ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№2(131)/2020

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2020
Nur-Sultan, 2020
Нур-Султан, 2020

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008.
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: A.Zh. Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №2(131)/2020

МАЗМҰНЫ

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №2(131)/2020

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА, №2(131)/2020

СОДЕРЖАНИЕ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 131, №2, 8-27 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 30.19.33, 30.19.21

L.A. Alexeyeva, M.M. Akhmetzhanova

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan
(E-mail: alexeeva@math.kz, mariella80@mail.ru)

Method of generalized functions in boundary value problems of thermoelastic rod dynamics

Abstract: The method of generalized functions (GFM) has been developed to solve transient and vibrational boundary value problems of thermoelastic rod dynamics using a model of coupled thermoelasticity. Thermoelastic shock waves arising in such structures under the influence of shock loads and heat flows are considered. Conditions on their fronts were obtained. The singularity of the assigned boundary tasks taking into account shock waves has been proved. On the basis of GFM, a system of algebraic resolving equations is built for a wide class of boundary problems to determine their analytical solutions. Dynamics of the rod under the action of forces and heat sources of various types, including those described by singular generalized functions, which allow modeling the effect of pulsed concentrated sources, are studied. Computer implementation of solutions of one edge problem at stationary oscillations was carried out, results of numerical experiments of calculation of rod thermodynamics at low and high frequencies are presented. These solutions and algorithms can be used for engineering calculations of rod structures to evaluate their strength properties.

Keywords: thermoplasticity, rod, boundary value problems,stress-strain state, general functions method.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-131-2-8-27

Introduction. Rod structures are widely used in mechanical engineering as connecting and transmission links for structural elements of a wide variety of machines and mechanisms. During operation, they are subjected to variable mechanical and thermal stresses that create a complex stress-strain state in structural elements, depending on their temperature, and affecting their strength and reliability. Therefore, the determination of a thermal stress state of rod structures taking into account their mechanical properties (in particular, elasticity) is one of the urgent scientific and technical problems.

When studying thermodynamic processes in structures, equations of uncoupled thermoelasticity are usually used. In this model at first the temperature problem is solved for determining the temperature field without taking into account the deformation of medium. This reduces a problem to constructing a solution of boundary value problem (BVP) for the heat parabolic equation. After determining a temperature field, BVP of dynamics of thermo-elastic medium is solved, in which a gradient of known temperature field is introduced as a mass force in motion equations of elastic medium. This model describes thermodynamic processes well at low strain rates and is completely unsuitable for describing high-speed dynamic processes.

Here, a problem of determining a thermostressed state of a thermoelastic rod is considered, using a model of coupled thermoelasticity. In this case, a heat equation contains a divergence of a velocity of material points of a medium, and a temperature gradient is included in equations of elasticity. This connects equations into one system of differential equations of mixed type without separating a temperature field and elastic deformations.

Note that nonstationary BVPs of coupled thermoelastodynamics by plane deformation and in 3D-space were considered by authors [1-7] and others. They elaborated analytical Boundary Integral equations Method and numerical Boundary Elements Method for construction BVP solutions in a space of Laplace or Fourier transformation over time. In [3] BIEM is based on potentials theory. In [7] BIEM was elaborated by use General Functions Method which is essentially convenient for solving hyperbolic and mixed problems of mathematical physics. The base ideas of this method are presented in paper [8].

Here we elaborate this method for solving non-stationary BVPs and stationary vibrations problems of dynamics of a thermoelastic rod under the action of power and heat sources of various types, including those described by singular generalized functions. The latter allows to simulate the impact of pulsed concentrated sources of various types. Thermal shock waves that arise in such structures under action of shock loads and heat fluxes are considered, and conditions at their fronts are obtained. Uniqueness of posed boundary value problem is proved, subject to shock waves. Based on GFM, algebraic resulting equations system for wide class of boundary value problems have been constructed for determination of analytical solutions of BVPs. As example the computer implementation of solutions of one BVP was carried out by stationary oscillations at low and high frequencies The results of some computer experiments have been presented.

1. Statement of non-stationary boundary value problems of connected thermoelasticity. A thermoelastic rod of length $2L$ are considered, which is characterized by a density ρ, rigidity EJ, and thermoelastic constants γ, η and κ [1,2].The movement of the cross sections of the rod and the temperature field of the rod is described by a system of hyperbolic-parabolic equations of the form:

$$\rho c^2 u,_{xx} - \rho u,_{tt} - \gamma\theta,_x + \rho F_1 = 0,$$

$$\theta,_{xx} - \kappa^{-1}\theta,_t - \eta u,_{xt} + F_2 = 0. \tag{1.1}$$

Here $u(x,t)$ are the components of the longitudinal displacements, $\theta(x,t)$ are the relative temperature $(\theta = T(x,t) - T(x,0))$, T are absolute temperature, F_1 are a longitudinal component of acting forces; a velocity of thermoelastic waves propagation $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$. An action of heat sources describes by the function $F_2 = (\lambda_0\kappa)^{-1}W(x,t)$, where W are amount of released (or absorbed) heat per unit volume per unit time, λ_0 is a thermal conductivity coefficient.

We suppose that functions $F_1(x,t), F_2(x,t)$ belong to a space of generalized functions (distributions) of slow growth S [9], that allows us to simulate thermodynamic processes in rods under action of various types of concentrated heat sources. Hereinafter, we use the notation for partial derivatives: $u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j = \partial_j u_i$. Thermoelastic stress in the rod is determined by the Duhamel-Neumann relation [1,2]:

$$\sigma = \rho c^2 u,_x - \gamma\theta \tag{1.2}$$

We consider a number of direct boundary value problems of thermoelasticity whose solutions satisfy the following initial and boundary conditions. *Initial conditions* (Cauchy conditions): at $t = 0$ the displacement, velocity and temperature are known:

$$\begin{gathered} u(x,0) = u_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad |x| \le L; \\ \partial_t u(x,0) = \dot{u}_0(x), \quad |x| < L \end{gathered} \tag{1.3}$$

Boundary conditions at the rod ends $(x = x_1 = -L,\ x = x_2 = L)$ depend on BVP type. Here at first we consider four classic BVPS.

BVP I. A displacement and temperature at rod ends are known:

$$u(x_j,t) = w_j(t), \quad \theta(x_j,t) = \theta_j(t); \quad j = 1,2 \tag{1.4}$$

BVP II. Stresses and heat fluxes at rod ends are known:

$$\sigma\left(x_j,t\right)=p_j\left(t\right),\quad \theta_{,x}\left(x_j,t\right)=q_j(t);\quad j=1,2 \tag{1.5}$$

BVP III. A displacement and heat fluxes at rod ends are known:

$$u\left(x_j,t\right)=w_j\left(t\right),\quad \theta_{,x}\left(x_j,t\right)=q_j(t);\quad j=1,2 \tag{1.6}$$

BVP IV. Stresses and temperature at rod ends are known:

$$\sigma\left(x_j,t\right)=p_j\left(t\right),\quad \theta(x_j,t)=\theta_j(t);\quad j=1,2 \tag{1.7}$$

It is assumed that the boundary functions satisfy the following smoothness conditions:

$$u_j(t)\in C(0,\infty),\theta_j(t)\in C(0,\infty),\ q_j(t)\in L_1(0,\infty),\ p_j(t)\in L_1(0,\infty) \tag{1.8}$$

and are regular functions from $S'\left(R^1\right)$.

Remark. By $\eta=0$ it is the model of uncoupled thermoelasticity, by $\gamma=0$ the first equation (1.1) is the motion equation of elastic rods.

2. Shock thermoelastic waves as generalized solutions of motion equations. The system of equations (1.1) has mixed hyperbolic-parabolic type. Due to a hyperbolic personality, it's possible an occurrence of thermoelastic shock waves by cause shock effects at ends of a rod. To derive shock waves, we consider Eqs (1.1) and their solutions in a space of distributions S'.

Let $u(x,t),\theta(x,t)$ are classic solution of Eqs(1.1). We consider them as regular distributions, which are differentiable between fronts of shock waves, where there derivatives are discontinues . According to the rules of differentiation of such generalized functions [9], Eqs (1.1) for thermoelastic shock waves take the form in S':

$$\begin{gathered}\rho c^2u_{,xx}-\rho u_{,tt}-\gamma\theta_{,x}+F_1+\left(\left[\rho c^2u_{,x}-\gamma\theta\right]\nu_x-\rho\left[u_{,t}\right]\nu_t\right)\delta_F(x,t)+\\ +\partial_x\left[\rho c^2u\right]\delta_F(x,t)-\partial_t\left[\rho u\right]\delta_F(x,t)=0,\\ \theta_{,xx}-\kappa^{-1}\theta_{,t}-\eta u_{,xt}+F_2+\partial_x\left[\theta\right]\nu_x\delta_F+\left[\theta_{,x}\right]\nu_x\delta_F-\\ -\left[\kappa^{-1}\theta+\eta u_{,x}\right]\nu_t\delta_F-\partial_t\left[\eta u\right]\nu_x\delta_F=0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Here, the square brackets denote the jump of functions indicated in them at the fronts of shock waves, $\delta_F(x,t)$ is singular generalized function – a simple layer on characteristic surface F in the set $D^-=\{(x,\tau):|x|<L,\ \tau<t\}$, on which derivatives have jumps. As follow from (1.1), the next determinant vanishes on F:

$$\begin{vmatrix}\rho\left(c^2\nu_x^2-\nu_t^2\right) & 0\\ \nu_x^2 & -\eta\nu_t\nu_x\end{vmatrix}=-\eta\rho\nu_t\nu_x\left(c^2\nu_x^2-\nu_t^2\right)=0 \tag{2.2}$$

where $\nu=(\nu_x,\nu_t)$ are the normal to F in D^-. It follows from (1.7) that the lines $x=const$ and $t=const$ are characteristic surfaces for equations (1.1), and for shock waves (F_t):

$$\nu_t=-c\left|\nu_x\right| \tag{2.3}$$

Here the wave front F_t has a simple form:

$$F_t=\left\{(x,t):x\pm ct)=x^0\right\}$$

It is the point of derivatives discontinuity which moves at a speed c from the point x^0, where it is formed, in one direction along the rod or another.

As in a domain of differentiability, shock waves are solutions of Eqs. (1.1), from (2.1), taking into account (1.2), to be generalized solution of (1.1) it's necessary to perform next equalities:

$$\begin{gathered}\left(\left[\rho c^2u_{,x}-\gamma\theta\right]\nu_x-\rho\left[u_{,t}\right]\nu_t\right)\delta_F+\partial_x\left\{\left[\rho c^2u\right]\delta_F\right\}-\partial_t\left\{\left[\rho u\right]\delta_F\right\}=0\\ \partial_x\left\{\left[\theta\right]\nu_x\delta_F\right\}+\left(\left[\theta_{,x}\right]\nu_x-\left[\kappa^{-1}\theta+\eta u_{,x}\right]\right)\nu_t\delta_F=0\end{gathered} \tag{2.4}$$

From (2.4), taking into account (2.3), it follows that at the fronts of shock waves the following conditions for jumps must be satisfied:

$$\left[u\right]_{F_t}=0,\quad \left[\sigma\right]_{F_t}=-\rho c\left[\dot u\right]_{F_t} \tag{2.5}$$

$$[\theta]_{F_t} = 0, \quad [\theta_{,x}]_{F_t} = \eta\,[\dot{u}]_{F_t} \tag{2.6}$$

The first condition (2.5) is continuity of displacements which is necessary to conserve continuity of a medium. The second condition describes a stress jump (shock), which leads to a jump in velocity at the wave front. From the first and second conditions (2.6) it follows that the temperature is continuous at the wave fronts but a heat flux has a jump proportional to a jump in displacements velocity at wave front.

From these relations follow that a jump in a heat flux in the rod also forms a thermoelastic shock wave, since it causes a jump in velocities at the front, which leads to a jump in stresses on it. Such thermo-shock waves are always formed at the ends of rod if, until a fixed point in time, it was in a static state, and then non-zero stresses or heat fluxes , applied to it at the ends, create thermoelastic shock waves.

3. Uniqueness of BVP solution subject to shock waves. We show uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem in presence of shock waves. It is assumed that at each fixed point in time, the domain of solution determination with respect to x are divided into a finite number of intervals between the fronts of shock waves F_t^k at which the solution is continuous and differentiable according to (2.1). Denote an energy density of a rod

$$E(x,t) = 0,5\left\{\rho\,(u_{,t})^2 + c^2\,(u_{,x})^2 + \gamma\,(\eta\kappa)^{-1}\,\theta^2\right\}$$

and power of internal forces:

$$M(x,t) = u_{,t}\left(c^2 u_{,x} - \gamma\theta\right) + \eta\gamma^{-1}\theta\theta_{,x}\,.$$

Further we assume $\|\nu\| = 1$. From (2.2) it follows: $\nu = (\nu_x, \nu_t) = (1, -c)/\sqrt{1+c^2}$. The following theorem is true.

Theorem 1 *(law of conservation of energy)*

$$\int\limits_{-L}^{L} \left(E(x,t) - E(x,0)\right) dx = \int\limits_{0}^{t} dt \int\limits_{-L}^{L} \left(u_{,t}\, F_1 + \eta\gamma^{-1}\theta F_2\right) dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t} \left(M(L,t) - M(-L,t)\right) dt - \eta\gamma^{-1} \int\limits_{0}^{t} dt \int\limits_{-L}^{L} (\theta_{,x})^2 dx$$

.

Proof. We fix an arbitrary time $t > 0$. Multiplying the first equation (1.1) in the field of differentiability by $u_{,t}$, and the second equation by $\alpha\theta$, after a series of equivalent transformations, we obtain the equalities:

$$\rho c^2 u_{,t}\, u_{,xx} - u_{,t}\, u_{,tt} - \gamma u_{,t}\, \theta_{,x} + \rho F_1 u_{,t} = 0 \Rightarrow$$
$$\partial_x\left(u_{,t}\left(\rho c^2 u_{,x} - \gamma\theta\right)\right) - 0,5\partial_t\left\{(u_{,t})^2 + \rho c^2\,(u_{,x})^2\right\} + \gamma u_{,tx}\,\theta + u_{,t}\,\rho F_1 = 0;$$

$$\theta\theta_{,xx} - \kappa^{-1}\theta\theta_{,t} - \eta\theta u_{,xt} + \theta F_2 = 0 \Rightarrow$$
$$-0,5\kappa^{-1}\partial_t\theta^2 + \partial_x\left(\theta\theta_{,x}\right) - \eta\theta u_{,xt} - (\theta_{,x})^2 + \theta F_2 = 0$$

Folding them, we have

$$\partial_x\left(u_{,t}\left(\rho c^2 u_{,x} - \gamma\theta\right) + \alpha\theta\theta_{,x}\right) -$$
$$-0,5\partial_t\left\{\rho\,(u_{,t})^2 + c^2\,(u_{,x})^2 + \alpha\kappa^{-1}\theta^2\right\} - \alpha\,(\theta_{,x})^2 +$$
$$+\theta u_{,xt}\,(\gamma - \alpha\eta) + u_{,t}\,\rho F_1 + \alpha\theta F_2 = 0.$$

where $\alpha = \eta/\gamma$. As a result, we obtain the equality:

$$\partial_t E(x,t) - \partial_x M(x,t) + \eta\gamma^{-1}\,(\theta_{,x})^2 = u_{,t}\, F_1 + \eta\gamma^{-1}\theta F_2 \tag{3.1}$$

Lets integrate (3.1) over D^- with allowance for the division of integration region by the fronts of shock waves $F_k(x,t)$ into subdomains where the solution is differentiable. As a result, using the Ostrogradsky-Gauss theorem, we obtain the following integral equality:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-L}^{L}(E(x,t)-E(x,0))\,dx+\alpha\int\limits_{0}^{t}dt\int\limits_{-L}^{L}(\theta,_x)^2dx=\\=\int\limits_{0}^{t}(M(L,t)-M(-L,t))\,dt+\int\limits_{0}^{t}dt\int\limits_{-L}^{L}(u,_t\rho F_1+\alpha\theta F_2)\,dx+\\+\left\{\int\limits_{F_k}\sum_k\left[\nu_xM(x,t)-\nu_tE(x,t)\right]_{F_k}dS(F_k)\right\}.\end{gathered}\qquad(3.2)$$

We show that, due to conditions at the fronts of shock waves (2.5)-(2.6), the jumps on the right-hand side of this equality are equal to zero. To do this, we make a series of transformations:

$$\begin{gathered}[M(x,t)]_{F_k}=[u,_t\sigma]_{F_k}+\alpha\,[\theta\theta,_x]_{F_k}=u^-,_t[\sigma]_{F_k}+\sigma^+[u,_t]_{F_k}+\alpha\theta\,[\theta,_x]_{F_k}=\\=\left(\sigma^+-\rho cu^-,_t+\gamma\theta\right)[u,_t]_{F_k}=\rho c\left(cu,_x^+-u^-,_t\right)[u,_t]_{F_k}\end{gathered}$$

(here the signs in the upper index indicate the values of the corresponding functions on the right or left side of the wave front). Consequently,

$$\begin{gathered}\sqrt{1+c^2}\,[\nu_xM(x,t)-\nu_tE(x,t)]_{F_k}=[M(x,t)+cE(x,t)]_{F_k}=\\=\rho c\left(cu,_x^+-u^-,_t\right)[u,_t]_{F_k}-\rho c\,[u,_t]_{F_k}\left(cu^-,_x-u,_t^+\right)=\rho c\,[cu,_x+u,_t]\,[u,_t]_{F_k}=0\end{gathered}$$

since, in virtue (2.5),

$$\begin{gathered}[cu,_x+u,_t]=\frac{1}{\rho c}\left(\left[\rho c^2u,_x-\theta\right]_{F_t}+\rho c\,[\dot u]_{F_t}\right)=\\=\frac{1}{\rho c}\,[\sigma+\rho c\dot u]_{F_t}=0\end{gathered}$$

Therefore, from (3.2) we obtain the formula of the theorem.

Theorem 2. *The solutions of BVPs I-IV are unique.*

Proof. We carry out the opposite. Let there exist two solutions of the considered BVP from the stated ones. Then their difference, by virtue of linearity, will also be a solution of (1.1) for $F_j=0,\ j=1,2$, and satisfy zero initial and boundary conditions. We write the energy conservation law for such solution. According to Theorem 1:

$$\int\limits_{-L}^{L}E(x,t)dx+\eta\gamma^{-1}\sqrt{1+c^{-2})}\int\limits_{0}^{t}dt\int\limits_{-L}^{L}(\theta,_x)^2dx=\int\limits_{0}^{t}(M(L,t)-M(-L,t))\,dt$$

But

$$\int\limits_{0}^{t}M(\pm L,t)\,dt=\int\limits_{0}^{t}\left(u,_t(\pm L,t)\sigma(\pm L,t)+\eta\gamma^{-1}\theta(\pm L,t)\theta,_x(\pm L,t)\right)dt=0$$

since by one of the factors in each integrand is equal to zero, due to the zero boundary conditions of any BVP. Therefore

$$\int\limits_{-L}^{L}E(x,t)dx+\eta\gamma^{-1}\int\limits_{0}^{t}dt\int\limits_{-L}^{L}(\theta,_x)^2dx=0$$

Due to the zero initial conditions and the positive definiteness of the integrands, we obtain $u\equiv 0,\ \theta\equiv 0$. Then decisions are coincided. The theorem is proved.

4. Generalized solution of BVP. To determine the solution, we pose a boundary value problem in the space of two-dimensional generalized vector functions

$$S_2'(R^2)=\{\hat f=(\hat f_1(x,t),\hat f_2(x,t)),\quad (x,t)\in R^2,\quad \hat f_j\in S'(R^2),j=1,2\}$$

Their components are generalized functions which belong to $S'(R^2)$ [3]). To do this, we introduce a generalized regular vector function (mark them with a hat):

$$(\hat{u}_1, \hat{u}_2) = \{\hat{u}, \hat{\theta}\} = \{u(x,t)H\ (x)H(t)\,, \theta(x,t)H\ (x)H(t)\}$$

Here $(u_1, u_2) = (u(x,t), \theta(x,t))$ are the solution of BVP, $H(x)$ are the Heaviside function.

In $S_2'(R^2)$ vector-function $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ satisfies to the next system:

$$\begin{array}{l} c_1^2 \hat{u}_{,xx} - \hat{u}_{tt} - \breve{\gamma}\hat{\theta}_{,x} + \hat{F}_1 = -\{\dot{u}_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t)\}\, H(L-|x|)+ \\ +c_1^2 H(t)\,\{(p_1(t) - \gamma\theta_1(t))\,\delta(x+L) - (p_2(t) - \gamma\theta_2(t))\,\delta(x-L)\} + \\ +c_1^2 H(t)\,\{u_1(t)\delta'(x+L) - u_2(t)\delta'(x-L)\}\,, \\ \hat{\theta}_{,xx} - \kappa^{-1}\hat{\theta}_{,t} - \eta\hat{u}_{,xt} + \hat{F}_2 = \\ = H\,(t)\,\delta\,(L+x)\,(q_1(t) - \eta\dot{u}_1(t)) - H\,(t)\,\delta\,(L-x)\,(q_2(t) - \eta\dot{u}_2(t)) + \\ + \left(\hat{\theta}_1(t)H\,(t)\,\delta'\,(L+x)\right) - \left(\hat{\theta}_2(t)H\,(t)\,\delta'\,(L-x)\right) - \kappa^{-1}\hat{\theta}_0(x)\delta\,(t)\,H\,(L-|x|) - \\ -\eta\delta\,(t)\,H\,(L-|x|)\,\partial_x\dot{u}_0(x) - \eta u_1(0)\delta\,(t)\,\delta\,(L+x) + \eta u_2(0)\delta\,(t)\,\delta\,(L-x) \end{array} \tag{4.1}$$

Here are $\delta\,(t)$ is singular delta - function, $\breve{\gamma} = \gamma/\rho$.

Using the property of the matrix of fundamental solutions $\hat{U}_j^k(x,t)$, the solution of Eqs(4.1) can be written as following tensor-functional convolution:

$$\begin{array}{l} u\,(x,t)\,H\,(t)\,H\,(L-|x|) = \hat{F}_1 * \hat{U}_1^1 + \hat{F}_2 * \hat{U}_1^2 + \\ +c^2 \sum\limits_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \left\{(p_k(t) - \gamma\theta_k(t)) \underset{t}{*} U_1^1(x+L,t) + u_k(t) \underset{t}{*} U_1^1{}_{,x}\,(x+L,t)\right\} + \\ +H\,(t) \sum\limits_{k=1}^{2} (-1)^{k+1}\,(q_k(t) - \eta\dot{u}_k(t)) \underset{t}{*} \hat{U}_1^2\left(x - (-1)^k L\right) + \theta_k(t)H\,(t) \underset{t}{*} U_1^2{}_{,x}\,(x+L) - \\ - \left\{\dot{u}_0(x) \underset{x}{*} \hat{U}_1^1(x,t) + u_0(x)) \underset{x}{*} \hat{U}_1^1{}_{,t}\,(x,t\right\} H(L-|x|) - \\ -\eta\, u_1(0)\, U_1^2\,(L+x,t) + \eta\, u_2(0)\; U_1^2\,(x-L,t) - \\ -\kappa^{-1}\theta_0(x)H\,(L-|x|) \underset{x}{*} U_1^2 - \eta H\,(L-|x|)\,\partial_x\dot{u}_0(x) \underset{x}{*} U_1^2 \end{array} \tag{4.2}$$

$$\begin{array}{l} \theta\,(x,t)\,H\,(t)\,H\,(L-|x|) = \hat{F}_1 * \hat{U}_2^1 + \hat{F}_2 * \hat{U}_2^2 + \\ +c^2 \sum\limits_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \left\{(p_k(t) - \gamma\;\theta_k(t)) \underset{t}{*} U_2^1(x+L,t) + u_k(t) \underset{t}{*} U_2^1{}_{,x}\,(x+L,t)\right\} + \\ +H\,(t) \sum\limits_{k=1}^{2} (-1)^{k+1}\,(q_k(t) - \eta\,\dot{u}_k(t)) \underset{t}{*} \hat{U}_2^2\left(x - (-1)^k L\right) + \theta_k(t)H\,(t) \underset{t}{*} U_2^2{}_{,x}\,(x+L) - \\ - \left\{\dot{u}_0(x) \underset{x}{*} \hat{U}_2^1(x,t) + u_0(x)) \underset{x}{*} \hat{U}_2^1{}_{,t}\,(x,t)\right\} H(L-|x|) - \\ -\eta u_1(0) U_2^2\,(L+x,t) + \eta u_2(0) U_2^2\,(x-L,t) - \\ -\kappa^{-1}\theta_0(x)H\,(L-|x|) \underset{x}{*} U_2^2 - \eta H\,(L-|x|)\,\partial_x\dot{u}_0(x) \underset{x}{*} U_2^2 \end{array} \tag{4.3}$$

The matrix of fundamental solutions $U_i^j(x,t)$ $(i,j = 1,2)$ is solution (1.1) for singular

$$F = (F_1, F_2) = \delta_i^j\delta(x)\delta(t)$$

δ_i^j is Kronecker symbol. The integral record of convolutions (4.2), (4.3) has the next form:

$$u\,(x,t)\,H(|x|-L)H\,(t) = \hat{F}_1 * \hat{U}_1^1 + \hat{F}_2 * \hat{U}_1^2 +$$

$$+c^2 H(t) \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \int\limits_0^t \{(p_k(\tau) - \widetilde{\gamma}\theta_k(\tau))\, U_1^1(x - (-1)^k L, t-\tau) +$$

$$+\, u_k(\tau) U_1^1{}_{,x}\,(x - (-1)^k L, t-\tau)\Big\}\, d\tau +$$

$$+H(t)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_{0}^{t}\Big\{\left(q_k(\tau)-\eta\dot{u}_k(\tau)\right)U_1^2(x-(-1)^kL,t-\tau)+ \tag{4.4}$$

$$+\theta_k(\tau)U_1^2{}_{,x}\,(x-(-1)^kL,t-\tau)\Big\}\,d\tau-$$

$$-H\left(L-|x|\right)\int_{-L}^{L}\left(\dot{u}_0(y)U_1^1(x-y,t)+u_0(y)\right)U_{1,t}^1(x-y,t)dy-$$

$$-\eta u_1(0)U_1^2\left(L+x,t\right)+\eta u_2(0)U_1^2\left(x-L,t\right)-$$

$$-H\left(L-|x|\right)\int_{-L}^{L}\left\{\kappa^{-1}U_1^2(x-y,t)\theta_0(y)-\eta U_1^2(x-y,t)\partial_y\dot{u}_0(y)\right\}dy.$$

$$\theta\left(x,t\right)H\left(t\right)H\left(L-|x|\right)=\hat{F}_1*\hat{U}_2^1+\hat{F}_2*\hat{U}_2^2+$$

$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_{0}^{t}\left\{\left(p_k(\tau)-\widetilde{\gamma}\theta_k(\tau)\right)U_2^1(x+L,t-\tau)+\right.$$

$$\left.+u_k(t)U_2^1{}_{,x}\,(x+L,t-\tau)\right\}d\tau+$$

$$+H(t)\int_{0}^{t}\left\{\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(q_k(\tau)-\eta\dot{u}_k(\tau)\right)U_2^2\Big(x-(-1)^kL,t-\tau\Big)+\right.$$

$$\left.+\theta_k(\tau)U_2^2{}_{,x}\,(x+L,t-\tau)\right\}d\tau- \tag{4.5}$$

$$-H\left(L-|x|\right)\int_{-L}^{L}\left\{\dot{u}_0(y)U_2^1(x-y,t)+u_0(y))U_2^1{}_{,t}\,(x-y,t)+\right.$$

$$\left.+\eta u_1(0)U_2^2\left(L+x-y,t\right)+\eta u_2(0)U_2^2\left(x-y-L,t\right)\right\}dy-$$

$$-H\left(L-|x|\right)\int_{-L}^{L}\left\{\kappa^{-1}\theta_0(y)U_2^2(x-y,t)+\eta U_2^2(x-y,t)\partial_y\dot{u}_0(y)\right\}dy.$$

For regular functions

$$\hat{F}_j*\hat{U}_i^j=H(t)H(|x|-L)\int_{0}^{t}\int_{-L}^{L}F_j(y,\tau)U_i^j(x-y,t-\tau)dyd\tau$$

For singular $\hat{F}_j$, wich are applied in physical applications [10], the definition of convolution should be used [9].

If a rod was at rest and the temperature was constant until the initial time, then the initial conditions are zero and the formulas are simplified.

$$u\left(x,t\right)H(|x|-L)H\left(t\right)=\hat{F}_1*\hat{U}_1^1+\hat{F}_2*\hat{U}_1^2+$$

$$+c^2H(t)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int_{0}^{t}\Big\{\left(p_k(\tau)-\widetilde{\gamma}\theta_k(\tau)\right)U_1^1(x-(-1)^kL,t-\tau)+$$

$$+u_k(\tau)U_1^1,_x\left(x-(-1)^kL,t-\tau\right)\Big\}\,d\tau+ \tag{4.6}$$

$$+H\left(t\right)\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int\limits_0^t\Big\{\left(q_k(\tau)-\eta\dot{u}_k(\tau)\right)U_1^2\left(x-(-1)^kL,t-\tau,\right)+$$

$$+\theta_k(\tau)U_1^2,_x\left(x-(-1)^kL,t-\tau\right)\Big\}\,d\tau$$

$$\theta\left(x,t\right)H\left(t\right)H\left(L-|x|\right)=\hat{F}_1*\hat{U}_2^1+\hat{F}_2*\hat{U}_2^2+$$

$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\int\limits_0^t\left\{\left(p_k(\tau)-\widetilde{\gamma}\theta_k(\tau)\right)U_2^1(x+L,t-\tau)+\right.$$

$$\left.+u_k(t)U_2^1,_x\left(x+L,t-\tau\right)\right\}d\tau+ \tag{4.7}$$

$$+H\left(t\right)\int\limits_0^t\left\{\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(q_k(\tau)-\eta\dot{u}_k(\tau)\right)U_2^2\left(x-(-1)^kL,t-\tau\right)+\right.$$

$$\left.+\theta_k(\tau)U_2^2,_x\left(x+L,t-\tau\right)\right\}d\tau$$

Formulas (4.6) and (4.7) determine the displacement and temperature inside the rod from the known displacements, stresses, temperature, and heat fluxes at its ends.

5. The Green matrix and its Fourier transform over time. To construct matrix of fundamental solutions of equations of coupled thermo elastodynamics analytically it's possible only in Fourier or Laplace transform spaces over time. Fourier transformant over time of Green matrix $U_k^j(x,t)$ we constructed in [11]. It is fundamental solution of Eqs (1.1) which satisfied to radiation conditions.

Its components have the form:

$$\tilde{U}_1^j(x,\omega)=\frac{\delta_1^j sgn(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{i\omega\kappa^{-1}\left(\frac{sinx\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{sinx\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)+\left(\sqrt{\lambda_1}sinx\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}sinx\sqrt{\lambda_2}\right)\right\}- \tag{5.1}$$

$$-\frac{\gamma\delta_2^j\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right),j=1,2$$

$$\tilde{U}_2^j(x,\omega)=\frac{sgn(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{i\omega\eta\delta_1^j\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\right.\right.$$

$$\left.-cosx\sqrt{\lambda_2}\right)-\omega^2\left(\frac{sinx\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{sinx\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\delta_2^j+ \tag{5.2}$$

$$\left.+c^2\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j\right\},j=1,2$$

Here

$$\lambda_{1,2}(\omega)=\frac{\omega}{2c^2}\left\{(\omega+i\gamma\eta)+ic^2k^{-1}\pm\sqrt{\left(\omega+i\left(\gamma\eta+c^2k^{-1}\right)\right)^2-4i\omega c^2k^{-1}}\right\} \tag{5.3}$$

the roots of the characteristic equation of system, quadratic with respect to ξ^2:

$$\Delta(\xi,\omega)=(\xi^2-ik^{-1}\omega)(c^2\xi^2-\omega^2)-i\gamma\eta\xi^2\omega=c^2\left(\xi^2-\lambda_1\right)\left(\xi^2-\lambda_2\right)$$

They depend on only three thermodynamic parameters of the medium:

$$c,\quad \alpha=\gamma\eta,\quad \beta=c^2k^{-1},$$

dimension $[\alpha]=[\beta]=[\omega]$. In these options

$$\lambda_{1,2}(\omega)=\frac{\omega}{2c^2}\left\{\omega+i\,(\alpha+\beta)\pm\sqrt{(\omega+i\,(\alpha-\beta))^2-4\alpha\beta}\right\} \tag{5.4}$$

Their frequency asymptotic behavior is as follows:

a) at $\omega\to\infty$:

$$\lambda_1\sim\frac{\omega^2}{c^2},\quad \lambda_2\sim\frac{i\omega\,\beta}{c^2}, \tag{5.5}$$

b) at $\omega\to 0$:

$$\lambda_1 sim\frac{3i\omega\ (\alpha+\beta)}{2c^2},\quad \lambda_2\sim\frac{i\omega\,(\alpha+\beta)}{2c^2}. \tag{5.6}$$

Riemann surface of the matrix ω are univalent, since the values of the components $\tilde{U}_k^j$ are independent of the choice of the sign of the radicals $\sqrt{\lambda_j(\omega)}$.

The features $\tilde{U}_2^j(x,\omega)$ are clearly demonstrated in figure 1, where the calculations of this matrix are presented for the following conditional parameters: $\gamma=0.1, c=1, k=1, \eta=1$ the real (blue line) and imaginary part (green line) of each component are shown here.

Remark. Matrix $\tilde{U}_2^j(x,\omega)$ may be used also by solving BVPs of harmonic vibrations by action of periodic over time external forces and thermo-sources.

6. Laplace transforms over time of Green matrix. To solve non-stationary boundary value problems, we should use the Laplace transform of the fundamental matrix $\bar{U}_1^j(x,p)$, which is obtained using the connection between the Fourier transform and the Laplace transform in time ($p\leftrightarrow\ -i\omega,\ \omega\leftrightarrow\ ip$):

$$\tilde{U}_1^j(x,p)=\frac{\delta_1^j\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\times$$
$$\times\left\{-p\kappa^{-1}\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}-\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}\right)+\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\right\}-$$
$$-\frac{\gamma\delta_2^j\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right),\quad j=1,2$$

$$\tilde{U}_2^j(x,p)=-\frac{\mathrm{sgn}(x)}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\times$$
$$\times\left\{p\eta\delta_1^j\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right)-p^2\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\delta_2^j+\right.$$
$$\left.+c^2\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j\right\},\quad j=1,2$$

where

$$\lambda_{1,2}(p)=-\frac{p}{2c^2}\left\{p+\alpha+\beta\pm\sqrt{(p+(\alpha-\beta))^2+4\alpha\beta}\right\}$$

The components $\tilde{U}_k^j(x,p)$ are regular and continuous at the point $x=0$:

$$\tilde{U}_k^j(\pm 0,\omega)=\tilde{U}_k^j(0,\omega)=0,\quad k,j=1,2, \tag{6.1}$$

But their derivatives

$$\partial_x\tilde{U}_1^j(x,\omega)=$$
$$\left[\frac{(\lambda_1-i\omega\kappa^{-1})}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1}-\cos x\sqrt{\lambda_2}\right)+\cos x\sqrt{\lambda_2}\right]\frac{\mathrm{sgn}(x)}{2}\delta_1^j-$$
$$+\frac{\gamma}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j$$

$$\partial_x \tilde{U}_2^j(x,\omega) = -\delta_1^j \frac{i\omega\eta\left(\sqrt{\lambda_1}\sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin|x|\sqrt{\lambda_2}\right)}{2(\lambda_1-\lambda_2)} +$$

$$-\delta_2^j \operatorname{sgn}(x)\left\{\frac{\omega^2-\lambda_1 c^2}{2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right) - c^2\cos x\sqrt{\lambda_2}\right\}$$

at this point suffers a break of the first kind:

$$\partial_x \bar{U}_1^j(\pm 0,p) = \pm 0,5\delta_1^j, \quad \partial_x \bar{U}_2^j(\pm 0,p) = \pm 0,5c^2\delta_2^j, \quad j=1,2 \tag{6.2}$$

(the upper sign corresponds to the left limit at zero, the lower right).

Remark. By $\eta = 0$ matrix $\tilde{U}_k^j(x,p)$ is fundamental for equations of uncoupled thermoelastodynamics. In this case its original has be constructed in [12].

7. Laplace transform of boundary value problems solution. Here we consider the initial boundary value problem with zero initial conditions. By use the property of Laplace transform of convolution we get Laplace transformants of generalized solution from (4.2)-(4.3):

$$\begin{gathered}\bar{u}\,(x,p)\,H(|x|-L) = \bar{F}_1(x,p) * \bar{U}_1^1(x,p) + \bar{F}_2(x,p) * \bar{U}_1^2(x,p) + \\ +c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{p}_k - \breve{\gamma}\bar{\theta}_k\right)\bar{U}_1^1(x-(-1)^k L,p) + \bar{u}_k(\tau)\bar{U}_1^1,_x(x-(-1)^k L,p)\right\} + \\ +\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{q}_k - \eta p\bar{u}_k\right)\bar{U}_1^2\left(x-(-1)^k L,p\right) + \bar{\theta}_k\bar{U}_1^2,_x\left(x-(-1)^k L,p\right)\right\}\end{gathered} \tag{7.1}$$

$$\begin{gathered}\bar{\theta}\,(x,p)\,H\,(L-|x|) = \bar{F}_1(x,p) * \bar{U}_2^1(x,p) + \bar{F}_2(x,p) * \bar{U}_2^2(x,p) + \\ +c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{p}_k - \gamma\theta_k\right)\bar{U}_2^1(x+L,p) + \bar{u}_k\bar{U}_2^1,_x(x+L,p)\right\} + \\ +H\,(t)\left\{\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(\bar{q}_k - \eta p\bar{u}_k\right)\bar{U}_2^2\left(x-(-1)^k L,p\right) + \bar{\theta}_k\bar{U}_2^2,_x(x+L,p)\right\}\end{gathered} \tag{7.2}$$

Here, a dash over a function indicates its Laplace transform.

Using the asymptotic properties of the fundamental matrix $\bar{U}_j^i$ at zero (6.2), from (7.1)-(7.2) we obtain the system of four linear equations at the boundary points to determine the Laplace transformants of unknown boundary functions, respectively to considered BVP. It has the following form:

$$\begin{gathered}0,5\bar{u}\,(-L,p) = \left(\bar{F}_1 \underset{x}{*} \bar{U}_1^1 + \bar{F}_2 \underset{x}{*} \bar{U}_1^2\right)_{x=L} + \\ +c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\Big\{\left(\bar{p}_k(p) - \breve{\gamma}\,\bar{\theta}_k(p)\right)\bar{U}_1^1(-L-(-1)^k L,p) + \\ +\bar{u}_k(p)\bar{U}_1^1,_x(-L-(-1)^k L,p)\Big\} + \\ +\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\Big\{\left(\bar{q}_k(p) + i\omega\eta\bar{u}_k(p)\right)\bar{U}_1^2\left(-L-(-1)^k L,p\right) + \\ +\bar{\theta}_k(p)\bar{U}_1^2,_x\left(-L-(-1)^k L,p\right)\Big\}.\end{gathered} \tag{7.3}$$

$$\begin{gathered}-0,5\bar{u}\,(L,p) = \left(\bar{F}_1 \underset{x}{*} \bar{U}_1^1 + \bar{F}_2 \underset{x}{*} \bar{U}_1^2\right)_{x=L} + \\ +c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\Big\{\left(\bar{p}_k(p) - \breve{\gamma}\bar{\theta}_k(p)\right)\bar{U}_1^1(L-(-1)^k L,p) + \\ +\bar{u}_k(p)\bar{U}_1^1,_x(L-(-1)^k L,p)\Big\} +\end{gathered} \tag{7.4}$$

$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{(\bar{q}_k(p)-p\eta\bar{u}_k(\omega))\,\bar{U}_1^2\left(L-(-1)^kL,p\right)+\right.$$
$$\left.+\bar{\theta}_k(p)\bar{U}_1^2{}_{,x}\left(L-(-1)^kL,p\right)\right\}$$
$$0,5\bar{\theta}\,(-L,p)=\left(\bar{F}_1\underset{x}{*}\bar{U}_2^1+\bar{F}_2\underset{x}{*}\bar{U}_2^2\right)\Big|_{x=-L}+$$
$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{p}_k(p)-\gamma\bar{\theta}_k(p)\right)\bar{U}_2^1(0,p)+\bar{u}_k(p)\bar{U}_2^1{}_{,x}(0,p)\right\}+ \tag{7.5}$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(\bar{q}_k(p)-p\eta\bar{u}_k(p)\right)\bar{U}_2^2\left(-L-(-1)^kL,p\right)+\bar{\theta}_k(\omega)\bar{U}_2^2{}_{,x}(0,p)$$
$$-0,5\bar{\theta}\,(L,p)=\left(\bar{F}_1\underset{x}{*}\bar{U}_2^1+\bar{F}_2\underset{x}{*}\bar{U}_2^2\right)\Big|_{x=L}+$$
$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(\bar{p}_k(p)-\gamma\bar{\theta}_k(p)\right)\bar{U}_2^1(2L,p)+\bar{u}_k(p)\bar{U}_2^1{}_{,x}(2L,p)\right\}+ \tag{7.6}$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(\bar{q}_k(p)-p\eta\bar{u}_k(p)\right)\bar{U}_2^2\left(L-(-1)^kL,p\right)+\bar{\theta}_k(p)\bar{U}_2^2{}_{,x}(2L,p)\,.$$

From this system it is possible to obtain the resolving equations for any of the four BVPs.

8. Resolving equations of BVPs in Laplace transform space. The resolving system of linear algebraic equations (7.3)-(7.6) is represented in matrix form:

$$\{A1\}\times\left\{\begin{array}{c}\bar{u}_1\\ \bar{p}_1\\ \bar{\theta}_1\\ \bar{q}_1\end{array}\right\}+\{A2\}\left\{\begin{array}{c}\bar{u}_2\\ \bar{p}_2\\ \bar{\theta}_2\\ \bar{q}_2\end{array}\right\}=b \tag{8.1}$$

where

$$\{A1\}=$$
$$\left\{\begin{array}{cccc}0.5 & 0 & 0 & 0\\ -\left(c^2\bar{U}_1^1{}_{,x}-p\eta U_1^2\right)_{(2L)} & -c^2\bar{U}_1^1(2L,p) & \left(\widetilde{\gamma}c^2\bar{U}_1^1-\bar{U}_1^2{}_{,x}\right)_{(2L)} & -\bar{U}_1^2\,(2L,p)\\ 0 & 0 & 0.5 & 0\\ -\left(c^2\bar{U}_2^1{}_{,x}-p\eta\bar{U}_2^2\right)_{(2L)} & -c^2\bar{U}_2^1\,(2L,p) & \left(\widetilde{\gamma}c^2\bar{U}_2^1-\bar{U}_2^2{}_{,x}\right)_{(2L)} & -\bar{U}_2^2\,(2L,p)\end{array}\right\}$$

$$\{A2\}=$$
$$\left\{\begin{array}{cccc}\left(c^2\bar{U}_1^1{}_{,x}-p\eta\bar{U}_1^2\right)_{(-2L)} & c^2\bar{U}_1^1(-2L,p) & -\left(\widetilde{\gamma}c^2\bar{U}_1^1-\bar{U}_1^2{}_{,x}\right)_{(-2L)} & \bar{U}_1^2\,(-2L,p)\\ 0.5 & 0 & 0 & 0\\ \left(c^2\bar{U}_2^1{}_{,x}-p\eta U_2^2\right)_{(-2L)}, & c^2\bar{U}_2^1\,(-2L,p) & -\left(\widetilde{\gamma}c^2\bar{U}_2^1-\bar{U}_2^2{}_{,x}\right)_{(-2L)} & U_2^2\,(-2L,p)\\ 0 & 0 & 0.5 & 0\end{array}\right\}$$

$$b_1=(\bar{F}_1*\bar{U}_1^1+\bar{F}_2*\bar{U}_1^2)_{(-L},\quad b_2=(\bar{F}_1*\bar{U}_1^1+\bar{F}_2*\bar{U}_1^2)_{(L)},$$
$$b_3=(\bar{F}_1*\bar{U}_2^1++\bar{F}_2*\bar{U}_2^2)_{(-L)},\quad b_4=(\bar{F}_1*\bar{U}_2^1+\bar{F}_2*\bar{U}_2^2)_{(L)}$$

From this system it is necessary to construct a linear system of algebraic equations for any of the considered boundary value problems, leaving on the left side terms with unknown boundary values of the desired functions and transferring them to the right side with the known ones. The solution of this system is determined by use Cramer method.

After determining the missing boundary functions using formulas (7.1), (7.2), we determine the displacements and temperature in the rod. To determine thermoelastic stresses, we substitute the solution into the Duhamel-Neumann law (1.3), where all incoming functions are defined above. The obtained solutions make it possible to determine the thermally stressed state of bar structures with various geometric dimensions and thermoelastic parameters. In this case, one can study the effect of concentrated heat and power sources on them, described by singular generalized functions.

As example we present resolving boundary equations of BVP 1. In this case from (1.5) we know stresses and heat fluxes at rod ends, but (p_1, p_2, q_1, q_2) are unknowns. Then we obtain from (8.1) resolving system of equations (RES 1):

$$\{A\}\left\{\begin{array}{c}\bar{p}_1\\ \bar{q}_1\\ \bar{p}_2\\ \bar{q}_2\end{array}\right\} = b + \{B\}\times\left\{\begin{array}{c}\bar{u}_1\\ \bar{\theta}_1\\ \bar{u}_2\\ \vec{\theta}_2\end{array}\right\} \tag{8.2}$$

where the components of the matrices A, B are determined through the components of the matrices **A1** and **A2** as follows:

$$A = \left\{\begin{array}{cccc} A1_{12} & A1_{14} & A2_{12} & A2_{14}\\ A1_{22} & A1_{24} & A2_{22} & A2_{24}\\ A1_{32} & A1_{34} & A2_{32} & A2_{34}\\ A1_{42} & A1_{44} & A2_{42} & A2_{44}\end{array}\right\} \tag{8.3}$$

$$B = -\left\{\begin{array}{cccc} A1_{11} & A1_{13} & A2_{11} & A2_{13}\\ A1_{21} & A1_{23} & A2_{21} & A2_{23}\\ A1_{31} & A1_{33} & A2_{31} & A2_{33}\\ A1_{41} & A1_{43} & A2_{41} & A2_{43}\end{array}\right\} \tag{8.4}$$

$$b = \left\{\begin{array}{c} \left(F_1 \underset{x}{*} \bar{U}_1^1 + F_2 \underset{x}{*} \bar{U}_1^2\right)\big|_{x=-L}\\ \left(F_1 \underset{x}{*} \bar{U}_1^1 + F_2 \underset{x}{*} \bar{U}_1^2\right)\big|_{x=-L}\\ \left(F_1 \underset{x}{*} \bar{U}_2^1 + F_2 \underset{x}{*} \bar{U}_2^2\right)\big|_{x=L}\\ \left(F_1 \underset{x}{*} \bar{U}_2^1 + F_2 \underset{x}{*} \bar{U}_2^2\right)\big|_{x=L}\end{array}\right\} \tag{8.5}$$

9. Problems of periodic vibrations and their solutions. Periodic action of external vibration source is typical in practice. Their action can be presented in the form of Fourier series of stationary harmonic vibration which periods are multiply to base period. The solutions of such problems are determined also as Fourier series:

$$u(x,t) = \sum_j a_j e^{-i\omega_j t}, \quad \theta(x,t) = \sum_j b_j e^{-i\omega_j t}$$

Then for every harmonic of this series we have stationary vibrations BVP by frequency ω_j. Using this method we can calculates thermo stress-state state of rod for every harmonics of this series and solve BVP. It gives possibility to investigate thermoelastic state of rods as at big oscillation periods and so at small periods, when uncoupled model of thermoelasticity is insufficient for application.

Let consider a rod fixed at the ends, whose temperature fluctuates with frequency ω at the ends

$$u(x_j, t) = 0, \quad \theta(x_j, t) = \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2$$

It is BVP 1 with RES (8.2).

Figures 2,4,6 (a,b) show the amplitudes of displacements and temperature along the rod for different frequencies: $\omega = 0 : 1; 1; 10$. The calculations are performed for dimensionless parameters: $\gamma = 1, \eta = 1, \kappa = 1, c = 4$. In this case

In figures Fig. 3,5,7 (a,b) the real (green lines) and imaginary (blue lines) parts of complex amplitudes of displacements and temperature are depicted, which describe the displacements and temperature at fixed moments of time, spaced apart by a quarter of the oscillation period: : $t = 2\pi n/\omega(Ru, RT)$ and $t = 2\pi n/\omega + \pi/2\omega(Iu, IT), n = 0, 1, 2.$

The formation of standing thermoelastic waves has been observed. At low frequencies a middle of the rod is stationary, and maximum of longitudinal displacements are observed at quarter of length from rod ends. Maximum of temperature is in a middle of the rod. At low frequencies, temperature maximum in a middle of a rod is higher than temperature at its ends. With increasing frequency, a number of local extrema increases and temperature amplitudes increases in comparison with its value at rod ends.

The nodal points appear where both displacements and temperature are close or equal to zero. But extrema of amplitudes of displacement and temperatures are shifted relative to each other (where the displacements are zero, temperature amplitude maximum is observed).

10. Resonance vibrations of thermoelastic rod. One of the most important of engineering problems is to determine the spectrum of free vibrations of a thermoelastic rod (resonant frequencies). As you know, external influences at resonant frequencies often lead to devastating consequences for structures containing such elements.

To determine the spectrum of thermoelastic vibrations of the rod, one should study the determinant of RES matrix. Namely, the resonant frequencies must satisfy the characteristic equation

$$\det\left(\mathbf{A}(L,\omega_k)\right)=0, \qquad k=1,2...$$

This is a complex transcendental equation because the components of the fundamental matrix are expressed in terms of trigonometric functions of complex arguments. Its behavior and roots can be determined only numerically using various standard computer programs. For the system (8.2), the zeroes of determinant of matrix **A2** determine the resonant frequencies at which time-periodic solutions do not exist

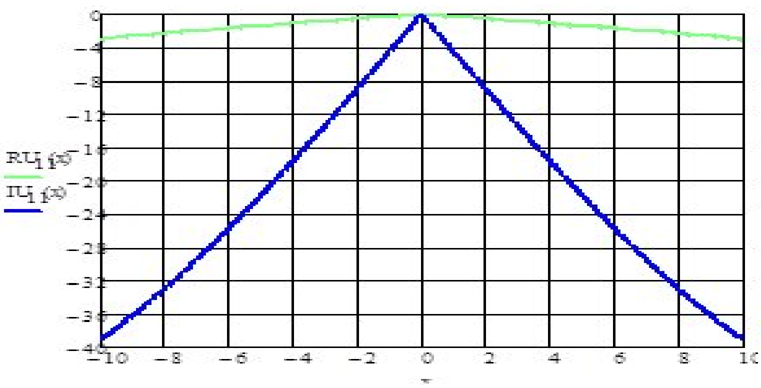
But in figure 9 there is graphs of determinants of matrices **A1** and **A2**. They are plotted, depending on the frequency ω . $Det(\mathbf{A2}\ (\omega))$ does not vanish anywhere. That is, in contrast to the dynamics of elastic rods, there are no classic resonant frequencies at which stationary periodic solutions do not exist. Such behavior of determinant of RES matrix is observed for all considered above BVPs.

However, there is a local minima on these curves. It shows that external action on such frequencies will cause increasing oscillation of rods, resonances in rod structures.

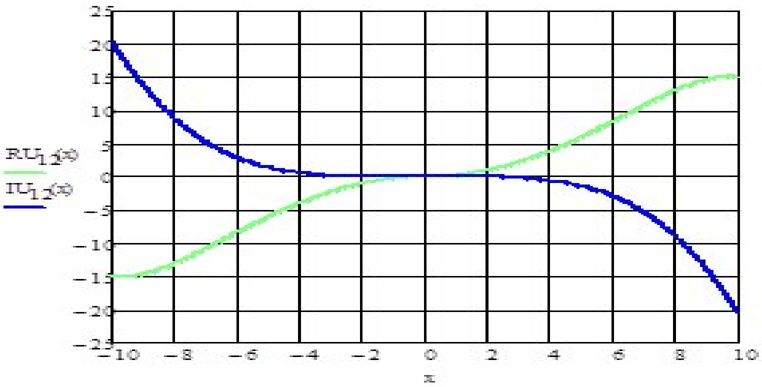
Table 1 presents the maximum amplitudes of displacements and temperature in the considered frequency range. With increasing frequency, the amplitude of the displacements increases sharply, and then begins to fall. The same is observed for temperature. With temperature fluctuations at the ends, the maximum amplitude of temperature fluctuations in the rod increased by $20\,\%$.

Table 1

ω	U max	T max
0.1	0.0022	1.001
1	0.032	1.168
10	0.443	1.2
100	0.28	1.04

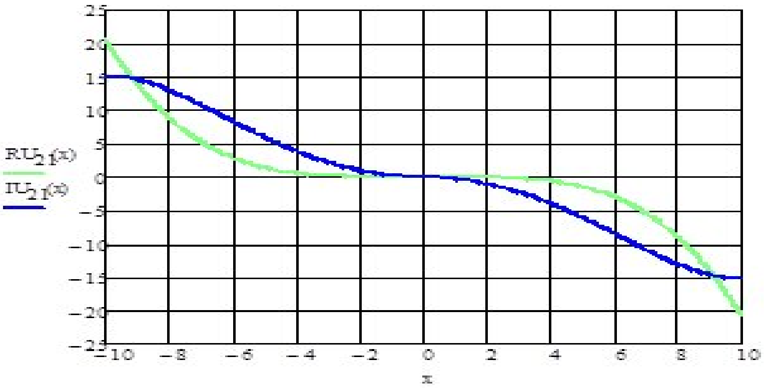


a

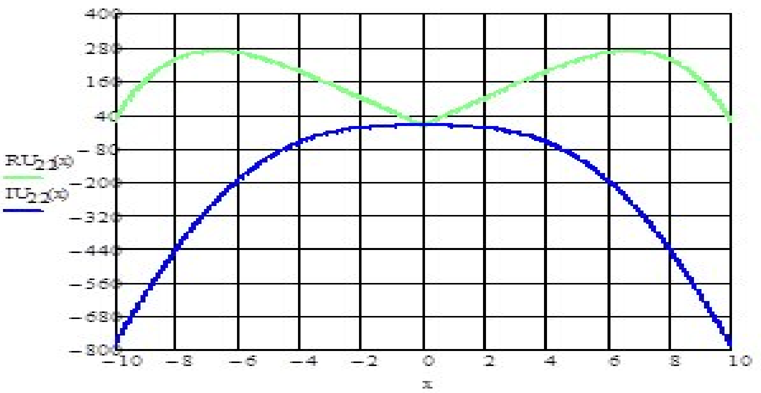


b

Figure 1. a,b - Components $\tilde{U}_k^j(x,w): w=1 \quad (\gamma=0.1,\ c=1,\ k=1,\ \eta=1)$

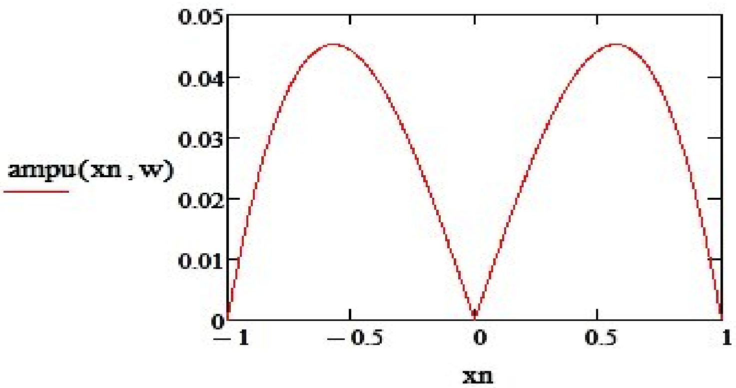


c

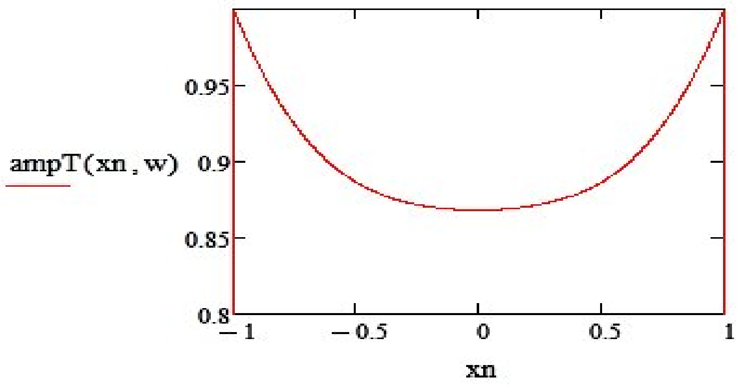


d

Figure 2. c, d - Component $\tilde{U}_k^j(x,w): w=1 \quad (\gamma=0.1,\ c=1,\ k=1,\ \eta=1)$

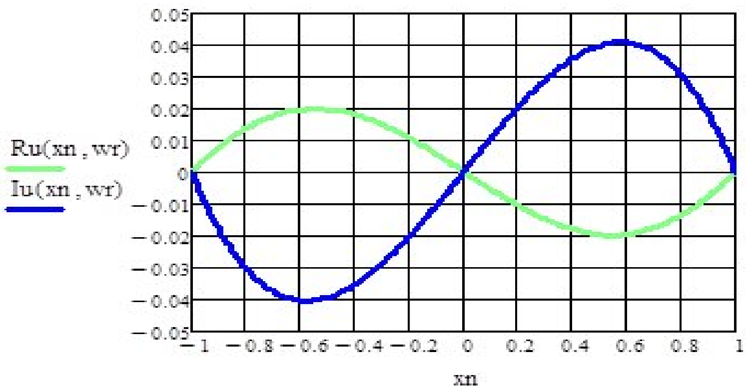


a

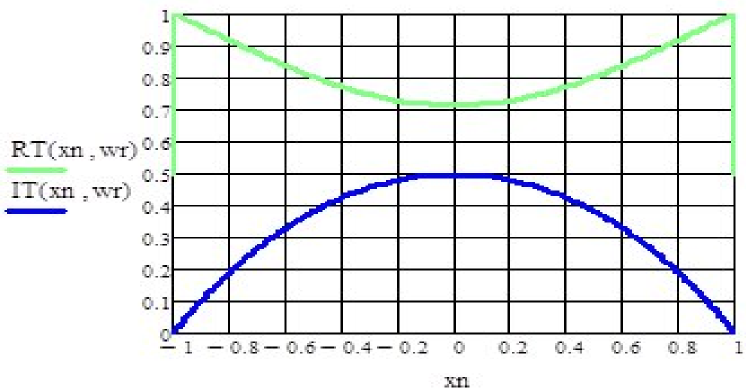


b

Figure 3. Amplitude (a) of displacements and their real and imaginary parts (b) along the rod: $\omega = 1$

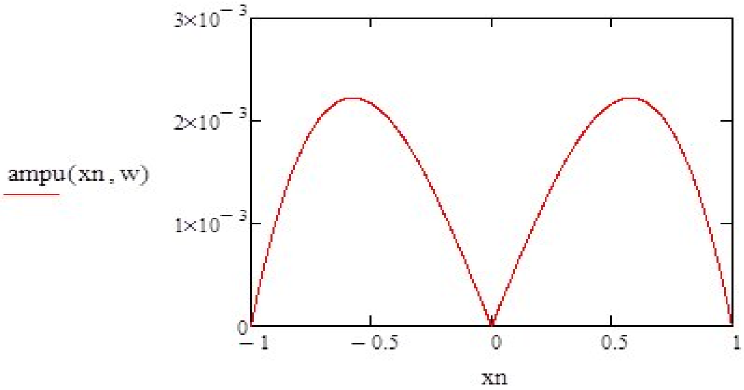


a

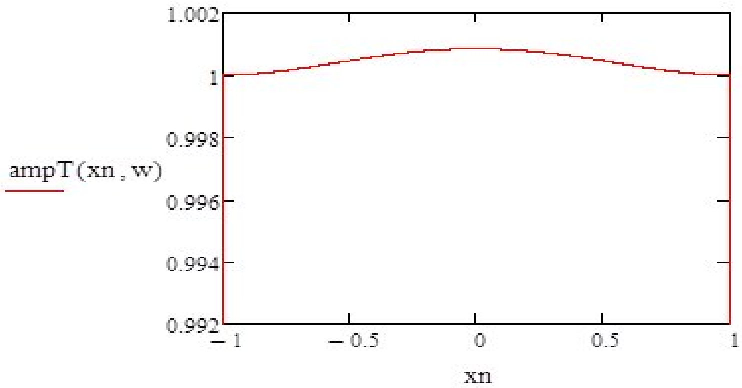


b

Figure 4. The amplitude (a) of temperature fluctuations and its real and imaginary part (b) along the rod: $\omega = 1$

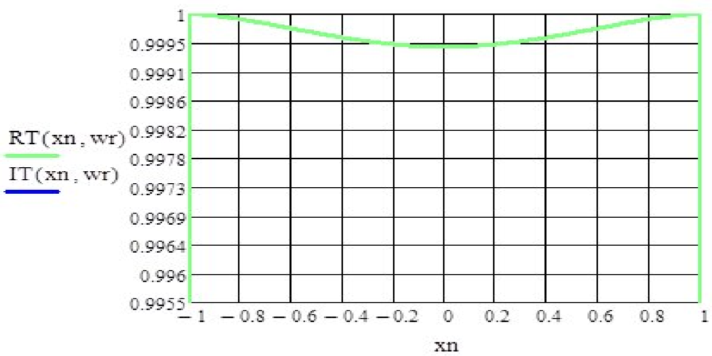


a

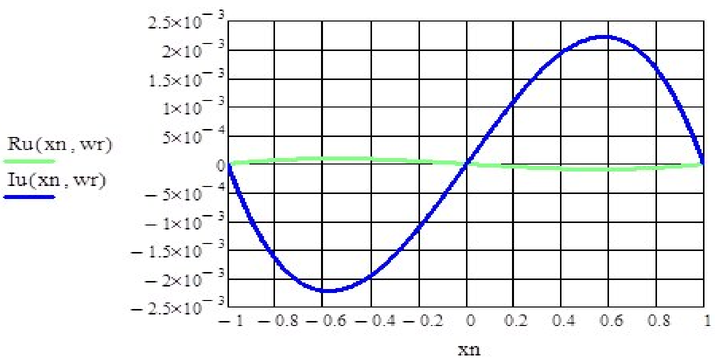


b

Figure 5. Amplitudes of displacements (a) and temperature (b) over shaft length: ω =0.1

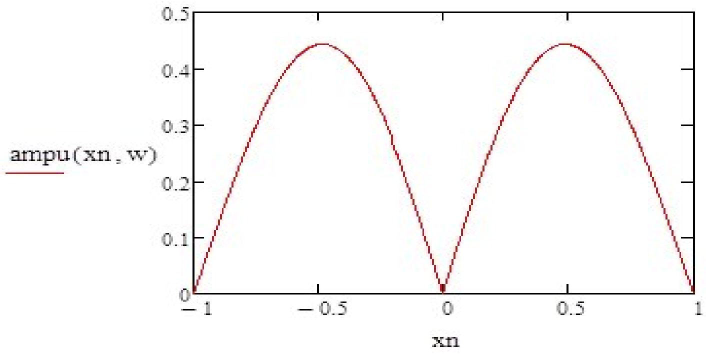


a

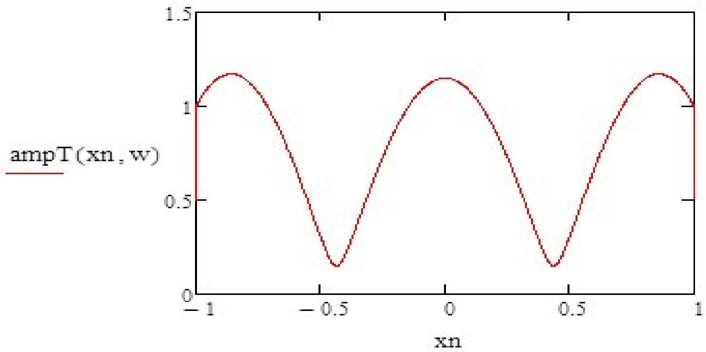


b

Figure 6. Displacements and temperature along the length of the rod at $t = 2\pi n/\omega$ Pë $t = 2\pi n/\omega + \pi/2\omega$: ω =0.1

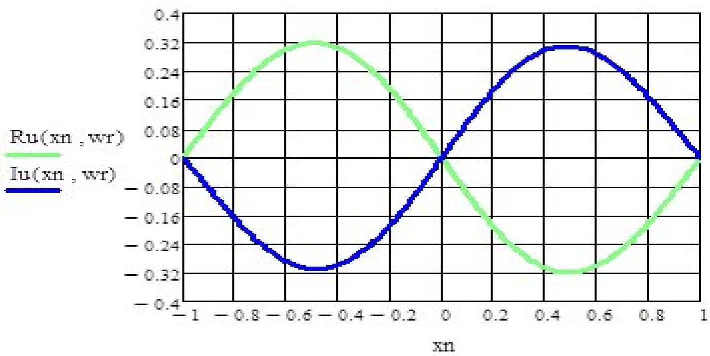


a

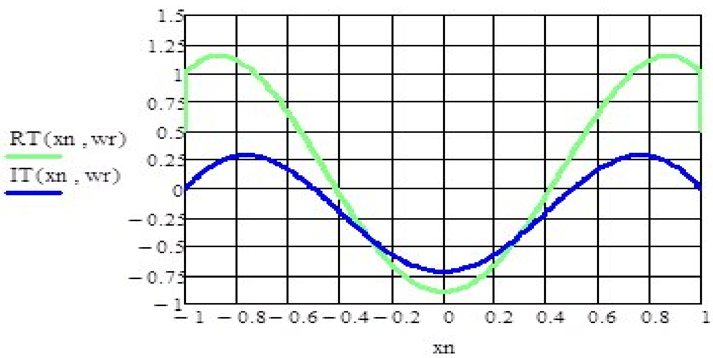


b

Figure 7. Amplitudes of displacements and temperature along the length of the rod: $\omega = 10$

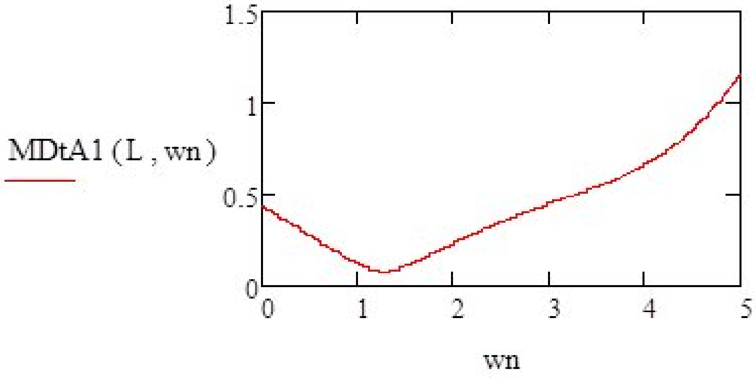


a

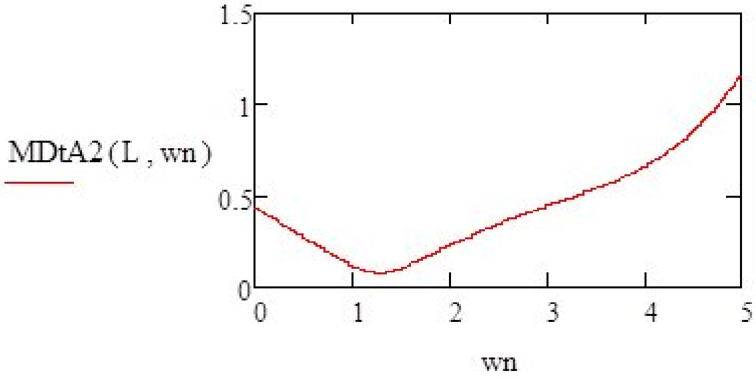


b

Figure 8. Displacements (a) and temperature (b) along the length of the rod at $t = 2\pi n/\omega$ Рё $t = 2\pi n/\omega + \pi/2\omega$: $\omega = 10$



a



b

Figure 9. Dependence of the determinants of the matrices A1 (a) and A2 (2) resolution system of equations of frequency

Conclusion. Obviously, we can consider combined problems with one type of boundary conditions at one end of a rod and other at second end, and other asymmetric conditions for a number of defined functions at rod ends. Constructed here Resulting Eguations System (8.1) gives possibility to solve 35 BVPs with different boundary conditions by different external thermal and forces action. It needs to set 4 boundary function from 8. Then others 4 are defined from RES (8.1). You can know 2 arbitrary boundary function from 4 at both rod ends, or 3 from 4 at one end and 1 any boundary function at other ends, or all 4 only at one ends.

Also by $\gamma = 0$ this system describes the dynamics of elastic rods neglecting thermal stresses but with a glance of velocity of deformation on its temperature.

Note also that formulae (7.1)-(7.2) may be applied for engineering calculations of rods constructions for estimating their durability and safety without construction RES and its solving.

This work was supported by the Grant of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan No. AP05132272 “Boundary value problems of the dynamics of deformable solid and electromagnetic media and their solving”.

References

1 Новацкий В. Теория упругости. - Москва: "Мир", 1975.
2 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. Москва: "Мир", 1970. - 256 с.
3 Купрадзе В.Д. , Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.-Москва: Наука. -1976. - 664 с.
4 Fleurier J., Predeleanu M. On the use of coupled fundamental solutions in boundary element method for thermoelastic problems // Eng. Anal. -1987. - V.4. - N2. - P. 70-74.
5 Sah J., Tasaka N. Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation // Boundary Elem. Meth. Appl. Mech. Proc 1st Joint Jap., US Symp. Boundary Elem. Meth. - Tokyo, 3-6 Oct. - 1988. -P. 335-544.

6 Sharp S., Crouch S.L. Boundary integral methods for thermoelasticity problems //Trans. ASME: J. Appl. Mech. -1986. -Vol. 53. № 2. -P.298-302.
7 Алексеева Л.А., Купесова Б.Н. Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикладная математика и механика. - 2001. - Т.65 . - №2. - С.334-345.
8 Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. - 2006. - Т.6. - №1(19). - С.16-32.
9 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. Москва: Наука, 1978.
10 Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. Москва: "Мир", 1978. -518 с.
11 Алексеева Л .А., Ахметжанова М.М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. 1 Стационарные колебания // Математический журнал. - 2014. - Т.14. - №2(52). - С.5-20.
12 Алексеева Л.А, Дадаева А.Н., Айнакеева Н.Ж. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений нестационарной динамики термоупругих стержней // Вестник ЕНУ им. Л. Гумилева. -2018.-№2(123). - С.56-65.

Л.А. Алексеева, М.М. Ахметжанова

Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

Термосерпімді өзек динамикасының шектік есептерінің жалпылама функциялар әдісі

Аннотация: Байланысқан термосерпімді моделін пайдалана отырып, термосерпімді өзек динамикасының стационарлық емес және тербелісті шектік есептерінін шешу үшін жалпалама функциялар әдісі әзірленді. Соққы жүктемелері мен жылу ағындары әсерінен құрылымдарда пайда болатын термосерпімді соққы толқындары қарастырылды. Олардың бағыттарының шарттары алынды. Соққы толқындарын ескере шектік есептерінің жалғыздығы дәлелденді. Шектік есептерінің кең класстар аналитикалық шешімдерін анықтау үшін МОФ негізінде олардың алгебралық шешу теңдеулер жүйесі құрастырылды. Түрлі типтегі жылу көздерінің және күш әсерінің өзек динамикасы зерттеледі, соңын ішінде сингулярлы жалпылама функцияларын сипатайтын, импульсті концентрацияланған көздер әсерін моделдеуге мүмкіндік береді. Стационарлы тербеліс кезінде бір шектік есептер шешімін компьютерлік іске асыру жүргізіледі, төменгі және жоғарғы жиіліктердегі өзек термодинамикасын есептеудің сандық эксперименттерінің нәтижелері көрсетілді. Осы шешімдер мен алгоритмдер өзек құрылымдарының беріктік қасиеттерін бағалау үшін олардың инженерлік есептеулер үшін қолдануы мүмкін.

Түйін сөздер: термопластика, өзек, шектік есеп, кернеулі - деформациялық күй, жалпылама функциялар әдісі.

Л.А. Алексеева, М.М. Ахметжанова

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Метод обобщенных функций в краевых задачах динамики термоупругого стержня

Аннотация: Разработан метод общих функций (МОФ) для решения нестационарных и вибрационных краевых задач динамики термоупругого стержня с использованием модели связанной термоупругости. Рассмотрены термоупругие ударные волны, возникающие в таких конструкциях под действием ударных нагрузок и тепловых потоков. Получены условия на их фронтах. Доказана единственность поставленных краевых задач с учетом ударных волн. На основе МОФ построена система алгебраических разрешающих уравнений для широкого класса краевых задач для определения их аналитических решений. Исследуется динамика стержня под действием сил и источников тепла различного типа, в том числе описываемых сингулярными обобщенными функциями, которые позволяют моделировать воздействие импульсных концентрированных источников. Проведена компьютерная реализация решений одной краевой задачи при стационарных колебаниях, приведены результаты численных экспериментов расчета термодинамики стержня на низких и высоких частотах. Данные решения и алгоритмы могут быть применены для инженерных расчетов стержневых конструкций для оценки их прочностных свойств.

Ключевые слова: термопластичность, стержень, краевые задачи, напряженно-деформированное состояние, метод общих функций.

References

1 Novatsky V. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity] (Mir, Moscow, 1975).
2 Novatsky V. Dinamicheskie zadachi termouprugosti [Dynamic problems of thermoelasticity] (Mir, Moscow, 1970).
3 Kupradze V.D., Gegelia T.G., Bacheleshvili M.O., Burchuladze T.V. Trekhmernye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti i termouprugosti [Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity] (Nauka, Moscow, 1976, 663 p.).
4 Fleurier J., Predeleanu M. On the use of coupled fundamental solutions in boundary element method for thermoelastic problems, Engin. Anal. 1987. Vol. 4. № 2. P. 70-74.
5 Sah J., Tasaka N. Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation /Boundary Elem. Meth. Appl. Mech. Proc 1st Joint Jap., US Symp. Boundary Elem. Meth., Tokyo, 3-6 Oct, 1988, pp. 335-544.

6 Sharp S., Crouch S.L. Boundary integral methods for thermoelasticity problems.Trans, ASME: J. Appl. Mech. 1986. Vol.53. № 2. P. 298-302.
7 Alexeyeva L.A., Kupesova B.N. Metod obobshchennyh funkcij v kraevyh zadachah svyazannoj termoelastodinamiki[The method of generalized functions in boundary value problems related thermoelastodynamics], Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 2001. Vol. 65. № 2. P. 334-345.
8 Alexeyeva L.A. Metod obobshchennyh funkcij v nestacionarnyh kraevyh zadachah dlya volnovogo uravneniya[The method of generalized functions in non-stationary boundary value problems for the wave equation], Matematicheskij zhurnal[Matematical Journal], 2006. Vol. 6. № 1. P. 16-32.
9 Vladimirov V.S. Obobshchennye funkcii v matematicheskoj fizike[Generalized functions in mathematical physics] (Nauka, Moscow, 1978).
10 Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkcij s prilozheniyami v tekhnike [Introduction to generalized functions theory with applications in technics] (Mir, Moscow, 1978).
11 Alexeyeva L.A., Akhmetzhanova M.M. Fundamental'nye i obobshchennye resheniya uravnenij dinamiki termouprugih sterzhnej. 1 Stacionarnye kolebaniya [Fundamental and generalized solutions of the equations of dynamics of thermoelastic cores. 1. Stationary fluctuations], Matematicheskij zhurnal [Mathematical journal], 2014. Vol. 14. № 2. P. 5-20.
12 Alexeyeva L.A., Dadaeva A.N., Ainikeeva N.Zh. Fundamental'nye i obobshchennye resheniya uravnenij nestacionarnoj dinamiki termouprugih sterzhnej [Fundamental and generalized solutions of the equations of the non-stationary dynamics of thermoelastic rods], Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Sciences. Mechanics Series 2018. Vol. 123. № 2. P. 56-65.

Information about author:

Алексеева Л.А. - д.ф.м.н., проф., заведующая Отделом математической физики и моделирования ИМММ МОН РК, Алматы, Казахстан.

Ахметжанова М.М. - Научный сотрудник, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Alekseeva L.A. - Doctor of Phys.-Math. Sciences, Head of the Department of Mathematical Physics and Modeling of the Institute Of Mathematics And Mathematical Modeling Ministry of Education and Science Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan.

Akhmetzhanova M.M. - Research fellow, Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 11.02.2020

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 131, №2, 28-34 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.31**

М. Илолов [1] , Х.С. Кучакшоев [2]

[1] *Центр инновационного развития науки и новых технологий Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан*
[2] *Университет Центральной Азии, Хорог, Таджикистан*
(E-mail: [1] ilolov.mamadsho@gmail.com, kholiknazar.kuchakshoev@ucentralasia.org)

Абстрактные дробные интегро-дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями

Аннотация: Настоящая работа посвящена вопросам теории существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных решений интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка с импульсными воздействиями в банаховом пространстве. Полученные здесь абстрактные утверждения находят применения при анализе разрешимости начально-краевых задач для дробных дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и систем таких уравнений. Такие задачи являются объектом возрастающего интереса исследователей в связи с широким спектром возможных приложений в физике, механике, химии, биологии, медицине и других областях науки и технологий. Наиболее важными с точки зрения практического применения являются многомерные уравнения с импульсными воздействиями описывающие различные процессы с моментальными изменениями состояний системы в сложных нелинейных фрактальных средах.

Ключевые слова: производная Капуто, импульсное воздействие, дробные дифференциальные уравнения, дробные интегро-дифференциальные уравнения, слабое решение.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-131-2-28-34

Введение. За последние десятилетия теория дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями становится объектом возрастающего интереса исследователей в связи с широким спектром возможных применений в физике, химии, биологии, медицине и многих других областях. Наиболее важными с точки зрения приложений являются импульсные уравнения с дробными порядками производных, которые описывают процессы с моментальными изменениями состояний системы в сложных нелинейных фрактальных средах.

Данное направление исследований и некоторые его итоги изложены в монографиях [1-4]. Настоящая статья является развитием публикаций [5-7] и посвящена интегро-дифференциальным полулинейным уравнениям с дробным порядком производной и с импульсными воздействиями в банаховом пространстве.

Необходимые определения и обозначения. Пусть $\mathbb{R}$ - действительная ось, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, X - банахово пространство с нормой $||\cdot||$. Далее, пусть $J=[0,b]\subset\mathbb{R}_+$ и $C(J,X)$ банахово пространство всех непрерывных функций f из J в X с нормой $||f||_C=\sup\limits_{t\in J}||f(t)||$. Пусть $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=b$. Введем пространство кусочно-непрерывных функций $PC(J,X)=\{f:J\to X|f\in C((t_i,t_{i+1}],X), i=0,\cdots,m+1,$ существуют $f(t_i^-)$ и $f(t_i^+), i=0,\cdots,m+1$ и $f(t_i^-)=f(t_i)\}$ оснащенное PC- нормой Чебышева

$$||f||_\infty=\sup_{t\in J}||f(t)||.$$

Здесь $u(t_i^+)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}u(t_i+\varepsilon)$, $u(t_i^-)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}u(t_i-\varepsilon)$ представляют лево и правосторонние пределы при $t=t_i$ соответственно.

Рассмотрим в X задачу Коши для дробного импульсного интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{cases} {}^cD_t^\alpha u(t) = Au(t) + F(t, u(t), (Ku)(t)), \alpha \in (0,1), t \in J, t \neq t_k, \\ \hfill u(0) = u_0, \\ \hfill \Delta u(t_k) \equiv u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k(u(t_k)), k = 1, \cdots m, \end{cases} \tag{1}$$

где ${}^cD_t^\alpha, \alpha \in (0,1)$ - дробная производная в смысле Капуто [4], A - инфинитиземальный генератор C_0 - полугруппы линейных ограниченных операторов $\{S(t)\}_{t\geq 0}, F : J \times X \times X \to X$ - заданная измеримая функция, функции $I_k : X \to X, k = 1, \cdots, m$ отображают ограниченные множества в себя, оператор K определяется равенством

$$(Ku)(t) = \int_0^t k(t,s)u(s)ds,$$

$k \in C(D, R^+)$ - множество всех положительных непрерывных на $D = \{(t,s) \in R^2, 0 \leq s \leq t < T\}$ функций и $k^+ = \sup \lim_t \int_0^t k(t,s)ds < \infty, u_0 \in X$.

Примем

Определение 1. *Функция $u \in PC(J,X)$ называется PC слабым решением задачи (1), если она удовлетворяет следующему интегрально-сумматорному уравнению*

$$u(t) = T(t)x_0 + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)) +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)} Z(t-s) f(s, x(s), (Kx)(s))ds, t \in J.$$

Здесь

$$T(t) = \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta) S(t^\alpha \theta) d\theta, \xi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\alpha}\theta^{-1-1/\alpha}\omega_\alpha(\theta^{-1/\alpha}) \geq 0,$$

$$\omega_\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-2}\theta^{-\alpha n-1}\frac{\Gamma(n\theta+1)}{n!} sin(n\pi\theta), \theta \in (0,\infty),$$

$\Gamma(z)$ *- гамма функция Эйлера,* ξ_α *- функция плотности вероятности на* $(0,\infty)$ *такая, что*

$$\xi_\alpha(\theta) \geq 0, \theta \in (0,\infty), \int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)d\theta = 1$$

и

$$Z(t) = \alpha \int_0^\infty \theta \xi_\alpha(\theta) S(t^\alpha \theta) d\theta.$$

Лемма 1. *Семейство операторов* $\{T(t)\}_{t\geq 0}, \{Z(t)\}_{t\geq 0}$ *обладает следующими свойствами.*

1) для любого $t \geq 0, T(t)$ и $Z(t)$ являются линейными ограниченными операторами, т.е. для любого $x \in X$ существует постоянная $M \geq 0$ такая, что

$$||T(t)x|| \leq M||x||, ||Z(t)x|| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}||x||;$$

2) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, и $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ *сильно непрерывны;* 3) *для каждого $t > 0, T(t)$ и $Z(t)$ являются компактными операторами при условии компактности $S(t)$.*

Лемма 2. *Пусть $u \in PC(J,R)$ удовлетворяет неравенство*

$$||u(t)|| \leq c_1(t) + c_2\int_0^t (t-s)^{\beta+1}||u(s)||ds + \sum_{0<t_k<t}\theta_k|u(t_k^-)|,$$

где $c_1(t)$ *неотрицательная непрерывная и неубывающая функция на* J *и* $c_1 \geq 0, \theta_k \geq 0$ *постоянные. Тогда*

$$||u(t)|| \leq c_1(t)(1+\theta E_\beta(c_2\Gamma(\beta)t^\beta)^k E_\beta(c_2\Gamma(\beta)t^\beta), t \in (t_k, t_{k+1}] \tag{2}$$

где $\theta = \max_k \theta_k, E_\beta$- *функция Миттаг-Леффлера.* Далее, пусть выполнены следующие предположения: (H1) Функция $F: J \times X \times X \to X$ локально липшиц - непрерывна относительно $u, v,$ т.е. для любого $p > 0$ существуют постоянные $L_1(p)$ и $L_2(p)$ такие, что

$$||F(t, u_1, v_1) - F(t, u_2, v_2)|| \leq L_1(p)||u_1 - u_2|| + L_2(p)||v_1 - v_2||;$$

(H2) Существует постоянная C такая, что

$$||F(t, u, v)|| \leq C(1 + ||u|| + ||v||), u, v \in X;$$

(H3) Для функций $I_k : X \to X, k = 1, \cdots, m$ существуют постоянные $h_k > 0$ такие, что

$$||I_k(u) - I_k(v)|| \leq h_k||u - v||, u, v \in X.$$

Основной результат составляет следующая

Теорема 1. *Предположим, что условия (H1),(H2) и (H3) выполнены. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Для каждого $u_0 \in X$ *задача (1) имеет единственное* PC *- слабое решение* $u(t)$ *.*

2. Существует постоянная $C_1 > 0$ *такая, что для начальных условий* u_0, v_0 *из* X *соответствующие слабые решения* $u(t), v(t)$ *задачи (1) с* $u_0, u(0) = u_0, v_0, v(0) = v_0$ *удовлетворяют оценке*

$$||u - v||_{PC(J,K)} \leq C_1||u_0 - v_0||.$$

Для доказательства теоремы рассмотрим полулинейное интегро-дифференциальное уравнение с дробным порядком производной

$$^cD_t^\alpha u(t) = Au(t) + F(t, u(t), (Ku)(t)), 0 < \alpha < 1, t \in J \tag{3}$$

и с начальным условием

$$u(0) = u_0 \tag{4}$$

на пространстве $C(J, X)$ с весовой нормой

$$||u||_r = \max_{t \in J} ||u(t)||e^{-rt},$$

где r определяется ниже. Определим отображение $P : C(J, X) \to C(J, X)$ равенством

$$(Px)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}Z(t-s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds.$$

Используя лемму 1 и предположение (H1) получим

$$||(Pu)(t)|| \leq ||T(t)u_0|| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}||Z(t-s)|| \cdot ||F(s, u(s), (Ku)(s)))||ds \leq$$

$$\leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)}b^\alpha + \frac{MC}{\Gamma(\alpha)}(||u||_r + ||Ku||_r)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{rs}ds \leq$$

$$\leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)}b^\alpha + \frac{MC(1+||K||)||u||_r}{\Gamma(\alpha)}r^{-\alpha}e^{rt}\gamma(\alpha, rt) \leq$$

$$\leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)}b^\alpha + MCe^{rt}(1+||K||)||u||_r,$$

где $\gamma(\alpha, t) = \int_0^t z^{\alpha-1}e^{-z}dz$ - нижняя неполная гамма - функция (см. [8], стр. 954).

Заметим, что с помощью замены $r(t-s)=z$ можно перейти к равенству

$$\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{rs}ds = r^{-\alpha}e^{rt}\gamma(\alpha, rt).$$

Таким образом, получаем

$$||Pu||_r \leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)}b^\alpha + MC(1+||K||)||u||_r.$$

Из приведенных здесь рассуждений следует, что любое слабое решение $u(t)$ уравнения (3) удовлетворяет оценке

$$||u(t)||_r \leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)}b^\alpha + \frac{MC(1+||K||)}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}||u(s)||ds.$$

Далее из неравенства (2) следует, что

$$||u||_C \leq \tilde{\rho} = (||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)}b^\alpha)E_\alpha(\frac{MC(1+||K||)}{\Gamma(\alpha)}b^\alpha).$$

Следовательно, любое решение u уравнения (3) удовлетворяет оценке

$$||u||_C \leq \tilde{\rho}.$$

Пусть теперь $u_1, u_2 \in C(J,K)$ такие, что $||u_i|| \leq \tilde{\rho}, i=1,2$. Тогда из (H1) получим

$$||(Pu_1)(t) - (Pu_2)(t)|| \leq \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}||Z(t-s)||\times$$

$$\times||F(s,u_1(s),(Ku_1))(s) - F(s,u_2(s),(Ku_2))(s)||ds \leq$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}(L_1(\tilde{\rho}) + ||K||L_2(\tilde{\rho}))||x_1-x_2||_r\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{rs}ds \leq$$

$$\leq M(L_1(\tilde{\rho}+||K||)L_2(\tilde{\rho}))r^{-\alpha}||x_1-x_2||_r e^{rt}.$$

Вводя обозначения

$$r_0 = (2Mmax\{C, L_1(\tilde{\rho}) + ||K||L_2(\tilde{\rho})\})^{1/\alpha},$$

получим

$$||P||_{r_0} \leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)}b^\alpha + \frac{1}{2}||u||_{r_0}\cdot||(Pu_1)(t) - (Pu_2)(t)||_{r_0} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}||u_1-u_2||_{r_0}$$

Взяв

$$\rho_0 = 2(M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)}b^\alpha)$$

увидим, что P является сжимающим отображением на

$$\bar{B}_{r_0}(\rho_0) = \{u \in C(J,X), ||u||_{r_0} \leq \rho_0\}, \rho_0 \leq \tilde{\rho}.$$

Отсюда следует, что уравнение (3) имеет единственное решение удовлетворяющее также начальному условию (4). Теперь переходим к построению слабого решения для импульсной задачи (1). Для $t \in [0,t_1]$ из вышеизложенных результатов следует, что решение уравнения

$$u(t) = T(t)u_0 + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}Z(t-s)F(s,u(s),(Ku)(s))ds$$

является слабым решением уравнения (1) на $[0, t_1]$. Скачок единственным образом определяется выражением

$$u(t, +0) = u(t, -0) + I, (u(t, -0) = u(t_1) + I(u(t_1))) = u_1.$$

Для $t \in (t_1, t_2)$ имеем

$$u(t) = T(t)u_0 + T(t - t_1)I_1(u(t_1)) + \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} Z(t - s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds =$$

$$= T(t)u_0 + T(t - t_1)I_1(u(t_1)) + \int_0^{t_1} (t_1 - s)Z(t_1 - s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds+$$

$$+ \int_{t_1}^t (t - s)^{\alpha-1} Z(t - s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds =$$

$$f_1(t) + \int_{t_1}^t (t - s)^{\alpha-1} Z(t - s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds,$$

где

$$f_1(t) = T(t)u_0 + T(t - t_1)I_1(u(t_1)) + \int_0^{t_1} (t - s)^{\alpha-1} Z(t - s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds$$

Данное уравнение разрешимо на $C([t_1, t_2], X)$. Из изложенных выше результатов следует, что u является слабым решением (1) на интервале (t_1, t_2). Повторяя процедуру на $t \in (t_2, t_3], (t_3, t_4], ...(t_m, b]$ получим единственное слабое решение (1) на J в виде

$$u(t) = T(t)u_0 + \sum_{0<t_i<t} T(t - t_i)I_i(u(t_i))+$$

$$+ \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} Z(t - s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds, t \in J.$$

Далее, применяя лемму 2 установим непрерывную зависимость решения от начальных данных. Заметим, что

$$||u(t) - v(t)|| \leq T(t)||u_0 - v_0|| + \sum_{i=1}^n ||T(t - t_i)|| \cdot ||I_i(u(t_i)) - I_i(v(t_i))||+$$

$$+ \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} ||Z(t - s)|| \cdot ||F(s, u(s), (Ku)(s)) - F(s, v(s), (Kv)(s))||ds \leq$$

$$\leq M||u_0 - v_0|| + M \sum_{i=1}^n h_i ||u(t_i - v(t_i))|| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}+$$

$$+||K||L_2(\rho) \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} ||u(s) - v(s)||ds.$$

Итак

$$||u(t) - v(t)|| \leq C_2||u_0 - v_0||, t \in J,$$

где

$$C_2 = M[1 + ME_\alpha(M(L_1(\rho) + ||K||L_2(\rho)b^\alpha]^m E_\alpha(M(L_1(\rho)) + ||K||L_2(\rho)).$$

Заключение. Полученные здесь абстрактные результаты находят свое применение при решении конкретных начально-краевых задач для нелинейных импульсных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка и систем таких уравнений.

Список литературы

1 Lakshimikantham V., Bainov D.D. and Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations. -Singapore: World Scientific, 1989. -273 p.
2 Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. and Chapovsky Y. Impulsive Differential Equations. -Singapore: World Scientific, 1995. -472pp.
3 Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Application of Fractional Calculus to Dynamic of Particles, Fields and Media. -New York: Springer, 2010. -507 p.
4 Feckan M, Wang J., Pospisil M. Fractional Order Equations and Inclusions. -Berlin: De Grayter, 2017. -361 p.
5 Самойленко А.М., Илолов М. К теории эволюционных уравнений с импульсными воздействиями// Докл. АН СССР. -1991. -Т. 316. -№ 4. -С. 822-824.
6 Самойленко А.М., Илолов М. К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсными воздействиями //Докл. АН СССР. -1991. -Т. 319. -№ 1. -С. 65-67.
7 Илолов М., Кучакшоев Х.С., Гулджонов Д.Н. О дробных линейных уравнениях Вольтерра в банаховых пространтсвах// Докл АН РТ. -2018. -Т. 61. -№ 2. -С. 113-121.
8 Градштейн И.С., Рыжык И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. -Москва: Наука, 1971. - 1100 стр.

М. Илолов [1] , Х.С. Кучакшоев [2]

[1] *Тәжікстан Республикасы Ғылым академиясының ғылым мен ғылыми технологияларды инновациялық дамыту орталығы, Душанбе, Тәжікстан*
[2] *Орталық Азия университеті, Хорог, Тәжікстан*

Импульстік әсерлі абстрактілі бөлшек интегро-дифференциалдық теңдеулер

Аннотация: Мақала Банах кеңістігінде импульстік әсері бар бөлшек ретті интегро-дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің бар болуы, олардың жалғыздығы және бастапқы шарттардан үзіліссіз тәуелді болу мәселелерінің анализіне арналған. Мақалада алынған абстрактілі тұжырымдар бөлшек ретті дербес туындылы дифференциалдық, интегро-дифференциалдық теңдеулер мен теңдеулер жүйелері үшін бастапқы-шекаралық есептердің шешімділігін зерттеуде қолданылады. Физика, механика, химия, биология, медицина және ғылым мен технологияның басқа да салаларында кеңінен қолданысқа ие болуына байланысты мұндай есептерге зерттеушілердің қызығушылықтары артып келе жатқан нысан болып табылады. Күрделі сызықты емес фракталды ортада күйі лезде өзгермелі жүйелі әртүрлі процесстерді сипаттайтын импульсті әсері бар көпөлшемді теңдеулер практикалық колданысы тұрғысынан алып қарағанда негүрлым маңыздысы болып келеді.
Түйін сөздер: Капуто туындысы, импульсті әсер, бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер, бөлшек ретті интегро-дифференциалдық теңдеулер, әлсіз шешім.

M. Ilolov [1] , Kh.S. Kuchakshoev [2]

[1] *Center of Innovative Development of Science and New Technologies, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan*
[2] *University of Central Asia, Khorog, Tajikistan*

Abstract Fractional Integro-Differential Equations with Impulsive Actions

Abstract: This paper is dedicated to the problems of existence, uniqueness and continuous dependence of the solution of fractional integro-differential equations with impulsive actions on the initial conditions in Banach space. The obtained statements will find their applications in analysis of solution of initial-boundary value problems for fractional differential equations and systems of such equations. These types of problems are more attractive for researchers due to the broad applications in physics, mechanics, chemistry, biology, medicine, and other areas of science and technology. Multidimensional equations with impulsive actions, which describes a different process with immediate changes of state in complex nonlinear fractal mediums have more real life applications .
Keywords: Caputo derivative, impulse influence, fractional differential equations, fractional integro-differential equations, weak solution.

References

1 Lakshimikantham V., Bainov D.D. and Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations (World Scientific, Singapore, 1989, 273 p.).
2 Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. and Chapovsky Y. Impulsive Differential Equations (World Scientific, Singapore 1995, 472p.).

3 Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Application of Fractional Calculus to Dynamic of Particles (Fields and Media, Springer, New York, 2010, 507 p.).
4 Fekon M., Wang J., Pospisil M. Fractional Order Equations and Inclusions (De Grayter, Berlin 2017, 361 p.).
5 Samoilenko A.M., Ilolov M. K teorii evolyucionnyh uravnenij s impul'snymi vozdejstviyami [To the theory of impulsive evolution equations], Report. AS USSR. 1991. Vol. 316. No 4. P. 822-824.
6 Samoilenko A.M., Ilolov M. K teorii neodnorodnyh po vremeni evolyucionnyh uravnenij s impul'snymi vozdejstviyami [To the theory of non-homogeneous in time impulsive evolution equations], Report. AS USSR. 1991. Vol. 319. No 1. P. 65-67.
7 Ilolov M., Kuchakshoev Kh.S., Guljonov D.N. О дробных линейных уравнениях Вольтерра в банаховых пространтсвах [About fractional linear Volterra linear equation in Banach space], Report AS. RT. 2018. Vol. 61. No 2. P. 113-121.
8 Gradstein I.S, Ryjik I.M. Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij [Table of integrals, sums, series and products] (Nauka, Moscow, 1971).

Information about author:

Илолов М. - доктор физико-математических наук, профессор, Академик АН РТ, зав.отделом Центра инновационного развития науки и новых технологии Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан.

Кучакшоев Х. - кандидат физико-математичексих наук, Университет Центральной Азии, Хорог, Таджикистан.

Ilolov M. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Head of Department at Center of Innovative Development of Science and New Technologies, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan.

Kuchakshoev Kh. - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Mathematics, University of Central Asia, Khorog, Tajikistan.

Поступила в редакцию 17.01.2020

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетiнiң хабаршысы. Математика. Компьютерлiк ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 131, №2, 35-41 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

В.В. Провоторов [1], Г.Е. Мурзабекова [2], К.Б. Нуртазина [3]

[1] *Воронежский государственный университет, Россия*
[2] *Казахский агротехнический университет имени С. Сейфуллина, Нур-Султан, Казахстан*
[3] *Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
(E-mail: [1] wwprov@mail.ru, [2] guldenmur07@mail.ru, [3] knurtazina@mail.ru)

О решении обратной задачи на графе для уравнения теплопереноса с памятью

Аннотация: Представлена новая постановка обратной задачи для уравнения теплопереноса, учитывающая эффект переноса теплоты с памятью. Получены условия корректной разрешимости прямой задачи и достаточные условия восстановления функции влияния на тепловой процесс (функции источника теплоты) на примере вырожденного графа. Указаны пути переноса полученных результатов на произвольный носитель – произвольный граф.

Ключевые слова: уравнение теплопереноса с памятью, восстановления источника теплоты на сетевых носителях, метод граничного управления.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-131-2-35-41

Введение. Тепловое уравнение с памятью впервые введено в [1] и обобщено в [2]. Это уравнение гораздо лучше, чем обычное уравнение теплопроводности описывает физические явления в экстремальных ситуациях, близких к фазовым переходам. Обратная задача восстановления компактного графа по собственным значениям рассмотрена в [3]. Оказалось, что эта проблема гораздо более сложная, чем обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля на интервале. Аналогично, обратная задача рассеяния на некомпактном графе сложнее, чем обратная задача на вещественной оси.

Наиболее конструктивные процедуры для решения целого класса обратных задач отражены в научных результатах Авдонина С.А., его соавторов и его научной школы [4-9]. Разработан метод граничного управления (Boundary Control Method – BCM), основанный на связи между обратной задачей (идентификацией) и управляемостью для динамических систем: если система управляема, то она идентифицируема. Этот метод был успешно применен практически ко всем линейным уравнениям математической физики: волновому уравнению; уравнениям теплопроводности, Максвелла, Шредингера. Преимущества BCM: он сохраняет линейность на всех этапах; применим к широкому кругу линейных систем; он в существенном не зависит от размерности системы и, наконец, позволяет построить простые алгоритмы и обеспечить стабильные численные реализации. Характерная черта BCM в его локальности. Для обратных задач на графах это означает, что для восстановления топологии и других параметров подграфа требуется только данные, относящиеся к этому подграфу. Это свойство обеспечивает преимущество BCM перед другими методами и позволяет распространить предлагаемый подход от интервала к графам при решении обратных задач математической физики. Новый подход к анализу обратных задач для дифференциальных уравнений с памятью предложен в работах [6-8]. Доказательства опираются на метод моментов, L-базисность и базисность по Риссу. Задачи идентификации источника на графах исследованы в работе [9].

В данной статье предложена новая постановка обратной задачи для уравнения теплопереноса, учитывающая эффект переноса теплоты с памятью.

Управляемость и ВСМ. G - связный топологический граф в $\mathbb{R}^m$, то $\mathbb{N}^m$. $V=\{v_i: 1\le i\le n\}$ - вершины, $E=\{e_j : 1\le j\le N\}$ - ребра. Каждое ребро – жорданова кривая в и допускает параметризацию длин дуги x_j следующим образом.

Параметры

$$\pi_i:[0,l_j]\to e_j : x_j\mapsto \pi_j(x_j)$$

дважды дифференцируемы, т.е. $\pi_j\in C^2([0,l_j],\mathbb{R}^m)$ для всех $1\le j\le N$

C^2-сеть Γ связана с G посредством объединения $\Gamma=E\cup V$.

Валентность каждой вершины обозначается через v_j. Для краткости записи будем обозначать $I_{ext}=\{i\in\{1,\dots,n\}:\gamma(v_i)=1\}$ – множество индексов, соответствующих внешним вершинам, а $I_{int}=\{1,\dots,n\}/I_{ext}$ - множество вершин, соответствующих внутренним вершинам.

Для каждой вершины v_i введем обозначение $N_i=\{j=\{1,...,N\}:v_i\in e_j\}$ множества индексов, соответствующих смежным к вершинам v_i. При этом, если $i\in I_{ext}$, тогда N_i – одноэлементное множество и записывается как $\{j_i\}$. Для каждой вершины v_i и $j\in N_i$ мы введем дополнительное обозначение

$$v_j(v_i)=\begin{cases}1, & \text{если } \pi_j(l_j)=v_i\\ -1, & \text{если } \pi_j(0)=v_i\end{cases}$$

для вектора нормали ребра e_j к вершине v_i .

Для функции $u:\Gamma\to\mathbb{C}$ мы устанавливаем соответствие $u_j=u\circ\pi_j:[0,l_j]\to\mathbb{C}$ – сужение на ребро e_j и используем сокращение:

$$u_j(v_i)=u_j\left(\pi_j^{-1}(v_i)\right),u_j'(v_i)=\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}x_j}\left(\pi_j^{-1}(v_i)\right),\dot{u}_t(v_i)=\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}\left(\pi_j^{-1}(v_i)\right).$$

При этом дифференцирование проводится на каждом ребре e_j по длине дуги x_j и по времени t.

Пусть дана C^2-сеть G. На каждом ребре фиксируем функцию $q_j\in L^\infty(0,l_j)$.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для теплового уравнения с памятью:

$$\begin{cases}\dot{u}_j(x,t)-\int\limits_0^t M(t-s)u_j''(x,s)\mathrm{d}s+q_j(x)u_j(x,t)=f_j(t)g_j(x) \text{ на } Q_{jT}, j=1,...,N,\\ u(\cdot,t)=0 \text{ непрерывна на } \Gamma, \quad t\in(0,T),\\ \sum\limits_{j\in N_j}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}v_j}\left(v_j,t\right)=0, \quad i\in I_{int}, \quad t\in(0,T),\\ u_{ji}(v_i,t)=0, \quad i\in I_{ext}, \quad t\in(0,T),\\ u_j(x,0)=0 \text{ на } (0,l_j), \quad j=1,...,N,\end{cases} \tag{1}$$

где $Q_{jT}:=(0,l_j)\times(0,T)$ и $\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}v_j}(v_i,t)=v_j(v_i)u_j'(v_i,t)$ означает внешнюю нормаль производной $u(\cdot,t)$ по v_j. Здесь и ниже $f_j\in H^1(0,T)$ – данные функции, удовлетворяющие условию

$$f_j(0)\ne 0,\forall j=1,...,N. \tag{2}$$

Для каждого $j=1,...,N,g_j\in\left(H^1(0,l_j)\right)$ – неизвестная функция такая, что

$$g_j(x)=p_j(x)+\sum_{k=1}^{K_j}\alpha_{jk}\delta(x-\xi_{jk}), \tag{3}$$

где $p_j\in L^2(0,l_j)$. При этом $\langle g_j,\varphi\rangle=\sum\limits_{k=1}^{K_j}\alpha_{jk}\varphi(\xi_{jk}),\varphi\in H'(0,l_j)$.

Задача восстановления g_j по наблюдению $u'(v,t),t\in[0,T]$ в некоторых внешних вершинах v и в некоторых внутренних вершинах решена путем применения теорем об управляемости и ВСМ.

Единственность решения прямой задачи. Чтобы показать, что система (1) корректна, введем следующий оператор A в гильбертовом пространстве $H = L^2(\Gamma) = \prod_{j=1}^{N} L^2(0, l_j)$ со скалярным произведением

$$(u,v)_H = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} u_j(x)\bar{v}_j(x)\mathrm{d}x$$

Причем $D(A) = \{u \in H : u_j \in H^2(0, l_j)$ удовлетворяет (4) – (6), данным ниже

$$Au = \left(-u_j'' + q_j u_j \right)_{j=1}^{N}, \ \forall u \in D(A) \tag{4}$$

и непрерывна на Γ

$$\sum_{j \in N_i} \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}v_j} = 0, \ \forall i \in I_{int}. \tag{5}$$

$$u_{ji}(v_i) = 0, \ \forall \in I_{ext}. \tag{6}$$

Отметим, что A является самосопряженным оператором с компактной резольвентой, поскольку A является сглаживающим оператором Фридриха для тройки (H, V, a), определенным посредством

$$V = \left\{ \ u \in \prod_{j=1}^{N} H^1(0, l_j), \text{ удовлетворяющих } (4) \text{ и } (6) \ \right\},$$

представляющее собой гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} (u_j\bar{v}_j + u_j'\bar{v}_j{}')\mathrm{d}x_j,$$

тогда оператору A соответствует билинейная форма

$$a(u,v)_V = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \Big(u_j'(x_j)\bar{v}_j'(x_j) + q_j(x_j)u_j(x_j)\bar{v}_j'(x_j) \Big)\mathrm{d}x_j, \quad u, v \in V. \tag{7}$$

При $q = 0$ спектр A^0 оператора детально изучен в работе [5]. Мы используем утверждение Вейля: если $\left\{ \ \lambda_n^{(0)} \ \right\}_{n=1}^{\infty}$ обозначает множество собственных значений оператора в возрастающем порядке, повторяющихся по степени кратности, то имеет место формула Вейля:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_n^{(0)}}{n^2} = \frac{\pi^2}{L^2}, \tag{8}$$

где L – длина графа, т.е. $L = \sum_{j=1}^{N} l_j$.

Если $q \neq 0$, то учтем, что

$$\lambda_n^{(0)} + q_{low} \leq \lambda_n \leq \lambda_n^{(0)} + q_{up}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

последовательность по принципу минимакса, где $q_{low} = \inf_{\Gamma} q$ и, соответственно, $q_{up} = \sup_{\Gamma} q$, а $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – множество собственных значений оператора A в возрастающем порядке.

Отсюда приходим к соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n^2} = \frac{\pi^2}{L^2},$$

аналогичному (8).

Поскольку граф одномерный, то асимптотики Вейля можно уточнять с точки зрения равномерной плотности Бёрлинга.

Обозначим через $N(x,r)$ число точек последовательности $\Omega = \{\pm\mathfrak{R}\sqrt{\pi_n}\}$ на интервале $[x, x+\ r)$, положим, что

$$n^+(r) := \sup_{x\in\mathbb{R}} N(x,r),\ n^-(r) := \inf_{x\in\mathbb{R}} N(x,r),$$

и стандартным путем верхнюю $\mathcal{D}^+(\Omega)$ и нижнюю $\mathcal{D}^-(\Omega)$ однородные плотности по последовательности Ω соответственно:

$$\mathcal{D}^+(\Omega) := \lim_{r\to\infty}\frac{n^+(r)}{r},\ \mathcal{D}^-(\Omega) := \lim_{r\to\infty}\frac{n^-(r)}{r}.$$

Оба предела существуют в силу супераддитивности $n^+(r)$ и субаддитивности $n^-(r)$.

Если $\mathcal{D}^+(\Omega) = \mathcal{D}^-(\Omega)$, то имеем общее обозначение $\mathcal{D}(\Omega)$ и равномерную плотность последовательности Ω: $\{\pm\mathfrak{R}\sqrt{\pi_n}\} = \frac{L}{\pi}$, $\sqrt{\pi_n} = \frac{\pi_n}{L} + O(1)$ при $n\to\infty$.

В работе [10] доказано, что собственные векторы оператора A равномерно ограничены и что производные растут по n с точностью $\sqrt{|\lambda_n|}$.

Лемма 1. *Для всех положительных чисел n пусть φ_n собственный вектор A, связанный с λ_n . Тогда обозначим через $\varphi_{n,j}$ сужение φ_n на ребро, тогда*

$$|\varphi_{n,j}(x_j)| \le C,\ \forall x_j \in [0, l_j]$$

$$|\varphi'_{n,j}(x_j)| \le C(1+\sqrt{|\lambda_n|}),\ \forall x_j \in [0, l_j],$$

для некоторой положительной постоянной C , не зависящей от n .

Теорема 1. *Если $f_j \in L^2(0,T),\ j = 1,\ldots,N$ и g – функция на графе такая, что сужение на ребро удовлетворяет (3), тогда уравнение (1) имеет единственное слабое решение и удовлетворяющее*

$$u \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];H)$$

Регулярность наблюдения.

Теорема 2. *Допустим, что $f_j \in L^2(0,T)$ и что Γ имеет хотя бы одну внешнюю вершину v_j при $i \in I_{ext}$. Тогда решение начально-краевой задачи*

$$\begin{cases} \dot{w}_j(x,t) - w''_j(x,t) + q_j(x)w_j(x,t) = 0 \text{ на } Q_{jT}, \quad j = 1,...,N, \\ w(\cdot,t) = 0 \text{ непрерывна на } \Gamma, \ \ t \in (0,T), \\ \sum\limits_{j\in N_i} \dfrac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}v_j}(v_i,t) = 0, \ \ i \in I_{int}, t \in (0,T), \\ w_{ji}(v_i,t) = f(t), t \in (0,T), \\ w_{ji}(v_l,t) = 0, \ \ l \in I_{ext} \setminus \{i\}, t \in (0,T) \\ w_j(x,0) = \dot{w}_j(x,0) = 0 \text{ на } (0,l_j), \ \ j = 1,...,N, \end{cases}$$

существует на $C([0,T];L^2(\Gamma))$ и может быть представлено в виде

$$w(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial\varphi_{n,j_i}}{\partial v_j}(v_i)\int_0^t f(\tau)\frac{\sin w_n(t-\tau)}{w_n}\mathrm{d}\tau\right]\varphi_n,$$

Теорема 3. *Допустим, что* $f_j \in L^2(0,T)$, v_m *– внутренняя вершина графа* Γ *и ребро* e_k *примыкает к* $v_m : k \in N_m$. *Тогда решение начально-краевой задачи*

$$\begin{cases} \dot{w}_j(x,t) - w_j''(x,t) + q_j(x)w_j(x,t) = 0 \text{ на } Q_{jT}, \quad j = 1,...,N, \\ w_k(v_m,t) - w_j(v_m,t) = f(t), \;\; j \in N_m, \;\; j \neq k, \;\; t \in [0,T], \\ w_t(v_m,t) = w_j(v_m,t), \; l,j \in N_m, \;\; l,j \neq k, \;\; t \in [0,T], \\ w(\cdot,t) = 0 \text{ непрерывна на } v_i \in I_{int}, \; i \neq m, \; t \in [0,T], \\ \sum\limits_{j \in N_i} \dfrac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}v_j}(v_i,t) = 0, \;\; i \in I_{int}, \quad t \in (0,T), \\ w_{ji}(v_i,t) = 0, \; i \in I_{ext}, \; t \in (0,T), \\ w_j(x,0) = \dot{w}_j(x,0) = 0 \text{ на } (0,l_j), \;\; j = 1,...,N, \end{cases}$$

существует на $C([0,T];L^2(\Gamma))$ *и может быть представлено в виде*

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi_{n,k}}{\partial v_k}(v_m) \int_0^t f(\tau) \frac{\sin w_n(t-\tau)}{w_n} \mathrm{d}\tau \right] \varphi_n,$$

Обратная задача для уравнения теплопереноса с памятью.

$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) - \int_0^t N(t-s)u''(x,s)\mathrm{d}s + q(x)u(x,t) = f(t)g(x), \;\; 0 < x < l, \;\; 0 < t < T \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \; 0 < t < T, \\ u(x,0) = 0, \; 0 < x < l. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $q \in L^\infty(0,l)$ известная функция, $f \in H^1(0,T)$ также известная функция, причем $f(0) \neq 0$.

Функция

$$g(x) = p(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \delta(x - \xi_k), \; 0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_N < l, \tag{10}$$

неизвестная, где $p \in L^2(0,l)$

Решена задача восстановления функции g по наблюдению $u'(0,t)$, $t \in [0,T]$ и доказано, что восстановление возможно при $T = l$, причем это минимальное время наблюдения.

Теорема 4. *Функция* p *восстанавливается путем сведения к уравнению Вольтерра 2-го рода на интервале* $0 < t < l$ *и применения следующего алгоритма:* (ξ_1, α_1) *задаем по*

$$\xi_1 = \inf\{t \geq 0 : u'(0,t) \neq 0\}, \quad \alpha_1 = \frac{u'(0,\xi_1)}{f(0)},$$

k *рассматривается как решение задачи Гурса для всех* $i \geq 2$, *полагая*

$$\mu_i(t) = u'(0,t) - \sum_{1 \leq m \leq i} \alpha_m \left[f(t - \xi_m) + \int_{\xi_m}^t k(\xi_m, s) f(t-s) \mathrm{d}s \right],$$

находим ξ_1 *и* α_1 *по соотношениям*

$$\xi_i = \inf\{t \geq 0 : \mu_i(t) \neq 0\}, \quad \alpha_1 = \frac{\mu_i(\xi_1)}{f(0)}.$$

Восстановление устойчиво, а именно справедливы следующие оценки

$$\|p\|_{L^2(0,l)} \leq C \|u'(0,\cdot)\|_{H^1(0,l)},$$

$$\sum_{k=1}^{N} (|\alpha_k| + |\xi_k|) \leq C \max_{o \leq t \leq l} |u'(0,t)|,$$

здесь C *– постоянная, не зависящая от* g *и* p .

Алгоритм восстановления функции на графе-звезде и графе-дереве приведен в [8]. Достаточные условия восстановления функции влияния на тепловой процесс (функции источника теплоты) доказаны в [11].

Утверждение теоремы 4 вместе с приведенным алгоритмом решения обратной задачи является основополагающей базой для получения решения обратной задачи с распределнными параметрами на графе.

Таким образом, представлена новая постановка обратной задачи для уравнения теплопереноса, учитывающая эффект переноса теплоты с памятью. Получены условия корректной разрешимости прямой задачи и достаточные условия восстановления функции влияния на тепловой процесс (функции источника теплоты) на примере вырожденного графа. При этом используется новый, более эффективный подход в решении поставленной задачи, основанный на результатах теории граничного управления распределенными объектами, чем известные в литературе методы решения обратных спектральных задач – задач восстановления дифференциального оператора по его спектральным характеристикам. Указаны пути переноса полученных результатов на произвольный носитель – произвольный граф.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (Проект № AP05136197).

Список литературы

1 Cattaneo C., Sulla conduzione del carole // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena. – 1948. – V.3. – P.83-101. MR0032898 (11:362d).

2 Gurtin M.E. and Pipkin A.G. // A general theory of heat condition with finite wave speed. Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – V.31. – P.113-126. MR 1553521.

3 Carlson R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – V.351. – P.4069–4088.

4 S. Avdonin and P. Kurasov. Inverse problems for quantrum trees // Inverse Problems and Imaging. – 2008. – V.2(1). – P.1-21.

5 Avdonin S., Mikhaylov V., Nurtazina K. On Inverse Dynamical and Spectral Problems for the Wave and Schrodinger Equations on Finite Trees. The Leaf Peeling Method // Journal of Mathematical Sciences (USA). – 2017. – Vol.224(1). – P.1-10.

6 Avdonin S. and Pandolfi L. Simultaneous temperature and flux cotrollability for heat equations with memory // Quarterly of Applied Mathematics. – 2013. –V.71(2). – P.339-368.

7 Avdonin S. and Belinskiy B. On controllability of a non-homogeneous string with memory // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – V.398(1). – P.254-269.

8 Avdonin S., Murzabekova G., Nurtazina K. Source Identification for the Differential Equation with Memory. // In book: Trends in Mathematics. Research Perspective, Birkhaeuser / Springer International Publishing Switzerland. – 2017. – P.111-120.

9 Avdonin S., Nicaise S. Source identification problems for the wave equation on graphs // Inverse Problems. – 2015. – V.31. 095007 (29 pp) / DOI: 10.1088/0266-5611/31/9/095007

10 Nicaise S., Zair O. Identifiability, stability and reconstruction results of point sources by boundary measurements in heterogeneous trees // Rev. Mat. Complut. – 2003. – V.16(1). – P.151-178.

11 Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes. 2019. – Vol.15(3). – P.322-335.

В.В. Провоторов [1], Г.Е. Мурзабекова [2], К.Б. Нуртазина [3]

[1] *Воронеж мемлекеттiк университетi, Воронеж, Ресей*
[2] *С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университетi, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*
[3] *Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетi, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*

Графтардағы жадылы жылу теңдеуi үшiн сәйкестендiру мәселесi

Аннотация. Жадылы жылу алмасу әсерiн ескеретiн теңдеудiң керi есебiнiң қойылымы ұсынылған. Тура есептiң корректтi шешiмдiлiгi және өзгеше графтың мысалында жылу процесiне әсер ету функциясын (жылу көзiнiң функциясын) қалпына келтiрудiң жеткiлiктi шарттары берiлген. Алынған нәтижелердi еркiн тұғырға, яғни кез-келген графқа, алмастыру жолдары көрсетiлген.

Түйiн сөздер: жадылы жылу алмасу теңдеуi, желiлiк тасымалдаушылардағы жылу көзiн қалпына келтiру, шекаралық басқару әдiсi.

V.V. Provotorov [1] , G.E. Murzabekova [2] , K.B. Nurtazina [3]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *S. Seifullin Kazakh AgroTechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan*
[3] *L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*

On solving the inverse graph problem for the heat transfer equation with memory

Abstract. A new formulation of the inverse problem for the heat transfer equation is presented, taking into account the effect of heat transfer with memory. The conditions for correct solvability of the direct problem and sufficient conditions for recovering the function of influence on the heat process (the function of the heat source) on the example of a degenerate graph are obtained. The ways of transferring the obtained results to an arbitrary carrier-an arbitrary graph-are specified.

Keywords: equation of heat transfer with memory, recovery of a heat source on network carriers, method of boundary control.

References

1 Cattaneo C. Sulla conduzione del carole, Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena. 1948. Vol. 3. P.83-101. MR0032898 (11:362d).
2 Gurtin M.E. and Pipkin A.G. A general theory of heat condition with finite wave speed, Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. Vol. 31. P.113-126. MR 1553521.
3 Carlson R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs, Trans. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351. P.4069–4088.
4 Avdonin S. and Kurasov P. Inverse problems for quantrum trees, Inverse Problems and Imaging. 2018. Vol. 2(1). P.1-21.
5 Avdonin S., Mikhaylov V., Nurtazina K. On Inverse Dynamical and Spectral Problems for the Wave and Schrodinger Equations on Finite Trees. The Leaf Peeling Method, Journal of Mathematical Sciences (USA). 2017. Vol.224(1). P.1-10.
6 Avdonin S. and Pandolfi L. Simultaneous temperature and flux cotrollability for heat equations with memory, Quarterly of Applied Mathematics. 2013. Vol. 71(2). P.339-368.
7 Avdonin S. and Belinskiy B. On controllability of a non-homogeneous string with memory, J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 398(1). P.254-269.
8 Avdonin S., Murzabekova G., Nurtazina K. Source Identification for the Differential Equation with Memory. // In book: Trends in Mathematics. Research Perspective, Birkhaeuser / Springer International Publishing Switzerland. 2017. P.111-120.
9 Avdonin S., Nicaise S. Source identification problems for the wave equation on graphs, Inverse Problems. 2015. Vol. 31. 095007 (29 pp). DOI: 10.1088/0266-5611/31/9/095007
10 Nicaise S., Zair O. Identifiability, stability and reconstruction results of point sources by boundary measurements in heterogeneous trees, Rev. Mat. Complut. 2003. Vol. 16(1). P.151-178.
11 Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation, Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes. 2019. Vol.15(3). P.322-335.

Сведения об авторах:

Провоторов В.В. – Доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия.

Мурзабекова Г.Е. – Кандидат физико-математических наук, доцент, Казахский агротехнический университет имени С. Сейфуллина, Нур-Султан, Казахстан.

Нуртазина К.Б. – Кандидат физико-математических наук, доцент, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Provotorov V.V. – Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Voronezh state University, Voronezh, Russia.

Murzabekova G.E. – Candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor, S. Seifullin Kazakh AgroTechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Nurtazina K.B. – Candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor, L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 01.04.2020

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 131, №2, 42-50 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.19**

Р. Муталип, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: mutalipriza@yahoo.com, altyngul.82@mail.ru)

Нечетные автоморфизмы сплетенных свободных ассоциативных алгебр от двух порождающих

Аннотация: Доказано, что эндоморфизм φ сплетенной свободной ассоциативной алгебры от двух порождающих x_1, x_2 над произвольным полем k с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ заданный правилом $\varphi(x_1) = x_1$, $\varphi(x_2) = \alpha x_2 + \beta x_1^m$, где $\alpha, \beta \in k$, m – нечетное число, является нечетным автоморфизмом. Также доказано, что линейный эндоморфизм ψ этой алгебры является автоморфизмом тогда и только тогда, когда ψ аффинный. Установлено, что группа всех автоморфизмов двупорожденной сплетенной свободной ассоциативной алгебры над произвольным полем k с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ совпадает с группой нечетных автоморфизмов этой алгебры.

Ключевые слова: Свободная ассоциативная алгебра, сплетение, автоморфизм.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-131-2-42-50

1. Введение

Хорошо известно [1–4], что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x_1, x_2]$ и свободной ассоциативной алгебры $k\langle x_1, x_2\rangle$ от двух переменных над произвольным полем k являются ручными. Более того [1,4], группы автоморфизмов алгебр $k[x_1, x_2]$ и $k\langle x_1, x_2\rangle$ изоморфны, т.е.

$$\mathrm{Aut}_k k[x_1, x_2] \cong \mathrm{Aut}_k k\left\langle x_1, x_2\right\rangle.$$

Известно также, что автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр Пуассона над полями нулевой характеристики [5] и автоморфизмы двупорожденных свободных правосимметричных алгебр над произвольными полями [6] являются ручными. П. Кон [7] доказал, что автоморфизмы свободных алгебр Ли конечного ранга являются ручными. Аналог этой теоремы верен для свободных алгебр любого однородного шрайерового многообразия алгебр [8]. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр [9], коммутативных и антикоммутативных алгебр [10], алгебр Ли [11, 12] и супералгебр Ли [13, 14].

Сплетенным пространством V называется линейное пространство V над произвольным полем k с фиксированным линейным отображением $\tau : V\otimes V \to V\otimes V$ (в общем случае не обязательно обратимым), которое удовлетворяет *соотношению сплетения*

$$(\tau\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau)(\tau\otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id}\otimes\tau)(\tau\times \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\tau).$$

Это фиксированное линейное отображение τ будем называть сплетением пространства V. Если $x_1, x_2, \cdots, x_n$ является базисом линейного пространства V, то для произвольных параметров $q_{is} \in k$, $1 \le i, s \le n$, линейное отображение τ определяемое как

$$\tau : x_i \otimes x_s \mapsto q_{is}\cdot x_s\otimes x_i$$

является сплетением и называется *диагональным сплетением.* Для удобства, это диагональное сплетение τ будем обозначать через кортеж $(q_{11}, q_{12}, \dots, q_{(n-1)n}, q_{nn})$. Сплетение $\tau : V\otimes V\to V\otimes V$ называется *инволютивным*, если $\tau^2 = \mathrm{id}$.

Пусть V и V' – сплетенные пространства со сплетениями τ и τ', соответственно. Линейное отображение $\varphi : V \to V'$ называется гомоморфизмом сплетенных пространств, если

$$\tau(\varphi \otimes \varphi = (\varphi \otimes \varphi)\tau'.$$

Пусть V – линейное пространство со сплетением $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ и $X = \{x_i | i \in I\}$ – некоторый фиксированный линейный базис пространства V. Пусть X^* – множество всех ассоциативных слов в алфавите X. Очевидно, что X^* формирует линейный базис свободной ассоциативной алгебры $k\langle X\rangle$ порожденной множеством X. Алгебра $k\langle X\rangle$ изоморфна тензорной алгебре

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$$

линейного пространства V с конкатенативным произведением $(u \otimes' v)\mathbf{m}' = u \otimes v$, т.е. произведение $\mathbf{m}'$ собирает пару тензоров в один тензор. Известно [15], что сплетение τ имеет единственное расширение τ' на свободную алгебру $k\langle X\rangle$ такое, что $k\langle X\rangle$ является сплетенной алгеброй. Более того, существует каноническая сплетенная структура алгебры Хопфа на $T(V)$ и эта алгебра Хопфа играет важную роль в квантовой теории Ли [15]. Свободную ассоциативную алгебру можно рассматривать как обобщение алгебры квантовых многочленов. Группа автоморфизмов алгебры квантовых многочленов описана Дж. Алевым и М. Чамари [16]. Сплетенные алгебры и коалгебры также тесно связаны с уравнениями Янга-Бакстера [17].

Пусть $A_\tau = \langle k\langle X\rangle, \tau\rangle$ – сплетенная свободная ассоциативная алгебра порожденная множеством X над произвольным полем k со сплетением τ. Напомним, что автоморфизм алгебры A_τ – это одновременно автоморфизм свободной ассоциативной алгебры $k\langle X\rangle$ и автоморфизм сплетенного пространства $k\langle X\rangle$ со сплетением τ.

Данная работа посвящена описанию группы автоморфизмов двупорожденной сплетенной свободной ассоциативной алгебры с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1, -1, -1, -1)$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся необходимые определения и факты о свободных сплетенных ассоциативных алгебрах. В разделе 3 доказывается, что группа всех автоморфизмов сплетенной свободной ассоциативной алгебры от двух порождающих над произвольным полем k с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1, -1, -1, -1)$ совпадает с группой нечетных автоморфизмов этой алгебры.

2. Сплетенные алгебры

Сплетенный моноид B_n [18] является ассоциативным моноидом порожденным сплетениями $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ с учетом соотношений

$$s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1},\ s_i s_j = s_j s_i,\ 1 \le k < n-1,\ |i-j| > 1. \tag{1}$$

Если вместо моноида рассматривать группу с множеством порождающих $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ и множеством определяющих соотношений (1), то придем к известным группам кос Артина.

Пусть k – произвольное поле. Линейное пространство V над полем k называется *сплетенным пространством*, если существует фиксированное линейное отображение $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ (в общем случае не обязательно обратимое), которое удовлетворяет *соотношению сплетения*

$$(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau). \tag{2}$$

Если $x_1, x_2, \cdots, x_n$ является базисом линейного пространства V, то для произвольных параметров $q_{is} \in k$, $1 \le i, s \le n$, линейное отображение τ определяемое как

$$\tau : x_i \otimes x_s \mapsto q_{is} \cdot x_s \otimes x_i \tag{3}$$

является сплетением и называется *диагональным сплетением.* Пусть V – линейное пространство со сплетением $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$. Рассмотрим линейные отображения

$$\tau_i = \mathrm{id}^{\otimes(i-1)} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}^{\otimes(n-i-1)} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}, \quad 1 \le i < n.$$

Согласно (2) отображения τ_i удовлетворяют всем определяющим соотношениям (1) сплетенного моноида, т.е.

$$\tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}, \quad 1 \le i < n-1; \quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \quad |i-j| > 1. \tag{4}$$

Положим $[k;k] = 1$ и

$$[m;k] = \tau_{k-1}\tau_{k-2}\cdots\tau_{m+1}\tau_m, \quad [k;m] = \tau_m\tau_{m+1}\cdots\tau_{k-2}\tau_{k-1}, \quad m < k. \tag{5}$$

Рассмотрим отображение $\nu_r^{k,n} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$, $k \le r < n$ определяемое как суперпозиция τ_i:

$$\nu_r^{k,n} = [k; r+1][k+1; r+2]\cdots[k+n-r-1; n]. \tag{6}$$

В [15] доказано, что

$$\nu_r^{k,n} = [n; r][n-1; r-1]\cdots[n-r+k; k]. \tag{7}$$

Сплетение $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ называется *инволютивным*, если $\tau^2 = \mathrm{id}$. Известным примером инволютивного сплетения является *обычный флип* θ определяемый как $\theta(x \otimes y) = y \otimes x$ для всех $x, y \in V$. Пусть V и V' – сплетенные пространства со сплетениями τ и τ', соответственно. Линейное отображение $\varphi : V \to V'$ называется *гомоморфизмом сплетенных пространств*, если

$$\tau(\varphi \otimes \varphi) = (\varphi \otimes \varphi)\tau'. \tag{8}$$

Алгебра R с умножением $\mathbf{m} : R \otimes R \to R$ называется *сплетенной алгеброй*, если R является сплетенным пространством и

$$(\mathbf{m} \otimes \mathrm{id})\tau = \tau_2\tau_1(\mathrm{id} \otimes \mathbf{m}), \quad (\mathrm{id} \otimes \mathbf{m})\tau = \tau_1\tau_2(\mathbf{m} \otimes \mathrm{id}). \tag{9}$$

Как и выше, в этих формулах используется так называемая "экспоненциальная запись" для действий операторов, т.е. операторы в суперпозиции действуют слева направо.

Гомоморфизмом сплетенных алгебр называется линейное отображение, которое одновременно является гомоморфизмом алгебр и гомоморфизмом сплетенных пространств.

Пусть V – линейное пространство со сплетением $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$. Зафиксируем некоторый линейный базис $X = \{x_i | i \in I\}$ пространства V. Пусть X^* – множество всех ассоциативных слов в алфавите X. Очевидно, что X^* формирует линейный базис свободной ассоциативной алгебры $k\langle X\rangle$ порожденной множеством X. Алгебра $k\langle X\rangle$ изоморфна тензорной алгебре

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$$

линейного пространства V с конкатенативным произведением $(u \otimes' v)\mathbf{m}' = u \otimes v$, т.е. произведение $\mathbf{m}'$ собирает пару тензоров в один тензор. По определению $V^{\otimes 0} = k \cdot 1$, где 1 – пустое слова в X^*, т.е. $1 \otimes v = v \otimes 1 = v$.

Соответствующие тензорам из $V^{\otimes m}$ слова множества X^* будем считать словами длины m. Длину слова $v \in X^*$ будем обозначать через $\mathrm{d}(v)$. Для любого $x_i \in X$ положим $\mathrm{mdeg}(x_i) = \varepsilon_i$. где $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ – стандартный базис в Z_+^n. Если $v = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s} \in X^*$, то положим $\mathrm{mdeg}(v) = \mathrm{mdeg}(x_{i_1}) + \mathrm{mdeg}(x_{i_2}) + \cdots + \mathrm{mdeg}(x_{i_s})$. Вектор $\mathrm{mdeg}(v)$ назавем *мультистепенью слова* v.

Хорошо известно [15], что сплетение τ имеет единственное расширение τ' на свободную ассоциативную алгебру $k\langle X\rangle$ такое, что $k\langle X\rangle$ является сплетенной алгеброй. Для любого $0 \le r \le n$ через θ_r обозначим линейное отображение

$$\theta_r : V^{\otimes n} \to V^{\otimes r} \otimes' V^{\otimes(n-r)}$$

определяемое как

$$(z_1z_2\cdots z_n)\,\theta_r = z_1z_2\cdots z_r \otimes' z_{r+1}\cdots z_n, \quad z_i \in X.$$

Сплетение τ' определено в [15] следующим образом

$$(u \otimes' v)\tau' = (u \otimes v)\nu_r^{1,n}\theta_{n-r}, \quad u \in V^{\otimes r},\ v \in V^{\otimes(n-r)} \tag{10}$$

(Если $r = 0$ или $r = n$, то это определение означает, что $(1 \otimes' v)\tau' = v \otimes' 1$ или $(u \otimes' 1)\tau' = 1 \otimes' u$, соответственно).

Пусть τ - диагональное сплетение вида (2), следующая лемма дает необходимые формулы для вычислений с τ'.

Лемма 1. *Пусть V – сплетенное пространство над полем k с базисом $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ и диагональным сплетением τ вида (3). Пусть $u, v \in X^*$, $\mathrm{mdeg}(u) = (s_1, s_2, \cdots, s_n), \mathrm{mdeg}(v) = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$. Тогда*

$$(u \otimes' v)\tau' = \prod_{i,j} q_{ij}^{s_i t_j}(v \otimes u). \tag{11}$$

Proof. Пусть $t = t_1 + \cdots + t_n,\ s = s_1 + \cdots + s_n$, тогда $\mathrm{d}(u) = s,\ \mathrm{d}(v) = t$. Проведем индукцию по t. Если $t = 0$, то $v = 1$ и $(u \otimes' 1)\tau' = 1 \otimes u$. Пусть $v = v'x_h$, тогда $\mathrm{mdeg}(v') = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$, где $(l_1, l_2, \cdots, l_n) = (t_1, t_2, \cdots, t_{h-1}, t_h - 1, t_{h+1}, \cdots, t_n)$. Согласно (10) и (6) имеем

$$(u \otimes' v)\tau' = (u \otimes' v'x_h)\tau' = (u \otimes' v'x_h)\nu_s^{1,s+t}\theta_t =$$

$$= (u \otimes' v' \otimes x_h)(\tau_s\tau_{s-1}\cdots\tau_1)(\tau_{s+1}\tau_s\cdots\tau_2)\cdots(\tau_{s+t-2}\tau_{s+t-3}\cdots\tau_{t-1})(\tau_{s+t-1}\tau_{s+t-2}\cdots\tau_t)\theta_t.$$

По предположению индукции

$$(u \otimes' v)\tau' = (u \otimes' v' \otimes x_h)\tau' = \prod_{i,j} q_{ij}^{s_i l_j}(v' \otimes u \otimes x_h)(\tau_{s+t-1}\tau_{s+t-2}\cdots\tau_t)\theta_t =$$

$$= \prod_{i,j} q_{ij}^{s_i l_j} q_{ih}^{s_i}(v \otimes u) = \prod_{i,j} q_{ij}^{s_i t_j}(v \otimes u). \quad \square$$

□

3. Нечетные автоморфизмы

Пусть $k\langle X\rangle = k\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра с конечным множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ над произвольным полем k. Через $\varphi = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ обозначим автоморфизм алгебры $k\langle X\rangle$ такой, что $\varphi(x_1) = f_1, \varphi(x_2) = f_2, \cdots, \varphi(x_n) = f_n$. Через $\mathrm{Aut}_k k\langle X\rangle$ обозначим множество всех автоморфизмов алгебры $k\langle X\rangle$. Автоморфизм вида

$$(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \cdots, x_n),$$

где $0 \neq \alpha \in k,\ f \in k\langle X \setminus \{x_i\}\rangle$, называется *элементарным.* Очевидно, что имеет место следующая градуировка

$$k\langle X\rangle = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus \cdots,$$

здесь $A_0 = k, A_1 = kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_n, \ldots, A_n$ является линейной оболочкой слов длины n. Автоморфизм $\varphi = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ называется *нечетным автоморфизмом*, если $f_1, f_2, \cdots, f_n \in A_1 \oplus A_3 \oplus A_5 \oplus \cdots$. Группу всех нечетных автоморфизмов обозначим через $(\mathrm{Aut}_k A_\tau)_{odd}$. Элемент $f \in k\langle X\rangle$ можно представить в следующем виде $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + f_n$, где $f_i \in A_i$, $f_n \neq 0$, тогда f_n назовем *старшей однородной частью* f и обозначим через $\overline{f}$. Степенью элемента f будем считать степень его старшей однородной части $\overline{f}$, т.е. $\deg f = \deg f_n = n$. Через $\varphi = (f_1, f_2)$ обозначим автоморфизм алгебры A такой, что $\varphi(x_i) = f_i,\ i \in \{1, 2\}$. Для автоморфизма $\varphi = (f_1, f_2)$ число

$$\deg\varphi = \deg f_1 + \deg f_2$$

назовем степенью φ. Преобразование двойки (f_1, f_2), которое заменяет только один элемент f_i на элемент вида $\alpha f_i + g$, где $0 \neq \alpha \in k,\ g \in k\langle f_j | j \neq i\rangle$ назовем *элементарным.*

Запись $\varphi \to \psi$ означает, что двойка ψ получается из φ с помошью одного элементарного преобразования. Автоморфизм φ назовем *элементарно сократимым*, если существует автоморфизм такой, что $\varphi \to \psi$ и $\deg\psi < \deg\varphi$.

Зафиксируем двумерное векторное пространство V над полем k с линейным базисом x_1, x_2 и инволютивным диагональным сплетением $\tau = (q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$. $A = k\langle x_1, x_2\rangle = T(V)$ является свободной ассоциативной алгеброй на пространстве V. Тогда A становится сплетенной ассоциативной алгеброй со сплетением τ' определенным в разделе 2. В дальнейшем это расширение будем обозначать также через τ, а сплетенную алгебру через $A_\tau = \langle A, \tau\rangle$.

Лемма 2. *Пусть $A = k\langle x_1, x_2\rangle = T(V)$ – свободная ассоциативная алгебра на двумерном пространстве $V = kx_1 + kx_2$ и $\varphi = (f_1, f_2)$ – автоморфизм алгебры A такой, что $\deg\varphi = \deg f_1 + \deg f_2 \geq 3$. Тогда*

$$\bar{f_1} = \alpha(ax_1 + bx_2)^r, \quad \bar{f_2} = \beta(ax_1 + bx_2)^s, \tag{12}$$

где $r + s \geq 3, \quad r \mid s$ или $s \mid r, \quad \alpha, \beta \in k^*, a, b \in k$ и a, b одновременно не равны нулю.

Proof. Пусть $\deg f_1 = r$ и $\deg f_2 = s$, где $\deg$ – обычная функция степени на $A = k\langle x_1, x_2\rangle$. Без потери общности, мы можем предположить, что $r \leq s$. Проведем индукцию по $n = r + s$. Пусть $n = r + s = 3$, так как $r \leq s$, то $\deg f_1 = 1, \deg f_2 = 2$. Пусть $\bar{f_1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

Известно, что автоморфизмы свободной ассоциативной алгебры от двух порождающих являются ручными [1,4], тогда любой автоморфизм этой алгебры с помощью элементарных сокращений можно привести к линейному автоморфизму. Учитывая это, существует преобразование $(f_1, f_2) \to (f_1, \beta f_2 - g(f_1))$, где $\beta \neq 0, g(f_1) \in k\langle f_1\rangle$, такое, что $\deg(\beta f_2 - g(f_1)) = 1$. Так как $\deg(f_2) = 2,$ то $\overline{g(f_1)} = \gamma f_1^2$. Отсюда имеем

$$\beta\bar{f_2} - \gamma\bar{f_1^2} = \beta\bar{f_2} - \gamma\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right)^2 = 0.$$

Отсюда $\beta\bar{f_2} = \gamma\bar{f_1^2}$.

Докажем справедливость утверждения леммы для $n = r + s$. Как и выше, существует преобразование $(f_1, f_2) \to (f_1, \beta f_2 - g(f_1)),\ \beta \neq 0,\ g(f_1) \in k\langle f_1\rangle$, такое, что $\deg(\beta f_2 - g(f_1)) < s$. По предположению индукции $\overline{f_1} = \alpha\left(ax_1 + bx_2\right)^r$, тогда $g = \gamma_{s/r} f_1^{s/r} + \gamma_{s/r-1} f_1^{s/r-1} + \cdots + \gamma_0,\ \gamma_{s/r} \neq 0,\ \gamma_i \in k$ и $r|s$. Далее

$$\beta\overline{f_2} - \overline{g(f_1)} = \beta\bar{f_2} - \gamma_{s/r}\alpha^r(ax_1 + bx_2)^s = 0.$$

Отсюда $\overline{f_2} = \mu\left(ax_1 + bx_2\right)^s$, $\mu \in k^*$. □ □

Лемма 3. *Пусть V – сплетенное пространство над полем k с базисом $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ и инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1, -1, -1, -1)$. Пусть также $u, v \in X^*, r = \mathrm{d}(u), t = \mathrm{d}(v)$. Тогда*

$$(u \otimes v)\tau = (-1)^{rt}(v \otimes u).$$

Proof. Справедливость утверждения леммы непосредственно следует из леммы 1. □ □

Лемма 4. *Пусть $A_\tau = \langle k\langle x_1, x_2\rangle, \tau\rangle$ – сплетенная свободная ассоциативная алгебра от двух порождающих x_1, x_2 над произвольным полем k с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1, -1, -1, -1)$. Тогда эндоморфизм $\varphi : A_\tau \to A_\tau$ заданный правилом*

$$\varphi(x_1) = x_1,\ \varphi(x_2) = \alpha x_2 + \beta x_1^m,$$

где m – нечетное число, является нечетным автоморфизмом алгебры A_τ.

Proof. Очевидно, что отображение φ является автоморфизмом свободной ассоциативной алгебры $k\langle x_1, x_2\rangle$. Для доказательства утверждения леммы необходимо показать, что τ является также автоморфизмом сплетенного пространства A_τ, т.е. выполняется условие

$$\tau(\varphi \otimes \varphi) = (\varphi \otimes \varphi)\tau.$$

Проведем индукцию по $\mathrm{d}(u)+\mathrm{d}(v)$. Очевидно, что утверждение леммы справедливо при $\mathrm{d}(u)+\mathrm{d}(v)=0$.

Пусть $u=u'x_i$. По лемме 3 имеем

$$((u\otimes v)\tau)(\varphi\otimes\varphi)=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}(v\otimes u)(\varphi\otimes\varphi)=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u). \tag{13}$$

Если $x_i=x_1$, тогда по условию леммы $\varphi(x_1)=x_1$ и

$$((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=(\varphi(u')\varphi(x_1)\otimes\varphi(v))\tau=(\varphi(u')\otimes x_1\otimes\varphi(v))\tau=((\varphi(u')\otimes((x_1)\otimes\varphi(v))\tau)\tau_1,$$

где $(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_i)\tau_1=(\varphi(u')\otimes\varphi(v))\tau\otimes x_i$. По лемме 3 и предположению индукции имеем

$$\begin{aligned}((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=(-1)^{\mathrm{d}(v)}\left(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_1\right)\tau_1=\\ =(-1)^{\mathrm{d}(v)}(-1)^{\mathrm{d}(u')\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')\varphi(x_1)=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u).\end{aligned} \tag{14}$$

Если $x_i=x_2$, тогда по условию леммы $\varphi(x_2)=\alpha x_2+\beta x_1^m$ и

$$\begin{aligned}((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=\left(\varphi(u')\otimes\varphi(x_2)\otimes\varphi(v)\right)\tau=\left(\varphi(u')\otimes(\alpha x_2+\beta x_1^m)\otimes\varphi(v)\right)\tau=\\ =\alpha(\varphi(u')\otimes x_2\otimes\varphi(v))\tau+\beta(\varphi(u')\otimes x_1^m\otimes\varphi(v))\tau=\\ =\alpha\left(\varphi(u')\otimes(x_2\otimes\varphi(v))\tau\right)\tau_1+\beta\left(\varphi(u')\otimes(x_1^m\otimes\varphi(v))\tau\right)\tau_2,\end{aligned}$$

где $(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_1^m)\tau_2=(\varphi(u')\otimes\varphi(v))\tau\otimes x_1^m$. По лемме 3 и предположению индукции имеем

$$\begin{aligned}((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=\alpha(-1)^{\mathrm{d}(v)}(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_2)\tau_1+\beta(-1)^{m\mathrm{d}(v)}(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_1^m)\tau_2\\ =\alpha(-1)^{\mathrm{d}(v)}(-1)^{\mathrm{d}(u')\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')x_2+\beta(-1)^{m\mathrm{d}(v)}(-1)^{\mathrm{d}(u')\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')x_1^m\\ =\alpha(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')x_2+\beta(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)+\mathrm{d}(v)(m-1)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')x_1^m.\end{aligned}$$

Так как m – нечетное число, то не сложно заметить, что четности чисел $\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)+\mathrm{d}(v)(m-1)$ и $\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)$ совпадает. Тогда из последнего равенства следует, что

$$((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')(\alpha x_2+\beta x_1^m)=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u). \tag{15}$$

Из (13) – (15) получим $((u\otimes v)\tau)(\varphi\otimes\varphi)=((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau$. Следовательно, φ является нечетным автоморфизмом алгебры A_τ. □ □

Лемма 5. *Пусть* $A_\tau=\langle k\langle x_1,\,x_2\rangle\,,\tau\rangle$ *– сплетенная свободная ассоциативная алгебра от двух порождающих* x_1,x_2 *над произвольным полем* k *с инволютивным диагональным сплетением* $\tau=(-1,-1,-1,-1)$. *Эндоморфизм* $\varphi=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3,\ \beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3)$ *алгебры* A_τ *является автоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\alpha_3=\beta_3=0$.

Proof. Очевидно, что φ является автоморфизмом свободной ассоциативной алгебры $k\langle x_1,x_2\rangle$. По определению φ будет является автоморфизмом алгебры A_τ, если выполняется условие

$$\tau(\varphi\otimes\varphi)=(\varphi\otimes\varphi)\tau.$$

Последние условие эквивалентно равенству

$$((x_i\otimes x_j)\tau)(\varphi\otimes\varphi)=((x_i\otimes x_j)(\varphi\otimes\varphi))\tau,\ \text{для всех } 1\le i,j\le 2.$$

То есть,

$$-\varphi(x_j)\otimes\varphi(x_i)=(\varphi(x_i)\otimes\varphi(x_j))\tau,\ \text{для всех } 1\le i,j\le 2.$$

Не сложно заметить, что последние равенство выполняет тогда и только тогда, когда $\alpha_3=\beta_3=0$. □ □

Теорема 1. *Пусть* $A_\tau=\langle k\langle x_1,\,x_2\rangle\,,\tau\rangle$ *– сплетенная свободная ассоциативная алгебра от двух порождающих* x_1,x_2 *над произвольным полем* k *с инволютивным диагональным сплетением* $\tau=(-1,-1,-1,-1)$. *Тогда*

$$\mathrm{Aut}_kA_\tau=(\mathrm{Aut}_kA_\tau)_{odd}.$$

Proof. Пусть $\varphi = (f_1, f_2)$ – любой автоморфизм алгебры A_τ и $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ – старшие однородные части f_1 и f_2, соответственно. Если $\deg\varphi = 2$, то очевидно, что $\varphi \in (\mathrm{Aut}_k A_\tau)_{odd}$. Пусть $\deg\varphi = \deg f_1 + \deg f_2 \geq 3$, тогда согласно лемме 2

$$\begin{aligned}\overline{f_1} &= \alpha_1(ax_1 + bx_2)^{s_1},\\ \overline{f_2} &= \alpha_2(ax_1 + bx_2)^{s_2},\end{aligned} \tag{16}$$

где $s_1 + s_2 \geq 3,\ s_1 \mid s_2$, или $s_2 \mid s_1,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in k^*,\ a,\ b \in k$ и a, b одновременно не равны нулю. Так как φ является автоморфизмом A_τ, тогда из условие $\tau(\varphi\otimes\varphi) = (\varphi\otimes\varphi)\tau$ следует, что

$$\overline{((x_i\otimes x_j)\tau)(\varphi\otimes\varphi)} = \overline{((x_i\otimes x_j)(\varphi\otimes\varphi))\tau},\ 1\leq i,j\leq 2.$$

Отсюда

$$\overline{-\varphi(x_j)\otimes\varphi(x_i)} = \overline{(\varphi(x_i)\otimes\varphi(x_j))\tau}.$$

С учетом (16) имеем

$$-\alpha_i\alpha_j(ax_1+bx_2)^{s_j}\otimes(ax_1+bx_2)^{s_i} = \alpha_i\alpha_j(ax_1+bx_2)^{s_i}\otimes(ax_1+bx_2)^{s_j}\tau,\ 1\leq i,j\leq 2.$$

Когда $i=1,\ j=2$ получим

$$-\alpha_1\alpha_2(ax_1+bx_2)^{s_2}\otimes(ax_1+bx_2)^{s_1} = \alpha_1\alpha_2(ax_1+bx_2)^{s_1}\otimes(ax_1+bx_2)^{s_2}\tau.$$

Выберем термы $x_1^{s_2}\otimes x_1^{s_1},\ x_2^{s_2}\otimes x_2^{s_1},\ x_1^{s_2}\otimes x_2^{s_1},\ x_2^{s_2}\otimes x_1^{s_1}$ и сравним коэффициенты при них

$$\begin{aligned}&(-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_1+s_2} = (-1-(-1)^{s_1s_2})b^{s_1+s_2}\\ &= (-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_2}b^{s_1} = (-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_1}b^{s_2} = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично для $i=1,\ j=1$ имеем

$$\begin{aligned}&(-1-(-1)^{s_1^2})a^{2s_1} = (-1-(-1)^{s_1^2})b^{2s_1}\\ &= (-1-(-1)^{s_1^2})a^{s_1}b^{s_1} = (-1-(-1)^{s_1^2})a^{s_1}b^{s_1} = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично для $i=2,\ j=1$ имеем

$$\begin{aligned}&(-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_1+s_2} = (-1-(-1)^{s_1s_2})b^{s_2+s_1}\\ &= (-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_2}b^{s_1}. = (-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_1}b^{s_2} = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Аналогично для $i=2,\ j=2$ имеем

$$\begin{aligned}&(-1-(-1)^{s_2^2})a^{2s_2} = (-1-(-1)^{s_2^2})b^{2s_2}\\ &= (-1-(-1)^{s_2^2})a^{s_2}b^{s_2} = (-1-(-1)^{s_2^2})a^{s_2}b^{s_2} = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Не сложно заметить, что для любых a и b условия (17) – (20) выполняются только в том случае, когда $s_1^2,\ s_1s_2,\ s_2^2$ – нечетные числа. Отсюда s_1 и s_2 – нечетные числа. Как было указано выше $s_1 \mid s_2$ или $s_2 \mid s_1$.

Если $s_2 \geq s_1$, тогда φ можно представить в виде следующей композиции

$$\varphi = \varphi_1\circ\psi_1,$$

где $\varphi_1 = (f_1,\ f_2 - (\alpha_2/\alpha_1^{s_2/s_1})f_1^{s_2/s_1}),\ \psi_1 = (x_1,\ x_2 + (\alpha_2/\alpha_1^{s_2/s_1})x_1^{s_2/s_1})$.

Если $s_1 \geq s_2$, тогда φ можно представить в виде следующей композиции

$$\varphi = \varphi_1'\circ\psi_1',$$

где $\varphi_1' = (f_1 - (\alpha_1/\alpha_2^{s_1/s_2})f_2^{s_1/s_2},\ f_2),\ \psi_1' = (x_1 + (\alpha_1/\alpha_2^{s_1/s_2})x_2^{s_1/s_2},\ x_2)$.

Через G^* обозначим группу автоморфизмов следующего вида

$$\begin{aligned}G^* = \{&\varphi = (x_1,\ \alpha x_2 + \beta x_1^m)\\ &\text{или}\ \varphi = (\alpha x_1 + \beta x_2^r, x_2),\ \text{где}\ \alpha,\ \beta\in k^*, m, r - \text{любые нечетные числа}\}.\end{aligned}$$

По лемме 4 ψ_1 и ψ_1' – нечетные автоморфизмы алгебры A_τ. Следовательно, $\varphi_1, \varphi_1' \in \mathrm{Aut}_k A_\tau$ и φ можно представить в виде

$$\varphi = \psi_m \circ \psi_{m-1} \circ \ldots \circ \psi_1,$$

где ψ_m – линейный автоморфизм, а $\psi_{m-1}, \ldots, \psi_1 \in G^*$. Отсюда следует, что φ является нечетным автоморфизмом алгебры A_τ. Следовательно, $\mathrm{Aut}_k A_\tau$ совпадает с $(\mathrm{Aut}_k A_\tau)_{odd}$.□
□

Подтверждение
Работа выполнена в рамках проекта AP 08052290 МОН РК.

Список литературы

1 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II // Trans. Amer. Math. Soc. –1971. – Vol. 160. – P. 393–401; –1972. –Vol. 171.– P. 309–315.
2 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. reine angew Math. – 1942. – Vol.184. –P. 161–174.
3 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables // Nieuw Archief voor Wisk. – 1953. – Vol. 1 № 3. – P. 33–41.
4 Makar-Limanov L.G. The automorphisms of the free algebra of two generators// Funktsional. Anal. i Prilozhen. –1970.,Vol. 4. № 3. –P. 107–108.
5 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra – 2009. – Vol. 322. № 9. – P. 3318 – 3330.
6 Kozybaev D., Makar-Limanov L. G., Umirbaev U. The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras // Asian-Eur. J. Math. –2008. – Vol. 1. № 2. –P. 243—254.
7 Cohn P.M. Free associative algebras // Bull. London Math. Soc. –1969. – Vol.1. –P. 1–39.
8 Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras // Trans. Amer. Math. Soc.– 1968. – Vol. 132. – P. 553-562.
9 Курош А.Г. Неассоциативные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб.– 1947. –Т. 20. С. 239–262.
10 Ширшов А.И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Матем. сб. –1954. – Т. 34. №1. – С. 81-88.
11 Ширшов А.И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Матем. сб. –1953. – Т. 33. №2. – С. 441-452.
12 Witt E. Die Unterringer der freien Lieschen Rings // Math. Z. –1956. – Vol. 64. – P. 195-216.
13 Михалев А.А. Подалгебры свободных цветных суперaлгебр Ли // Мат.заметки. –1985. – Т. 37. №5. – С. 653 -661.
14 Штерн А.С. Свободные суперaлгебры Ли // Сиб. мат. журн. –1986. – Т. 27. –С. 170-174.
15 Kharchenko V. Quantum Lie theory. A multilinear approach : Lecture Notes in Mathematics 2150. Springer, Cham, 2015. – xiii+302 p.
16 Alev J., Chamarie M. Dérivations et automorphismes de quelques algébres quantiques // Comm. Algebra – 1992. – Vol. 20. № 6. – P. 1787–1802.
17 Takeuchi M. Survey of braided Hopf algebras. In: New Trends in Hopf Algebra Theory // Contemp. Math. AMS. – 2000. Vol. 267. –P.301–324.
18 Umirbaev U., Kharchenko V. Free braided nonassociative Hopf algebras and Sabinin τ - algebras // Journal of Algebra – 2017. –Vol. 492. –P. 130-146.

Р. Муталип, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетi, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Екi айнымалы өрiлген еркiн ассоциативтi алгебралардың тақ автоморфизмдерi

Аннотация: Кез келген k өрiсiндегi екi айнымалы $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ инволютивтi диагоналды өрiмi бар өрiлген еркiн ассоциативтi алгебраның $\varphi(x_1) = x_1$, $\varphi(x_2) = \alpha x_2 + \beta x_1^m$ (α, $\beta \in k$, m – тақ сан) ережесiмен берiлген φ эндоморфизмi тақ автоморфизм болатыны дәлелденген. Сонымен қатар, осы алгебраның ψ сызықты эндоморфизмi ψ аффинды болған жағдайда және тек сонда ғана автоморфизм болатындығы ксетiлген. Кез келген k өрiсiндегi екi айнымалы $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ инволютивтi диагоналды өрiмi бар өрiлген еркiн ассоциативтi алгебраның барлық автоморфизмдер группасы осы алгебраның тақ автоморфизмдер группасымен сәйкес келетiндiгi көрсетiлдi.
Түйiн сөздер: Еркiн ассоциативтi алгебра, өрiм, авторморфизм.

R. Mutalip, A.S. Naurazbekova

L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Odd automorphisms of two generated braided free associative algebras

Abstract: It is proved that an endomorphism φ of an braided free associative algebra in two generators over an arbitrary field k with an involutive diagonal braiding $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ given by the rule $\varphi(x_1) = x_1, \varphi(x_2) = \alpha x_2 + \beta x_1^m$, where $\alpha, \beta \in k$, m is an odd number, is an odd automorphism. It is also proved that the linear endomorphism ψ of this algebra is an automorphism if and only if ψ is affine. It is shown that the group of all automorphisms of braided free associative algebra in two variables over an arbitrary field k with an involutive diagonal braiding $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ coincides with the group of odd automorphisms of this algebra.

Keywords: Free associative algebra, braiding, automorphism.

References

1 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II, Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 160. P. 393-401; 1972. Vol. 171. P. 309-315.
2 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene, J. reine angew Math. 1942. Vol.184. P. 161-174.
3 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wisk. 1953. Vol. 1. № 3. P. 33-41.
4 Makar-Limanov L.G. The automorphisms of the free algebra of two generators, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1970. Vol. 4. № 3. P. 107–108.
5 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, J. Algebra. 2009. Vol. 322. № 9. P. 3318-3330.
6 Kozybaev D., Makar-Limanov L. G., Umirbaev U. The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras, Asian-Eur. J. Math. 2008. Vol. 1. № 2. P. 243—254.
7 Cohn P.M. Free associative algebras, Bull. London Math. Soc. 1969. Vol.1. P. 1-39.
8 Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132. P. 553-562.
9 Kurosh A.G. Neassociativnye algebry i svobodnye proizvedeniya algebr[Non-associative free algebras and free products of algebras], Matem. sb. [Mathematical collection]. 1947. Vol. 20. P. 239-262.
10 Shirshov A.I. Podalgebry svobodnyh kommutativnyh i svobodnyh antikommutativnyh algebr [Subalgebras of free commutative and free anticommutative algebras], Matem. sb.[Mathematical collection]. 1954. Vol. 34. №1. P. 81-88.
11 Shirshov A.I. Podalgebry svobodnyh lievyh algebr[Subalgebras of free Lie algebras], Matem. sb.[Mathematical collection]. 1953. Vol. 33. №2. P. 441-452.
12 Witt E. Die Unterringer der freien Lieschen Rings, Math. Z. 1956. Vol. 64. P. 195-216.
13 Mihalev A.A. Podalgebry svobodnyh cvetnyh superalgebr Li [Subalgebras of free colored Lie superalgebras], [Math notes]. 1985. Vol. 37. №5. P. 653 -661.
14 Shtern A.S. Svobodnye superalgebry Li[Free Lie Superalgebras], [Siberian Mathematical Journal]. 1986. Vol. 27. P. 170-174.
15 Kharchenko V. Quantum Lie theory. A multilinear approach : Lecture Notes in Mathematics 2150. Springer, Cham, 2015. xiii+302 p.
16 Alev J., Chamarie M. Dérivations et automorphismes de quelques algébres quantiques, Comm. Algebra. 1992. Vol. 20. № 6. P. 1787-1802.
17 Takeuchi M. Survey of braided Hopf algebras. In: New Trends in Hopf Algebra Theory, Contemp. Math. AMS. 2000. Vol. 267. P.301-324.
18 Umirbaev U., Kharchenko V. Free braided nonassociative Hopf algebras and Sabinin τ - algebras, Journal of Algebra. 2017. Vol. 492. P. 130-146.

Сведения об авторах:

Муталип Р. – преподаватель кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Нур-Султан, Казахстан.

Науразбекова А.С. – PhD, и.о. доцента кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Нур-Султан, Казахстан.

Mutalip R. – Lecturer of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpaev str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – PhD, Assosiate Professor of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpaev str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 06.05.2020

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 100-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

Журналдың потенциалды авторлары мақала құрылымы бойынша келесі талаптарды ұстанулары қажет:

- Мақала мәтінін түсінуді қамтамасыз ететін қажетті белгілер мен анықтамалар;
- Мақалада қарастырылатын есептің қойылымы;
- Қарастырылатын есеп бойынша тарихи мәліметтер - мақала тақырыбына сәйкес бұрын алынған нәтижелер кіммен және қашан алынғандығы туралы толық сілтемелерімен берілген ақпарат;
- Кез келген ғылыми жұмыстың ең жауапты бөлігі ретінде мақаланың қажеттілігі мен өзектілігін негіздеу;
- Мақалада қойылған есеп шешімін нақты тұжырымдау және сипаттау;
- Бұрын белгілі мәнмәтінінде мақала нәтижесінің(нәтижелерінің) жаңалы?ын егжей-тегжейлі негіздеу;
- Есептің шешімі толық негіздеулермен (дәлелдемелермен) жабдықталуы тиіс.

Осы талаптардың ең болмағанда біреуі сақталмаған жағдайда мақала қарастыруға қабылданбайды.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса),

орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 100-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

Potential authors of the journal should adhere to the following rules on the structure of the article point by point with headings:

- The necessary notation and definitions to ensure understanding of the text of the article;
- Statement of the problem, the solution of which the article is devoted to;
- Historical information on the statement of the problem - by whom and when the results were obtained that preceded the topic of the article with the corresponding full links;
- Justification of the necessity and relevance of the task of the article, as the most critical part of any scientific work;
- The exact wording and description of the solution to the problem presented in the article;
- A detailed justification of the novelty of the result (s) of an article in the context of a previously known one;
- The solution to the problem should be provided with detailed justifications (evidence).

If at least one of these requirements is not observed, the article is not accepted for consideration.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 100-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

Потенциальные авторы журнала должны попунктно с заголовками придерживаться следующих правил по структуре статьи:

- Необходимые обозначения и определения для обеспечения понимания текста статьи;
- Постановка задачи, решению которой посвящена статья;
- Исторические сведения по постановке задачи - кем и когда были получены результаты, предшествующие теме статьи с соответствующими полными ссылками;
- Обоснование необходимости и актуальности задачи статьи, как самая ответственная часть любой научной работы;
- Точная формулировка и описание представленного в статье решения поставленной задачи;
- Подробное обоснование новизны результата(ов) статьи в контексте ранее известного;
- Решение задачи должно быть снабжено подробными обоснованиями (доказательствами).

При несоблюдении хотя бы одного из этих требований статья не принимается к рассмотрению.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2020. 2(131)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 55-б.
Шартты б.т. - 3,88.
Ашық қоланыстағы электронды нұсқа: http://bulmathmc.enu.kz/

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды