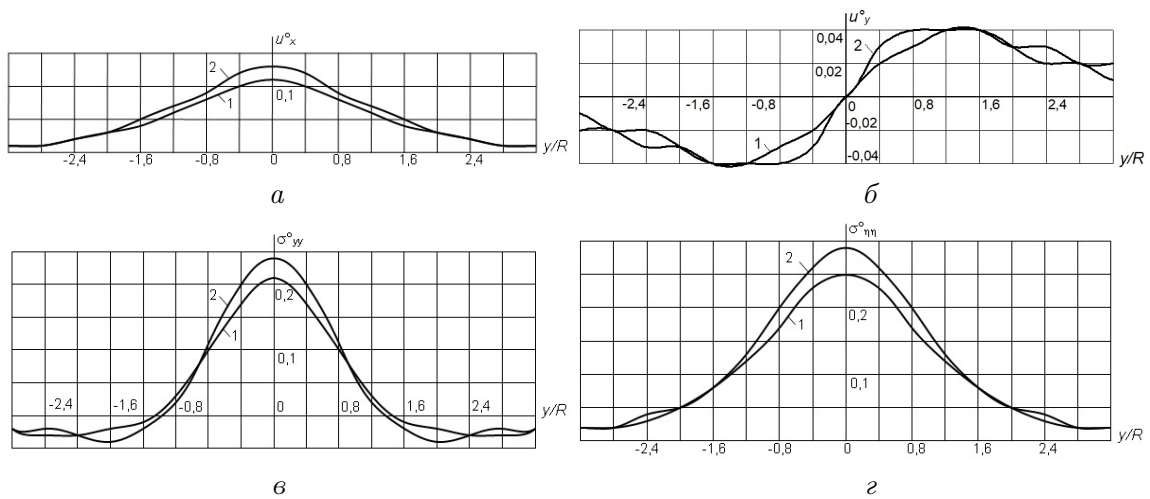


Рисунок 3 – Изменения компонент НДС земной поверхности в координатной плоскости xy ($x = h, \eta = 0$).

При использовании полученного решения исследовано динамическое поведение подземного однослойного (однородного) стального трубопровода при действии движущейся в нем нагрузки.

Список литературы

- 1 Пожуев В.И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 1. – С. 44-48.
- 2 Львовский В.М., Онищенко В.И., Пожуев В.И. Установившиеся колебания цилиндрической оболочки в упругой среде под действием подвижной нагрузки // Сб.: Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск. – 1974. – С. 98-110.
- 3 Гирнис С.Р. О расчёте заглубленного тоннеля с тонкостенной обделкой при действии стационарной подвижной нагрузки // Наука и техника Казахстана. – Павлодар. – 2006. – № 3. – С. 78-85.
- 4 Гирнис С.Р. Реакция упругого пространства на бегущую в оболочке нагрузку // Вестник Карагандинского государственного университета. Серия Физика. – Караганда. – 2008. – № 2. – С. 65-70.
- 5 Гирнис С.Р. Влияние геометрических параметров обделки на напряжённо-деформированное состояние заглубленного тоннеля // Вестник Бурятского университета. – Улан-Удэ. – 2009. – Вып. 3. – С. 132-139.
- 6 Ержанов Ж.С., Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука, 1989. – 240 с.
- 7 Украинец В.Н. Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок. – Павлодар: Издательство Павлодарского государственного университета, 2006. – 123 с.
- 8 Ukrainets V.N. Cojoint effect of mobile normal and torque loads on tunnel with circular support // Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. – 2007. – V. 310, № 1. – P. 55-58.
- 9 Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // International Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45, № 9. – P. 75-85.
- 10 Украинец В.Н. Действие подвижной нагрузки на толстостенную оболочку в упругом полупространстве // Вестник Павлодарского государственного университета. Серия физико-математическая. – Павлодар. – 2010. – № 4. – С. 81-87.
- 11 Coskun İ. and Dolmaseven D. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space // Journal of Engineering. – Hindawi Limited. – 2017. – Vol. 2017. – 12 p. <https://doi.org/10.1155/2017/6145375>.
- 12 Yuan Z., Boström A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space // Journal of Sound and Vibration. – Elsevier. – 2017. – Vol. 387. – P. 177-193.
- 13 Zhou Sh. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems. – Academic Press, 2019. – 276 p.
- 14 Coskun İ., Enginb H., Özmütülc A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity // Journal of Shock and Vibration. – Hindawi Limited. – 2011. – Vol. 18. – P. 827-838. <https://www.hindawi.com/journals/sv/2011/904936>.
- 15 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
- 16 Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1989. – 270 с.

Л.А. Алексеева¹, В.Н. Украинец²

¹ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

² Торайғыров университеті, Павлодар, Қазақстан

Көлік жүктемелерінің әсерінен тоннель мен ұсақ төсемді жерасты құбыры динамикасының моделі

Аннотация: Көлік жүктемелерінің көп қабатты қаптамамен бекітілген туннельге және жер асты көп қабатты құбырға олардың таяз төселуімен әсер етудің математикалық моделі жасалды. Жер асты құрылыстарының есептік схемасы ретінде серпімді жартылай кеңістікте (массивте) орналасқан серпімді цилиндрлік көп қабатты қабық қарастырылады. Қабық қабаттары мен серпімді жартылай кеңістіктің қозғалысы жылжымалы координаттар жүйесіндегі Лама теңдеулерімен сипатталады. Көлік жүктемесі массив пен қабықтағы бойлық және көлденең толқындардың таралу жылдамдығынан төмен жылдамдықпен қозғалатын субсондық жағдайда еркін жүктеме жылдамдығы кезінде массив пен қабықтың кернеулі-деформацияланған күйінің компоненттерін анықтау мәселесінің аналитикалық шешімі алынды. Компьютерлік эксперименттердің нәтижелері ұсынылған, олар асимметриялық көлік жүктемесінің әсерінен құбыр мен жер бетінің кернеулі күйін көрсетеді.

Түйін сөздер: Серпімді жартылай кеңістік, дыбыс жылдамдығына дейінгі жағдайда көлік жүктемесі, көп қабатты цилиндр пішінді қабық, кернеулі-деформацияланған күй.

L.A. Alexeyeva, V.N. Ukrainets

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Almaty, Kazakhstan

Toraighyrov University, Pavlodar, Kazakhstan

Model of the dynamics of a tunnel and a shallow underground pipeline under the action of traffic loads

Abstract: A mathematical model has been developed for the effect of transport loads on a tunnel reinforced with a multilayer shell and an underground multilayer pipeline at their shallow location. As a design scheme for these underground structures, an elastic cylindrical multilayer shell located in an elastic half-space (massif) is considered. The displacement of the layers of the shell and the elastic half-space is described by the Lamé equations in a moving coordinate system. An analytical solution is obtained for the problem of determining the components of the stress-strain state of a rock mass and a

shell at arbitrary loading speeds in the subsonic case, when the transport load moves at a speed lower than the propagation velocities of longitudinal and transverse waves in the rock and shell. The results of computer experiments are presented, which illustrate the stress-strain state of the pipeline and the earth's surface under moving axisymmetric traffic loads.

Keywords: Elastic half-space, subsonic transport load, multilayer cylindrical shell, stress-strain state.

References

- 1 Pozhuev V.I. Dejstvie podvizhnoj nagruzki na cilindricheskuju obolochku v uprugoj srede [The action of a moving load on a cylindrical shell in an elastic medium]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij [Construction mechanics and calculation of structures], 1, 44-48 (1978).
- 2 L'vovskij V.M., Onishhenko V.I., Pozhuev V.I. Ustanovivshiesja kolebanija cilindricheskoj obolochki v uprugoj srede pod dejstviem podvizhnoj nagruzki [Steady-state vibrations of a cylindrical shell in an elastic medium under the action of a moving load]. Sb.: Voprosy prochnosti i plastichnosti [Problems of strength and plasticity] (Dnepropetrovsk, 1974. P. 98-110).
- 3 Girmis S.R. O raschjote zaglublennogo tunnelja s tonkostennoj obdelkoj pri dejstvii stacionarnoj podvizhnoj nagruzki [On the calculation of a buried tunnel with a thin-walled lining under the action of a stationary moving load]. Nauka i tehnika Kazahstana [Science and technology of Kazakhstan], Pavlodar, 3, 78-85 (2006).
- 4 Girmis S.R. Reakcija uprugogo prostranstva na begushhuju v obolochke nagruzku [Reaction of elastic space to a load running in a shell]. Vestnik Karagandinskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija Fizika [Bulletin of the Karaganda State University. Physics series], Karaganda, 2, 65-70 (2008).
- 5 Girmis S.R. Vlijanie geometricheskikh parametrov obdelki na naprjazhjonno-deformirovanoe sostojanie zaglublennogo tunnelja [The influence of the geometric parameters of the lining on the stress-strain state of the buried tunnel]. Vestnik Burjatskogo universiteta [Bulletin of the Buryat University], Ulan-Ude, 3, 132-139 (2009).
- 6 Erzhanov Zh.S., Ajtaliev Sh.M., Alekseeva L.A. Dinamika tonnelej i podzemnyh truboprovodov [Dynamics of tunnels and underground pipelines] (Alma-Ata, Nauka, 1989. 240p.)
- 7 Ukrainec V.N. Dinamika tonnelej i truboprovodov melkogo zalozhenija pod vozdejstviem podvizhnyh nagruzok [Dynamics of shallow tunnels and pipelines under the influence of moving loads] (Pavlodar, Izdatel'stvo Pavlodarskogo gosudarstvennogo universiteta, 2006. 123p.)
- 8 Ukrainets V.N. Cojoint effect of mobile normal and torque loads on tunnel with circular support. Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, 310 (1), 55-58 (2007).
- 9 Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads. International Applied Mechanics, 45(9), 75-85 (2009).
- 10 Ukrainec V.N. Dejstvie podvizhnoj nagruzki na tolstostenntuju obolochku v uprugom poluprostranstve [The action of a movable load on a thick-walled shell in an elastic half-space]. Vestnik Pavlodarskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija fiziko-matematicheskaja [Bulletin of Pavlodar State University. Physics and mathematics series], Pavlodar, 4, 81-87 (2010).
- 11 Coskun İ. and Dolmaseven D. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space. Journal of Engineering. Hindawi Limited, 2017, 12 p. (2017). <https://doi.org/10.1155/2017/6145375>.
- 12 Yuan Z., Boström A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space. Journal of Sound and Vibration. Elsevier, 387, 177-193 (2017).
- 13 Zhou Sh. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems (Academic Press, 2019.276p.)
- 14 Coskun İ., Enginb H., Özmütülc A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity. Journal of Shock and Vibration. Hindawi Limited. 18, 827-838 (2011). <https://www.hindawi.com/journals/sv/2011/904936>.
- 15 Novackij V. Teorija uprugosti [Theory of elasticity] (Moscow, Mir, 1975, 872p.)
- 16 Bulychev N.S. Mehanika podzemnyh sooruzhenij v primerah i zadachah [Mechanics of underground structures in examples and problems] (Moscow, Nedra, 1989, 270p.)

Информация об авторах:

Алексеева Л.А. – доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина 125, Алматы, Казахстан.

Украинец В. Н. – автор для корреспонденции, доктор технических наук, профессор кафедры "Архитектура и дизайн", Торайгыров университет, ул. Ак. Чокина 139, г. Павлодар, Казахстан.

Alexeyeva L. A. – Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, 125 Pushkin Str., Almaty, Kazakhstan.

Ukrainets V. N. – corresponding author, Doctor of Technical Sciences, professor Department of "Architecture and Design", Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan.

Received 7.12.2020

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика.
Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 133, №4, 40-53 беттер
<http://bulmathmc.enu.kz>, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: 27.01

А. А. Кореновский

*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, Украина
(E-mail: anakor@paco.net)*

РАСЧЕТЫ К ОДНОЙ ИЛЛЮСТРАЦИИ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА¹

Аннотация: На сторонах прямоугольного равнобедренного треугольника построены внешние по отношению к этому треугольнику квадраты. Задача состоит в построении такой прямой на плоскости, которая делит состоящую из этих трех квадратов фигуру на две равновеликие (т.е. равной площади) фигуры. Подсчитаны некоторые параметры, определяемые этой прямой, в частности, площади частей исходных квадратов в полуплоскостях. Соответствующие результаты иллюстрируются различными чертежами, таблицами и графиками.

Ключевые слова: теорема Пифагора, интерпретация теоремы Пифагора, деление фигуры, равновеликие фигуры.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-133-4-40-53>

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье приводится решение одной задачи элементарной математики. Поводом послужила распространенная в Интернете анимация [1], иллюстрирующая теорему Пифагора (см. Рис. 1). Материал статьи может оказаться интересным для школьников, а также для учителей математики, которые руководят самостоятельной работой учеников или проводят исследования с целью повышения своего квалификационного уровня.

Постановка задачи: Рассматривается прямоугольный равнобедренный треугольник, длина гипотенузы которого равна 1. Каждая сторона этого треугольника является стороной внешнего по отношению к треугольнику квадрата. Предположим, что эти квадраты являются плоскими сосудами, соединенными между собой с помощью вершин треугольника. В системе этих сосудов содержится 1 л жидкости.

Вопрос: *сколько жидкости содержится в каждом из сосудов, если гипотенуза треугольника наклонена под заданным углом α относительно линии горизонта?*

Частичное решение такой задачи в случае треугольника со сторонами 3, 4 и 5 приведено в дипломной работе [2], а в случае произвольного прямоугольного треугольника – в работе [3].

¹Я очень благодарен Нурлану Темиргалиеву и Карлыгаш Нуртазиной за интерес к работе и предоставленную ссылку в Интернете.

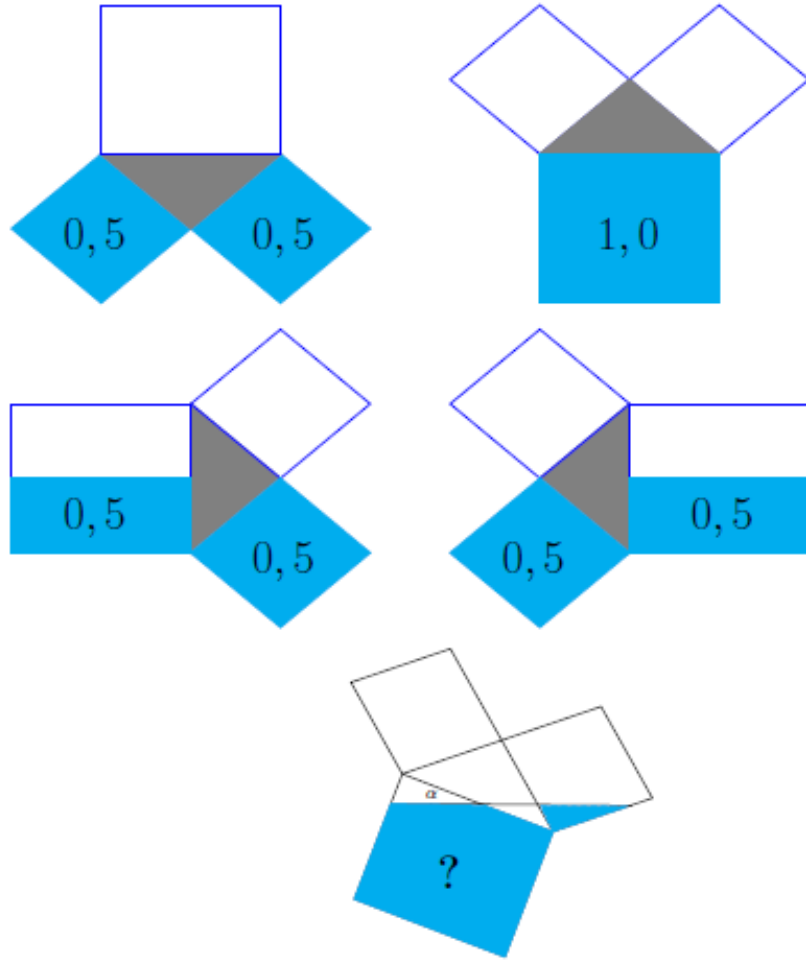


Рисунок 1 – Постановка задачи.

1. МАЛЫЕ УГЛЫ ПОВОРОТА

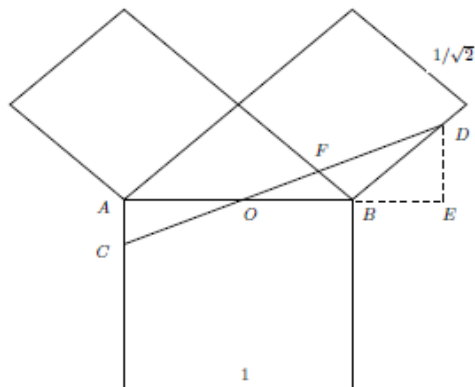


Рисунок 2 – Малые углы поворота (§1).

Обозначим $\angle AOC = \angle DOE = \alpha$, $\angle ODB = \beta$, $|AC| = y$, $|BD| = x$.
 При $\alpha \gtrsim 0$ имеем $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$. Обозначим $t = \operatorname{tg} \alpha$. Тогда $|AO| = \frac{y}{t}$, $|OB| = 1 - \frac{y}{t}$, $|BE| = |DE| = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Из прямоугольного треугольника $\triangle ODE$ находим

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{y}{t} + \frac{x}{\sqrt{2}}} = t \iff \quad (1)$$

$$\iff x \cdot \frac{1-t}{t} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{y}{t}\right). \quad (2)$$

Выразим $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1-t}{1+t}$. Из условия равенства площадей прямоугольных треугольников $\triangle AOC$ и $\triangle FDB$ имеем:

$$\frac{y^2}{t} = x^2 \cdot \frac{1-t}{1+t} \iff \quad (3)$$

$$\iff x \cdot \frac{1-t}{t} = \frac{y}{t} \cdot \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) получаем

$$\sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{y}{t}\right) = \frac{y}{t} \sqrt{\frac{1-t^2}{t}} \iff y = \frac{\sqrt{2} \cdot t}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}. \quad (5)$$

В итоге получили

$$\begin{aligned} S_{\triangle DFB} = S_{\triangle AOC} &= \frac{y^2}{2t} = \frac{1}{2t} \left(\frac{\sqrt{2} \cdot t}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}} \right)^2 = \frac{t}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}\right)^2} = \\ &= \frac{t^2}{2t + 1 - t^2 + 2\sqrt{2t(1-t^2)}}, \quad 0 \leq t \leq t_0. \end{aligned}$$

2. ВТОРОЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

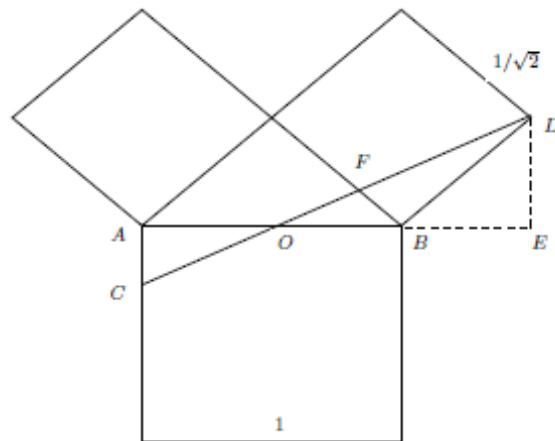


Рисунок 3 – Второй критический случай (§2).

Для нахождения t_0 подставим (5) в (2) и получим

$$x = \frac{t}{1-t} \cdot \sqrt{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}\right) = \frac{t}{1-t} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}.$$

Из геометрических соображений имеем $x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Имеем

$$x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{1}{2} \geq \frac{t}{1-t} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}} \iff$$

$$\iff \sqrt{2} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{1-t} \geq \sqrt{1+t} \cdot (3t-1). \quad (6)$$

В предельном случае $|BD| = x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ требуется найти корни уравнения

$$2t(1-t) = (t+1)(9t^2-6t+1) \iff 9t^3+5t^2-7t+1=0. \quad (7)$$

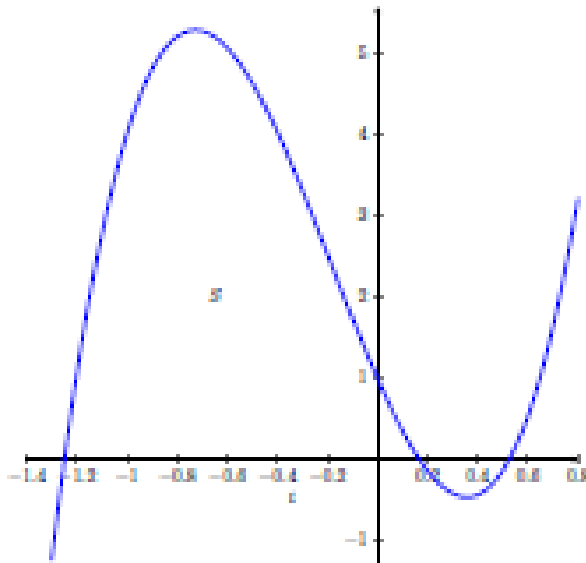


Рисунок 4 – График кубической параболы в левой части равенства (7).

Корни этого уравнения (7) можно найти с использованием формул Кардано. Приближенные значения корней равны -1.249 , 0.170 , 0.524 , и лишь последний из них $t_0 \approx 0,524$ удовлетворяет условию $t_0 > \frac{1}{3}$ (при таком t_0 неравенство (6) обращается в равенство). При этом $y \approx 0,286$, $\frac{y}{t} \approx 0,546$, $S \approx 0,078$.

3. ПЕРВЫЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

В предыдущем разделе 2 было получено, что $\frac{y}{t_0} \approx 0,546 > \frac{1}{2}$. Поэтому естественным является следующий вопрос: *при каком значении $t = t'_0 \in (0, t_0)$ значение $\frac{y}{t} = \frac{1}{2}$?* При этом значении t'_0 точка O делит отрезок AB пополам. Для нахождения t'_0 требуется решить уравнение

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}} = \frac{1}{2} \iff t^2 + 2t - 1 = 0 \iff t = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414.$$

Таким образом, $t'_0 = \sqrt{2} - 1$, а соответствующие значения $y = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0,207$, $S = \frac{\sqrt{2}-1}{8} \approx 0,052$.

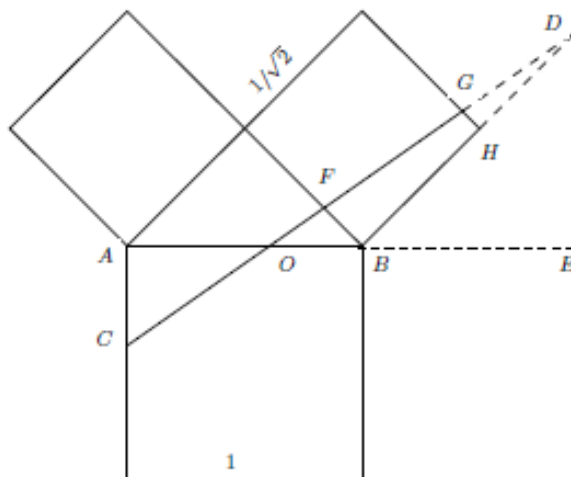


Рисунок 5 – Второй посткритический случай (§4).

4. ВТОРОЙ ПОСТКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Как и в предыдущем случае, пусть $\angle AOC = \angle DOE = \alpha$, $\angle ODB = \beta$, $|AC| = y$, $|BD| = x$. При $\text{arctg } t_0 \leq \alpha < \frac{\pi}{4}$ снова имеем $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$, и для $t = \text{tg } \alpha$ имеем $|AO| = \frac{y}{t}$, $|OB| = 1 - \frac{y}{t}$, $|BE| = |DE| = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Как и в предыдущем случае, в прямоугольном треугольнике $\triangle ODE$ видим, что равенства (1) и (2) остаются в силе, т. е.

$$x \cdot \frac{1-t}{t} = \sqrt{2} \left(1 - \frac{y}{t}\right). \quad (8)$$

Площадь трапеции $BFGH$ находим как разность площадей треугольников $\triangle FDB$ и $\triangle GDH$, а условие равенства площадей треугольника $\triangle AOC$ и трапеции $BFGH$ принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{t} &= x^2 \cdot \frac{1-t}{1+t} - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1-t}{1+t} \iff \frac{y^2}{t} \cdot \frac{1+t}{1-t} = \sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2} \iff \\ &\iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{y^2}{t} \cdot \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Комбинируя (8) и (9), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{y^2}{t} \cdot \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1-t}{t} &= \sqrt{2} \left(1 - \frac{y}{t}\right) \iff \\ \iff y^2 \cdot \frac{1+t}{t} + 2y + \frac{1-5t}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Вычислим дискриминант

$$D = \frac{2}{t} (5t^2 + 6t - 1).$$

Учитывая, что $y > 0$, из уравнения (10) находим

$$y = \frac{\sqrt{\frac{2}{t} (5t^2 + 6t - 1)} - 2}{2 \cdot \frac{1+t}{t}} = \frac{\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}} - t}{1+t}. \quad (11)$$

При этом

$$S = \frac{y^2}{2t} = \frac{1}{2t} \cdot \frac{\frac{t}{2} (5t^2 + 6t - 1) + t^2 - 2t \sqrt{\frac{t}{2} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}}}{(1+t)^2} = \frac{\frac{5}{4}t^2 + 2t - \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{t}{2} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}}}{(1+t)^2}.$$

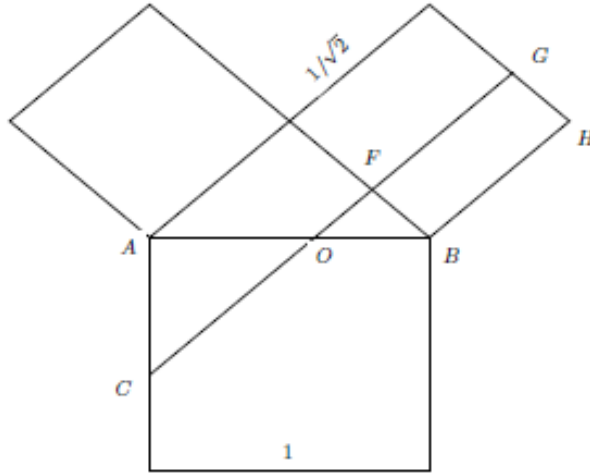


Рисунок 6 – Третий критический случай $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (§5).

5. ТРЕТИЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

В предельном случае $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $t = \operatorname{tg} \alpha = 1$ имеем $|AC| = |AO| = y$, $|OB| = 1 - y$, $|FB| = \frac{1-y}{\sqrt{2}}$, а условие равенства площадей треугольника $\triangle AOC$ и прямоугольника $BFGH$ принимает такой вид

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-y}{\sqrt{2}} \iff y^2 + y - 1 = 0 \implies y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618.$$

Интересно отметить, что в этом случае отрезок AO осуществляет "золотое сечение" отрезка AB .

Заметим также, что при $t = 1$ равенство (11) принимает вид $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. при $t = 1$ ($\alpha = \frac{\pi}{4}$) равенство (11) остается в силе. При этом $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$,

$$S = \frac{y^2}{2} = \frac{1}{8} (6 - 2\sqrt{5}) = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \approx 0,191.$$

6. УГОЛ ПОВОРОТА $\alpha \gtrsim \frac{\pi}{4}$

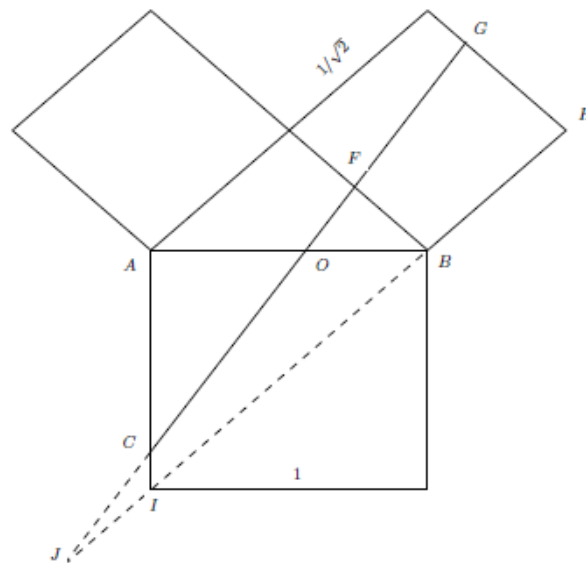


Рисунок 7 – Угол поворота $\alpha \gtrsim \frac{\pi}{4}$ (§6).

Рассмотрим теперь случай $\angle AOC = \angle FOB = \alpha \gtrsim \frac{\pi}{4}$. Из треугольника $\triangle OBF$ находим $\angle OFB = \gamma = \frac{3\pi}{4} - \alpha$, а из прямоугольного треугольника $\triangle BFJ$ находим $\angle BJF = \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma = \alpha - \frac{\pi}{4}$. Как и выше, обозначаем $t = \operatorname{tg} \alpha$, тогда $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{t-1}{t+1}$. Далее, обозначим $|AC| = y$, $|BJ| = x$. Тогда $|AO| = \frac{y}{t}$, $|OB| = 1 - \frac{y}{t}$, $|BF| = x \cdot \operatorname{tg} \beta$. В треугольнике $\triangle BFO$ по теореме синусов получим

$$\frac{1 - \frac{y}{t}}{\sin \gamma} = \frac{x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} \iff \frac{1 - \frac{y}{t}}{x \cdot \frac{t-1}{t+1}} = \frac{\sin \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right)}{\sin \alpha}. \quad (12)$$

Так как

$$\frac{\sin \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right)}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t+1}{t},$$

то из (12) следует

$$\frac{1 - \frac{y}{t}}{x \cdot \frac{t-1}{t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t+1}{t} \iff x = \sqrt{2} \cdot \frac{t-y}{t-1}. \quad (13)$$

Площадь трапеции $BFGH$ найдем как разность площадей прямоугольных треугольников $\triangle HJG$ и $\triangle BJF$. Тогда условие равенства площадей треугольника $\triangle AOC$ и трапеции $BFGH$ принимает такой вид

$$\frac{y^2}{t} = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \operatorname{tg} \beta - x^2 \operatorname{tg} \beta \iff \frac{y^2}{t} = \frac{t-1}{t+1} \left(\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2} \right). \quad (14)$$

Подставив (13) в (14), получим

$$\frac{y^2}{t} = \frac{t-1}{t+1} \left(2 \cdot \frac{t-y}{t-1} + \frac{1}{2} \right) \iff y^2 \cdot \frac{t+1}{t} + 2 \cdot y + \frac{1-5t}{2} = 0. \quad (15)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (10) и, таким образом, его положительное решение выражено равенством (11), т. е.

$$y = \frac{\sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1} - t}{1 + t}.$$

При этом, как и выше,

$$S = \frac{y^2}{2t} = \frac{\frac{5}{4}t^2 + 2t - \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}}{(1+t)^2}.$$

Далее естественно возникает следующий вопрос: с ростом t ($= \operatorname{tg} \alpha$) какая из двух ситуаций наступит раньше

$$1) |AC| = 1 \ (y = 1, t = t_1, \beta = \beta_1) \quad \text{или} \quad 2) |GH| = \frac{1}{\sqrt{2}} ?$$

7. ШЕСТОЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Покажем, что раньше наступит отмеченная в конце предыдущего раздела ситуация 1). В предельном случае $y = 1$ ($x = \sqrt{2}$) равенство (15) принимает вид

$$\frac{t+1}{t} + 2 + \frac{1-5t}{2} = 0 \iff 5t^2 - 7t - 2 = 0.$$

Положительное решение этого уравнения $t_1 = \frac{7+\sqrt{89}}{10} \approx 1,643$. При этом значении t_1 имеем

$$\frac{|GH|}{|HJ|} = \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{t_1 - 1}{t_1 + 1} = \frac{\frac{7+\sqrt{89}}{10} - 1}{\frac{7+\sqrt{89}}{10} + 1} = \frac{\sqrt{89} - 3}{\sqrt{89} + 17} < \frac{1}{3}.$$

Это означает, что ограничения рассмотренного в предыдущем разделе случая следующие

$$1 < t \leq t_1 = \frac{7 + \sqrt{89}}{10} \iff \frac{\pi}{4} < \alpha \leq \operatorname{arctg} \frac{7 + \sqrt{89}}{10}.$$

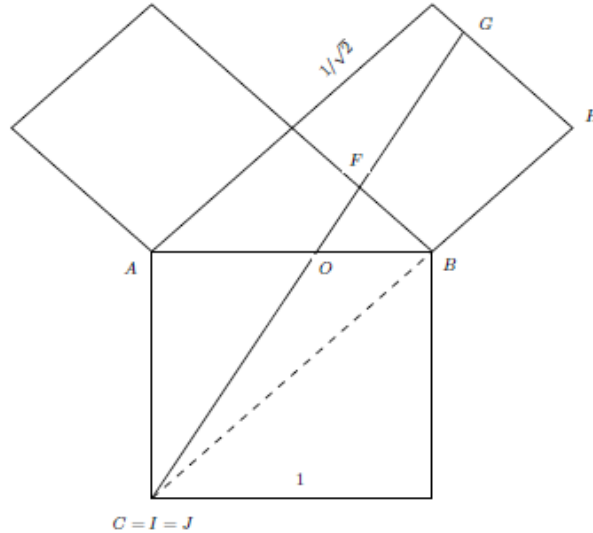


Рисунок 8 – Шестой критический случай (§7).

При $t = t_1$ имеем $y = 1$, $\frac{y}{t_1} = \frac{10}{7+\sqrt{89}} \approx 0,608$, $S = \frac{1}{2t_1} = \frac{5}{7+\sqrt{89}} \approx 0,304$, а при $t \gtrsim t_1 = \frac{7+\sqrt{89}}{10}$ наступает ситуация, которая рассматривается в следующем разделе.

8. ПЯТЫЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Вернемся к случаю, рассмотренному в разделе 6, и изучим такой вопрос: *при каком значении $t = t'_1 \in (1, t_1)$ обе части правого маленького квадрата будут иметь одинаковые площади?* Ответом на этот вопрос является решение уравнения $S = \frac{1}{4}$, т. е.

$$\frac{\frac{5}{4}t^2 + 2t - \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{t}{2} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}}}{(1+t)^2} = \frac{1}{4}.$$

Элементарные преобразования приводят это уравнение к такому

$$4t^4 + 2t^3 - 7t^2 - 4t + 1 = 0,$$

а его численное решение $t'_1 \in (1, t_1)$ равно $t'_1 \approx 1,309$. При этом, поскольку $S = \frac{y^2}{2t'_1} = \frac{1}{4}$, то

$$y(t'_1) = \sqrt{\frac{t'_1}{2}} \approx 0,809, \quad \frac{y(t'_1)}{t'_1} = \frac{1}{\sqrt{2t'_1}} \approx 0,618.$$

9. ЧЕТВЕРТЫЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Снова вернемся к случаю, рассмотренному в разделе 6, и изучим еще и такой вопрос: *при каком значении $t = t''_1 \in (t_0, t_1)$ значение $\frac{y}{t}$ максимальное?* Иначе говоря, какую максимальную длину может иметь отрезок AO ?

Этот вопрос сводится к нахождению максимума функции

$$\frac{y}{t} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2t} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}} - 1}{1+t}.$$

Численный анализ показывает, что эта функция достигает своего максимального значения $\frac{y}{t} \approx 0,620$ в точке $t''_1 \approx 1,141$. При этом $y \approx 0,707$, $S \approx 0,219$.

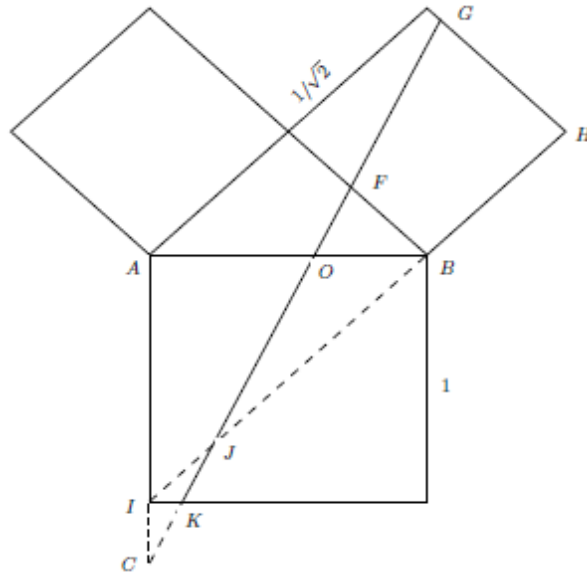


Рисунок 9 – Шестой посткритический случай (§10).

10. ШЕСТОЙ ПОСТКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Как и в случае 2c), обозначаем $\angle AOC = \angle FOB = \alpha$, $\angle BJF = \beta$, $\angle OFB = \gamma$, $t = \operatorname{tg} \alpha$, $|AC| = y$, $|BJ| = x$. Тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{t-1}{t+1}$, равенство (12) остается в силе, и, таким образом, в силу (13),

$$x = \sqrt{2} \cdot \frac{t-y}{t-1}. \quad (16)$$

Площадь трапеции $AOKI$ найдем как разность площадей прямоугольных треугольников $\triangle AOC$ и $\triangle IKC$, а площадь трапеции $BFGH$ найдем как разность площадей прямоугольных треугольников $\triangle HJG$ и $\triangle BJF$. Тогда условие равенства площадей трапеций $AOKI$ и $BFGH$ принимает следующий вид

$$\frac{y^2}{t} - \frac{(y-1)^2}{t} = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \operatorname{tg} \beta - x^2 \cdot \operatorname{tg} \beta \iff \frac{2y-1}{t} = \frac{t-1}{t+1} \left(\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\right). \quad (17)$$

Подставим (16) в (17) и получим

$$\frac{1}{t} \cdot (2y-1) = \frac{t-1}{t+1} \left(2 \cdot \frac{t-y}{t-1} + \frac{1}{2}\right) \iff y = \frac{5t^2 + t + 2}{4 \cdot (2t+1)}. \quad (18)$$

При этом

$$\frac{y}{t} = \frac{5t^2 + t + 2}{4t \cdot (2t+1)}, \quad S = \frac{2y-1}{2t} = \frac{1}{2t} \left(\frac{5t^2 + t + 2}{4t+2} - 1\right) = \frac{5t-3}{4(2t+1)}.$$

Условия на параметры для этого случая

$$\begin{aligned} |GH| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} &\iff \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \operatorname{tg} \beta \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{t-1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \\ &\iff \sqrt{2} \cdot x + 1 \leq \frac{t+1}{t-1} \iff \sqrt{2} \cdot x \leq \frac{2}{t-1} \iff x \leq \frac{\sqrt{2}}{t-1}. \end{aligned}$$

Подставим (16) и получим

$$\frac{\sqrt{2}}{t-1} \cdot (t-y) \leq \frac{\sqrt{2}}{t-1} \iff t \leq y+1. \quad (19)$$

Подставим (18) и получим

$$t \leq \frac{5t^2 + t + 2}{4 \cdot (2t+1)} + 1 \iff t-1 \leq \frac{5t^2 + t + 2}{8t+4} \iff$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 + 4t - 8t - 4 \leq 5t^2 + t + 2 \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 6 \leq 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена $D = 25 + 72 = 97$ и тогда получаем $t \leq t_2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{6} \approx 2,475$.

11. СЕДЬМОЙ КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

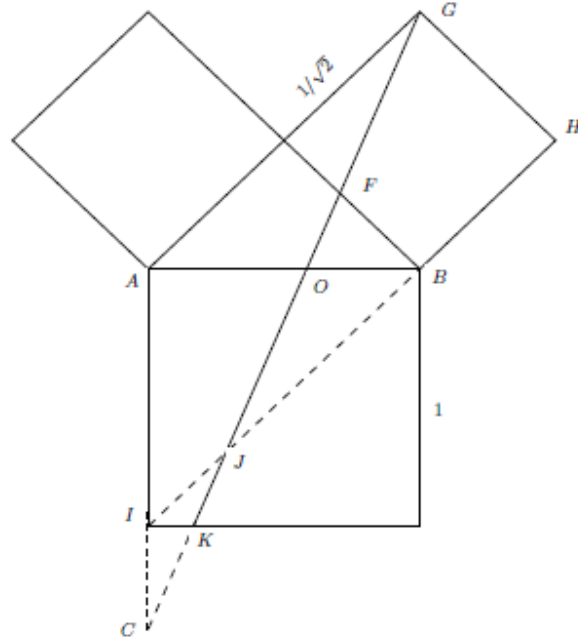


Рисунок 10 – Седьмой критический случай (§11).

При $t = t_2$ из (19) имеем

$$y = t_2 - 1 = \frac{5 + \sqrt{97}}{6} - 1 = \frac{\sqrt{97} - 1}{6} \approx 1,475.$$

При этом

$$\frac{y}{t_2} = \frac{17 - \sqrt{97}}{12} \approx 0,596; \quad S = 2y - 12t_2 = \frac{\sqrt{97} - 4}{\sqrt{97} + 5} \approx 0,394.$$

12. УГОЛ ПОВОРОТА $\alpha \lesssim \frac{\pi}{2}$

Пусть $\alpha \gtrsim \arctg t_2$ ($t > t_2$). Как и в случае 3a), обозначаем $\angle AOC = \angle FOB = \alpha$, $\angle B J F = \beta$, $t = \tg \alpha$, $|AC| = y$, $|BJ| = x$. Тогда равенство (12) (а значит и (13) и (16)) остаются в силе и, таким образом,

$$x = \sqrt{2} \cdot \frac{t - y}{t - 1}. \tag{20}$$

Площадь S_{AOKI} трапеции $AOKI$ найдем как разность площадей прямоугольных треугольников $\triangle AOC$ и $\triangle IKC$, т. е. $2 \cdot S_{AOKI} = \frac{y^2}{t} - \frac{(y-1)^2}{t}$. Площадь пятиугольника $BFG LH$ найдем как разность площадей квадрата $BMLH$ и прямоугольного треугольника $\triangle FMG$. Имеем $|FB| = x \cdot \tg \beta$, $|MF| = \frac{1}{\sqrt{2}} - x \cdot \tg \beta$, $\angle MGF = \beta$, $2S_{\triangle FMG} = |MF|^2 \cdot \tg \beta$, $S_{BMLH} = \frac{1}{2}$. Итак, условие равенства площадей трапеции $AOKI$ и пятиугольника $BFG LH$ принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{t} - \frac{(y-1)^2}{t} &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x \cdot \frac{t-1}{t+1} \right)^2 \cdot \frac{t+1}{t-1} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 \cdot \frac{2}{(t-1)(t+1)} + y \cdot \left[\frac{2}{t} + \frac{2}{t-1} - \frac{4t}{(t-1)(t+1)} \right] + \end{aligned}$$

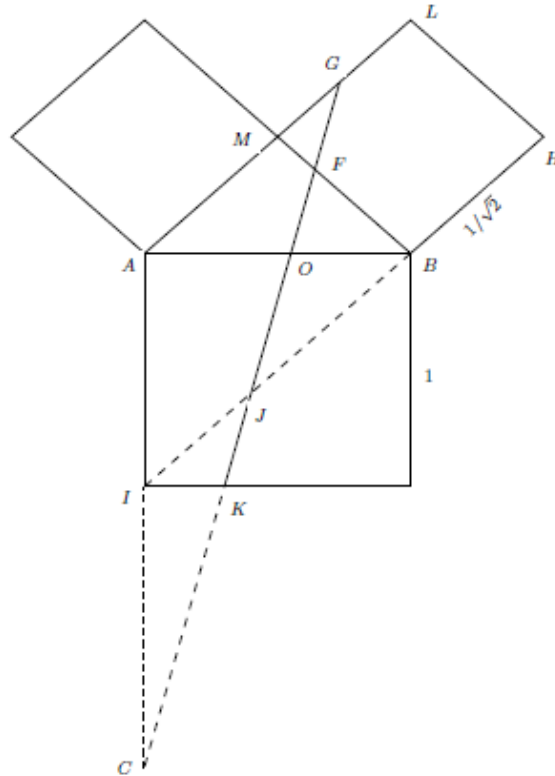


Рисунок 11 – Угол поворота $\alpha \lesssim \frac{\pi}{2}$ (§12).

$$+ \left[-\frac{1}{t} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t+1}{t-1} - \frac{2t}{t-1} + \frac{2t^2}{(t-1)(t+1)} \right] = 0. \quad (21)$$

Упростим коэффициенты

$$\frac{2}{t} + \frac{2}{t-1} - \frac{4t}{(t-1)(t+1)} = \frac{2}{t(t+1)},$$

$$-\frac{1}{t} - 1 + \frac{\frac{1}{2}(t+1)}{t-1} - \frac{2t}{t-1} + \frac{2t^2}{(t-1)(t+1)} = \frac{-t^2 - 5t - 2}{2t(t+1)}.$$

Итак, уравнение (21) принимает следующий вид

$$y^2 \cdot \frac{2}{(t-1)(t+1)} + y \cdot \frac{2}{t(t+1)} - \frac{t^2 + 5t + 2}{2t(t+1)} = 0 \iff$$

$$\iff y^2 \cdot \frac{2t}{t-1} + 2y - \frac{t^2 + 5t + 2}{2} = 0. \quad (22)$$

Дискриминант квадратного трехчлена в левой части равен

$$D = 4 \cdot \frac{t+1}{t-1} (t^2 + 4t - 1).$$

Таким образом, положительное решение уравнения (22) равно

$$y = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \cdot \sqrt{t^2 + 4t - 1} - 2}{\frac{4t}{t-1}} = \frac{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 + 4t - 1)} + 1 - t}{2t}.$$

При этом

$$\frac{y}{t} = \frac{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 + 4t - 1)} + 1 - t}{2t^2},$$

$$S = \frac{2y - 1}{2t} = \frac{\sqrt{(t^2 - 1)(t^2 + 4t - 1)} + 1 - 2t}{2t^2}.$$

Итоги

Подытожим полученные результаты в виде таблиц и графиков. Через S обозначается площадь нижней части правого (нижнего) "маленького" квадрата.

Сводная таблица результатов.

§	t	$ AC = y$	$ AO = \frac{y}{t}$	S
–	0	0	–	0
1	$0 \leq t \leq t_0 \approx 0,524$ – корень уравнения $9t^3 + 5t^2 - 7t + 1 = 0$	$\frac{\sqrt{2} \cdot t}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}$	$\frac{t^2}{2t+1-t^2+2\sqrt{2t(1-t^2)}}$
3	$t'_0 \approx 0,414$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0,207$	0,5	$\frac{\sqrt{2}-1}{8} \approx 0,052$
2	$t_0 \approx 0,524$	$\approx 0,286$	$\approx 0,546$	$\approx 0,078$
4	$t_0 \leq t \leq 1$	$\frac{\sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2+6t-1}-t}{1+t}$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2t}} \cdot \sqrt{5t^2+6t-1}-1}{1+t}$	$\frac{\frac{5}{4}t^2+2t-\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2+6t-1}}{(1+t)^2}$
5	1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$	$\frac{3-\sqrt{5}}{4} \approx 0,191$
6	$1 \leq t \leq t_1 =$ $= \frac{7+\sqrt{89}}{10} \approx 1,643$	$\frac{\sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2+6t-1}-t}{1+t}$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2t}} \cdot \sqrt{5t^2+6t-1}-1}{1+t}$	$\frac{\frac{5}{4}t^2+2t-\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2+6t-1}}{(1+t)^2}$
9	$t''_1 \approx 1,141$	$\approx 0,707$	$\approx 0,620$	$\approx 0,219$
8	$t'_1 \approx 1,309$	$\approx 0,809$	$\approx 0,618$	0,25
7	t_1	1	$\frac{10}{7+\sqrt{89}} \approx 0,608$	$\frac{5}{7+\sqrt{89}} \approx 0,304$
10	$t_1 \leq t \leq t_2 =$ $= \frac{5+\sqrt{97}}{6} \approx 2,475$	$\frac{5t^2+t+2}{4(2t+1)}$	$\frac{5t^2+t+2}{4 \cdot t(2t+1)}$	$\frac{5t-3}{4(2t+1)}$
11	t_2	$\frac{\sqrt{97}-1}{6} \approx 1,475$	$\frac{17-\sqrt{97}}{12} \approx 0,596$	$\frac{\sqrt{97}-4}{\sqrt{97}+5} \approx 0,394$
12	$t \geq t_2$	$\frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2+4t-1)+1}-t}{2t}$	$\frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2+4t-1)+1}-t}{2t^2}$	$\frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2+4t-1)+1}-2t}{2t^2}$
–	$+\infty$	$+\infty$	0,5	0,5

Таблица критических состояний.

§	t	α^o	$y = AC $	$\frac{y}{t} = AO $	S
–	0	0	0	–	0
§3	$t'_0 \approx 0,414$	22,490	0,207	0,5	0,052
§2	$t_0 \approx 0,524$	27,655	0,286	0,546	0,078
§5	1	45	0,618	0,618	0,191
§9	$t''_1 \approx 1,141$	48,768	0,707	0,620	0,219
§8	$t'_1 \approx 1,309$	52,622	0,809	0,618	0,25
§7	$t_1 \approx 1,643$	58,674	1	0,608	0,304
§11	$t_2 \approx 2,475$	67,999	1,475	0,596	0,394
–	$+\infty$	90	$+\infty$	0,5	0,5

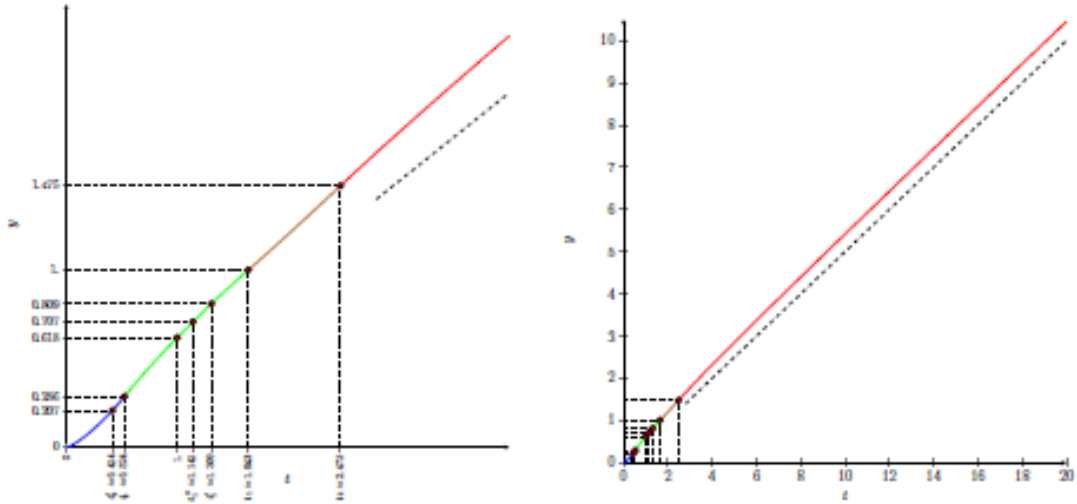


Рисунок 12 – График функции $y = y(t)$.

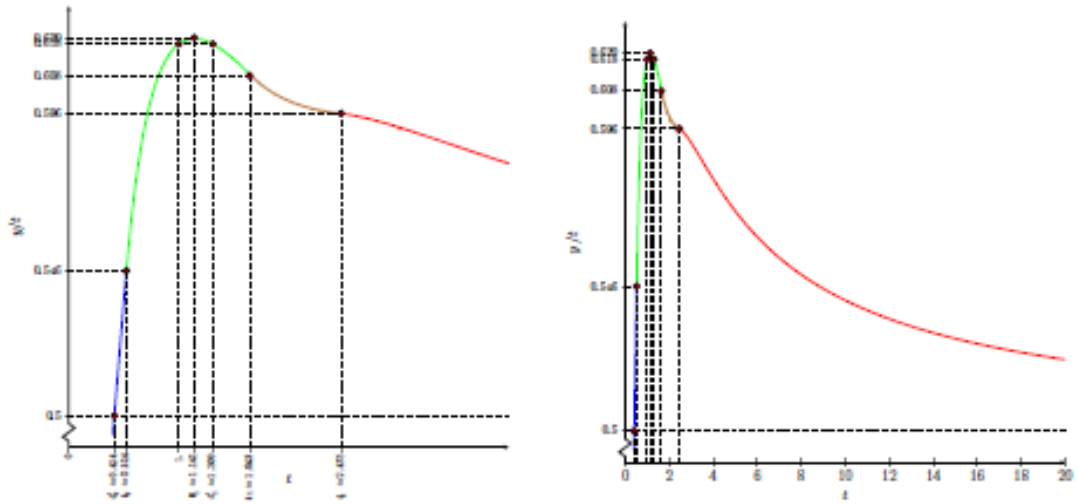


Рисунок 13 – График отклонения от центра гипотенузы $\frac{y(t)}{t}$.

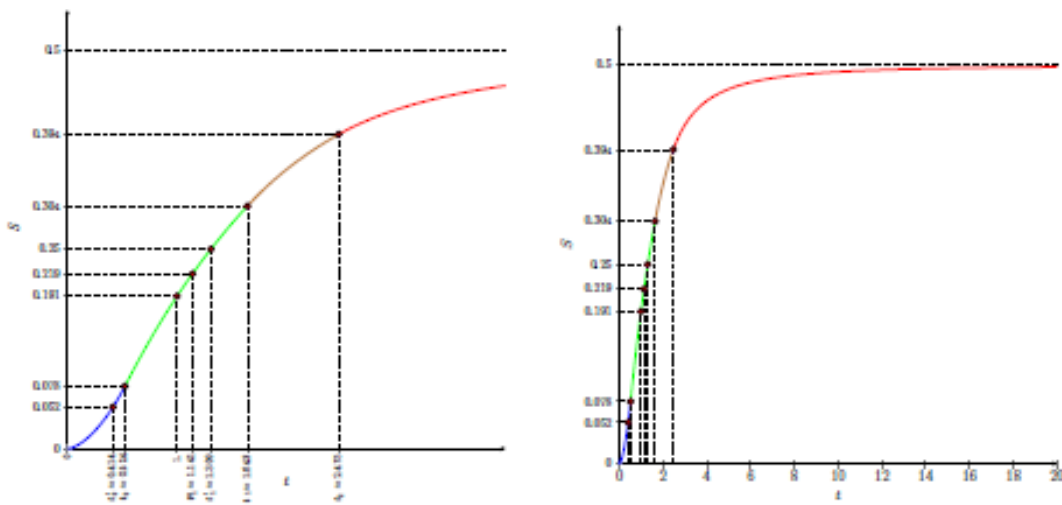


Рисунок 14 – График функции площади $S = S(t)$.

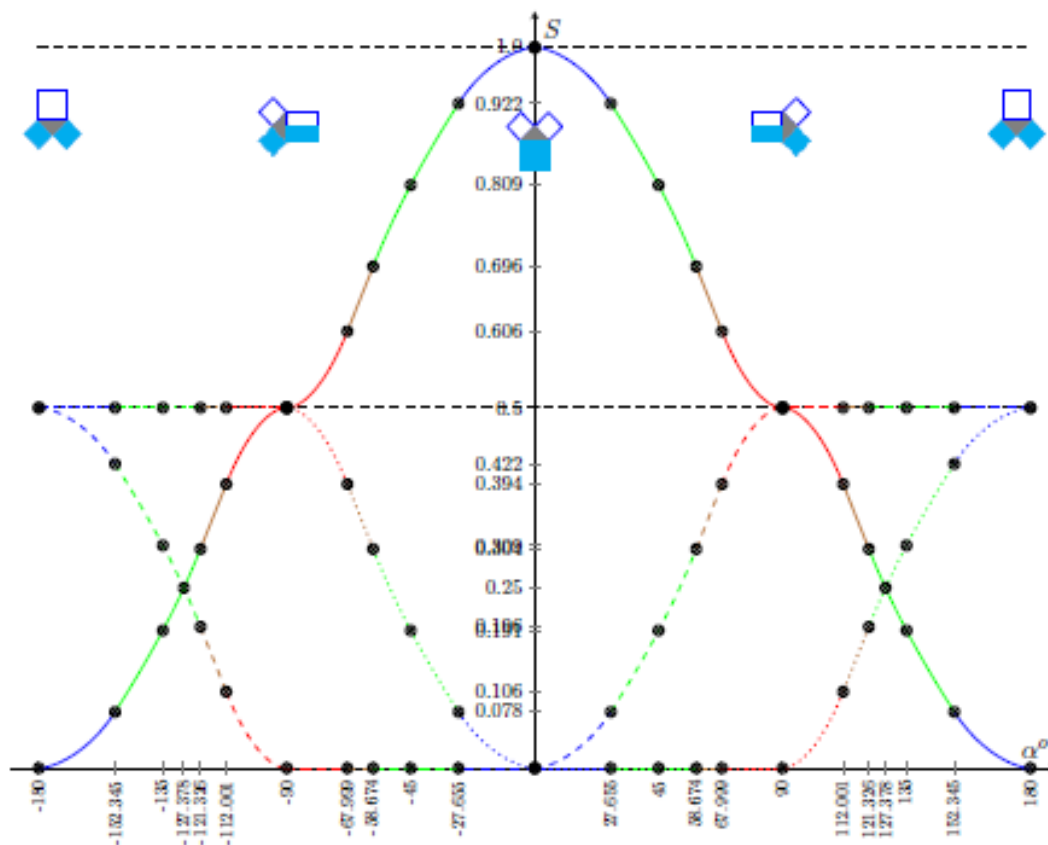


Рисунок 15 – График функций площади $S = S(\alpha)$.

Список литературы

- 1 http://img1.liveinternet.ru/images/attach/c/0/119/903/119903615_math7.gif
- 2 Золотонос С. М. Про одну інтерпретацію теореми Піфагора. Дипломна робота. Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, факультет математики, фізики та інформаційних технологій, кафедра математичного аналізу. –Одеса, 2018. –30 с.
- 3 Новак Д. В. Про одну інтерпретацію теореми Піфагора. II. Дипломна робота. Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, факультет математики, фізики та інформаційних технологій, кафедра математичного аналізу. – Одеса, 2020. –35 с.

А. А. Кореновский

И.И. Мечников атындағы Одесса ұлттық университет, Одесса, Украина

Пифагор теоремасының бір мысалы үшін есептеулер

Аннотация: Тік бұрышты тең бүйірлі үшбұрыштың қабырғалары арқылы осы үшбұрышқа сырттай квадраттар салынған. Жазықтықта осы үш квадраттан тұратын фигураны екі бірдей өлшемді (яғни аудандары тең) фигураларға бөлетін түзуді салу есебі қойылады. Осы түзумен анықталатын кейбір параметрлер, атап айтқанда, бастапқы квадраттардың жарты жазықтықтардағы бөліктерінің аудандары есептеледі. Сәйкес нәтижелер әртүрлі сызбалармен, кестелермен және графиктермен бейнеленген.

Түйін сөздер: Пифагор теоремасы, Пифагор теоремасына түсініктеме беру, фигураларды бөлу, тең өлшемді фигуралар.

A.A. Korenovskyi

I.I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine

Calculations for one illustration of the Pythagorean Theorem

Abstract: On the sides of a right-angled isosceles triangle, squares external to this triangle are built. The task is to construct a straight line on a plane that divides a figure consisting of these three squares into two equal-sized (that is, equal area) figures. Some parameters determined by this line are calculated, in particular, the areas of parts of the original squares in half-planes. The corresponding results are illustrated by various drawings, tables and graphs.

Keywords: Pythagorean theorem, interpretation of the Pythagorean theorem, figure division, figures of equal size.

References

- 1 http://img1.liveinternet.ru/images/attach/c/0/119/903/119903615_math7.gif
- 2 Zolotonos S. M. Pro odnu interpretaciju teoremi Pifagora [On an interpretation of the Pythagorean theorem]. Graduate work. I.I. Mechnikov Odessa National University, Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Department of Mathematical Analysis (Odessa, 2018. –30 p.) [in Ukrainian]
- 3 Novak D. V. Pro odnu interpretaciju teoremi Pifagora. II [On an interpretation of the Pythagorean theorem. II.]. Graduate work. I.I. Mechnikov Odessa National University, Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Department of Mathematical Analysis (Odessa, 2020. –35 p.) [in Ukrainian]

Информация об авторе:

Кореновский А.А. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, ул. Дворянская, 2, Одесса, Украина.

Korenovskyi A.A. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Analysis, I.I. Mechnikov Odessa National University, 2 Dvoryanskaya str., Odessa, Ukraine.

Received 01.12.2020

Бас редактор:

Н. Темірғалиев

Жауапты редактор:

Н.Ж. Наурызбаев

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2020. 4(133)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 55-б. Басуға қол қойылды: 29.12.2020.
Шартты б.т. - 3,44. 10 дана.

Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: <http://bulmathmc.enu.kz/>
Авторларға арналған нұсқаулықтар, публикациялық этика журнал сайтында берілген: <http://bulmathmc.enu.kz/>

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды