ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№1(130)/2020

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2020
Nur-Sultan, 2020
Нур-Султан, 2020

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 349 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 25 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-428).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 349, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 25 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;
tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-428).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 349
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №1(130)/2020

МАЗМҰНЫ

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №1(130)/2020

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА, №1(130)/2020

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE
МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 130, №1, 8-58 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru)

Научный, научно-методический и организационный отчет «Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева в 2019 году (Часть I)»

Аннотация: Как это вынесено в само название, Отчет ведется по трем направлениям: наука, методология базовой математической подготовки и организация и управление Образованием и Наукой. Наверное, по вопросу проблем Образования и что здесь нужно делать, лучше материалов Сборника "Образование, которое мы можем потерять" (Институт компьютерных исследований МГУ им.М.В.Ломоносова,Москва, 2003) на примере России и США, сказать нельзя. Вместе с тем, видится и другое - с тех пор прошло 20 лет и по современному состоянию школьного образования можно сделать принципиальный вывод, что сами по себе в высшей степени аргументированные правильные слова решающих последствий не имеют.

На двух примерах, а это многократно на детях проверенная методическая разработка "Таблица умножения" и губительное "Правило сложения обыкновенных дробей", требующее обязательного разложения на простые множители знаменателей (тогда как Криптографическая система RSA (Ривест, Шамир, Эйдлмен; 1978 год) строится именно на практической трудности такого разложения) показано: высшего качества декларации не могут стимулировать нужное и не могут остановить ненужное.

Если по науке, то опять же возникает вопрос "Как науку оценивать и изнутри, и извне, чтобы иметь эффективную экспертизу?". Здесь дается комплексный ответ в виде обязательного ежегодного заполнения "Научного и научно-методического паспорта сотрудника НИИ и ППС вузов", на основе которого государство будет знать, какого качества науку ищет и планировать, какие отечественные перспективные исследования и на каком уровне поддерживать через соответствующее финансирование.

Именно такой, можно даже сказать с требованиями по Гамбургскому счету, "Научный и научно-методический паспорт" позволяет ввести новый вид научного мероприятия как внутри страны, так и в международном плане для представления страны - организатора как носителя передовой, в каких-то направлениях, науки - это через "Активизационные доклады". При парадигме "Наука либо есть, либо ее нет", в вопросе оценки качества научных исследований, в полном объеме не поддающейся формализации, конечно, надо обращаться к взглядам тех, кто в высшей научной атмосфере складывался и состоялся. Таким, по нашему разумению, продуктивным научным работником и свидетелем периода математического расцвета Московского университета является В.Н.Латышев[1] (здесь надо не упускать из виду то, что тогда статистика МГУ была такая - из 10 студентов

[1]Автору приятно вспомнить, что в 1987 году по распоряжению руководителя Отделения "Математика" Механико-математического факультета В.Н. Латышева был зачислен в докторантуру МГУ им. М.В. Ломоносова и поселен в комнату Б-1844(левая)

один кандидат, из 10 кандидатов один доктор, - такие были супертребования) "*Я помню подвальную статью М.В.Келдыша (многолетнего Президента АН СССР, Главного теоретика космонавтики), это большая статья в газете "Правда", где говорится "Огромное количество математиков есть, замечательных, за которыми нет никаких результатов". Но это не значит, что они плохие. Если у математика есть хотя бы один результат, это очень хороший математик. Больше одного почти не бывает, если два, то это совершенно замечательно. Вот такие находки приходят действительно однократно, возможно по всей жизни*".

Есть такие науки, в которые сразу же можно войти, быть может, после небольшой подготовки. Но математика совершенно особая наука, для внедрения в которую надо пройти все стадии ее возникновения и развития в течение тысячелетий, чтобы понимать в ней уже насущные проблемы и, тем более, участвовать в их продолжениях. Нужно пройти весь путь средней школы от первого по последний класс. Здесь мы выделяем состояние "Понимать математику", быть может, опять же не поддающееся формализации, которое, несомненно, в реальности существует.

Все это очень актуально: опять же по Сборнику "Образование, которое мы можем потерять" видно, что эта часть введения в математику остается вне всеобщего внимания. Здесь сосредоточенно развивается тема "Понимать математику", и, как сами с удивлением обнаружили, это путь в профессию легендарного Готфрида Харди.

Есть еще один личностный момент соотношения между занятиями наукой и созданием учебника по этой науке, что также обсуждается. Заканчивая экскурс по содержанию Отчета, еще раз повторим, что преследуются внутренние интересы Казахстана с предъявлением научных результатов и учебников, через которые достигнутое можно понять и развить дальше.

Ключевые слова: Отчет, Научный и научно-методический паспорт сотрудника НИИ и ППС вузов, Активизационный доклад, Результаты фундаментальные, значимые и незначительные (локальные), Понимание математики, Научный мониторинг всех ВУЗов и НИИ РК по научному потенциалу в Математике и Компьютерных науках с обеспечением качественного преподавания, Авторские основы базовой математической подготовки – казахский аналог общей подготовки в PhD докторантуре США от ИТМиНВ, Онлайн-конференция, Оффлайн-семинар, Цифровизация образования и науки, Эшелонирование научных результатов, Математическая зрелость с воспитанием ассоциативного мышления, Комплексная программа.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-130-1-8-58

Вводная часть. В Математическом институте В.А.Стеклова АН СССР был Философский семинар для аспирантов под руководством академиков Василия Сергеевича Владимирова и Реваза Валерьяновича Гамкрелидзе. Семинар был особый - обсуждался тезис "Гений и толпа" как типичный формат развития науки, вроде от В.А.Стеклова, на что докладывавший аспирант Димитрий Печерский, ученик Д.Е.Меньшова, предложил "Мы за толпу гениев", также запомнились слова Гамкрелидзе, что в математике останутся только ограниченные функции и функции из пространства Лебега L^2.

На семинаре автору был поручен доклад по тогда нашумевшей статье Спона- младшего "Нужно ли спасать математику?". По статье выходило, что ее писал обычный рядовой математик, на него обрушивается быстро развивающаяся и в ширину, и в глубину математика, и он в этой новой среде, в этом новом состоянии науки растерялся.

Прошло время, мир стал очень динамичным, одни страны быстро возвышаются, другие теряют свое величие, словом, будущее непредсказуемо, ясно одно - все происходит по новой, уже Четвертой, промышленной революции, где двигателем является Математика с теоретической и технической реализацией через Компьютерные науки.

Страны бывают разные - признанные лидеры, что даже доказывать не надо, кто будет оспаривать научно-техническое превосходство США, Западной Европы, быстро поднимающегося Китая, вместе с тем есть и другие страны, пусть даже с амбициями.

Два года назад в обновленном формате журнала Вестник Евразийского национального университета - это серия "Математика. Компьютерные науки. Механика", ставилась Комплексная задача развития этих наук в Казахстане по собственному казахскому плану.

Если то были бы притязания англосаксов или россиян, то, понятно, национальные данные неуместны. Здесь же преследуется цель, чтобы высшим достижением казахов не являлось куда-то поехать, обычно на Запад, или еще куда-то, где-то поступить в престижный, по тем или иным рейтинговым показателям, университет, а чтобы все было наоборот, казахи туда приезжали с научными докладами со своими оригинальными результатами. Прошло два года, два года в этом динамичном мире очень немалый срок, поэтому можно остановиться и осмыслить, где находимся, - по замыслу по итогам 2019 года.

В Московской математической школе при знакомстве первым был типичный вопрос о Научном послужном списке "Что доказал?", и нужно было в течение нескольких минут объяснить свое место в математике, свой вклад. Поэтому в Отчете центральным является наука. Так что отмечаем свои три фундаментальных результата. Когда результаты называют фундаментальными, то должны быть выдержаны три ясных и прозрачных требования С.Б.Стечкина "До нас - Мы - После нас".

Математика тем хороша, что, например, в отличие от той же физики, где как -то доминируют авторитеты, типа модели Бора и Резерфорда, взгляд любого, пусть даже великого, математика - решающей роли не играют. Помимо жестких, уровня Гамбургского счета, тех трех показателей, дальше идут теоремы с полными доказательствами- притязания можно опровергнуть только тем, что найти ошибку в доказательстве или построить контрпример.

Математика как наука зависит от школьного образования, фактически математика единственный предмет, который в средней школе ведется от первого класса по последний, когда, в идеале, из урока в урок мелкими шажками в систематизированном виде накапливается особый стиль мышления - мощный фундамент для всего остального. И всегда, ни одна страна не может сказать, что полностью достигла вершин обучения математике своих граждан школьного возраста, - прямой обязанности государства. Ни одно государство не может заявить, что с этой проблемой полностью и окончательно справилась.

В качестве примера приведем два доклада из книги "Образование, которое мы можем потерять" с "говорящими" названиями:

- **ПОКА ЕЩЕ НЕ СЛИШКОМ ПОЗДНО**. Доклад Национальной Комиссии Соединенных Штатов Америки по преподаванию математики и естественных наук в XXI веке (коротко: Комиссия Джона Гленна – первого астронавта США, 27.09.2000)
- Решение Ученого Совета Математического института им.В.А.Стеклова РАН по итогам обсуждения современного школьного образования на расширенном заседании Ученого совета МИАН.

Взгляд ИТМиНВ на эту проблему сложился в процессе систематизированных разработок научно-методических решений прямого применения по всем темам школьной математики и по математическому анализу (в широком смысле) и заключается в следующем: самые правильные слова в школьной математике, которые, безусловно, очень нужны, сами по себе ничего не решают, - особо ничего в этих странах не изменилось, если только не ухудшилось.

Все слова должны быть воплощены в парадигму "В преподавании школьной математики центральным является *"Понимание математики"* самими преподавателями как единственный путь к достижению учащимися высшей цели *"Математическая зрелость с воспитанием ассоциативного мышления"*.

Поясним позицию ИТМиНВ на одном примере, перекрывающем все-все: Воспитательница детского сада соответствует в математике своему статусу, если вопрос 3×4 разбивает на два - первый *"Что такое 3 умножить на 4?"* и второй *"Чему равно 3×4 ?"*, с таким продолжением понимания каждого конкретного вопроса по всей школьной программе.

ИТМиНВ утверждает, что только этот работающий методический прием приведет ко всеобщему усвоению "Таблицы умножения", вместо всех "Слов, слов, слов".

В качестве обратного примера, когда также опять же одно, в этот раз ошибочное, методическое действо, чего не могут предотвратить самые правильные документы, может привести к катастрофе, можно указать (и их можно многократно увеличить даже по советским учебникам) на принятый на закате Советской власти учебник для 5 класса с рекомендацией *"Для того чтобы найти сумму двух обыкновенных дробей сначала надо найти наименьшее общее кратное их знаменателей"*, которое привело к тому, что с тех пор слишком многие сложить две дроби не могут.

Исследуя вопрос "Понимание математики" в профессиональной жизни, с удивлением для себя, обнаружили, что здесь ключевой фигурой является Готфрид Харди, признанная легенда математики. С чем автор столкнулся в свои 22 года в Стекловском институте, где ему объяснили саму постановку вопроса и довели до "Понимания математики", после чего, уже в течение полувека длятся постоянные попытки построить учебник "Математикалы? анализ" таким, чтобы прочитав его, усвоивщий будет понимать, или, по крайней мере, будет близок к нему, что такое "Понимать математику".

На основе собственного опыта непосредственного контактного обучения математике и написания учебников для средней и высшей школ, можно однозначно и, наверное, безошибочно утверждать, что без "Понимания математики", в учебном процессе, начиная даже с детского сада, по самый последний урок в средней школе, нельзя научить математике. В словах учителя математики должны звучать слова, которые будут доходить до сознания и, быть может, до подсознания учащегося, это какая-то неуловимая волна, которую, быть может, описать нельзя, но она существует.

В науке, опять без того же "Понимания математики", не будет продвижения в новое. Нельзя, в общем-то несложную переработку имеющегося, заключенного в растущем в экспоненциальном объеме всяческих статьях, принимать за математическую науку. Воспитанник физической школы Льва Ландау, академик РАН С.С.Герштейн, с указанием личности сказавшего, с большой гордостью воспринимает *приговор* "Недостаток школы Ландау в том, что они в каждой статье требуют результат", - по сути еще одно подтверждение истины "Наука либо есть, либо ее нет".

"Понимание математики" влечет такое внутреннее понимание математической мысли в каких-то чувствах и в образах, настолько индивидуальных, что с трудом поддаются рациональной передаче вовне.

Поэтому основной принцип преподавания математики - это подсознательное понимание и внешняя реализация того, что математика есть наука систематическая, и потому должна быть изложена и предложена для усвоения в системе образования как непрерывный поток без разрывов, без пропуска мысли, только тогда учащийся освоит программный материал как в средней, так и в высшей школе.

В данном Отчете все это обсуждается, после чего речь идет о постсоветском научном пространстве.

Советская наука была замкнута в себе, была эффективной. В постсоветском пространстве идет процесс включения в мировой научный процесс. Разработан, для внутреннего использования, Центральный научный документ, который называется "Научный и научно-методический паспорт сотрудника НИИ и ППС ВУЗа" - это ИТМиНВ предлагает как основной документ для формирования научной политики и оценки результатов Науки и Образования в Казахстане, надеемся, не только для Казахстана.

Также предлагается другое видение Научных мероприятий в контексте "Активазиоционных докладов", и иные различные организационные предложения.

К теме Отчета соприкасается и профессиональная жизнь математиков в ключе "Ничто человеческое не чуждо". Григорий Перельман доказал одну из 7-и математических проблем тысячелетия по версии Математического института Клея с гонораром в миллион долларов США за каждый из них – это гипотезу Пуанкаре и вывесил в интернет-журнале, который статьи публикует без рецензий, чтобы можно было результат закрепить за собой.

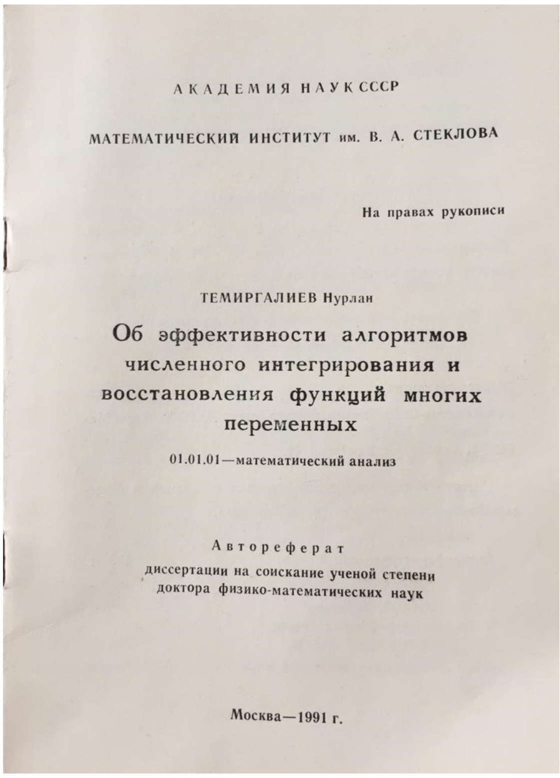
К слову, свое решение проблемы Дональда Кнута по Линейным конгруэнтным генераторам (Linear Congruential Generator-LCG) тоже выставили там же и закрепили за ИТМиНВ.

Продолжим, 4 группы математиков бросились проверять доказательство теоремы Перельмана и подтвердили ее справедливость (отметим, что авторство в решении проблемы присуждается тому, кто последним дал полное доказательство, каким бы малым ни был его личный вклад).

Китайцы во главе с Филдсовским лауреатом Яу Шинтун во всех подробностях изложили доказательство Перельмана, что заняло где-то 300 страниц, опубликовали в своем журнале, выходящем в Сингапуре и, самое главное, на Международном конгрессе математиков 2002 года, который проходил в Пекине, доложили Председателю КНР Ху Цзиньтао, что Китай в математике достиг великого достижения – решил проблему тысячелетия.

Однако математический мир не признал такое заявление, и достижение было присуждено Перельману. Широко известно, что Перельман до недавнего времени жил в Санкт-Петербурге на пенсию матери, отказался от $-миллионного гонорара за решение Проблемы тысячелетия. Конечно, подлинную причину такого неординарного поступка кроме его самого никто не знает, но одна английская газета, со ссылкой на интервью с ним, утверждает, что главной из причин было именно это китайское заявление. Перельман сказал, что на Всемирном конгрессе математиков находились выдающиеся представители этой науки, но никто из них не возразил – это означает, что в математике нет честности, а если он получит премию Филдса и Премию тысячелетия, то будет обязан бороться за чистоту математики, чего он не хочет. То же подтверждает Сергей Рукшин – защитник российской школьной математики, выведший на орбиту международной математики порядка четверти тысячи математиков, среди которых два Филосовских лауреата, цитирует Перельмана «*Я не хочу получать премию из рук непорядочных людей*». Вот такая высшая честность и порядочность!

Для правильной ориентации в теме Отчета и в связи с тем же китайским докладом, вспомним, что в математике Советский Казахстан не уступал (а в главном вопросе прикладной математики даже доминировал) Китаю:


АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА

На правах рукописи

ТЕМИРГАЛИЕВ Нурлан

Об эффективности алгоритмов численного интегрирования и восстановления функций многих переменных

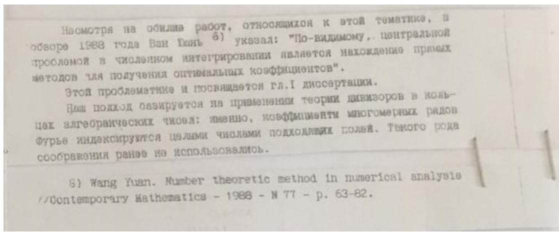
01.01.01—математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва—1991 г.

2 стр.


Несмотря на обилие работ, относящихся к этой тематике, в обзоре 1988 года Ван Юань 6) указал: "По-видимому, центральной проблемой в численном интегрировании является нахождение прямых методов для получения оптимальных коэффициентов".

Этой проблематике и посвящается гл.I диссертации.

Наш подход базируется на применении теории дивизоров в кольцах алгебраических чисел: именно, коэффициенты многомерных рядов Фурье индексируются целыми числами подходящих полей. Такого рода соображения ранее не использовались.

6) Wang Yuan. Number theoretic method in numerical analysis //Contemporary Mathematics - 1988 - N 77 - p. 63-82.

Несмотря на обилие работ, относящихся к этой тематике, в обзоре 1988 года (Wang Yuan Number theoretic methods in numerical analysis//Contemporary Mathematics. -1988. №77. -P. 63-82) Ван Юань указал: "*По-видимому, центральной проблемой в численном интегрировании является нахождение прямых методов для получения оптимальных коэффициентов*". Этой проблематике и посвящается гл. I диссертации. Наш подход базируется на применении теории дивизоров в кольцах алгебраических чисел: именно, коэффициенты многомерных рядов Фурье индексируются целыми числами подходящих полей. Такого рода соображения ранее не использовались.

Хуа Ло-Кен (12.11.1910-12.06.1985) - китайский математик, известный своими важными вкладами в теорию чисел и своей ролью в качестве лидера математики, выдающегося организатора научных исследований и образования в Китайской народной республике. Работы Хуа по математической оптимизации и исследований операций оказали огромное влияние на экономику Китая. Он был избран иностранным членом американской Национальной академии наук в 1982 году. В Китае Хуа провел реформы образования и организации математической деятельности. Хуа был первым председателем Отдела математики и вице-президентом Университета науки и технологий Китая (УНТЦ), – нового типа китайского университета, созданного Китайской академией наук (CAS) в 1958 году, который был направлен на массированную подготовку высококвалифицированных исследователей, необходимых для экономического развития, обороны и образования в области науки и техники. В 1956 году была создана объемная монография «Введение в теорию чисел», позже опубликованная на английском языке в издательстве Springer. За пределами чистой математики, Хуа в 1952 году первым предложил создание электронной вычислительной машины в Китае, а в начале 1953 года под руководством Хуа в Математическом институте Академии наук была сформирована первоначальная исследовательская группа для этого проекта. Хуа, совместно с Вань Юаньем, вызвал широкий интерес к линейному программированию, исследованию операций и многомерному численному интегрированию. В связи с последним из них, исследования которых проводились методом Монте-Карло и с решающей ролью равномерного распределения в ней, привела их к изобретению альтернативного детерминированного метода, основанного на идеях теории алгебраических чисел.
Источник: https://ru.qwe.wiki/wiki/Hua_Luogeng

Одна советско-казахская статья

Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. - 1990. -Т. 281. -№ 4. -С. 490-505.

Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik. -1990. -Vol. 69. - № 2. -P. 527-542.
перекрывает (делает ненужной) монографию

Hua Loo Keng, Wang Yuan, Application of number theory of numerical analysis, Springer, New York, 1981
да и все имеющееся по теме квази-Монте Карло, и тогда, и сегодня.

Сделаем еще одно тому подтверждение в контексте понимания и адекватной реакции:

«Они относятся к тебе как к Полубогу» – именно в таких словах, никого особо не почитавший выдающийся советский русский математик С.М. Воронин прокомментировал просьбу Вычислительного центра АН СССР через него организовать доклад по результатам докторской диссертации Н. Темиргалиева, в которой решена известная в Математике и в Компьютерном мире проблема квази-Монте Карло, озвученная Вице-президентом АН Китая Хуа Ло-Кеном и академиком АН Китая Вань Юанем как *«центральная в численном интегрировании»,* неподдавшаяся многолетним усилиям высших в вычислительной математике специалистов Н.М. Коробову-Н.С. Бахвалову-Н.Н. Ченцову, как тогда говорили *«Трех Коль»*, со специальным семинаром в Математическом институте им. В.А. Стеклова, и, вообще, всему миру Математики и Компьютерных наук. Этот эпизод привожу в качестве показательного примера, как в высшей научной среде ценят результаты по их качеству (из Сюжета 928, 08.05.2019).

Но так бывает не всегда (из Сюжета 937, 6.11.2019): В.И. Арнольд «*«Многие ученые, подковывающие в данный момент лошадей, естественно негативно реагируют на лимузин», с подтверждающим цитированием И.М. Гельфанда «Математики никогда не оценивают новых идей» и М.М. Постникова «Наука никогда не принимает новых идей, она борется с ними»».*

Однако, математики не терпят ошибок (конечно, ошибка ошибке рознь,– большей частью речь идет о претенциозных статьях), моментально появляется опровержение (в простонародье – «ответка»).

§0. Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) в 2019 году

С более подробной информацией об Институте можно познакомится в

Альбом "Научный и образовательный потенциал для ЕНУ и РК в целом Института теоретической математики и научных вычислений"// Электронное издание. ИТМиНВ ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. Астана, 2015. С. 1-544.

ДЕВИЗ: Когда имеешь многое вложить, у дня находятся сотни карманов (Фридрих Ницше).

Институт основан 5 апреля 2009 года.

СТРАТЕГИЯ ДЕЙСТВИЙ: Образно говоря, в науке мы придерживаемся позиции волка, когда напав на отару стремится завалить как можно больше овец (фундаментальные и значимые результаты), которые потом не спеша разделают другие волки и волчата (результаты вторичные), а в качестве инструмента разделки в роли клыков хищника выступают наши авторские учебники, причем все это может происходить только в здоровой среде (где выполнены естественные правила функционирования образования и науки).

СТРУКТУРА ИТМиНВ: состоит из 5 лабораторий и, с учетом современного состояния и проблем, охватывает весь спектр математического образования и науки, от школьного и университетского образования до новых задач и оригинальных эффективных методов в Математике и Компьютерных науках: 2 научно-исследовательские, 2 научно-методические и 1 лаборатория Общих проблем образования и науки (Казахстанская модель образования и науки).

Все наличествующееся обеспечено международно-конкурентоспособными научными и научно-методическими разработками: "*Если есть у тебя нечто лучшее, предложи, если ж нет - покоряйся*" (Гораций).

Добыча волка	**ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ** **ЛАБОРАТОРИЯ НАУЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ** ***Научный потенциал ИТМиНВ в направлениях и темах*** **(«*Кто идет следом, всегда должен отставать.* Квинтилиан»)** **Направление 1.** Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П) как синтез известного и нового в Теории приближений, Вычислительной математике, Численном анализе, который, согласно К. Флетчеру, "включает в себя в качестве составных частей формулировку задачи, математический анализ, построение алгоритма и доведение компьютерной программы до того, чтобы она давала результаты" **Тема 2.** Классы (и пространства) функций, что, по словам А.Н.Колмогорова, решает проблему "Нас много", т.е. "многих" обеспечить публикациями **Направление 3.** Математический инструментарий прямого применения: алгебраическая теория чисел в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного интегрирования и теории случайных чисел **Направление 4.** Математический инструментарий прямого применения: тензорные произведения функционалов в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного анализа, восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных по значениям начальных и граничных условий в точках **Направление 5.** Иррегулярные распределения и метод квази-Монте Карло как, согласно К. Роту, перспективные направления исследований в математике-информатике XXI века с обширными применениями **Тема 6.** Восстановление функций в контексте К(В)П **Тема 7.** Численное дифференцирование функций в контексте К(В)П **Тема 8.** Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте К(В)П **Направление 9.** Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: конструирование вероятностных мер на классах функций **Тема 10.** Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов численного интегрирования "в среднем" относительно вероятностных мер на классах функций **Тема 11.** Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных "в среднем" относительно вероятностных мер на классах функций **Направление 12.** Теория вложений и приближений - решенные и нерешенные задачи **Тема 13.** Ряды Фурье: преобразования коэффициентов и суммирование

	Направление 14. Предпоперечник Колмогорова от Мирболата Сихова **Тема 15.** Теория "Морри" не как "тривиальные обобщения заменой нормы Лебега на норму Морри" **Направление 16.** Дискретные и быстрые "алгебраические" преобразования Фурье **Направление 17.** Генераторы случайных чисел в контексте новых формул дискретных "алгебраических" преобразований Фурье. Генерирование случайных чисел Лехмера с максимальным периодом по требованиям Ковею-Макферсона и обширные их применения **Направление 18.** "Геометрия чисел" в контексте алгебраической теории чисел **Направление 19.** Метод Галеркина и новые теоретические разработки с последующими применениями в контексте всегда сопровождающей его уязвимости **Направление 20.** К(В)П - анализ бесконечно гладких функций от Ерика Нурмолдина. **Направление 21.** Преобразование Радона в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника **Тема 22.** Теория осцилляций и их применения в контексте Обобщенной формулы Смоляка *** Профессор Московского университета Виктор Николаевич Латышев говорил, что Александр Геннадиевич Курош, Израиль Моисеевич Гельфанд и Игорь Ростиславович Шафаревич примерно раз в 5 лет (может и чаще) собирались и говорили о том, чем должна заниматься в ближайшее время алгебраическая молодежь
Клыки (большие) волка	**ЛАБОРАТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В БАКАЛАВРИАТЕ, МАГИСТРАТУРЕ И PhD ДОКТОРАНТУРЕ**
Клыки (малые) волка	**ЛАБОРАТОРИЯ ПО ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ** **«*Одна лишь посредственность не имеет врагов* (Даламбер)»**

КОМПЛЕКСНАЯ ПРОГРАММА ИТМИНВ 2019 (ПЕРЕНЕСЕНЫ С 2018, 2017 И РАНЕЕ ГОДОВ) ГОДА

Настало время действий (Комиссия Джона Гленна – первого астронавта США, 27.09.2000).

Древняя китайская притча гласит: "*Лучшее время, чтобы посадить дерево - двадцать лет назад; второе лучшее время - сегодня*".

ВЫСШАЯ ШКОЛА – МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Проект №1. Математика и Компьютерные науки от ИТМиНВ для подготовки к вызовам 4-ой промышленной революции в Казахстане путем подготовки большого количества математиков и IT-специалистов высшей квалификации, и, как следствие, превращение исполнения Государственных программ "Цифровой Казахстан" и "Казахстанский кибернетический щит" в рутинный процесс. Процесс называем рутинным, - это когда "*Умением копать землю лопатой*" все владеют, но если получено задание выкопать канал, то это стандартный трудоемкий процесс, сводящийся к парадигме "Бери больше, кидай дальше", без потребности в исследовательской работе. То же с цифровизацией предприятий и таких же, по сути стандартных задач, ныне изолированно возведенных в научный ранг. Что в условиях, мягко скажем так, недостаточной профессиональной подготовки будет иметь всего лишь "*кустарный*" уровень изготовления, годный лишь для взаимной договоренности в виде исполнения без качества. Другое дело, - нестандартное использование компьютерной и основанной на ней техники для специфических нужд Казахстана, требующее действительно исследовательско-программной работы, доступной только высококлассным математикам и IT-специалистам, с базовой подготовкой на уровне подсознательной "математической зрелости" и опытом проведения НИР со значимыми и фундаментальными результатами.

Проект №2. Многоуровневый "Математикалық анализ" Второго издания в объеме 1900 страниц (завершения 22.12.2019 в 17:04 часов) выпустить на казахском в 2020 году, русском (с изданием в Москве как "*Перевод с казахского*") и первоклассном английском языке в 2021 году и разобрать на Программы по требованиям специальностей с математическими дисциплинами бакалавриата, магистратуры и PhD.

Проект №3. Казахский аналог общей подготовки в PhD докторантуре США, где (с вариациями) при 6-ти летнем обучении в течение первых двух лет требуется сдать 5 экзаменов по базовым дисциплинам, не выдержавшие отчисляются:

$\boxed{\text{А.}}$ АВТОРСКИЕ ОСНОВЫ БАЗОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ – казахский аналог общей подготовки в PhD докторантуре США от ИТМиНВ

- Теміргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). -2019. -1900 б.
- Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ ЕНУ имени Л.Н. Гумилева, 2012.
- Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ ЕНУ имени Л.Н. Гумилева, 2012.

То же с программой $\boxed{\text{А}}$ - далеко не всеми преодолимой, но сдавший этот экзамен приобретает математическую зрелость с повышением персональной ценности для государства.

По опыту ИТМиНВ можно утверждать, что созданная в этих учебниках основа - Программа $\boxed{\text{А}}$, позволяет усвоить все необходимое в непрерывной и дискретной математике, и, потому, стабильна по всей Математике и Компьютерным наукам.

Проект №4. Программа $\boxed{\text{В}}$ - это переменная по фундаментальным (и избранным значимым) результатам исследовательская задача.

Проект №5. Пара $\boxed{\text{А}}$ и $\boxed{\text{В}}$ со стабильным $\boxed{\text{А}}$ как гарантии реализации $\boxed{\text{В}}$ образует темы PhD докторантуры и Грантовый проект $\boxed{\text{А}}\times\boxed{\text{В}}$.

ИТМиНВ обладает собственными прорывными результатами по 22-м Направлениям и Темам на передовых позициях современной Математики и Компьютерных наук, из которых при общем для всех программ научных исследований подготовительной (образовательной) части $\boxed{\text{А}}$, будут конкретизированы исследовательские части $\boxed{\text{В}}$ для формирования ударных научных групп из молодых преподавателей и студентов ВУЗов и НИИ с целенаправленным Грантовым бюджетным финансированием как государственного управления Наукой и Образованием

$\boxed{\text{А}}\times\boxed{\text{В}}$ - 22 Направления и Темы от ИТМиНВ

В ИТМиНВ-2019 это решено, часть $\boxed{\text{А}}$ в §1, по В в §2 на трех статьях демонстрируется, что есть "*фундаментальный результат с продолжением*" и каким образом он порождает, да еще с 70-ти и более процентным заделом, и, таким образом, порождает большое количество значимых статей оригинального казахского содержания.

Проект №6. МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ – В МАССЫ! Сформировать "*Сеть Кафедр математического анализа*" с головным в ЕНУ под руководством Н.Темиргалиева.

Проект №7. Новый Классификатор специальностей и новый Государственный стандарт образования по Математике, Компьютерным наукам и Прикладной математике от ИТМиНВ, с вводом в действие уже в 2020-21 учебном году. Специальности новые: "**Математика**" скорее теоретическая, "**Компьютерные науки**", "**Прикладная математика и Компьютерные науки**", с упором на математику с выходом на Компьютерные науки, в частности, как расширение "**Математическое и компьютерное моделирование**", и "**Компьютерные науки и прикладная математика**" как "Компьютерные науки" на основе математических исследований и методов, для чего на первое десятилетие достаточны 22 направления и тем только от ИТМиНВ.

Бакалавриат: по категории "*Фундаментальные дисциплины*" в необходимом количестве часы будут отведены базовой подготовке (Анализ математический и действительный, Алгебра, Геометрия, Начала Информатики), основные дисциплины (Анализ комплексный, функциональный, численный, Дифференциальные уравнения обыкновенные и в частных производных, Теория вероятностей, Математическая статистика, Компьютерные науки как цикл основополагающих дисциплин типа "Алгоритмика", "Прикладная теория чисел", "Формальные грамматики" и т.п.) как эффективные введения в соответствующие области Математики- Компьютерных наук. Все обязательные - фундаментальные и основные - дисциплины снабжаются жесткими подробными программами с 15-процентной свободой для лектора, с указанием основной литературы с точностью до страниц и дополнительной, - здесь никаких других учебных документов не требуется. Вариативная часть программы - здесь закрепляется только количество часов на специальные курсы, наполнение которых зависит от кадрового состава вуза, с заполнением силлабусов и иных документов.

Магистратура: все дисциплины только по специальности, безо всяких "Психологий", "Педагогик" и т.п., из других - только английский. Поскольку магистратура преследует профессиональную подготовку, то единственная дисциплина не по специальности - иностранный язык, как правило, язык английский. Общие обязательные дисциплины магистратуры формируются в виде обзорных, но с выборочными доказательствами, программ: Анализ, Алгебра и Геометрия, Вычислительная математика, Компьютерные науки, Теория вероятностей, Математическая статистика, Дифференциальные уравнения с жесткой официальной программой с указанием литературы с точностью до страниц и 20-процентной свободой для лектора.

Докторантура: программа по выбору научных руководителей с обязательной сдачей общего экзамена А - Математический анализ, Мера и интеграл Лебега, Теория вероятностей - казахского варианта соответствующих экзаменов PhD докторантуры США.

Далее, по специальностям - Алгоритмика, Прикладная теория чисел, Формальные грамматики и т.п.

Проект №8. В Проектах 1-7 сформулированы цели, средства и приведен полный список дисциплин, количество отводимых часов на которые регулируется по четырем специальностям из Проекта 7 раздельно. Академическая свобода воплощается через вариативную часть, со всей требуемой документацией от лектора.

Проект № 9. **Экстренное исполнение** всего объявленного в Проектах 1-7 реализуемо ИТМиНВ к середине августа 2020г. - все требуемое интеллектуальное имеется.

Тогда

- 2020-21 учебный год начинается с набора студентов по новому Классификатору специальностей в Математике и Компьютерных науках.

- Первый курс специальностей Математика и Компьютерные науки обучается по единому новому Государственному образовательному стандарту.

Проект №10. ИТМиНВ инициирует

"Научный мониторинг всех ВУЗов и НИИ РК по научному потенциалу в Математике и Компьютерных науках с обеспечением качественного преподавания".

Как требование в получении лицензии на проведение бюджетно финансируемых исследований и подготовки студентов по специальностям Математики и Компьютерных наук через наличие Фундаментальных и значимых тем исследований для вариативной части учебного процесса и поименным списком преподавателей надлежащей квалификации.

В качестве планки, ниже которой нельзя, можно представить восемь Несущих статей в журнале "Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика" за 2018-19 годы:

1. Темиргалиев Н. Предисловие Главного редактора журнала "Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика" о целях издания и путях их реализации //Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2018. -Том 122. -№1. -С. 8-69.

2. Темиргалиев Н. Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 123. - №2. -С. 8-55.

3. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. - №3. -С. 8-88.

4. Темиргалиев Н. Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т.125. -№4. -С.8-68.

5. Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2019. -Т.126. -№1. -С.8-51.

6. Темиргалиев Н. Преобразования и абсолютная сходимость тригонометрических рядов Фурье// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2019. -Т.127. -№2. -С.8-26.

7. Темиргалиев Н. Концепция С.М.Воронина в проблеме сравнений детерминированных и случайных вычислений в одних и тех же терминах// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2019. -Т.128. -№3. -С.8-33.

8. Темиргалиев Н., Абикенова Ш., Ажгалиев Ш., Таугынбаева Г., Жубанышева А.Ж. Преобразование Радона в Схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2019. -Т.129. -№4. -С.8-53.

Проект № 11. В научной практике имеются много разных видов конгрессов, конференций, семинаров, как правило, с докладами "Кто что может", но в предлагаемый формат "**АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ**" в Научных мероприятиях будет казахским now-how:

Возвышение Казахстана в современной Математике и Компьютерных науках в формате "*Направленные на активизацию научных исследований доклады на основе фундаментальных результатов с продолжением*" $\equiv$ "АКТИВИЗАЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ" через инициирование проведения в Казахстане крупных международных научных мероприятий с доминирующей от Казахстана программой "ОБРАЩЕНИЕ ИЗ КАЗАХСТАНА К МАТЕМАТИКАМ И ИНФОРМАТИКАМ -ADRESS FROM KAZAKHSTAN TO MATHEMATICIANS AND INFORMATICS."

Проект № 12. В целях повышения качества математического образования для всех вузов и НИИ Казахстана провести

"Онлайн-конференция "Математикалық анализ" от ИТМиНВ"
Руководитель Ғалия Таугынбаева

Программа Конференции составляется по отдельным темам "Математикалық анализ" по специальностям.

Проект № 13. Столичный Национальный университет на базе Зеренді проводит для всех вузов и НИИ Казахстана (такой опыт у ИТМиНВ имеется)

"Оффлайн-семинар "Математикалық анализ" от ИТМиНВ"
Руководитель Ғалия Таугынбаева

Как свидетельствует Николай Цискаридзе, он своими глазами видел как 60-летняя Майя Плисецкая танцевала Кармен, и то же по телевизору и отмечает разительную разницу - одно дело живьем, другое - на экране, - нужны и Онлайн-конфренция, и Оффлайн-семинар .

СРЕДНЯЯ ШКОЛА – МАТЕМАТИКА
Полная программа ИТМиНВ по школьной математике на 2020-22 годы

"***Не позднее*** *2030 г. учащиеся Казахстана будут первыми в мире по математике*"

Как реальная цель, обеспеченная методологией и научно-методическими решениями прямого применения по всем школьным темам: дети везде одинаковые, казахи-казахстанцы ничем не хуже, если их поставить на методически эффективный содержательный математический путь, то они все примут.

Суть проблемы в США (Комиссия Джона Гленна – первого астронавта США, 27.09.2000)

Уровень подготовки наших учащихся по математике и естественным наукам недопустимо низок.

Одиннадцать лет назад, когда восход нового тысячелетия был ещё далеко за горизонтом, государственные мужи собрались в Шарлотсвилле (Вирджиния), чтобы установить цели, к которым должно идти развитие нашей школы. Среди этих целей была следующая:
"К 2000 г. учащиеся Соединённых Штатов будут первыми в мире по математике и естественным наукам"
Американцы считали, что эта цель трудна, но достижима.
Но с того времени наши усилия не соответствовали нашей риторике.

Проект №14. Создание ИТМиНВ в 2020-22 годах на уровне сигнальных экземпляров Полного комплекта учебников и программ по школьной математике с первого по последний классы с позиций математической зрелости с воспитанием ассоциативного мышления и на основе пробных лекций по методическим решениям прямого применения ИТМиНВ конкретных тем школьной математики с целью выявления и учета возрастных возможностей учащихся через районные команды по 5-6 учителей в каждом из 167 районов РК, что обеспечит одновременную массовую по-районную подготовку учителей математики высокой квалификации (детали в Темиргалиев Н. Предисловие Главного редактора журнала "Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика" о целях издания и путях их реализации //Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2018. -Том 122. -№1. -С. 8-69.).

Проект №15. ИТМиНВ в 2020-22 годах создает новый Государственный стандарт образования по школьной математике, с согласованием со всеми дисциплинами с потребностью в математике - это физика, химия и т.п., в результате чего Комплект учебников из Проекта №15 может подвергнуться изменениям по порядку изложения и переработке по содержанию.

Проект №16. В средней школе математика не позднее 2022 года будет обеспечена двумя взаимосвязанными документами Государственный стандарт образования по школьной математике и Полным комплектом учебников - без ошибок (это гарантировано), максимально короткое через "только нужное" и предельно доступное изложение в рамках возможного, в котором центральным является обеспечение "математической зрелости учащихся" через "математическую зрелость учителей" по доминирующему использованию "Математикалы? анализ" (подробности в "Кіріспе" и здесь в §1) и методических решений прямого применения по всем темам школьной математики от ИТМиНВ

Темиргалиев Н. Математика. Избранное. Методология и методика. Электронное издание. ИТМиНВ ЕНУ имени Л.Н. Гумилева. -2013. -1770 стр.

Вся школьная программа создается в ключе "*Математике и английскому языку - учебные часы в востребованном количестве, остальное подстраивается*". В связи с чем вспоминается, что первые бизнесмены Алма-Аты 90-х годов, а это были самые продвинутые "*жизненно направленные*" крепкие ребята, так говорили об учебных потребностях своих детей "*Главное - математика и английский, остальное приложится*", по-видимому, они были правы.

Проект №17. Ввести специальное звание "Элитный Учитель математики" с высоким социальным статусом и материальным обеспечением для сдавших Комиссии ИТМиНВ Главы I-IX "Математикалық анализ".

Проект №18. ИТМиНВ предлагает однозначный, понятный всякому, жесткий обязательный документ "Общие принципы экспертизы и создания школьных учебников и программ с качественным показателем "По которым можно учить и учиться"" с пилотной реализацией по математике через ИТМиНВ

Темиргалиев Н. Принципы создания и проведения экспертизы учебников по математике//Вестник ЕНУ имени Л.Н. Гумилева. Серия Гуманитарные науки. - 2009. -Т. 72. -№ 5. -P. 35-43

Проект №19. Экстренная программа ИТМиНВ по школьной математике на июнь - середина августа 2020 года как срочное и неотложное!

1. Начальная школа будет обеспечена Государственным образовательным стандартом образования с Комплектом всех учебных материалов по математике для 1-го класса к 5.08.2020, в бумажном и электронном версиях, Методическими материалами для учителей, вместе с Поурочными планами, Установочными лекциями для учителей по телевидению и в электронной записи.

2. Для X и XI классов учебники, созданные по результатам Конкурса МОН РК 2000 года

Темірғалиев Н. Әубакір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X-XI кластар, "Жазушы", 2002, 382 бет.

Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, для X-XI классов, "Жазушы", 2002, 423 стр.

будут переработаны, снабжены Программой, Поурочными планами, Электронным вариантом, Установочные лекции по Республиканскому телевидению и в электронном формате.

Казахстан должен отказаться от ЕНТ по выпуску 2021 года.

НАУКА – МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Требования нашей изменяющейся экономики и рабочего пространства (Комиссия Джона Гленна –первого астронавта США, 27.09.2000)

Изменяющаяся экономика: естественные науки и математика оказывают наиболее явное влияние на экономику посредством своих быстро развивающихся ответвлений - новых технологий.

" Именно новые технологии движут уровнем жизни нации. С 1996 г. национальная производительность труда повышалась в среднем на 2,6 процентов ежегодно. Это скорость, при которой уровень жизни удваивается каждые 25 лет. Такой рост производительности труда не может быть обеспечен без достаточной подготовки рабочей силы в области математики и естественных наук.

" Технологически ориентированная экономика XXI века к 2008 г. добавит американской экономике 20 млн. рабочих мест, если только мы сможем подготовить нашу молодёжь к тому, чтобы заполнить эти места.

" Количество рабочих мест в медицине и компьютерной индустрии, требующих знания математики и естественных наук, увеличится к 2008 г. на 5,6 миллиона. По оценкам Министерства труда, вузы должны дать в 4 раза больше выпускников в области компьютерных технологий, чем сейчас.

Общий принцип бюджетного финансирования науки: бюджетное финансирование науки проводится в полном соответсвии с Эшелонами качества научных результатов.

Нижеследующие от ИТМиНВ **ДОКУМЕНТЫ ПО НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИЮ** обеспечат эффективное управление взаимосвязанными Наукой и Образованием.

Проект №20. Казахстан вводит (сегодня-сейчас)

Ежегодные обязательные для всех сотрудников системы Образования и Науки "*Научные и научно-методические паспорта сотрудников НИИ и ППС вузов*" как несущую часть цельной Программы "Цифровизация Образования и Науки" (в 2020 году заполняются в течение 10 дней со дня подписания, с 2021 года до 15 января текущего года).

НАУЧНЫЙ и НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ПАСПОРТ
сотрудника НИИ и ППС вуза
(дата последнего заполнения)

Билл Гейтс: *Именно то, как вы собираете, организуете и используете информацию определяет победите вы или проиграете.*

I. ФИО (с фотографией), дата и место рождения.

II. Ученое звание, ученая степень (название диссертации, где, когда и по какой специальности защищена).

III. Место работы и должность (на момент заполнения, краткое описание НИИ для его руководителя)

Наука делится (здесь четких границ нет, все достаточно условно, но различимо) на области, области на направления, направления - на темы и тематики, далее с приставкой "под" - на подтемы и подтематики, подподтемы,. . . .

IV. Полный список научных статей в международном *некоммерческом* научном издании, имеющем по данным информационной базы Web of Science (Clarivate Analytics) ненулевой импакт-фактор как основной показатель или входящем в базу данных компании Scopus как второстепенный показатель.

В огромном мире научных журналов сами по себе публикации не являются твердой гарантией качества сообщаемых в них результатов, и потому надо определиться в шкале оценок научных результатов через эшелонирование научных результатов по категориям в режиме саморецензирования (как это делается в автореферате диссертации "На защиту выносятся ..."): **Высшая категория** (показатель VI) - фундаментальный результат на уровне направления, **Первая категория** (показатель VII) - значимый результат с возможностью внятной формулировки на уровне темы, **Вторая категория** - результат, говоря словами П.Л.Ульянова, с "кисло-сладкой" оценкой содержания на уровне темы и тематики, **Третья категория** - научно "безликие" публикации, пусть даже в журналах с импакт-фактором.

1. Фундаментальный результат (ФР) - вносящий существенную ясность в основы и, через него, в содержание направления через дальнейшее развитие или же её закрывающий. Краткая и понятная для всякого с образованием в два начальных курса в области науки постановка задачи и формулировка ответа в контексте международной науки, принимаемая всеми, вне обращений к специалистам, без всяких возражений.

Различают

ФРсП: Фундаментальный результат с потенциалом продолжений

ФРбезП: Фундаментальный результат без потенциала продолжений

Фундаментальные результаты по своей природе могут быть различными. Но их объединяет одно: новая фундаментальная идея вызывает новый всплеск активности, как говорил Д.В.Печерский "*Результаты сыплются как из рога изобилия*".

2. Значимый результат (ЗР): тема или тематика развивается, обрастает результатами и надо оценивать место в них конкретного результата - здесь требуется ответственный специалист.

Значимые результаты в контексте темы и тематики как специализированной (узкой) части направления, которые должны носить характер внятных результатов (что в науке получить непросто), вполне отличимых уже на уровне заполнения пункта V.
Различают
ЗРсП: Значимые результаты с потенциалом продолжения, - во всей глубине и полноте решена конкретная задача с разумной и внятной формулировкой, что дает возможность для постановки аналогичных задач по теме и, что поднимает ценность данной статьи, с разработанными идеями и техникой для их решения.
ЗРбезП: Значимые результаты без потенциала, - завершающее звено в длинной цепочке продвижений по конкретной задаче. Научная политика РК вырабатывается только на основе "Национальный научный фонд РК" - "Научная картина РК", составленного через индивидуальные Научные и научно-методические паспорта с подтверждением в *Достижениях (научных обзорах) научных школ и отдельных лиц в контексте международной науки* всех фундаментальных и значимых научных результатов.
3. Вторая и третья категории составляют **ЛД: личные достижения как этап собственного научного движения по восходящей.**
V. Краткое изложение содержания каждой статьи из IV с ранжированием ФР, ЗР и ЛД.
Именно здесь первоначально демонстрируется соответствие оценкам VI-IX, что в развернутом виде подтверждается в IX и XI.
VI. Фундаментальные результаты как "Вклад Казахстана в мировую науку" (с обязательным подтверждением в IX и XI), - концентрированный пронумерованный список, составленный из статей ФР в виде краткого изложения проблемы на историческом фоне и достигнутого в ней в описании из пункта V.
Полный список результатов за все творческое время по сегодня, отвечающих требованию "*До нас, наш вклад, после нас*" в контексте международной науки, в котором определяющим является составляющий во всей своей совокупности "*Наш фундаментальный вклад*" как "*Конкретный вклад Казахстана в мировую цивилизацию*", - в науке существенное для дальнейшего развития живет до тех пор, пока не будет перекрыто очередным существенным, так что срока давности нет, только конкретные результаты.
VII. Значимые результаты как "*Узнаваемость Казахстана в международном научном пространстве*" - концентрированный пронумерованный список, составленный из статей ЗР из пункта V с названием и соответствующей краткой информацией.
VIII. Публикации в некоммерческих журналах с импакт-фактором как личные достижения (полный список номеров статей из пункта V категории ЛД, также ФР и ЗР без продолжений как уже зафиксированные авторские достижения).
IX. Развернутый план ФРсП (с возможным Продолжением в виде обоснованной Программы исследований).
ФРсП в контексте их научной новизны, следуя С.Б.Стечкину [Стечкин Б.С. Как писать работы// Фундаментальная и прикладная математика, 1997, Т. 3, Вып. 4, С. 1261-1265] "*Математика делится на три части: 1) то, что было до меня; 2) то, что сделал я; 3) то, что будет после меня*" осветим по схеме "*До нас, Наш вклад - научный задел*" с возможным (но не обязательным) "*Продолжение ФР" в данной Программе*" в расшифровке
До нас: Предшествующая история и современное состояние Направления в международной науке.
Наш вклад - научный задел: Вклад фундаментального значения в исходные или решающие позиции Направления.
Продолжение ФР: Задачи с обоснованием их международной значимости (с указанием, если таковое имеется, "*Продолжение ФР (Вариант в контексте Грантовой заявки)*").

X. Подготовка кадров высшей квалификации.
A. Научное руководство - количество защищённых:
1) Докторов-
2) Кандидатов-
3) Ph.D-
B. Пофамильный список с указанием названия диссертации защитившихся, специальности, места, даты защиты и количества публикаций в международнозначимых журналах с импакт-фактором (дополнительные сведения в X)
XI. Достижения (обзор научных результатов) в контексте международной науки с перспективой дальнейших исследований (обязательно для руководителей научных школ и для отдельных ученых, если их результаты не освещены научным руководителем, но вошли в VI и VII), сюда в Научный и научно-методический паспорт выносятся Введение и Оглавление.
Примечание. Надо иметь ввиду, что опубликование в международном журнале не всегда гарантирует высокое качество результата и, одновременно, научный результат высокого качества может быть опубликован в журнале не самого высшего рейтинга и даже без какого-либо рейтинга.
Неопубликованные в высокорейтинговых журналах результаты высокого уровня могут быть изложены в обзорной статье руководителя научной школы.
Пример. Прямые (М.Жайнибекова) и обратные (М.Сихов) теоремы в теории приближений разных метрик относятся к центральным в данной теории, однако еще не опубликованы в высокорейтинговых журналах, но с соответствующими комментариями изложены в трех статьях Н.Темиргалиева - Обзоры 1997, 2010 и 2012 годов.
XII. Полный перечень Национальных грантов с 2011 года (с указанием общей суммы финансирования и степени участия - руководитель или исполнитель).
XIII. Полный перечень Грантов международных научных фондов (с указанием общей суммы финансирования и степени участия - руководитель или исполнитель).
XIV. Научные публикации обобщающего аналитического характера - обзорные статьи, монографии (что, как правило, прерогатива крупного специалиста по теме монографии - научного труда в виде книги с углублённым изучением одной темы или нескольких тесно связанных между собой тем).
XV. Научно-методические публикации - учебники, учебные пособия, задачный и аналогичный материал.
XVI. Патентование научных результатов. Сведения об охранных документах и заявках.
XVII. Коммерциализация научных результатов, с указанием полученной прибыли (коммерциализации без прибыли не бывает, иначе это не коммерциализация), абсолютной в тенге и в процентном показателях.
XVIII. Индекс цитируемости в зарубежных изданиях.
Показатель Хирша (h-индекс, или индекс Хирша - наукометрический показатель, предложенный в 2005 американским физиком Хорхе Хиршем из университета Сан-Диего, Калифорния. Индекс Хирша является количественной характеристикой продуктивности учёного, основанной на количестве его публикаций и количестве цитирований этих публикаций).
Примечание. Самым надежным показателем качества является сам результат в контексте международной науки, вынесенный в Достижения научной школы в VI, VII и X.
Цитируемость также не относится к абсолютным показателям - концентрация усилий вокруг узкой темы организованной группы со ссылками друг на друга в различных публикациях может иметь последствием высокую цитируемость, не отражающую действительный вклад в данную науку.
XIX. Членство в редколлегиях журналов, входящих в базу Web of Science (Clarivate Analytics) с ненулевым импакт-фактором или входящем в базу Scopus (Elsevier).

XX. Международное признание: выступления в качестве приглашенных докладчиков на международных конференциях, приглашения для чтения лекций в зарубежных университетах.
XXI. Научные награды, премии, звания, государственные награды.

ПОДТВЕРЖДЕНИЕ, С ЛИЧНОЙ РОСПИСЬЮ, ЧТО ВСЕ НИЖЕСЛЕДУЮЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ СОБЛЮДЕНЫ:

XXII. Научный и научно-методический паспорт заполняется персонально, за достоверность индивидуальных сведений ответственность несет сам заполняющий и подтверждающий их уполномоченный орган. Отказ от заполнения Научного и научно-методического паспорта влечет запрет на занятие должности в НИИ и вузе РК.
XXIII. Недостоверные сведения в Научном и научно-методическом паспорте приравниваются к обману государства с, в соответствии с международной практикой, полным изгнанием из системы образования и науки РК.
В том числе, очевидным образом грубое самоприсвоение фундаментальных и значимых результатов приравнивается к самострелу на войне с аналогичными последствиями (на самом деле, самоотверженный научный поиск такой же тяжелый бой с закрытым ото всех неизвестным - как говорил Конфуций: "Утром познав истину вечером можно умереть").
XXIV. Научно безграмотно заполненный Научный и научно-методический паспорт свидетельствует об отсутствии необходимой квалификации, один раз отсылается на доработку, после чего, в случае повторения, автор снимается с научного учета с занесением в специальный список.

Проект №21. Так же как каждый гражданин должен иметь паспорт своей страны, так и каждый сотрудник НИИ и ППС вуза должен ежегодно заполнять "*Научный и научно-методический паспорт*" с самооценкой своих научных результатов (это как в автореферате диссертации "На защиту выносятся ...") как обязательное условие нахождения в системе Образования и Науки. Каждое подразделение системы Образования и Науки должно иметь специальный Портал, на котором вывешиваются все, без исключения, "Научные и научно-методические паспорта" каждого сотрудника.

Проект №22. Научная политика РК формируется на основе "Национальный научный фонд РК" - "Научная картина РК", составленного через индивидуальные Научные и научно-методические паспорта с подтверждением в публикациях в рейтинговых журналах в контексте международной науки. С эшелонированием научных результатов по категориям: **Высшая категория** - фундаментальный результат на уровне направления, **Первая категория** - значимый результат с возможностью внятной формулировки на уровне темы, **Вторая категория** - результат, говоря словами П.Л.Ульянова, с "кисло-сладкой" оценкой содержания на уровне темы и тематики, **Третья категория** - научно "безликие" публикации, пусть даже в журналах с импакт-фактором.

Научные эшелоны формируются через научные результаты соответствующей категории – Эшелон высший, первый, второй и третий.

Экология волка	V. ЛАБОРАТОРИЯ ОБЩИХ ПРОБЛЕМ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ В РК

ИТМиНВ ПРЕДЛАГАЕТ ДОКУМЕНТ "ЦИФРОВИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РК"

Проект №23. ИТМиНВ предлагает документ "Цифровизация науки РК"

"Цифровизация науки Казахстана" - *через компьютерную технологию осуществляется эффективное управление наукой на основе полной информации о научном состоянии каждого сотрудника и каждого подразделения* - полный и подробный текст в Сюжете 911, 23.07.2018

Обоснование: Уязвимость науки по формуле "Кто смел, тот и съел", когда надо быть смелым в совсем другом формате "У входа в науку, как у входа в ад, должно быть выставлено требование: "Здесь нужно, чтоб душа была тверда; здесь страх не должен подавать совета", в американском журнале "Чейндж" описана в виде "...второй, менее известный, но, как считают многие, не менее важный в практическом отношении принцип состоит в том, чтобы не допускать в сферу науки малоспособных в научном отношении, но весьма инициативных людей (подобные "кадры" способны нанести в этой сфере чрезвычайно большой вред)".

Проект №24. ИТМиНВ предлагает документ "Цифровизация образования РК"

"Цифровизация образования Казахстана" - *через компьютерную технологию осуществляется эффективное управление образованием на основе полной информации о научном и научно-методическом состоянии каждого сотрудника и каждого подразделения* - полный и подробный текст Сюжете 913, 26.07.2018

Историческая уязвимость Системы образования: В 1853 году, накануне введения нового университетского устава, официальный печатный орган Министерства народного просвещения России писал: *"Главный недуг нашего общества заключается в недостатке знания (...), а в последнее время (...) не менее гибельный - это полузнание, - со всеми неизбежными своими спутниками, как-то: самонадеянностью, заносчивостью, неосновательностью и вместе с тем резкостью суждений, неуважением к науке, непризнанием "факта".*

§1. «Математикалық анализ» единая симфония в 1900 страниц из 21-ой главы, 159-ти параграфов, 875-ти пунктов казахской интерпретации с посильным стремлением обеспечения недостижимого принципа «Читаешь, понимаешь, постигаешь, возвышаешься».

Образование должно быть качественным – это программы, согласованные учебники и подготовленные кадры в школах и вузах, в рамках чего страна с 9-ой в мире площадью и всего в 18,6 млн. человек (меньше населения одного города Стамбула) не должна бы позволить себя вогнать в состояние:

У входа в Стелленбосский университет (ЮАР) висит следующее сообщение:
«Уничтожение любой нации не требует атомных бомб или использования ракет дальнего радиуса действия. Требуется только снижение качества образования и разрешение обмана учащимися на экзаменах.
Пациенты умирают от рук таких врачей. Здания разрушаются от рук таких инженеров. Деньги теряются от рук таких экономистов и бухгалтеров. Справедливость утрачивается в руках таких юристов и судей.
Крах образования— это крах нации».

С позиций ИТМиНВ можно сказать еще короче и технически точнее: ***Если кому-то надо развалить образование, науку, интеллект и собственное технологическое производство государства, а его народ сделать полуграмотным, то достаточно лишить математического анализа, ибо тогда все остальное само собой развалится.***

I. Пятьдесят лет жизни, посвященных «Математикалық анализ»

1. «Математикалық анализ» для Казахстана. Народы бывают двух порядков – одни на *своем* языке, во всех его красотах, глубине и выразительных особенностях через свой «МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ» могут *свое* подрастающее поколение через обеспечение *«математической зрелости»* возвести до математически образованных, другие этого не имеют (по Эрнесту Ренану).

ИТМиНВ включает казахов в число *«первых народов»:* завершено второе издание Математикалық анализ в 1900 страниц на казахском языке.

Настоятельно рекоменуется усвоить Главу I из 238 страниц текста в содержании «Структура математики» – Культура математического доказательства», что в качестве мощного интелектуального катализатора бесконечнократно окупится и обеспечит стремительное вхождение во всей глубине в последующий текст собственно «Математикалық анализ» протяженностью ещё в 1662 страницы.

Учитель математики, освоивший главы I-IX в 1017 страниц этой книги превращает себя в очень квалифицированного учителя по математике в средней школе с бесконечным потенциалом на десятилетия вперед отдачи высшего качества – как известно, если в какой-то школе хорошо преподается математика, то оттуда выходит большое количество высших кадров различных специальностей. Именно эту часть жизни страны и народа ИТМиНВ усиливает, есть специальный школьный учебник, где наряду с решением задач целенаправленно прокладывается путь к достижению *математической зрелости* и ассоциативного мышления.

Теперь на казахском языке любой желающий, кто преодолеет эти 1900 страниц – там нет ни одной лишней мысли, ни одного лишнего абзаца – достигнет общей фундаментальной подготовки с соответствующей зрелостью, что наряду с Теорией меры и интеграла Лебега и Теорией вероятностей научно может заняться любой темой в области Математики и Компьютерных наук, осознанно усвоить в них любой раздел.

2. Полувековая история проблемы. С самыми высшими казахстанскими образовательными свидетельствами – средняя школа с золотой медалью, единственный тогда университет КазГУ– *Қара шаңырақ,-* с отличием, сразу же в 1969 году поступил в Москве в аспирантуру Математического института имени В.А. Стеклова АН СССР. Поступил со вступительным экзаменом на «отлично», – и только потому, что обучившийся в аспирантуре Воронежского университета Тохтар Нурекенов сказал мне всего одну фразу *«Там спрашивают только определения и контрпримеры».*

Да еще какой Приемной комиссии – Комиссии из выдающихся математиков, называю с последними титулами, академик С.М. Никольский, академик А.А. Гончар, академик П.Л. Ульянов, член-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьев, и профессор С.А. Теляковский, о котором всегда точный П.Л. Ульянов говорил «*Лучший лектор по математическому анализу на мехмате МГУ имени М.В. Ломоносова*» (Сергей Александрович ушел из жизни 5 мая 2020 года).

Но в аспирантуре мне быстро показали, что ***я математику не понимаю вообще***. Это было в высшей математической обстановке Стекловского Института, такого в другом месте могло и не быть, не быть по причине Шекспировского *«Гамлет сошел с ума и его отправили лечиться в Англию. Если не вылечится - не беда, там никто этого не заметит, потому что в Англии все такие».* Там же меня научили математике – шел 1969 год, в 22 года мне пришлось все начинать сызнова.

Тогда и там же, в Москве, как основную жизненную цель поставил *«Все новоприобретенное передать казахам».*

Решил так, поскольку по себе знал, что можно много-много читать разные хорошие (советские и переводные) книги, чем я и занимался 16 лет в статусе учащегося - студента, но математика будет оставаться *«неродной»,* учебный труд – неосмысленным, даже если по памяти знать все доказательства.

Қазақтың жалпақ тілімен айтқанда *«Қазақтың қара домалақ баласына математиканы шынайы түрде игеруіне жол салу керек».*

Но что есть «**Понимание математики**»?

3. По Харди: «Прочитав знаменитый «Курс математического анализа» Жордана, я впервые понял, что такое математика».

По жизни ясно, когда математику понимают – в математически грамотной стране: докладывает Сергей Викторович Бочкарев, выдающийся советский русский математик – он решил проблему Банаха, он перенес на общий случай выдающийся результат тогда девятнадцатилетнего Андрея Колмогорова, и вот он делает доклад – двести человек его слушают, вдруг он делает описку – и все двести человек одновременно на одном дыхании ему на нее указывают.

Теперь обратимся к самому Харди, с его ответом на поставленный вопрос, который вынесен в заголовок пункта.

Роль математического анализа в своем становлении как математика легендарный английский математик Харди Годфри Гарольд в книге «Апология математика» (Изд-во. «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»», 2009, стр.109-110), описывает так (если такое происходит в плотно пронизанным математикой Кембридже, тогда что можно ожидать в слабоматематизированной среде!):

«Разумеется, в школе я, как всякий будущий математик, обнаружил, что нередко могу решать задачи гораздо лучше, чем мой учитель, и даже в Кембридже мне удавалось решать задачи лучше некоторых преподавателей, хотя это, естественно, происходило гораздо реже, чем в школе. Но в действительности, даже когда прошел Трайпос, я оставался полной невеждой в тех самых проблемах, которым посвятил всю остальную жизнь. О математике я по-прежнему думал как по существу состязательной науке. Впервые мне открыл глаза профессор Ляв (1863-1940, английский математик и механик, специалист по математической теории упругости), у которого я проучился несколько семестров. У него же я получил первое серьезное представление о математическом анализе. Но более всего я обязан ему за то, что он, будучи по существу прикладным математиком, посоветовал мне прочитать знаменитый «Курс математического анализа» Жордана. Никогда не забуду изумление, которое охватило меня при чтении этой замечательной книги, ставшей первым источником вдохновения для столь многих математиков моего поколения. Прочитав ее, я впервые понял, что такое математика. С тех пор я на свой соответственный лад стал настоящим («реальным») математиком со здоровыми математическими амбициями и подлинной страстью к математике».

Выделим отсюда ключевые мысли:

– Но в действительности, даже когда прошел Трайпос, я оставался полной невеждой.

– Прочитав ее, я впервые понял, что такое математика.

– С тех пор я на свой соответственный лад стал настоящим («реальным») математиком со здоровыми математическими амбициями и подлинной страстью к математике.

И здесь ответ не получен, есть констатация *«Понимания математики»*, но нет пояснения *«В каком смысле»*. По-видимому, это нечто ускользающее от описания, и есть только индивидуальное чувство и восприятие, реальными носителями которых для меня были и есть П.Л.Ульянов, Е.М.Никишин, Д.Е.Меньшов, С.М. Никольский, С.Б. Стечкин, Д.В.Печерский, С.М.Воронин, весь дух Московской математической школы!

Быть может, математическая реальность, в особенности в своих базовых частях, должных быть изложенными в учебниках (и школьных, и вузовских), по своей сути есть нечто виртуальное, трудно поддающееся словесной передаче.

Определенно можно требовать только одно: цепочка рассуждений должна быть без разрывов в своем развитии.

Сказанное продемонстрируем на одном примере – методике изложения темы «Таблица умножения» в начальной школе.

Методическая разработка «Таблица умножения»

(с маленькими из ИТМиНВ Амиржан, Мадияр, Адия, Алима, Айганым, Бейбарыс, Самал, Диана)

I. Еще раз повторяем счет: 1,2,3,... (бір-один-one, екі-два-two, үш-три-three,...)

II. Что есть сумма 3+4 и чему равна? Используем палочки

$$3+4=\overset{1\,2\,3}{|\,|\,|}+\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}=\underset{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{|\,|\,|\,|\,|\,|\,|}=7$$

Считать в уме хорошо, но здесь главное понимать почему 3+4=7.

III. Что такое 3×4**?** Математику понимает только тот, кто здесь различает два вопроса:

1. Что означает 3 умножить на 4?

2. Чему равно 3×4 ***?***

Ответы следующие:

1. Надо прислушаться к произношению 3×4 - трижды четыре, үш жердегі төрт, thrice four:

$$3\times 4=\overset{1}{4}+\overset{2}{4}+\overset{3}{4}\equiv 4+4+4.$$

По количеству слагаемых считаем- 1,2,3- три и останавливаемся!

2. Чему равно 3×4 ? – используя палочки по методу II

$$3\times 4=4+4+4=\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}+\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}+\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}=\underset{1\,2\,3}{|\,|\,|}\cdots\underset{12}{|}=12.$$

Итоговый результат: опуская знак «+» записываем по-новой и ведя счет под палочками, останавливаемся на последней, записывая за знаком равенства как искомое число!

IV. Образец для закрепления:

$$6\times 4=\overset{1}{4}+\overset{2}{4}+\overset{3}{4}+\overset{4}{4}+\overset{5}{4}+\overset{6}{4}=\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}+\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}+\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}+\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}+\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}+\overset{1\,2\,3\,4}{|\,|\,|\,|}=\underset{1\,2\,3}{|\,|\,|}\cdots\underset{24}{|}=24.$$

Обучающийся должен дать по два ответа на каждый вопрос: что это означает и чему равно.

V. Задание «Заполнить один столбик таблицы умножения». После заполнения показать ответы на обложке тетради для самопроверки – это будет его первая научная работа:

$1\times 3=3=|||=3$

$2\times 3=3+3=$

$3\times 3=$

$4\times 3=$

$5\times 3=$

$6\times 3=$

$7\times 3=$

$8\times 3=$

$9\times 3=$

VI. Предостережение: никогда не торопить, все должно быть добровольным, с желанием.

VII. ПРАВИЛО: математик не должен лениться, все писать, своей рукой много писать!

VIII. Этим через наглядность обеспечивается сознательное и осмысленное усвоение.

IX. Быстрое сложение и умножение, если есть, то хорошо, но для понимания математики особого значения не имеет – главное это постигнуть сущность этих арифметических действий через наглядный счет палочками.

X. После самостоятельного вычисления "Таблицы умножения", с последующей проверкой по напечатанному – после своего первого научного успеха, надлежит найти мотивацию для заучивания наизусть.

И, в продолжение, обратимся еще к одному программному вопросу математики начальной школы с выводом "*Даже для первого класса надо понимать базовые положения большой математики*", да еще для автора нет удовлетворительного решения как объяснить переместительный и сочетательный законы первокласснику. А речь идет о следующем:

Темиргалиев Н. Принципы создания и проведения экспертизы учебников по математике//Вестник ЕНУ имени Л.Н. Гумилева. Серия Гуманитарные науки. - 2009. -Т. 72. -№ 5. -Р. 35-43

...

1°. Потенциальные авторы должны в совершенстве (даже при всей очевидной невыполнимости этого требования) владеть основами математической науки.

Казалось бы, что может быть проблемного для школьной математики во всем известных законах арифметики.
Переместительный закон (от перемены мест слагаемых сумма не меняется): $a+b=b+a$.
Сочетательный закон: $a+(b+c)=(a+b)+c$.
Но если в эту ситуацию вникнуть глубже, то получится иная картина.
Для ребенка 6-8 лет, уже научившегося складывать, само собой разумеется, что, к примеру, $2+3=3+2$.
Действительно, он в одну руку возьмет 2 конфеты, в другую – 3, вытянет пред собой руки сначала параллельно, затем накрест и скажет: "Ничего не изменилось, здесь всего 5 конфет".
А взрослые будут его учить ("Злобный дух скудных умов!"): $2+3=3+2$, и, вообще $a+b=b+a$ и это есть закон, закон переместительный. И, тем самым, совершат ошибку наподобие библейского Иуды поцелуем совершающим предательство: из добрых намерений обучить математике на деле отлучают от нее.
В математике все должно быть объяснено, в школьной математике тем более, - там, где это в связи с возрастными особенностями невозможно, должны быть приведены так называемые "правдоподобные" объяснения.
Что же здесь происходит? Ребенку навязывается какое-то формальное необъяснимое правило об ему понятном и само собой разумеющемся.
Этим внедряется в сознание недопустимое: есть знания, которые безо всякого объяснения надо заучить и воспроизвести.
Обратимся к самой математике, чтобы понять откуда появились эти самые законы и почему они недоступны пониманию в начальной школе.
Здесь речь идет об определении группы J (точнее абелевой группы), элементы которой будем называть числами.
Аксиома 1. Всякой упорядоченной паре чисел a и b (т.е. чисел, относительно которых установлен порядок: первое число и второе число b) ставится в соответствие одно третье число, называемое их суммой и обозначаемое $a+b$.
Аксиома 2 (переместительный закон). Всегда $a+b=b+a$.
Аксиома 3 (сочетательный закон). Всегда $a+(b+c)=(a+b)+c$.
Другие аксиомы (их еще две) приводить и обсуждать не будем, поскольку они выходят за пределы наших целей.
Аксиомы принимаются без каких-либо доказательств, что не исключает их мотивировки.
Мотив принятия Аксиомы 2 следующий. Имеются два числа a и b. Их можно упорядочить двумя способами: первое число a, второе - b с суммой $a+b$ и, наоборот, первое число b, второе - a с суммой $b+a$.
Однако, в Аксиоме 1 ничего не говорится об их равенстве, так вот в Аксиоме 2 устанавливается их свойство $a+b=b+a$, называемое переместительным законом.
Теперь мотив к принятию Аксиомы 3. Аксиома1 определяет действие над числами - действие сложения, причем сложения двух чисел. Возникает вопрос: Что делать, если чисел больше двух? Вводить новые аксиомы для сложения трех, четырех и более чисел?
Аксиома 3 отвечает на этот вопрос, сводя вопрос о сложении трех и более чисел к сложению двух чисел, обеспеченного Аксиомой 1. Сложение трех чисел a, b и c можно свести к сложению двух чисел двумя способами: одно из них $(a+b)+c$ - сначала сложить a и b, это будет число $(a+b)$, которое затем складывается с c, другое $a+(b+c)$ - сначала сложить b и c, это будет число $(b+c)$, затем складывается два числа a и $(b+c)$.
Возникает опасение - не будет ли результат зависеть от способов сложения?
Аксиома 3 снимает этот вопрос - независимо от способа сложения результат будет один и тот же, что дает возможность определить сумму $a+b+c$ трех чисел a, b и c.
Подведем итоги нашего экскурса в серьезную теоретическую математику (см., напр., [Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет], стр. 18-19).

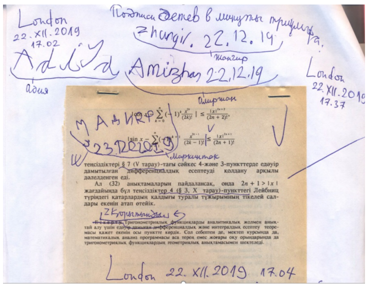
Без Аксиомы 1 последующие переместительный (Аксиома 2) и сочетательный (Аксиома 3) законы необъяснимы (даже в самой теоретической математике), введение Аксиомы1 в школьном курсе выходит за пределы разумности.
Тем самым, уже в начале пути приходим к серьезной методической проблеме. Получается как у Антуана де Сент-Экзюпери: "Уж такой народ эти взрослые. Не стоит на них сердиться. Дети должны быть снисходительны к взрослым".
Как это видно из приведенного примера, даже простой, что называется "понятный каждому", материал из курса начальной школы имеет под собой глубокую математическую теорию, в данном случае из алгебры. Определение абелевой группы не требует каких-либо объемных предварительных знаний (что выше было показано полным объяснением выдвинутой проблемы). То же относится к школьной геометрии и теории вероятностей с математической статистикой. Во всем остальном содержании школьная программа практически есть "наивный", в смысле "без строгого обоснования", математический анализ. Именно, основу школьной математики составляют теория действительного числа и теория пределов, на языке которых строится дифференциальное и интегральное исчисления, позволяющие произвести корректное определение и полный анализ элементарных функций, составляющих предмет изучения школьной математики.
Математический анализ относится к творениям человеческого гения, созданного лучшими умами человечества, начиная от первых работ Ньютона (открытие анализа -1665-1666 годы, кинематический подход, публикации 1704-173 6) и Лейбница (открытие анализа-1673-1676 годы, геометрический подход, публикации 1684-1686) до К. Вейерштрасса, умершего в 1897 году.
В действительности, сталкиваясь с многочисленными математическими нелепостями, трудно отделаться от ощущения того, что еще не стало общедоступным понимание факта, что уже со времен Вейерштрасса математический анализ превратился в четкую математическую дисциплину, в которой, говоря словами Д.Гильберта, "существуют полное согласие и уверенность".

4. Начало - ***Москва, 1969 год,*** **промежуточный Первый том -** ***Алма-Ата, 23 мая 1980 года*****, завершение -** ***Лондон, 22 декабря 2019 года в 17.04.*** Фактически подготовка по Второму изданию «Математикалық анализ» велась одновременно с выходом книг Первого издания - с издания в 1987 году 1-ого тома, - на полях изданных учебников делались пометки. Потом, время от времени, особенно в командировках, велась систематическая работа над вторым изданием, и на декабрь 2019 года оставались две главы Первого издания - «Фурье қатары» и «Фурье түрлендіруі» в объеме 113 стр. для "переработки и дополнения".

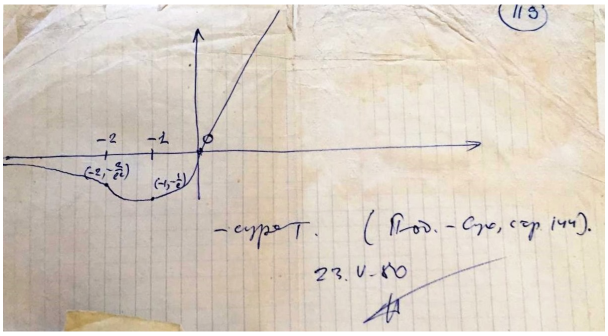
В декабре 2019 года тоже был в зарубежной научной командировке. В рамках выполнения основных целей поездки имел массу встреч и консультаций в Париже, Кембридже и Лондоне по прорывным темам ИТМиНВ, в которых, как всегда, один вопрос, замечание или совет может быть весьма и весьма полезным. В Париже с большим удовольствием узнал, что визитная карта моего друга и Учителя С.М.Воронина *«Теорема об «универсальности» дзета-функции Римана»* послужила началом нового направления в физике, инициатором которого выступает известный норвежский математик.

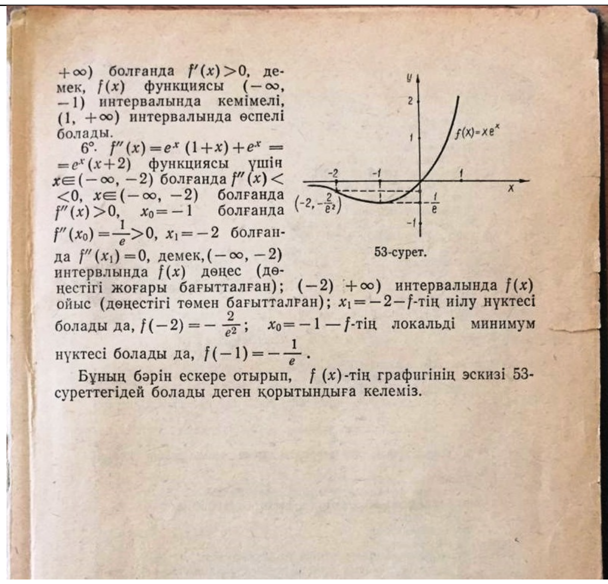
«Последний бой – он трудный самый» – взялся за завершение второго издания: начал 12.12.2019 года в самолёте рейса Стамбул-Париж, потом все время работал во всех отелях, поездах, пересадках и те оставшиеся 113 страниц закончил в Лондоне.

Таким образом, полувековой, с 1969 года, замысел, благодаря Всевышнему в полном сознании и работоспособности, завершен, – это случилось в Лондоне 22 декабря 2019 года в 17.04ч.:



В связи с чем отмечу, что такие окончания для меня всегда большой праздник освобождения – первый том первого издания создавался 8 месяцев с ежедневной работой по 18 часов в сутки и был завершен в Алма-Ате 23 мая 1980 года:





$+\infty$) болғанда $f'(x)>0$, демек, $f(x)$ функциясы $(-\infty, -1)$ интервалында кемімелі, $(1, +\infty)$ интервалында өспелі болады.

6°. $f''(x)=e^x(1+x)+e^x = e^x(x+2)$ функциясы үшін $x\in(-\infty,-2)$ болғанда $f''(x)<0$, $x\in(-\infty,-2)$ болғанда $f''(x)>0$, $x_0=-1$ болғанда $f''(x_0)=\frac{1}{e}>0$, $x_1=-2$ болғанда $f''(x_1)=0$, демек, $(-\infty,-2)$ интервлында $f(x)$ дөңес (дөңестігі жоғары бағытталған); (-2) $+\infty)$ интервалында $f(x)$ ойыс (дөңестігі төмен бағытталған); $x_1=-2$—f-тің иілу нүктесі болады да, $f(-2)=-\frac{2}{e^2}$; $x_0=-1$—f-тің локальді минимум нүктесі болады да, $f(-1)=-\frac{1}{e}$.

Бұның бәрін ескере отырып, $f(x)$-тің графигінің эскизі 53-суреттегідей болады деген қорытындыға келеміз.

53-сурет.

5. Два издания «Математикалық анализ» – два разных назначения. В советские года с Программой по математическому анализу и учебниками на русском языке все было хорошо. Полный курс

– Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. Алматы: Мектеп, 1987, 288 б.
– Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. II. Алматы: Ана тілі, 1991, 400 б.
– Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. III Алматы: Білім, 1997, 432 б.

был исполнен в ключе «*уравнять возможности казахскоязычных студентов с русскоязычными*».

Второе издание «*Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым), 2019, 1900 б.*» преследует уже другие цели:

– не предполагается усвоение школьного курса математики,
– наличие математической среды, когда недостатки преподавания математического анализа устраняются через научные семинары и контакты со знающими, не требуется.

Только надо будет пройти 1900-страничный путь, дополненный еще двумя авторскими учебниками:

– *Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012.*
– *Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012.*

II. Стратегия использования «Математикалық анализ (второе издание)» в Казахстане

ИТМиНВ считает, что на казахском языке есть полный текст введения в математический анализ, с дополнением до мощного базового математического образования. Фактически только остались технические работы для издания «Математикалық анализ» в объеме 1900 страниц. Затем будет перевод на русский язык с изданием в Москве, как «Перевод с казахского». В завершение, с русского языка будет перевод на английский язык, тем самым, казах-казахстанец будет иметь фундаментальный учебник на трех языках.

По замыслу и по исполнению учебник второго издания «Математикалық анализ» – многоцелевой. В первую очередь надо освоить Кіріспе-Введение, – это чтобы понять замысел и тактику изучения. Следующие 238 страниц может прочитать любой, необязательно математической специализации, и получить начальную(но существенную) *математическую зрелость.* Там даны структура математики и культура математического доказательства на примере геометрически ясного построения техники измерения длин отрезков и на образцах абстрактных рассуждений, когда из 17-и аксиом действительных чисел извлекаются все ее свойства. Это было наиболее тяжелым, но, тем не менее, выполнено, в результате чего получить математическую зрелость можно без предела и производных, то есть без собственно математического анализа.

Если прочитать первые 1017 страниц – это будет подготовка школьного учителя математики. Он получит нужную математическую зрелость и информацию – это уже будет первоклассный учитель. Дело в том, что учитель должен знать больше, он не будет ученику говорить аксиомы действительных чисел, но у него должна быть математическая внутренняя культура и он тогда сможет работать и обучать любого ученика с любыми способностями.

Дальше будут инженерные кадры, экономисты-финансисты и им в математических потребностях приравненные, для них можно подобрать, даже с точностью до страниц, темы и построить программы.

А если в полном объёме, то можно будет получить полную математическую зрелость. Обычно считается, что можно научить на семинарах, но здесь есть двойная защита – и гарантия от неподготовленного преподавателя, и даже в условиях отсутствия глубокой математической среды.

Считаю, что свой долг перед народом, который уже 50 лет тому назад задумал, сейчас выполнил.

Инструкция по применению *«Математикалық анализ»* в интересах народа и государства видится в следующем.

1°. Для вхождения в лоно математики надо придерживаться правила, причем оно и единственное, – математика по своей сути наука систематическая, по которой шаг за шагом надо пройти весь базовый путь, по капле наращивая математическую зрелость как понимание на уровне подсознания. При этом, отдельные изолированные сведения, какими они ни были бы методически совершенными сами по себе, малоэффективны, если не бесполезны – все надо понимать в совокупности.

«Математикалық анализ» создан именно с таких позиций.

2°. Независимо от языка занятий, этническим казахам, да и всем казахстанцам, желающим изучить государственный язык, можно рекомендовать «Математикалық анализ» изучать на казахском языке – языке создания. Могу заверить, что казахский язык по своим выразительным возможностям не уступает известному мне русскому, а на фоне действительного величия языка русского, – многим другим.

3°. Ввести специальный Республиканский экзамен по Главе I под названием «Структура математики – Культура математического доказательства» для поступающих на PhDдокторантуру (с автоматическим зачислением в магистратуру) по специальностям с высоким применением математики.

4°. Ввести специальное звание «Элитный Учитель математики» с высоким материальным обеспечением для сдавших Главы I-IX.

5°. Ввести автоматическое зачисление в PhD докторантуру по Математике и Компьютерным наукам абитуриентов, прошедших 1900-страничный путь, дополненный еще двумя авторскими учебниками:

– Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012.
– Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012.

6°. Каждый учебник, если только не бессвязный дайджест из других, отражает позицию автора, поэтому надо пройти весь путь по одному учебнику, в данном случае по «Математикалық анализ», затем пролистать многие другие, сравнивая и оценивая иные методы изложения. При этом необходимо исходить из того, что высшее бедствие для обучающегося – при чтении непонятное, о чем идет речь и зачем все это нужно, по окончании – необеспечение достижения поставленной цели: В.Г. Белинский *«Учебная книга – не роман, если написано дурно, то вреда приносит не меньше чумы и холеры».*

7°. Автор учебника должен иметь научные результаты – чем глубже, тем больше понимания излагаемого материала.

8°. В учебнике на каждые 10 страниц текста должно быть методическое новшество.

9°. Для всех вузов и НИИ Казахстана провести

«Онлайн-конференция «Математикалық анализ» от ИТМиНВ» Руководитель Ғалия Тауғынбаева

Программа Конференции составляется по отдельным темам *«Математикалық анализ»* по специальностям.

10°. Столичный Национальный университет на базе Зеренді проводит для всех вузов и НИИ Казахстана (такой опыт у ИТМиНВ имеется)

«Оффлайн-Семинар *«Математикалық анализ» от ИТМиНВ»* Руководитель Ғалия Тауғынбаева

Лучше лектора видеть "лицо в лицо", чем на экране.

11°. Тщательный отбор – что, как и в каком обьеме, в какой последовательности излагать, отражено в

Оглавление «Математикалық анализ»

– это путь в 1900 страниц в главах, параграфах и пунктах, где, надеемся, все понятно и полезно. Оглавление может служить программой проверки и самопроверки в формате "Вопрос- Ответ", в котором "Вопрос" – из Оглавления, "Ответ"– в тексте "Математикалық анализ".

12°. ***«Кіріспе» - «Введение»,*** – здесь вся идеология от математика, с 1969 года находящегося в, надеемся, осмысленной деятельности (чего не имел до 22-х лет).

Осмысленость – это дар Московской математичесской школы, советских русских математиков П.Л. Ульянова и С.М. Воронина.

Осмысленность – это редкий дар судьбы, никто не гарантирован от бессмысленной многотрудной жизни.

§2. Наука ИТМиНВ в результатах фундаментального уровня от 2019 года

1°. Отчет по научным результатам, но никак только количеством публикаций.

С ИТМиНВ случилось так, что в одном 2019 году закрепил за собой три прорывных на передовых позициях современной Математики и Компьютерных наук фундаментальных результата, что никак нельзя предвидеть и присвоить.

Критерий наличия Науки (*с подтверждением научным послужным списком самого Харди*), как и в любой стране – первое, и оно последнее, – это научные результаты, расширяющие границы познания человечества, которые могут быть трех категорий: фундаментальные единичные (как вклад в мировую науку, двух видов- с и без продолжений), значимые в общей массе (именно здесь, по делу или умышленно, набирается индекс Хирша) и локальные (незначительные, обычные для удержания в штате).

Именно в полном соответствии с этим критерием, легенда математики Годфри Харди, в той же «*Апологии математика*», после того как «*Понял математику*», переходит к самооценке научной деятельности:

«За следующие десять лет я написал много работ, но очень мало из них имели хотя бы какое-то значение: лишь четыре или пять из них я все еще могу вспомнить с некоторым удовлетворением. Настоящий перелом в моей карьере наступил дважды: через десять или двенадцать лет - в 1911 г., когда я начал продолжительное сотрудничество с Литлвудом, и в 1913 г., когда я открыл Рамануджана. С тех пор все мои лучшие работы были связаны с их работами, и не подлежит сомнению, что мое сотрудничество с ними стало решающим событием моей жизни. Я и сейчас говорю себе, когда мне приходится выслушивать помпезных докучливых людей: «А все-таки мне удалось сделать одну вещь, которую ни за что не удастся сделать вам: я сотрудничал с Литлвудом и Рамануджаном на равных». Именно им, Литлвуду и Рамануджану, я обязан необычно поздней зрелостью: мой расцвет как математика произошел, когда мне было слегка за сорок, и я был профессором в Оксфорде».

Фундаментальные результаты Харди: «*С тех пор все мои лучшие работы были связаны с их работами» и «мой расцвет как математика*».

Значимые результаты Харди: «*Лишь четыре или пять из них я все еще могу вспомнить с некоторым удовлетворением!*».

Незначительные(локальные) результаты Харди: «*за следующие десять лет я написал много работ, но очень мало из них имели хоть какое-либо значение*».

Конечно, самооценка Харди была здесь приведена только с позиции обоснования наличия в науке трех степеней качества статей, никоим образом не совпадающей с «*научным большинством*», куда включается и ИТМиНВ.

Заканчивая обращение к Харди, в ключе, что математики тоже люди со всем человеческим, можно вспомнить, что резкий Эдмунд Ландау на «*Именно им, Литлвуду и Рамануджану, я обязан необычно поздней зрелостью*», при знакомстве с Литлвудом изрек: «*Я думал, что «Литлвуд» это псевдоним Харди, которым тот подписывает свои плохие работы*».

2°. Казахский формат возвышения в Математике и Компьютерных науках.

В условиях, когда мощь государства находится в прямой пропорциональности с количеством высококвалифицированных специалистов по Computer Science и Математике, проигрышный сценарий, образно говоря, состоит в том, что армию необученную (без базового математического знания) и невооруженную (без наличия собственных прорывных идей и результатов для приобретения опыта исследовательской работы в Computer Science и возле) бросать на неприступную крепость (эффективное использование в своей стране достижений 4-ой промышленной революции, чего именно заранее предугадать нельзя, по ситуации приспособление) обеспечивают подготовленные кадры.

Конечно, организованная армия, боеспособная или нет, уже по факту своего существования будет оттягивать на себя бюджет.

В рамках перевода общих IT-идей на уровне человечества в конкретные действия в своей стране, ИТМиНВ предлагает разработанную в деталях программу, вынесенную в статью:

Темиргалиев Н. Предисловие Главного редактора журнала "Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика" о целях издания и путях их реализации *//Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2018. –Том 122. -№1. –С. 8-69.*

Именно было выдвинуто предложение по подготовке специалистов по 4-ой промышленной революции и программы «Цифровой Казахстан» в формате

α) Мощная базовая подготовка по математике.

β) Опыт исследовательской работы на переднем крае Математики и Компьютерных наук по оригинальной казахской теме.

В рамках реализации чего ИТМиНВ обеспечивает короткий прямой путь к профессиональным высотам из двух шагов – $\boxed{\text{A}}$ и $\boxed{\text{B}}$:

$\boxed{\text{A}}$ **(стабильная реализация** α**).** В полном объеме осваивается:

$\boxed{\text{A}}$**. АВТОРСКИЕ ОСНОВЫ БАЗОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ – казахский аналог общей подготовки в PhD докторантуре США**
- Теміргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). -2019. -1887 б.
- Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ. – Астана, 2012.
- Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ. – Астана, 2012.

Программа $\boxed{\text{A}}$ есть казахский аналог общей подготовки в PhD докторантуре США казахский аналог PhD докторантуры США, где при 6-ти летнем обучении в течение первых двух лет требуется сдать 5 экзаменов по базовым дисциплинам, не выдержавшие отчисляются. Программа А далеко не всеми преодолима, прошедшие же составляют персональную ценность для государства.

По опыту ИТМиНВ можно утверждать, что созданная в этих учебниках основа позволяет усвоить все необходимое в непрерывной и дискретной математике:

$\boxed{\text{B}}$ (переменная по фундаментальным (и избранным значимым) результатам как реализация β – опыт исследовательской работы на переднем крае Математики и Компьютерных наук по оригинальной казахской теме). ИТМиНВ обладает собственными прорывными результатами по 22-м направлениям и тематикам на переднем крае современной Математики и Компьютерных наук, из которых при общем для всех программ научных исследований $\boxed{\text{A}}$, будут конкретизированы $\boxed{\text{B}}$ для формирования ударных научных групп из молодых преподавателей и студентов ВУЗов и НИИ с целенаправленным Грантовым бюджетным финансированием.

В результате, в §1 полностью решена часть $\boxed{\text{A}}$ в результатах 2019 года ИТМиНВ, здесь в §2 на трех статьях демонстрируется, что есть фундаментальный результат с продолжением и каким образом он порождает, да еще с 70 и более процентным заделом большое количество значимых статей оригинального казахского содержания, к чему и перейдем.

3°. Наука ИТМиНВ в трех результатах фундаментального уровня от 2019 года. Здесь три фундаментальные статьи ИТМиНВ, все с продолжением,

– первая закрепляет за ИТМиНВ новую схему исследований, где известная дополняется двумя казахскими составляющими,

– вторая и третья статьи – активно разработанные и постоянно разрабатываемые теории разворачиваются в казахском направлении с, надеемся, принципиальными улучшениями.

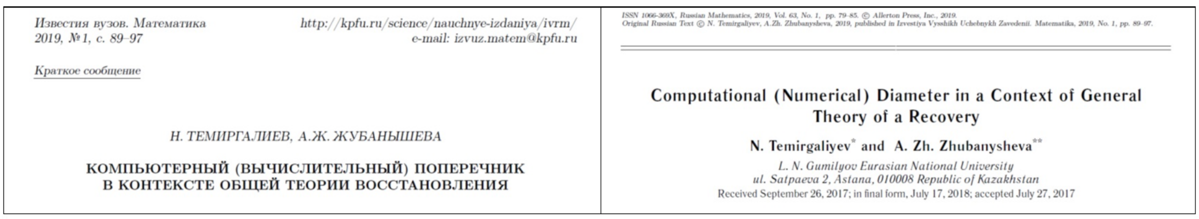
Получены и закреплены за ИТМиНВ в международной математической литературе три фундаментальных направления с внесением прорывной новизны.

В благодарность Московской математической школе и персонально советским русским математикам П.Л. Ульянову и С.М. Воронину, ИТМиНВ всегда стремится свои новые подходы и результаты сначала опубликовать на русском языке в российских журналах, которые переводятся на английский и издаются на Западе.

Отчетный 2019 год не был исключением:

a. *Н. Темиргалиев, А.Ж. Жубанышева Компьютерный (Вычислительный) Поперечник в контексте общей теории восстановления //Изв. вузов. Матем., 2019, №1, с. 89–97*

N. Temirgaliyev, A. Zh. Zhubanisheva *Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery// Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 1, pp. 79–85*



Известия вузов. Математика
2019, №1, с. 89–97

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, А.Ж. ЖУБАНЫШЕВА

КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК
В КОНТЕКСТЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

ISSN 1066-369X, Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 1, pp. 79–85. © Allerton Press, Inc., 2019.
Original Russian Text © N. Temirgaliyev, A.Zh. Zhubanysheva, 2019, published in Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, 2019, No. 1, pp. 89–97.

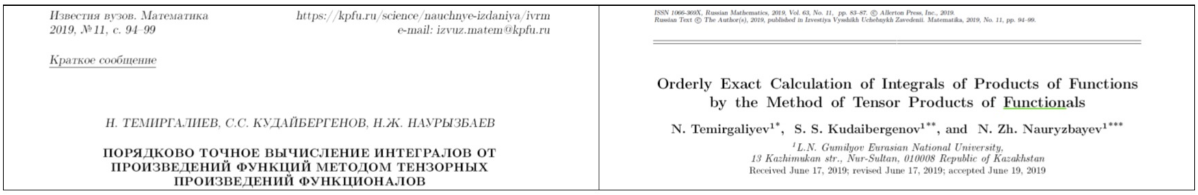
Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery

N. Temirgaliyev* and A. Zh. Zhubanysheva**

L. N. Gumilyov Eurasian National University
ul. Satpaeva 2, Astana, 010008 Republic of Kazakhstan
Received September 26, 2017; in final form, July 17, 2018; accepted July 27, 2017

b. *Н. Темиргалиев, С.С. Кудайбергенов, Н.Ж. Наурызбаев. Порядково точное вычисление интегралов от произведений функций методом тензорных произведений функционалов// Изв. ВУЗов. Математика. -2019.- №11. -С.94-99*

N. Temirgaliyev, S. S. Kudaibergenov, N. Zh. Nauryzbayev Orderly Exat Calulation of Integrals of Produts of Funtionsby the Method of Tensor Produts of Funtionals // Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 11, pp. 83–87



Известия вузов. Математика https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
2019, №11, с. 94–99 e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, С.С. КУДАЙБЕРГЕНОВ, Н.Ж. НАУРЫЗБАЕВ

ПОРЯДКОВО ТОЧНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ

ISSN 1066-369X, Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 11, pp. 83–87. © Allerton Press, Inc., 2019.
Russian Text © The Author(s), 2019, published in Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, 2019, No. 11, pp. 94–99.

Orderly Exact Calculation of Integrals of Products of Functions by the Method of Tensor Products of Functionals

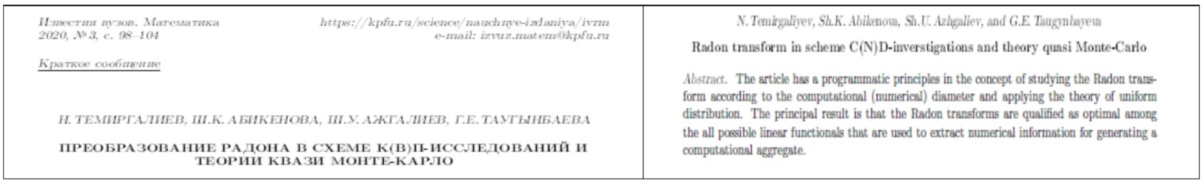
N. Temirgaliyev[1*], S. S. Kudaibergenov[1**], and N. Zh. Nauryzbayev[1***]

[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, 010008 Republic of Kazakhstan

Received June 17, 2019; revised June 17, 2019; accepted June 19, 2019

a. *Н. Темиргалиев, Ш. К. Абикенова, Ш. У. Ажгалиев, Г. Е. Таугынбаева Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло//Изв. вузов. Матем. -2020. № 3. –С. 98–104*

N. Temirgaliev, Sh. K. Abikenova, Sh.U. Azhgaliev, and G. E. Taugynbaeva The Radon Transform in the Sheme of C(N)D-Investigations and the Quasi-Monte Carlo Theory//Russian Mathematics. -2020. -Vol. 64. -No. 3. -P. 87–92.



Известия вузов. Математика https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
2020, №3, с. 98–104 e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, Ш.К. АБИКЕНОВА, Ш.У. АЖГАЛИЕВ, Г.Е. ТАУГЫНБАЕВА

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В СХЕМЕ К(В)П-ИССЛЕДОВАНИЙ И ТЕОРИИ КВАЗИ МОНТЕ-КАРЛО

N. Temirgaliyev, Sh.K. Abikenova, Sh.U. Azhgaliev, and G.E. Taugynbayeva

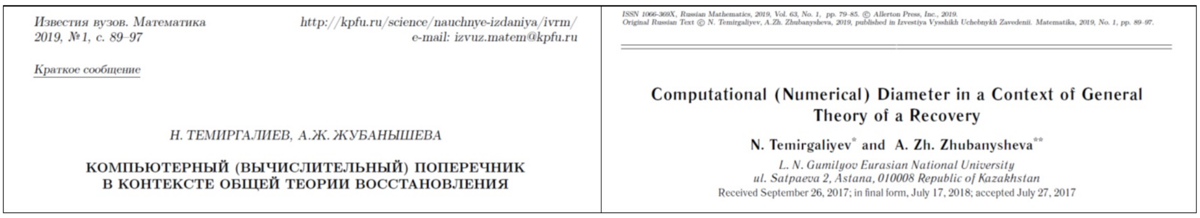
Radon transform in scheme C(N)D-inverstigations and theory quasi Monte-Carlo

Abstract. The article has a programmatic principles in the concept of studying the Radon transform according to the computational (numerical) diameter and applying the theory of uniform distribution. The principal result is that the Radon transforms are qualified as optimal among the all possible linear functionals that are used to extract numerical information for generating a computational aggregate.

4°. Использование в базовых интересах РК прорывной статьи

Н. Темиргалиев, А.Ж. Жубанышева Компьютерный (Вычислительный) Поперечник в контексте общей теории восстановления //Изв. вузов. Матем., 2019, №1, с. 89–97

N. Temirgaliyev, A. Zh. Zhubanisheva *Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery// Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 1, pp. 79–85*



Известия вузов. Математика http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
2019, №1, с. 89–97 e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, А.Ж. ЖУБАНЫШЕВА

КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК В КОНТЕКСТЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

ISSN 1066-369X, Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 1, pp. 79–85. © Allerton Press, Inc., 2019.
Original Russian Text © N. Temirgaliyev, A.Zh. Zhubanysheva, 2019, published in Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, 2019, No. 1, pp. 89–97.

Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery

N. Temirgaliyev* and A. Zh. Zhubanysheva**

L. N. Gumilyov Eurasian National University
ul. Satpaeva 2, Astana, 010008 Republic of Kazakhstan

Received September 26, 2017; in final form, July 17, 2018; accepted July 27, 2017

в подготовке кадров высшей квалификации для 4-ой промышленной революции.

В развернутом изложении это

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА 2018 год, том 124, номер 3		
№3	***Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж.*** Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника ***DOI:*** https://doi.org/10.32523/2616-7182/2018-124-3-8-88	стр. 8-88

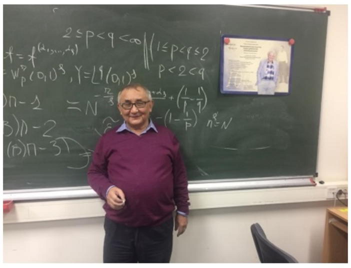
являющее собой отечественное прорывное достижение в Теоретической и прикладной математике – это новое для всего человечества (никак не меньше!) содержание классической теории от казахов

Из Сюжета 918, 14.01.2019 [Теория приближений – это когда сложный объект заменяют на объект простой, в первую очередь с целью обеспечения возможности эффективных вычислений, но обязательно с контролем возникающей при этом ошибки – неизбежной платы за удобства. Теория приближений возникла в работе П.Л. Чебышева 1854 года с вполне прагматичным названием *«Теория механизмов, известных под названием параллелограммов»* в формулировке: дана непрерывная функция $f(x)$, среди всех многочленов степени n найти такой $P(x)$, чтобы в данном промежутке $[a,b]$ выражение $\max|f(x)-P(x)|$ было возможно меньшим.
Так вот, это великое творение Пафнутия Львовича Чебышева (1821-1894) – как все время подчеркивал всегда предельно ответственный за свое каждое слово П.Л. Ульянов – потомка ханов Золотой орды (не от тюркского ли «Шыбыш», во всяком случае предлагается произносить «Чебышёв»), подверглось претензии казахов на свою современную трактовку в статье с «говорящим» названием

Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника //Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. 2018, 3 (124), С. 8-88, и далее по убывающей по степени гуманитаризации, но с увеличением прикладной составляющей.]

с поучительным отстаиванием своей позиции:

Казалось бы прозаический вопрос "Что такое Теория приближений?" понятен всякому. Был на представительной Конференции и слушая доклады по Теории функций как-то осознал, что через Компьютерный (вычислительный) поперечник (это то, что мы предлагали и что моментально понял и поддержал Сергей Михайлович Никольский и сразу же представил в Доклады РАН, но там работала какая-то комиссия, которая рецензировала представления академиков и мою статью отклонила с вердиктом "Не имеет смысла") можно по-новому взглянуть на Теорию приближений, Вычислительную математику и Численный анализ. Тогда сразу же обратился к Александру Моисеевичу Олевскому, который наряду с Евгением Михайловичем Никишиным и Сергеем Викторовичем Бочкаревым был кумиром вступающих в науку математиков тех лет и получил неожиданный ответ "Нурлан, что ты меня спрашиваешь, ты же это знаешь лучше меня". Порядком ошарашенный обратился к Борису Ивановичу Голубову и Валерию Ивановичу Иванову, надо сказать высоко несущих знамя своих учителей Петра Лаврентьевича Ульянова и Сергея Борисовича Стечкина. Но, к моему удивлению, они как-то дипломатично увернулись от ответа на мой вопрос. Но тех, кто отвечал на мой вопрос, сам парировал (выдвигал в качестве эталона описание Теории вложений из [**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. 2018, 4 (125), С. 8-68, и далее по убывающей по степени гуманитаризации, но с увеличением прикладной составляющей**]). В итоге, в Москве в Математическом институте имени В.А.Стеклова РАН на семинаре Сергея Александровича Теляковского делаю доклад на тему "Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника".



Это было 13 декабря 2018 года, начинаю свое выступление с вводной фразы (но не вопроса!) "Что такое Теория приближений? ". Вдруг неожиданно С.В. Конягин говорит "Я не отвечу на этот вопрос", тогда я рассказал об уклонениях от ответа Олевского, Голубова и Иванова, что Сергей Владимирович констатировал "Значит я в хорошей компании".
Когда четыре математика высшей квалификации независимо друг от друга не дают ответа на вопрос о том, в чем специалистами они являются, требует осмысления – это высшей степени ответственность (как у Григория Перельмана) или что-либо другое?
Из статьи
Темиргалиев Н. *Концепция С.М.Воронина в проблеме сравнений детерминированных и случайных вычислений в одних и тех же терминах* // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. 2019, 3(128), С.8-38.

В итоге, получаем бесконечное число Грантовых проектов в формате стабильной программы $\boxed{\text{A}}$, где $\boxed{\text{B}}$ составляет Парадигма статьи

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА 2018 год, том 124, номер 3		
№3	***Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж.*** Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника ***DOI:*** https://doi.org/10.32523/2616-7182/2018-124-3-8-88	стр. 8-88

которая делит Теорию функций на две части – попадающую под К(В)П-1 с последующим казахским К(В)П-2 и -3, что делает все оттуда требующим доисследования до завершенности с необъятным потенциалом новых задач для статей уровня не менее значимых, причем с окончательностью в своей постановке на все будущие времена и остальные со статусом «*Искусство для искусство*».

Да ещё с не менее 70%-ным казахским заделом, но с интригой, когда неясен ответ, что есть отличительная черта всех неулучшаемых результатов, даже если точны только в определенной шкале (в классических классах, как правило, степенной).

Да и от неожиданных преград нет никаких гарантий, все выясняется только при достижении конца доказательства.

Следующие две статьи показывают, что имеются и ожидаемое, и совершенно неожидаемое в казахском К(В)П. Этим отмечаем наполнение переменной части $\boxed{\text{B}}$ в разряде «неожиданного» при постоянном $\boxed{\text{A}}$.

5°. Использование казахского прорыва в Компьютерной томографии через статью

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2020, №3, с. 98–104 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, Ш.К. АБИКЕНОВА, Ш.У. АЖГАЛИЕВ, Г.Е. ТАУГЫНБАЕВА

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В СХЕМЕ К(В)П-ИССЛЕДОВАНИЙ И ТЕОРИИ КВАЗИ МОНТЕ-КАРЛО

Аннотация. Статья носит программный характер в концепции исследования преобразования Радона по схеме компьютерного (вычислительного) поперечника и применения теории равномерного распределения. Результат состоит в том, что к числу оптимальных среди всех возможных линейных функционалов, с которых снимается числовая информация для формирования вычислительного агрегата, относятся преобразования Радона.

Ключевые слова: преобразование Радона, компьютерный (вычислительный) поперечник, метод квази Монте-Карло, восстановление функций, предельная погрешность.

УДК: 518:517.392

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-98-104

1. Преобразование Радона. Вычислительная (или компьютерная) томография, основанная на преобразовании Радона [1]–[3], позволяющем численное восстановление функций по их линейным или плоскостным интегралам, приобрела социальную значимость и исследовательскую активность главным образом благодаря появлению и совершенствованию медицинских томографов, а работы А. Кормака и Г. Хаунсфилда были отмечены в 1979 г. Нобелевской премией.

Можно также отметить связанный с ним методологический аспект роли математики. Именно в этом ключе происходили события, вызванные изобретением техники, позволяющей при просвечивании материального объекта на выходе получить интенсивность луча, равным интегралу функции распределения плотности вещества вдоль траектории луча, с весьма точными описаниями на мероприятии [4] "Инновации через фундаментальные исследования. Вклад научных теорий и открытий в прогресс общества в целом (Венский университет, 2016)":

Ректор Венского университета (на примере И. Радона): "Часто вещи таковы, что математические теории находятся в абстрактной форме, возможно, рассматриваются как стерильные уловки, которые внезапно оказываются ценными инструментами для физических знаний и, таким образом, неожиданно раскрывают их скрытую силу".

Карл Зигмунд: "Иоганн Радон исследовал абстрактные проблемы так называемой чистой математики и понятия не имел, что сегодня преобразование Радона является основой

Поступила в редакцию 25.09.2019, после доработки 25.09.2019. Принята к публикации 25.09.2019.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05132938 "Преобразование Радона в задачах дискретизации").

98

Опять же со специальным полным изложением в модельной ситуации казахской Теории компьютерной томографии для обеспечения усвоения и продолжения в ВУЗах и НИИ РК, с необъятным потенциалом проведения качественных исследований, закрепленная в этой фундаментальной статье, в развернутом виде представлена в Несущей статье номера

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
2019 год, том 129, номер 4, С. 8-53
Н. Темиргалиев, Ш.Абикенова, Ш.Ажгалиев, Г.Таугынбаева, А.Ж. Жубанышева.
Преобразование Радона в Схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло

Как это получается в ИТМиНВ? Наука это тоже борьба – схватка с сокрытым и неизвестным, чего ни вымолить, ни испугать, ни купить даже с "Ослом, нагруженным золотом", и в этом что-то божественное.

Эпизод из жизни Института. Так решаются математические задачи. На доске все неизвестное написано. Сидим, смотрим и думаем. На кону свой по существу поворотный в мировой математической теории медицинской томографии казахский вызов. Какой-либо комментарий, слово (в том числе и неосторожное), вопрос могут вызвать цепочку мыслей, приводящих к решению исследуемой задачи.

Ночью все наработанное и обсужденное аккуратно просчитано и – Победа!

Ввиду большего количества разнообразных научных тем, в целях повышения квалификации сотрудников, Институт действует по принципу Научной школы С.Б. Стечкина, в которой задачи закрепляются персонально, но в обсуждении участвуют все, однако даже предложение решающего способа в решении исключает авторство и, даже, соавторство.

Следуя принципу С.М. Воронина, в научной статье от ИТМиНВ вклад каждого из авторов принимается равным.

Этим изложена программа $\boxed{\text{В}}$ в Компьютерной томографии от ИТМиНВ, при том же неизменном $\boxed{\text{А}}$, с неограниченным потенциалом Грантовых бюджетных разработок.

Тем самым, сначала научная разработка, только затем практические применения:

1. Можно ли все действующие медицинские приборы Компьютерной томографии перепрограммировать по алгоритму ИТМиНВ?
2. Можно ли создать новые приборы по алгоритму ИТМиНВ через промышленность Казахстана?
3. Целесообразно ли обратиться в зарубежный Завод-изготовитель томографических приборов с алгоритмом ИТМиНВ – Количественной формой преобразования Радона.
4. Сейсмическая томография с приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизики

и т.п. разработки в разных сферах применений.

6°. Использование казахского прорыва в «Теории осцилляции»

Н. Темиргалиев, С. С. Кудайбергенов, Н. Ж. Наурызбаев Порядково точное вычисление интегралов от произведений функций методом тензорных произведений функционалов// Изв. вузов. Матем. -2019. -№ 11. –С. 94–99

N. Temirgaliyev, S. S. Kudaibergenov, N. Zh. Nauryzbayev Orderly Exat Calulation of Integrals of Produts of Funtionsby the Method of Tensor Produts of Funtionals // Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 11, pp. 83–87

Известия вузов. Математика
2019, №11, с. 94–99

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ, С.С. КУДАЙБЕРГЕНОВ, Н.Ж. НАУРЫЗБАЕВ

ПОРЯДКОВО ТОЧНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ

Аннотация. Изучается вопрос о приближенном вычислении интегралов от произведений двух функций методом тензорных произведений функционалов. В предположении, что одна из них из класса Соболева с доминирующей смешанной производной, а другая с быстрой осцилляцией, получены неулучшаемые в степенной шкале оценки возникающей при этом погрешности. Также проводится сравнительный анализ с известными методами в теории осцилляций.

В чем суть казахсткого прорыва в «Теории осциляции»?

Интеграл, как и производная, относится к вечным темам исследований:

Ю.И. Манин: *«К основным математическим моделям относится понятие интеграла – одна из центральных и постоянно повторяющихся тем в истории математики за последние два тысячелетия».*

В.П.Хавин: *«Вопрос «"Зачем нужен интеграл" немногим отличается от вопроса "Зачем нужна математика?", ибо часто там, где используется математика, используется именно интеграл.*

Казахский подход:

- начат

Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. - 1990. -Т. 281. №4. -С. 490-505.

Temirgaliev N. Application of the divisors theory to numerical integration of periodic functions in several variables// Math. USSR-Sb. -1991. –Vol. 69. №2. –P. 527–542

- продолжен в статьях

Темиргалиев Н., Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН. 2007. –Т. 416. №2. –С. 169-173. // Temirgaliyev N., Bailov E.A., Zhubanysheva A.Zh. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables //Dockland Mathematics. 2007. -P. 681-685.

А. Ж. Жубанышева, Н. Темиргалиев, Ж. Н. Темиргалиева Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. -2009. –Т. 49. -№ 1 . –С. 14–25 // A. Zh. Zhubanysheva, N. Temirgaliev, Zh. N. Temirgalieva Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas// Comput. Math. Math. Phys. -2009. –Vol. 49. -№ 1. –P. 12–22

- завершен (в качестве образцового результата, с необъятным потенциалом исследований для различных видов "гладкости" подынтегральной функции) *Баилов Е.А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных//Журнал вычислительной математики и математической физики - 2014. -Т. 54. № 7. -С. 1059- 1077// M. B. Sikhov, N. Temirgaliev, "On an Algorithm for Constructing Uniformly Distributed Korobov Grids", Math. Notes, 87:6 (2010), 916–917*

***

«Теория осцилляций» - казахский подход закреплен в статье

Н. Темиргалиев, С. С. Кудайбергенов, Н. Ж. Наурызбаев Порядково точное вычисление интегралов от произведений функций методом тензорных произведений функционалов// Изв. вузов. Матем. -2019. -№ 11. –С. 94–99// N. Temirgaliyev, S. S. Kudaibergenov, N. Zh. Nauryzbayev Orderly Exat Calulation of Integrals of Produts of Funtionsby the Method of Tensor Produts of Funtionals // Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 11, pp. 83–87
за ИТМиНВ, - это особый вид интеграла, к которому неприменимы все методы, разработанные для обычного интеграла.

«Теория осцилляций» возникла в 1928 году и активные разработки с тех пор ведутся по настоящее время, в котором казахский метод приводит к результатам принципиально нового содержания – явные формулы без дальнейших улучшений.

Опять же открывается оперативный простор для оригинальных исследований, даже по ранее разработанным работам казахи не учатся, а сидят и смотрят, что и почему в них незавершено.

Здесь опять отметилась Галия Таугынбаева, которой установлено, что в порядковом отношении среди всех мыслимых вычислительных агрегатов, построенных по линейной информации, многочлены Лагранжа дают наилучшее восстановление, более того интерполяцию функций с ограниченной производной заданного порядка, если только их использовать в сплайн-форме, и тем обоснован подход Филона, где интерполяционные многочлены Лагранжа использовались по интуиции.

По развёрнутому изложению казахского метода в «Теории осцилляции» готовится статья в номер 2020 года журнала «Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика».

Все это составляет неограниченный потенциал для $\boxed{\text{B}}$, как всегда, с фиксированным $\boxed{\text{A}}$ в Грантовой связке $\boxed{\text{A}} \times \boxed{\text{B}}$.

В итоге, Казахстан в формате $\boxed{\text{A}} \times \boxed{\text{B}}$, только через ИТМиНВ-2019 имеет неограниxенное количество тем PhD диссертаций для подготовки IT-специалистов высшей квалификации.

А. АВТОРСКИЕ ОСНОВЫ БАЗОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ – казахский аналог общей подготовки в PhD докторантуре США - - Темірғалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). -2019. -1900 б. – Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ. – Астана, 2012. – Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ. – Астана, 2012.		Н. Темиргалиев, А.Ж. Жубанышева Компьютерный (Вычислительный) Поперечник в контексте общей теории восстановления //Изв. вузов. Матем., 2019, №1, с. 89–97 *N. Temirgaliyev,* A. Zh. Zhubanisheva *Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery// Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 1, pp. 79–85* Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2018. –Т. 124. -№ 3. –С. 8-88.
	X	Н. Темиргалиев, С.С. Кудайбергенов, Н.Ж. Наурызбаев. Порядково точное вычисление интегралов от произведений функций методом тензорных произведений функционалов// Изв. ВУЗов. Математика. -2019.- №11. -С.94-99 *N. Temirgaliyev, S. S. Kudaibergenov, N. Zh. Nauryzbayev Orderly Exat Calulation of Integrals of Produts of Funtionsby the Method of Tensor Produts of Funtionals // Russian Mathematics, 2019, Vol. 63, No. 11, pp. 83–87*
		Н. Темиргалиев, Ш. К. Абикенова, Ш. У. Ажгалиев, Г. Е. Таугынбаева Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло//Изв. вузов. Матем. -2020. № 3. –С. 98–104 N. Temirgaliev, Sh. K. Abikenova, Sh.U. Azhgaliev, and G. E. Taugynbaeva The Radon Transform in the Sheme of C(N)D-Investigations and the Quasi-Monte Carlo Theory//Russian Mathematics. -2020. -Vol. 64. - No. 3. -P. 87–92. Н. Темиргалиев, Ш.Абикенова, Ш.Ажгалиев, Г.Таугынбаева, А.Ж. Жубанышева Преобразование Радона в Схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2019. –Т. 19. -№ 4. –С. 87-92.

§3. Создание учебника (пусть даже с многими, надеемся, новыми оригинальными методическими решениями «Математикалық анализ») и наука (пусть даже с защитами в советское время в Математическом институте В.А. Стеклова АН СССР, находящегося в передовых позициях современной Математики и Компьютерных наук) – как могут соотноситься между собой во времени и по значимости по опыту ИТМиНВ

Учебник – завершение гарантировано, наука – все наоборот. Разница между учебником по общей дисциплине (конечно, здесь имеется ввиду базовый учебник по

Математическому анализу) и наукой. Учебник – это всегда что-нибудь да получится, удачный или неудачный – это другой вопрос. В науке получить что-то новое – это очень редкая удача, даже в масштабах всей жизни: И.Ф. Шарыгин (в частной беседе с В.Ю. Протасовым, ныне молодым член-корр. РАН) "Наука – вещь опасная и жестокая, можно всю жизнь прожить зря".

Считается, что наука во всем своем движении в современности через интернет доступна уже всем и приобрела совершенно иные формы (в качестве контраста отметим, что во времена Второй Мировой СССР выписывал все ведущие научные иностранные журналы).

1. В связи с чем отметим, что публикации в рейтинговых журналах – только первый этап заявки на содержательный результат. Авторитетное свидетельство тому [Горобовец Б.Г., Круг Ландау: Физика войны и мира. М.: ЛИБРОКОМ 2009,стр.155-161]:

Даже в те годы, когда количество научных журналов было во много раз меньше, Ландау утверждал, что 90 % работ, публикуемых в «Physical Review», самом известном физическом журнале в мире, относятся к разряду «тихой патологии» - тихо и ненужно ковыряется в своей области.

Еженедельный - по четвергам ровно с 11 часов - семинар Л. Ландау работал с середины 30-ых гг. в Харькове до трагического 7 января 1962 года в Москве.

Л.Ландау сам отбирал статьи и назначал докладчиков на семинаре, никто не мог сослаться на свою некомпетентность в каком-то вопросе для оправдания невозможности прореферировать ту и или иную статью, что обеспечивала универсальная подготовка, которую давал его (с Е.М. Лифшицем) знаменитый теоретический минимум,- состоящий из 10 книг «Курс теоретической физики».

Оценки результатов статьи:

1. **«Выдающаяся» - вносится в «Золотую книгу» семинара.**
2. **«Интересные вопросы для дальнейшего исследования» - записывалась в «Тетрадь проблем».**
3. **«Патология» - нарушены принципы научного анализа либо в постановке задачи, либо в ее решении.**
4. **«Тихая патология» - тихо и ненужно ковыряется в своей области, но «чужих результатов не присваивает», «своих результатов не имеет», «лженаукой не занимается».**
5. **«Бред», «бредятина».**
6. **«Эксгибиционизм!» - «Самореклама»!: «Псевдонаучные труды», «Агрессивная претензия на научный результат».**
7. **«Эксгибиционист»: не умеет рассказывать свои (и чужие) работы, но готовый делать доклады где угодно и невзирая ни на какие трудности.**

О том же читаем у В.И.Арнольда [В.И. Арнольд «Истории давние и недавние (Издание второе, дополненное)» Москва: ФАЗИС, 2005., стр.137]:

4. Цитирования. Часто встречается странная форма ссылки: «Это открыл x (в статье [y]), см. также [z]». Для себя я перевожу эту зашифрованную фразу в её исходную форму, которую автор захотел почему-то скрыть: «Это открыл автор W статьи z , но я узнал его результат из статьи y моего друга x ».

Такие дезориентирующие читателя ссылки, как «см. также», совершенно аморальны.

Мои иностранные коллеги объяснили мне, что в наш век «все» ссылаются не на первооткрывателей (вроде Колумба), а на того, кто последним использовал нужный факт (как это было когда-то с Америго Веспуччи).

Этот обычай социально значим: он поощряет многочисленных эпигонов быстро публиковать свои маловажные работы (чего требуют и учёные советы, где защищаются диссертации). Именно из-за этого публикуется в сотни раз больше статей, чем надо.

Я не стану приводить (слишком многочисленные) примеры, так как опасаюсь за свою жизнь.

Автор от С.Б.Стечкина на его семинаре в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР вынес положение *«Надо решать задачи, а не доказывать теоремы, которое я могу доказать по десять в день»* (которое потом было оформлено как завещание в форме «**Теорема – ничто, задача - все**» (см. [Стечкин С.Б. Избранные труды: Математика. М.: Наука, Физматлит.1998., стр. 356]).

По базе Web of Science и Scopus имеется порядка 250 журналов по Математике и столько же по Прикладной математике, тысячи по Компьютерным наукам, которые широко доступны и все материалы в них можно считать полуфабрикатами для многочисленных локальных и, реже, для значимых результатов, чаще, как правило, для не очень сложных обобщений.

Когда, добавив какие-то параметры или переходя в другие структуры, например, в теории функций от одной ортогональной системы к другой, можно сравнительно легко получать новые написания, которые можно опять опубликовать, даже наращивая индекс Хирша (что находящиеся вне науки воспринимают как безусловный показатель качества в виде востребованности).

Вообще, выбор задачи, в которую можно себя вогнать на какое-то время, очень трудная проблема, это и целый мир, как говорил С.Б. Стечкин «*Слишком точно ставить задачи – ошибка молодости*» и это высказывание можно понимать и трактовать по-разному, чем мы заниматься не будем. Хотя, быть может, это можно понимать как какую-то защиту от, как меня предупреждал П.Л. Ульянов, «*Наука по своей сути занятие нервное: сидишь день, неделю, месяцы, годы – ничего не получается*».

При мне С.М. Воронин десять лет жизни отдал Бинарной проблеме Гольдбаха, на что С.Б. Стечкин сказал «*Я не дурак, чтобы заниматься задачей, которую я не решу*».

Завершим тему выбора задачи цитированием В.М. Тихомирова *«Подавляющее большинство математиков годы и годы, а иногда и десятилетия тратят на развитие одного математического сюжета, создание некоей теории или решение какой-то отдельной задачи. Нередко на это уходит вся жизнь - большинство математиков "специализируются" лишь в одной какой-то области. Самые крупные меняют темы своих занятий два, три раза, величайшие, как Гильберт - чуть больше (у Гильберта было восемь "сюжетов")»* (Квант. -1993. № 3-4. С. 3-10).

Насколько уровень науки автора отражается на качестве учебника? Есть учебная литература по базовым дисциплинам, в первую очередь, математический анализ, алгебра и геометрия. Возникает вопрос, насколько научная работа влияет на качество учебника. Осмысление учебников математического анализа показывает, чем глубже автор в математике, тем больше оригинальных наблюдений и методических решений в его учебнике. Тут, видимо, сказывается то обстоятельство, что в процессе научной работы приходится много думать, причем на уровне базовых основ той теории. Если же удается привлечь иные теории, то чем дальше, тем продуктивнее проводимые исследования. При таких обстоятельствах от редакторов научных журналов приходится слышать о трудностях в подборе рецензентов для таких статей – постановки задач в одной области математики, а методы доказательств из совершенно других. Здесь, уже из собственного опыта и наблюдений, можно констатировать, имея ввиду и школьную математику, и университетские учебники, что чем ближе к началам математики, обучение чему и есть назначение учебников, тем больше требуется понимания математики. Тем самым, методические решения – это прямое отражение компетентности, если математику не понимать, то есть не понимать то, чему ты хочешь научить других, то, в принципе, наверное, за редкими удачами, вряд ли можно иметь какой-либо успех.

Руководитель авторского коллектива учебника может иметь ясный и методически совершенный план его написания, который может быть по-другому понят остальными членами команды.

Известно, что учебниках А.Н. Колмогоров имел соавторов. Когда началась всесоюзная критика школьных учебников А.Н. Колмогорова, говорят, что он сказал «Меня подвели соавторы». Действительно вызывает удивление, что в школьном учебнике при изложении дифференциального исчисления не приводится определение предела, но на языке предела дается определение производной, да и еще, получается безосновательно, доказываются правила дифференцирования. Еще вызывает сожаление, что из-за строгости изложения, основные элементарные функции – логарифм, показательная и степенная с любым действительным показателем, выносятся на последнюю, четвертую, четверть выпускного класса, то есть совершенно без шансов усваивания. По учебнику «Функциональный анализ» П.Л. Ульянов говорил, что все написанное самим Колмогоровым – это совершенно чистое, абсолютно точное, а потом начинаются, как говорил Ульянов, «*очень много ошибок*». Здесь можно высказать сомнение в правоте, когда сначала излагается собственно функциональный анализ, а только потом – Мера и интеграл Лебега, что очень неожиданно, поскольку основная реализация метрических пространств и операторов делается через полноту, то есть через интеграл Лебега, но не Римана. То же можно сказать и по теории вероятностей, когда начальные несколько параграфов Колмогорова – это одно, а дальнейшее изложение – это другое, со словами «может быть»-«может не быть» в объяснении предмета теории вероятностей через какие-то природные явления, и еще, и еще расплывчатое.

Когда создаешь учебник по математическому анализу, но не имеешь высоких научных результатов, то психологически это очень тяжело, так вроде бы это уход от ненадежной в результатах научной работы к всегда результативному в смысле текста учебнику.

Насколько базовое образование отражается на качестве научных исследований, иначе говоря, какое соотношение между учебником и результативностью научной работы. Могу опять же на собственном опыте сформулировать так: то, что я смог осмыслить по-новому математический анализ, отразилось на научной работе. 29 февраля 1988 года Сергей Михайлович Воронин указал мне на доказательство Эйлера гипотезы Ферма о том, что всякое простое число, сравнимое с 1 по модулю 4, представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. И уже 8 апреля 1989 года Сергей Михайлович Никольский сказал «*Оформляйте (докторскую) диссертацию (для защиты в Стекловском институте), Ульянову я сам скажу*». Это все произошло, я так думаю, из-за математического анализа.

Продолжим, обычно считается, что в математике можно либо решать известные нерешенные проблемы, либо можно ставить новые задачи.

О первом, как сообщает В.И. Арнольд в передаче С.П. Капицы «Очевидное-невероятное», А.Н. Колмогоров говорил так: «*Меня упрекают в том, что я математик без теорем, который никогда ничего не доказывает. Который гораздо больше умеет ставить задачи, чем решать их, но я считаю, что это возможно и правда, это скорее не недостаток, а похвала*».

В ИТМиНВ получается еще один случай, когда имеющиеся в тысячных публикациях известные задачи принимают совершенно иной вид в решениях: это К(В)П-подход как абсолюно новое продолжение разработанной задачи, это люди решали, оценивали – Метод квази Монте-Карло и по Генератору случайных чисел метод Ковэю-Макферсона. Еще один вид радикального поворота в разработанном – это по Радону, там задача не ставилась, там были одного сорта решения, мы даем совершенно другого сорта, даем окончательность полученного алгоритма среди всех алгоритмов по линейной информации, да еще с принципиально новым результатом вычисления предельной погрешности. Вот такие исключительно новые результаты. Или же по Теории осцилляции, – вместо теорем качества «Пишем, что получается», выдаются окончательные новые явные формулы с точным порядком возникающей погрешности.

Психологический дискомфорт – создавать фундаментальный учебник, когда фундаментального научного результата еще нет. Попросил у своего научного руководителя-учителя П.Л. Ульянова тему докторской диссертации в 1978 году, когда приехал в Москву на его 50-летие, он мне ответил *«Вы кандидат наук, сформировавшийся ученый и тему докторской диссертации для себя должны найти сами»*.

Со мной было так, я очень плотно занимался методикой преподавания математического анализа, был доцентом Математического факультета КазГУ. В те времена необходимо было предоставлять ежегодные научные отчеты. Из-за чего теорему вложения Ульянова, у него было вложение в пространство Лебега, стал переносить на пространство Лоренца, – без трудностей, и по сложившейся тогда методике аккуратно просчитал. Ничего не подозревая, в процессе счета у меня появился какой-то особый предельный случай, к которому особого значения не придал, просто очень грамотно по всем канонам математического анализа проивел вычисления. Когда эти результаты показал Ульянову, то он мне сказал, что это основной результат докторской диссертации, теперь нужно только дополнить для диссертационной массы, рядом лежащими задачами, тогда это будет законченная докторская диссертация. В то время причин этой высокой оценки я не очень понял. Сейчас, когда, как оказывается, в число главных научных результатов, составляющих наследие П.Л. Ульянова, относят и эту теорему вложения и если визуально сопоставить эти два результата:

$$H_p^\omega \subset L^q \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q(\frac{1}{n}) < +\infty (1 \le p < q < \infty)$$

и

$$H_p^\omega \subset L(\mu,\nu) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{p}-\frac{\nu}{\mu}-1}\omega^\nu(\frac{1}{n}) < +\infty \ (\mu > p,\ 0 < \nu < \infty), \\ \sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{\nu}{p}}}\omega^\nu(\frac{1}{n}) < +\infty \ (\mu = p,\ 0 < \nu < p). \end{cases}$$

то ясно почему Петр Лаврентьевич так решил.

Различие в жизненном укладе в процессе создания учебника и научного поиска. Работа над школьным учебником «Алгебра и начала анализа» длилась два года, отдельные темы переписывались до 15 раз, все время с уточнениями или совершенно иным подходом. То же с вторым изданием «Математикалық анализ», если первое издание было на 1120 страницах, то второе издание было поднято до 1900 страниц, т.е. было увеличено на 780 страниц, все это осмысление проводилось на фоне понятого по 22-ум собственным оригинальным направлениям и темам в современной Математике и Компьютерных науках.

Учебник привязывает к письменному столу как коронавирус к жилищу тогда как в научных размышлениях такого ограничения свободы нет, разве лишь при проверке возникшей идеи или догадки.

Еще раз вспомним пройденный путь! В 1974 году приступил к преподавательской деятельности в КазГУ, следуя своему замыслу, с 1974 по 1979 год, будучи старшим преподавателем, затем доцентом Кафедры математического анализа, прочитал и переработал все доступные мне учебники, – это советских авторов и переводные по математическому анализу, и еще читал лекции по математическому анализу одновременно 3 потокам. Постоянно находил какие-то методические решения и изложения тем, которые очень торопился апробировать на студентах. Поэтому к 1979 году набрал материал, разработал свои подходы к изложению программных вопросов, и после защиты первой кандидатской диссертации своей ученицы Есентай Алшынбаевой в Тбилиси, сразу же приступил к самому процессу создания учебника, что продлилось 8 месяцев. Это я каждые сутки работал по 18 часов, и материал первого тома, сейчас надо уже говорить первого издания, закончил 23 мая 1980 года. Так фронтавики помнять даты своих наступлений, научные задачи и учебники – тоже война.

§4. Возвышение Казахстана в современной Математике и Компьютерных науках в формате «*Направленные на активизацию научных исследований доклады на основе фундаментальных результатов с продолжением*» ≡ «АКТИВИЗАЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ» через инициирование проведения в Казахстане крупных международных научных мероприятий с доминирующей от Казахстана программой

«ОБРАЩЕНИЕ ИЗ КАЗАХСТАНА К МАТЕМАТИКАМ И ИНФОРМАТИКАМ –ADRESS FROM KAZAKHSTAN TO MATHEMATICIANS AND INFORMATICS»

Дорогие коллеги!

Здесь ниже изложено казахское видение Научного мероприятия в номинациях:

I. **ИСХОДНЫЕ ПОЗИЦИИ**
II. **СТРАТЕГИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ НАУЧНОГО МЕРОПРИЯТИЯ**
III. **НАУЧНАЯ ЦЕЛЬ МЕРОПРИЯТИЯ**
IV. **ИДЕОЛОГИЯ АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ**
V. **ВАРИАНТ РЕАЛИЗАЦИИ АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ (на научной базе ИТМиНВ)**
VI. **ДРУГИЕ ТЕМЫ ДЛЯ АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ (от ИТМиНВ)**
VII. **РАЗВЕРНУТОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ**
VIII. **АВТОРСКИЕ ОСНОВЫ БАЗОВОЙ ПОДГОТОВКИ**

I. ИСХОДНЫЕ ПОЗИЦИИ

В научной практике имеются много разных видов конгрессов, конференций, семинаров, как правило, с докладами «Кто что может», но в предлагаемом формате «**АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ**» будет казахским now-how.

1°. Предложить темы и докладчиков АКТИВИЗАЦИОННЫХ докладов (необязательно только из Казахстана)

2°. На основе тем АКТИВИЗАЦИОННЫХ докладов будут определены Секции Научного мероприятия

3°. Предложения в формировании Организационного комитета: организаторы и соорганизаторы Научного мероприятия (организации – университеты, академии и т.п), Международный организационный комитет – Председатель, Сопредседатель(и), Секретарь, члены Международного организационного комитета, Исполнительный организационный комитет – Председатель, Сопредседатель(и), Секретарь, члены Исполнительного организационного комитета).

4°. Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, следуя Принципу «*Математики не говорят «Прочитайте сами наши (обычно подразумеваемые как содержательные) статьи», а приезжают к специалистам с ознакомительными докладами*», имеет возможность командно выступить с научными докладами на все 22 темы из п. VI по согласованию.

II. СТРАТЕГИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ

Четвертая промышленная революция стремительно врывается в вечный путь Человечества. В связи с чем, перед каждой страной усиливается задача массовой подготовки математиков и IT-специалистов высшей квалификации с мощной базовой подготовкой и, что чрезвычайно важно и в этом стратегическая цель Научного мероприятия, опытом решения задач на переднем крае математики-информатики со значимыми результатами (так, например, в 5G технологиях преимущественное место занимает математика). Только такого качества специалисты могут поставить на службу своих стран достижения IT-технологий, впечатляющих сегодня, дальнейшее, неуклонно преобразующее все привычное, развитие которых даже в общих чертах непредсказуемо. Но, можно вполне определенно, как минимум, утверждать, что исполнение текущих задач «Цифровой экономики», и им подобных превращается в «рутинный» процесс, пусть иногда даже с элементами творчества».

III. НАУЧНАЯ ЦЕЛЬ – АКТИВИЗАЦИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО КАЗАХСКИМ ЛЕКАЛАМ

Основным рабочим инструментом являются Активационные доклады по фундаментальным результатам на переднем крае Международной Математики и Компьютерных наук, с большим потенциалом дальнейшего развития.

IV. ИДЕОЛОГИЯ АКТИВАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ

В Активационных докладах, согласно Годфри Харди (из «Апологии математика»),

*«**Значительная математическая идея, серьёзная математическая теорема** должна обладать "общностью" в каком-то следующем смысле. Идея должна быть составляющей частью многих математических конструкций, используемых в доказательствах многих теорем различного рода. Теорема должна быть такой, что даже если первоначально она сформулирована в весьма частном виде (как теорема Пифагора), она должна допускать существенное обобщение и быть типичной для целого класса теорем аналогичного рода.»*
должна быть намечена общая траектория создания и развития «*математической дисциплины*»: сначала возникает идея, затем на ее основе формулируется постановка задачи со всеми сопутствующими определениями и предшествующей историей, ценность которой передают (или показывают ее несостоятельность) их решения в форме теорем в качественных показателях от информативности до красоты формулировок, которые, затем в контексте Колмогоровского «*Нас много*» (в смысле "много" нуждающихся в публикациях), говоря словами С.Б.Стечкина, «*обрастают обобщениями, вариантами и аналогами*» в «*непрерывно увеличивающейся вплоть до необозримости журнальной литературе*».

V. ВАРИАНТ РЕАЛИЗАЦИИ АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ (на научной базе ИТМиНВ)

Свое видение Активизационных докладов продемонстрируем на результатах ИТМиНВ:

Активизационный доклад №1: ИРРЕГУЛЯРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МЕТОД КВАЗИ-МОНТЕ КАРЛО

Это направление исследований возникло во время Атомного проекта «Манхеттен», когда потребовалось вычисление интегралов большой кратности, к чему, как оказалось, математика не была подготовлена.

Тогда Иохим фон Нейман предложил узлы квадратурной формулы случайным образом определять по числу реакций счетчика Гейгера, впоследствии эта идея была оформлена в метод Монте-Карло.

Согласно К. Роту, данная тема отнесена к перспективным направлениям исследований в математике-информатике XXI века с обширными применениями.

Активизационный доклад №2: ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ В НОВОМ СОДЕРЖАНИИ ЧЕРЕЗ КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК (сокращенно - К(В)П)

К(В)П предлагается как синтез известного и, как говорят на Западе, казахского, в котором выдержаны требования К. Флетчера «*включать в себя в качестве составных частей формулировку задачи, математический анализ, построение алгоритма и доведение компьютерной программы до того, чтобы она давала результаты*» и продолжены в оптимальном режиме с возможностью вычислений информационных функционалов с погрешностью, на основе нахождения их «предельных» величин, все еще сохраняющих оптимальные порядки восстановления по точной информации, что ранее в математической литературе не встречалось.

Активизационный доклад №3: ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В КОНТЕКСТЕ НОВОГО ПОДХОДА К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ НА ОСНОВЕ К(В)П

На примере классических уравнений математической физики даны результаты К(В)П-исследований, окончательные в своих постановках.

Активизационный доклад №4: ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА В КОНТЕКСТЕ КОМПЬЮТЕРНОГО (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО) ПОПЕРЕЧНИКА

К(В)П-постановка вносит математическое обеспечение в практическую томографию, когда вид оптимального функционала определяет устройство физического прибора, а оптимальный вычислительный агрегат с найденной предельной погрешностью – программное обеспечение без излишней точности, что, конечно, ускоряет и, одновременно, удешевляет процесс сканирования.

Активизационный доклад №5: ТЕОРИЯ ОСЦИЛЛЯЦИЙ И ИХ РАЗВИТИЕ В КОНТЕКСТЕ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ

Самостоятельное значение и многочисленные применения имеет задача приближенного вычисления интегралов вида $\int_{[0.1]^s} f\left(x\right) h\left(x\right) dx$, где $f(x)$- гладкая функция, а $h(x)$- сильно колеблющаяся.

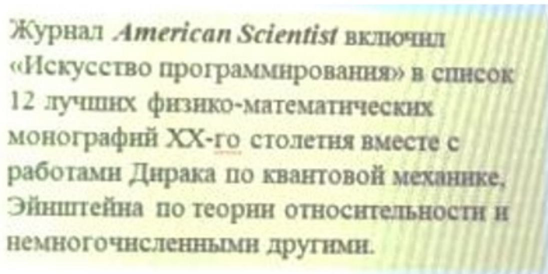
Как оказалось, Метод тензорных произведений функционалов приводит к оптимальным операторам восстановления с контролируемой погрешностью, в которых раздельно используются значения f в точках и тригонометрические коэффициенты Фурье *«турбулентной»* функции h, что, по-видимому, что есть идеальное информационное сочетание свойств подынтегральных функций.

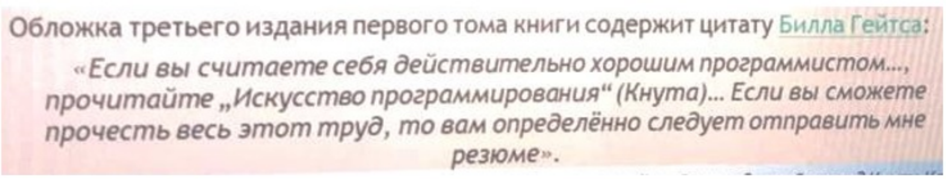
Активизационный доклад №6: ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ В КОНТЕКСТЕ К(В)П

По задаче приближенного вычисления производных – вечной проблеме человечества, - в различных модельных ситуациях с бесконечно различными продолжениями получены результаты, окончательные на все будущие времена.

Активизационный доклад №7: ГЕНЕРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ ЛЕХМЕРА С МАКСИМАЛЬНЫМ ПЕРИОДОМ ПО ТРЕБОВАНИЯМ КОВЕЮ-МАКФЕРСОНА И ОБШИРНЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Здесь, ввиду особой роли данного направления для Компьютерных наук, позволим себе обширное цитирование с сопровождающими комментариями:





[Из Википедии]
в следующей последовательности, – комментарии с цитатами.

Слова одного из главных в мире работодателей Билла Гейтса не нуждаются в дополнительных объяснениях: *«Если вы считаете себя действительно хорошим программистом... прочитайте „Искусство программирования" (Кнута)... Если вы сможете прочесть весь этот труд, то вам определенно следует отправить мне резюме»,* а каким будет отношение Билла Гейтса к тем, кто решил ключевую проблему, возведенную в ранг центральной в практическом генерировании случайных чисел самим Дональдом Кнутом, которую не смог преодолеть весь мир Компьютерных наук, хотя в течение 50 лет непрерывно штурмовал эту научную крепость.

Роль монографии Д.Э. Кнута «Искусство программирования» (The Art of Computer Programing) в мире Компьютерных наук возводится на уровень всего человечества:

Журнал American Scientist включил «Исскуство программирования» в список 12 лучших физико-математических монографий XX-го столетия вместе с работами Дирака по квантовой механике, Энштейна по теории относительности и немногочисленными другими.

Обратимся к самой монографии

3.3.4. Спектральный критерий

В этом разделе рассматривается особенно важный метод проверки качества линейных конгруэнтных генераторов случайных чисел. Все хорошие генераторы проходят проверку спектральным критерием; все генераторы, известные сейчас как плохие, фактически *провалились* при этой проверке. Таким образом, спектральный критерий является наиболее мощным известным до сих пор критерием и заслуживает особого внимания. В процессе обсуждения будут выяснены те ограничения на степени случайности, которые не могут быть преодолены при использовании линейных конгруэнтных последовательностей и их обобщений.

Спектральный критерий обладает свойствами как теоретических, так и эмпирических критериев, рассмотренных в предыдущих разделах. Он похож и на теоретические критерии, поскольку проверяет свойства последовательности на полном периоде, и на эмпирические критерии, поскольку для получения результата требует вычислений на компьютере.

Добытые за 50 лет знания:

Таблица 1

ВЫБОРОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО КРИТЕРИЯ

Строка	a	m	ν_2^2	ν_3^2	ν_4^2	ν_5^2	ν_6^2
1	23	10^8+1	530	530	530	530	447
2	2^7+1	2^{35}	16642	16642	16642	15602	252
3	$2^{18}+1$	2^{35}	34359738368	6	4	4	4
4	3141592653	2^{35}	2997222016	1026050	27822	1118	1118
5	137	256	274	30	14	6	4
6	3141592621	10^{10}	4577114792	1034718	62454	1776	542
7	3141592221	10^{10}	4293881050	276266	97450	3366	2382
8	4219755981	10^{10}	10721093248	2595578	49362	5868	820
9	4160984121	10^{10}	9183801602	4615650	16686	6840	1344
10	$2^{24}+2^{13}+5$	2^{35}	8364058	8364058	21476	16712	1496
11	5^{13}	2^{35}	33161885770	2925242	113374	13070	2256
12	$2^{16}+3$	2^{29}	536936458	118	116	116	116
13	1812433253	2^{32}	4326934538	1462856	15082	4866	906
14	1566083941	2^{32}	4659748970	2079590	44902	4652	662
15	69069	2^{32}	4243209856	2072544	52804	6990	242
16	1664525	2^{32}	4938916874	2322494	63712	4092	1038
17	314159269	$2^{31}-1$	1432232969	899290	36985	3427	1144
18	62089911	$2^{31}-1$	1977289717	1662317	48191	6101	1462
19	16807	$2^{31}-1$	282475250	408197	21682	4439	895
20	48271	$2^{31}-1$	1990735345	1433881	47418	4404	1402
21	40692	$2^{31}-249$	1655838865	1403422	42475	6507	1438
22	44485709377909	2^{46}	5.6×10^{13}	1180915002	1882426	279928	26230
23	31167285	2^{48}	3.2×10^{14}	4111841446	17341510	306326	59278
24	См. (38)	См. (38)	2.4×10^{18}	4.7×10^{11}	1.9×10^{9}	3194548	1611610
25	См. (39)	См. (39)	$(2^{31}-1)^2$	1.4×10^{12}	643578623	12930027	837632
26	См. текст	2^{64}	8.8×10^{18}	6.4×10^{12}	4.1×10^{9}	45662836	1846368
27	См. текст	$\approx 2^{78}$	$2^{62}+1$	4281084902	2.2×10^{9}	1.8×10^{9}	1862407
28	$2^{-24\cdot389}$	$\approx 2^{576}$	1.8×10^{173}	3.5×10^{115}	4.4×10^{86}	2×10^{69}	5×10^{57}
29	$(2^{32}-5)^{-400}$	$\approx 2^{1376}$	1.6×10^{414}	8.6×10^{275}	1×10^{207}	2×10^{165}	8×10^{137}

Полное решение этой проблемы во всех случаях дано в следующем алгоритме:

- Temirgaliyev N. *Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period* // arXiv:1607.00950 [math.NA]
- Темиргалиев Н. *Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона* // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. 2018, 2(123), С. 8-55.

В зависимости от всех возможных, и поэтому обеспечивающих полное решение исследуемой задачи, соотношений между параметрами s, τ и λ получены новые и окончательные результаты по спектральному тестированию (ST), носящие характер почти точных равенств:

ST-2: $\nu_2^2\left(a, N; (a-1)^2 = N\right) = (a-1)^2\left(1 - 2\frac{a-2}{(a-1)^2}\right) = N\left(1 - 2\frac{\sqrt{N}-1}{N}\right)$,

ST $(2 \le s = \tau) : N^{\frac{2}{s}}\left(1 - (b_s - 1)\,N^{-\frac{1}{s}}\right)^2 = (a - b_s)^2 \le \nu_s^2\left(a, N; (a-1)^s = N\right)$

$$\le a^2 + 1 = N^{\frac{2}{s}}\left(1 + 2N^{-\frac{1}{s}} + 2N^{-\frac{2}{s}}\right).$$

ST $(2 \le s < \tau, \lambda \ge 1)$: $(N\lambda)^{\frac{2}{\tau}}\left(1 - (b_s - 1)(N\lambda)^{-\frac{1}{\tau}}\right)^2 = (a - b_\tau)^2 \le \nu_s^2\left(a, N; (a-1)^\tau = N\lambda,\right.$

$$\left.1 \le \lambda \le (a-1)^{\tau - s}\right) \le a^2 + 1 = (N\lambda)^{\frac{2}{\tau}}\left(1 + 2\,(N\lambda)^{-\frac{1}{\tau}} + 2\,(N\lambda)^{-\frac{2}{\tau}}\right),$$

ST $(s > \tau \geq 2, \lambda \geq 1) : \nu_s^2\,(a, N; (a-1)^\tau = N\lambda, \lambda \geq 1) \leq \sum_{k=0}^{\tau} \left(\left(\begin{array}{c} \tau \\ k \end{array} \right) \right)^2,$

где $(-b_{\mathrm{m}})$ есть наибольший по модулю отрицательный биномиальный коэффициент в разложении $(a-1)^{\mathrm{m}}$ по степеням a : $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, $b_4 = 4$, $b_5 = 10$, $b_6 = 20$, $b_7 = 35$, $b_8 = 56$, $b_9 = 126$, $b_{10} = 252$, $b_{11} = 462, b_{12} = 792$, $b_{13} = 1716, b_{14} = 3432, b_{15} = 6435, \ldots$ и т.д.

Можно писать верные числовые равенства *3+4=7, 7+4=11* и т.п., но в силу своей бесконечности конца достигнуть невозможно. Однако одно буквенное равенство *а+в=с* перекрывает все.

Точно также и здесь в первой цифровой таблице в каждой из 29 строк Д.Э. Кнутом приведены результаты отдельных оригинальных исследований, в то время как всего одна таблица от инициаторов Научного мероприятия – обратите внимание без чисел, только буквенная, стало быть, с бесконечным потенциалом числовых реализаций, – закрывает эту тему принципиального значения с бесконечными экономическими, техническими, игровыми и многими-многими другими реализациями в статье с «*говорящим*» названием «Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона».

На этом остановимся, хотя можно было бы продолжить по всем 22-м направлениям и темам ИТМиНВ.

VI. ДРУГИЕ ТЕМЫ АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ (отИТМиНВ)

Направление 1. Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П) как основа нового осмысления Теории приближений, Вычислительной математики и Численного анализа

Тема 2. Классы (и пространства) функций, что, по словам А.Н.Колмогорова, решает проблему "Нас много", т.е. "многих" обеспечить публикациями

Направление 3. Математический инструментарий прямого применения: алгебраическая теория чисел в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного интегрирования и теории случайных чисел

Направление 4. Математический инструментарий прямого применения: тензорные произведения функционалов в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного анализа, восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных по значениям начальных и граничных условий в точках

Направление 5. Иррегулярные распределения и метод квази-Монте Карло как, согласно К. Роту, перспективные направления исследований в математике-информатике XXI века с обширными применениями

Тема 6. Восстановление функций в контексте К(В)П

Тема 7. Численное дифференцирование функций в контексте К(В)П

Тема 8. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте К(В)П

Направление 9. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: конструирование вероятностных мер на классах функций

Тема 10. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов численного интегрирования "в среднем" относительно вероятностных мер на классах функций

Тема 11. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных "в среднем" относительно вероятностных мер на классах функций

Направление 12. Теория вложений и приближений - решенные и нерешенные задачи

Тема 13. Ряды Фурье: преобразования коэффициентов и суммирование

Направление 14. Предпоперечник Колмогорова от МирболатаСихова

Тема 15. Теория "Морри" не как "тривиальные обобщения заменой нормы Лебега на норму Морри"

Направление 16. Дискретные и быстрые "алгебраические" преобразования Фурье

Направление 17. Генераторы случайных чисел в контексте новых формул дискретных "алгебраических" преобразований Фурье. Генерирование случайных чисел Лехмера с максимальным периодом по требованиям Ковею-Макферсона и обширные их применения

Направление 18. "Геометрия чисел" в контексте алгебраической теории чисел

Направление 19. Метод Галеркина и новые теоретические разработки с последующими применениями в контексте всегда сопровождающей его уязвимости

Направление 20. К(В)П - анализ бесконечно гладких функций от Ерика Нурмолдина.

Направление 21. Преобразование Радона в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника

Тема 22. Теория осцилляций и их применения в контексте Тензорных произведений функционалов
в случае необходимости с дальнейшей разбивкой на более подробные темы докладов.

Все приведенные результаты опубликованы в статьях на английском языке в журналах, входящих в базу данных Web of Science и Scopus, полный перечень которых представлен в Списке литературы в Вестнике Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика, №1(122)/2018.

VI.РАЗВЕРНУТОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АКТИВИЗАЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ

Образцы развернутого изложения тем Активизационных докладов (в том числе и приведенных выше) с предложениями для дальнейшего развития (что называем потенциалом для продолжений) даны в следующих публикациях (для внутреннего использования в Казахстане)

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика, 2018 год, номера 1-4 МЕХАНИКА

№1	***Темиргалиев Н.*** Предисловие Главного редактора журнала "Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика" о целях издания и путях их реализации ***DOI:*** http://bulmathmc.enu.kz/pages/bulmathmc-1(122)	стр. 8-69
№2	***Темиргалиев Н.*** Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона ***DOI:*** http://bulmathmc.enu.kz/pages/bulmathmc-2(123)	стр. 8-55
№3	***Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж.*** Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника ***DOI:*** https://doi.org/10.32523/2616-7182/2018-124-3-8-88	стр. 8-88
№4	***Темиргалиев Н.*** Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций***DOI:*** https://doi.org/10.32523/2616-7182-2018-125-4-8-68	стр. 8-68

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика, 2019 год, номера 1-4

№1	***Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К.*** Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника ***DOI:***https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-8-51	стр. 8-51
№2	***Темиргалиев Н.*** Преобразования и абсолютная сходимость рядов Фурье ***DOI:***https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-127-2-8-26	стр. 8-26
№3	***Темиргалиев Н.****Концепция С.М.Воронина в проблеме сравнений детерминированных и случайных вычислений в одних и тех же терминах* ***DOI:*** https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-128-3-8-33	стр.8-38

№4	***Н. Темиргалиев, Ш.Абикенова, Ш.Ажгалиев, Г.Таугынбаева, А.Ж. Жубаныщева*** Преобразование Радона в Схеме К(В)П-исследований и теори Квази Монте-Карло	стр. 8-53

Выше была изложена Математика и Компьютерные науки для Казахстана, подкрепленные базовыми учебниками:

- Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987. - 288 б.
- Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. II. -Алматы: Ана тілі, 1991. - 400 б.
- Теміргалиев Н. Математикалық анализ. Т. III Алматы: Білім, 1997. - 432 б.
- Темиргалиев Н. Математикалық анализ (Өңделген және толықтырылған екінші басылым). – 2019. -1900 б.
- Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ. -Астана, 2012.
- Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ. -Астана, 2012.
- Теміргалиев Н. Әубакір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары,X-XI кластар. –Алматы: Жазушы, 2002. -382 б.
- Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, для X-XIклассов. Алматы: Жазушы, 2002. -423 с.

В основу школьного учебника завершающего этапа – это 10 и 11 классы – положен принцип «*Достижения математической зрелости*» с переходом в основы математики, начиная со «*Структуры математики*» и «*Культуры математического доказательства*» через Теорию меры на 20-и страницах до своеобразного изложения Теории вероятностей, - здесь во всех случаях методология в существенном авторская.

По опыту ИТМиНВ можно утверждать, что созданная в этих учебниках основа позволяет усвоить все необходимое в непрерывной и дискретной математике.

VIII. КАЗАХСКИЙ ВАРИАНТ БАЗОВОЙ ПОДГОТОВКИ PHD-ДОКТОРАНТУРЕ США

В полном объеме осваивается:

А. АВТОРСКИЕ ОСНОВЫ БАЗОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ – казахский аналог общей подготовки в PhD докторантуре США
- Теміргалиев Н. Математикалық анализ (Өңделген және толықтырылған екінші басылым). - 2019. -1900 б.
- Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ. – Астана, 2012.
- Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ. – Астана, 2012.

как гарант успешного продвижения в непрерывной и дискретной математике.

По всем этим учебникам на казахском и русском языках готовится перевод на английский язык.

Н. Теміргалиев

Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты,

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты 2019 жылыу» ғылыми, ғылыми-әдістемелік және ұйымдастырушылық есебі (I бөлім)

Аннотация: Атында тұрғандай, Есеп үш бағыттан - ғылымнан, негізгі (базалық) математика дайындағының методологиясынан және Білім мен Ғылымды бақарудан тұрады. Білім мәселелерінің сұрақтар мен онда не істеуге болатындығы жайлы АҚШ пен Ресей жағдайлары мысалға алына отырып жазылған "Образование, которое мы можем потерять" ("Біз жоғалтуымыз мүмкін білім") материалдар жиынтығынан артық ешнәрсе де айтуға болмайтын шығар. Сонымен қатар, мән беретін тағы да бір жәйт, содан бері 20 жыл өтсе де, қазіргі уақыттағы мектеп білімінің жағдайынан жоғары деңгейде дәлелді дұрыс сөздердің өз бетінше шешуші салдары болмайды деген принципиалді қорытындылар жасауға болады.

Екі "Көбейту кестесі" мен бәрін құрытатын, бөлімдерін міндетті түрде жай көбейткіштерге жіктеуді (ал RSA (Ривест, Шамир, Эйдлмен; 1978) жүйесі бұндай жіктеудің практикалық қиындығына негізделіп құрылған) талап ететін "Жәй бөлшектерді қосу ережісі" тақырыптарының бірнеше мәрте егжей-тегжейлі тексерілген әдістемелері мысалдары арқылы көретініміз: жоғары сапалы декларация қажеттіні ынталандыра да, қажетсізді тоқтата да алмайды.

Ғылым бойынша, онда тағы да "Эффектті ғылымға ие болу үшін ғылымды іштей де, сырттай да қалай бағалауға болады?" сұрақ туындайды. Бұл жерде жыл сайын толтырылатын, міндетті "ҒЗИ қызметкері мен ЖОО ПОҚ-ның ғылыми және ғылыми-әдісемелік куәлігі" құжаты түрінде кешенді жауап беріледі және сол құжат негізінде мемлекет отандық қандай перспективті зерттеулер жасалып жатқандығын, оларды қандай деңгейде қаржыландыру керектігін жоспарлай алады.

Дәл осындай, тіпті, Гамбургтік санақтың талаптарындай деп айтуға болатын "Ғылыми және ғылыми-әдісемелік паспорт" елішілік немесе мемлекетті ғылымның қандай да бір бағыты бойынша "Активизациялық баяндамалар" арқылы алғы шептегі (алдыңғы қатардағы) ұйымдастырушы-ел ретінде таныстыру үшін халықаралық деңгейдегі ғылыми іс-шараның жаңа түрін енгізуге мүмкіндік береді. Әрине, "Ғылым не бар, не жоқ" деген парадигма бойынша толық көлемде формаландыруға келмейтін ғылыми жұмыстардың сапасын бағалау жайлы сұрақта, әрине, жоғары ғылыми атмосфераға еніп, сонда қала алғандарды тыңдау қажет. Біздің ойымызша, бұндай нәтижелі ғылыми қызметкер және Мәскеу университетінің математикалық өркендеу дәуірінің куәгері - В.Н.Латышев (бұл жерде ММУ-нің статистикасы - 10 студенттен бір кандидат, 10 кандидаттан бір доктор болғандығын естен шығармау қажет, суперталаптар осындай түрде болды) "М.В.Келдыштің(СССКО ҒА көпжылдық президенті, "Косматавтиканың басты теоретики") жертөлелік мақаласы есімде, бұл "Бір де бір нәтижелері жоқ керемет математиктердің саны орасан көп" деп жазылған "Правда" газетіндегі үлкен мақала болды. Бірақ бұл көрсеткіш олардың жасан (нашар) екендігін білдірмейді. Егер математикте ең болмағанда бір нәтиже бар болса, онда ол жқсы математик. Бірден артық бола бермейді, егер екеу болса, онда керемет. Міне осындай табыстар, шынымен де, өмірді мүмкін бір ақ рет келеді ".

Мүмкін аз ғана дайындықтан кейін, бірден кіріп кетіге болатын ғылымдар бар. Бірақ математика, оның күрделі мәселелерін түсініп, оған қоса, оның дамуына қатысу үшін, яғни ену үшін оның пайда болуы мен даму кезеңдерінің барлығынан өтуді талап ететін мүлдем ерекше ғылым. Мектеп математикасының барлық - 1-ші сыныптан бастап, соңғы сын ыпқа дейінгі - жолын жүріп өту қажет. Біз бұл жерде, мүмкін, тағы да формализациялауға келмейтін, бірақ шын мәнінде бар "Математиканы түсіну" күйіне (жағдайын, сезімін) ерекше көңіл бөлеміз.

Бұнда барлығы өзекті: тағы да "Образование, которое мы можем потерять" ("Біз жоғалтуымыз мүмкін білім") жинағынан көретініміз, математикаға енідің бұл бөлігі жалпы назардан тыс қалып жатады. "Математиканы түсіну" тақырыбының дамының көңіл аударылған, және өзімізді де таң қалдырған жәйт, дәл осының әйгілі Готфрид Хардидің кәсіби жолында да кездесі.

Тағы да ғылыммен айналысу және сол ғылым бойынша оқулық жазу арасындағы кейбір сәттер бар, бұнда сол тұралы да сөз қозғалды.

Экскурс Есеп мазмұнымен аяқталады, тағы да қайталайық, барды түсіну менары қарай дамытуға болатын ғылыми жетістектер мен оқулықтарды ашып көрсету арқылы Қазақстанның ішкі қызығушылықтары негізге алынады.

Түйін сөздер: Есеп, "ҒЗИ қызметкері мен ЖОО ПОҚ-ның ғылыми және ғылыми-әдісемелік куәлігі, Активизациялық баяндамалар, Фундаменталды, маңызды және маўзды (локалды) нәтижелер, "Математиканы түсіну", сапалы білім беруді қамтамасыз ету арқылы Математика мен Компьютерлік ғылымдардағы ғылыми потенциал арқылы ҚР барлық ЖОО мен ҒЗИ ғылыми мониторингтеу, Базалық математикалық дайындықтың авторлық негіздері – АҚШ-тағы PhD докторантураға жалпы дайындаудың ТМжҒЗИ ұсынған қазақша аналогы, Онлайн-конференция, Оффлайн-семинар, білім беру жүйесі мен ғылымды цифрландыру, ғылыми нәтижелерді эшелондау, Ассоциативті ойлауды тәрбиелеу арқылы математикалық жетілу, Комплексті бағдарлама.

N. Temirgaliyev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Scientific, scientific-methodological and organizational report "The Institute of theoretical mathematics and scientific computing (ITMSC) L.N.Gumilyov Eurasian National University in 2019 year (Part I)"

Abstract: As the name implies, the Report is conducted in three areas: science, methodology of basic mathematical training, and organization and management of Education and Science. Probably, on the issue of Education problems and what should be done here, it is impossible to say better than the materials of the Collection "Education that we can lose" on the example of Russia and the United States. At the same time, we see something else - 20 years have passed since then, and based on the current state of school education, we can draw a principled conclusion that highly reasoned correct words themselves do not have decisive consequences.

In two examples, and it is repeatedly checked in detail on the methodological development of "multiplication table" and the devastating "Rule of addition of fractions" are shown requires a decomposition into simple denominators (back then, the RSA System (Rivest, Shamir, Adelman; 1978) built on the practical difficulties of such decomposition): the highest quality declarations cannot stimulate what is necessary and cannot stop what is unnecessary.

If it is about science, then again, the question arises "how to evaluate science both internally and externally in order to have an effective Science". Here a comprehensive answer is given in the form of a mandatory annual filling out of the "Scientific and methodological passport of an employee of research Institutes and teaching staff of universities", on the basis of which the state will plan which domestic promising research and at what level to support through appropriate funding.

It is this "Scientific and methodological passport" that allows us to introduce a new type of scientific event both within the country and internationally to represent the host country as a carrier of advanced science in some areas - this is through "Activation reports". Of course, with the paradigm "Science is either there or it is not", the issue of evaluating the quality of scientific research, which is not fully formalized, here, of course, we must listen to those who formed and took place in the highest scientific atmosphere. So, in our understanding, productive research worker and witness to the flourishing period of mathematics of Moscow University is V. N. Latyshev (here it is necessary not to lose sight of the fact that while statistics MSU was this -from 10 students one candidate out of 10 candidates one doctor - this was super requirements) "I remember the basement of an article by M. V. Keldysh (the longtime President of the USSR, "Head theoretician of cosmonautics"), this is a great article in the newspaper "Pravda", which says "a Huge number of mathematicians is remarkable, for which there are no results." But this does not mean that they are bad. If a mathematician has at least one result, it is a very good mathematician. More than one almost never happens, if two, it is absolutely wonderful. Such finds come only once in a lifetime."

There are some Sciences that you can enter immediately, perhaps after a little training. But mathematics is a very special science, for its implementation, it is necessary to go through all the stages of its origin and development in order to understand the higher problems in it and, moreover, to participate in their development. You have to go all the way through high school from first to last grade. Here we highlight the state of "Understanding mathematics", which may again not be formalized, and which undoubtedly exists in reality. All this is very relevant: again, the Collection "Education that we can lose" shows that this part of the introduction to mathematics remains out of everyone's attention. Here, the topic of "Understanding mathematics" is being developed, and, as we were surprised to find out, this is the way to the profession of the legendary Gottfried hardy.

There is another personal aspect of the relationship between studying science and creating a textbook on this science, which is also discussed.

Finishing the excursus on the content of the Report, we repeat once again that the internal interests of Kazakhstan are being pursued with the presentation of scientific results and textbooks, through which the achieved results can be understood and developed further.

Keywords: Report, Scientific and methodological passport of members of scientific institutes and universities, Activation reports, fundamental, significant and insignificant (local) results, " Understanding of mathematics ", Scientific Monitoring of all Universities and research institutes of the Republic of Kazakhstan on scientific potential in Mathematics and Computer science with quality teaching, The author's basics of basic mathematical training – Kazakh analogue of general training in PhD doctoral studies in the USA from IThMandSC,Online conference, Offline seminar, Digitalization of education

and science, Separation of scientific results, Mathematical maturity with the education of associative thinking, Comprehensive program..

Сведения об авторах:

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Temirgaliyev N. – -Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 130, №1, 59-72 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.23.23**

Ю. А. Фарков

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Москва, Россия
(E-mail: farkov-ya@ranepa.ru)

Система Крестенсона-Леви и ступенчатые масштабирующие функции

Аннотация: С помощью системы Крестенсона-Леви и модифицированного условия Коэна построены ступенчатые масштабирующие функции, порождающие кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Обсуждаются аналогии с конструкциями ортогональных всплесков и фреймов Парсеваля на группах Виленкина.

Ключевые слова: функции Уолша, ортогональные всплески, масштабирующие ступенчатые функции, кратномасштабный анализ, фреймы Парсеваля, группы Виленкина, система Крестенсона-Леви.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-130-1-59-72

Большинство результатов о всплесках на группах Виленкина относится к группе G_p, определяемой по фиксированному целому $p \geq 2$ (см. монографию [1] и библиографию в [2, 3]). Элементами группы G_p являются последовательности $x = (x_j)$, где $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и только конечное число членов x_j с отрицательными индексами могут быть отличными от нуля. Обозначим через θ нулевую последовательность. Если $x \neq \theta$, то существует единственное число $k = k(x)$ такое, что $x_k \neq 0$ и $x_j = 0$ для всех $j < k$. Групповая операция $\dot{+}$ на G_p определяется как покоординатное сложение по модулю p:

$$(z_j) = (x_j) \dot{+} (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \,(\mathrm{mod}\, p) \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z},$$

а топология вводится с помощью системы окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G_p : \ x_j = 0 \quad \text{для всех } j \leq l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

При $p = 2$ группа G_p изоморфна локально компактной канторовой группе $\mathcal{C}$, а подгруппа U_0 изоморфна компактной канторовой группе $\mathcal{C}_0$, т.е. топологическому декартовому произведению счетного множества циклических групп второго порядка с дискретной топологией. Хорошо известно, что классические функции Уолша можно интерпретировать как характеры группы $\mathcal{C}_0$.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Отображение $\lambda : G_p \to \mathbb{R}_+$, заданное равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \qquad x = (x_j) \in G_p,$$

позволяет записывать многие результаты о всплесках на группе G_p наглядно. При этом мере Хаара на группе G_p соответствует мера Лебега на полупрямой $\mathbb{R}_+$, преобразованию Фурье функций из $L^2(G_p)$ соответствует обобщенное преобразование Фурье-Уолша функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$, а обобщенным функциям Уолша, образующим ортонормированный базис в $L^2(U_0)$, соответствуют определенные ниже функции Крестенсона-Леви.

Обозначим через $\langle s \rangle_p$ остаток при делении целого числа s на p, а через $[x]$ и $\{x\}$ целую и дробную части числа x соответственно. Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ положим

$$x_j = \langle\, [p^j x] \,\rangle_p\,, \quad x_{-j} = \langle\, [p^{1-j} x] \,\rangle_p\,, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Эти числа являются цифрами разложения числа x по основанию p:

$$x = [x] + \{x\} = \textstyle\sum_{j<0} x_j p^{-j-1} + \sum_{j>0} x_j p^{-j}\,.$$

Видно, что существует номер $k = k(x)$ такой, что $x_{-j} = 0$ для всех $j > k$. Равенство $z = x \oplus y$ означает, что

$$z = \sum_{j<0} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j-1} + \sum_{j>0} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j}$$

и, соответственно, $z = x \ominus y$, если $z \oplus y = x$.

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\chi(x,y) = \varepsilon_p^{t(x,y)}, \quad \text{где} \quad t(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j\, y_{-j} + x_{-j}\, y_j).$$

Обобщенное преобразование Фурье-Уолша функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ определяется по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{\chi(x,\omega)}\, dx,$$

и стандартным образом переносится на $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Определим на интервале $[0,1)$ функцию

$$w_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/p), \\ \varepsilon_p^l, & x \in [lp^{-1}, (l+1)p^{-1}),\, l \in \{1, \dots, p-1\}, \end{cases}$$

и продолжим ее на полупрямую $\mathbb{R}_+$ с периодом 1. *Система Крестенсона-Леви* $\{w_l : l \in \mathbb{Z}_+\}$, совпадающая [5, § 1.5] при $p = 2$ с классической системой Уолша, определяется по формуле

$$w_0(x) \equiv 1, \qquad w_l(x) = \prod_{j=1}^{k} (w_1(p^{j-1}x))^{\nu_j}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где ν_j – цифры p-ичного разложения числа l:

$$l = \sum_{j=1}^{k} \nu_j p^{j-1}, \quad \nu_j \in \{0, 1 \dots, p-1\}, \quad \nu_k \neq 0, \quad k = k(l).$$

Хорошо известно, что система $\{w_l : l \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2[0,1]$. Исторические сведения о функциях Крестенсона-Леви можно найти в книгах [4, 5] (см. также [6] и недавние статьи [7, 8]). В настоящей статье с помощью системы Крестенсона-Леви излагаются основные методы построения ступенчатых масштабирующих функций с компактными носителями на полупрямой $\mathbb{R}_+$, аналогичные соответствующим методам для группы Виленкина G_p. Основное внимание уделяется масштабирующим функциям, порождающим кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

При построении ортогональных всплесков с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$, определяемых с помощью функций Крестенсона-Леви, центральную роль играют масштабирующие уравнения вида

$$\varphi(x) = p \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \varphi(px \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Функции φ, удовлетворяющие уравнениям вида (1), называют *масштабирующими* (или *уточняющими*) функциями. *Маской* масштабирующего уравнения (1) (или его решения φ) называют полином

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \overline{w_k(\omega)}. \tag{2}$$

Применяя преобразование Фурье-Уолша, можем записать уравнение (1) в виде

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/p)\widehat{\varphi}(\omega/p), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Коэффициенты уравнения (1) восстанавливаются по значениям маски

$$b_l := m_0(l/p^n), \qquad l \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}, \tag{4}$$

с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона по формуле

$$a_k = \frac{1}{p^n}\sum_{l=0}^{p^n-1} b_l w_l(k/p^n), \qquad k\in\{0,1,\dots,p^n-1\}. \tag{5}$$

Числовые промежутки

$$I_l^{(n)} = [lp^{-n},(l+1)p^{-n}), \quad l\in\mathbb{Z}_+,$$

называются p*-ичными интервалами ранга* n. Топология на $\mathbb{R}_+$, определяемая этими интервалами, называется W*-топологией* (при $p=2$ – *диадической топологией*; см., например, [4, с.11]). Класс функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$, имеющих в W-топологии компактные носители на $\mathbb{R}_+$, обозначается через $L^2_c(\mathbb{R}_+)$. Для произвольной функции $\varphi\in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ через $supp\,\varphi$ обозначается носитель функции φ в W-топологии. Следующие два предложения доказаны в [9] (см. также [10] для случая $p=2$).

Предложение 1. *Если функция* $\varphi\in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и* $\widehat{\varphi}(0)=1$, *то*

$$supp\,\varphi\subset[0,p^{n-1}) \quad \text{и} \quad \widehat{\varphi}(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega) \quad \text{для всех} \quad \omega\in\mathbb{R}_+.$$

Предложение 2. *Пусть функция* $\varphi\in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и* $\widehat{\varphi}(0)=1$. *Если система* $\{\varphi(\cdot\ominus k)\,:\,k\in\mathbb{Z}_+\}$ *ортонормирована в* $L^2(\mathbb{R}_+)$, *то*

$$m_0(0)=1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{p-1}|m_0(\omega+k/p)|^2=1 \quad \text{для всех} \quad \omega\in\mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Поскольку маска $m_0(\omega)$ является 1-периодической функцией и принимает постоянные значения на p-ичных интервалах ранга n, условие (6) с использованием обозначения (4) записывается в виде

$$b_0=1, \quad \sum_{k=0}^{p-1}|b_{s+kp^{n-1}}|^2=1 \quad \text{для всех} \quad s\in\{0,1,\dots,p^{n-1}-1\}. \tag{7}$$

Отметим, что при построении фреймов Парсеваля вместо (7) применяется [2,13,14] условие

$$b_0=1, \quad \sum_{k=0}^{p-1}|b_{s+kp^{n-1}}|^2\le 1 \quad \text{для всех} \quad s\in\{0,1,\dots,p^{n-1}-1\}. \tag{8}$$

Для любой функции $\varphi\in L^2(\mathbb{R}_+)$ положим

$$\varphi_{j,k}(x)=p^{j/2}\varphi(p^jx\ominus k), \quad j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что функция φ порождает кратномасштабшый анализ (КМА) в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot\ominus k)\,:\,k\in\mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, подпространства

$$V_j := \overline{\mathrm{span}}_{L^2(\mathbb{R}_+)}\{\varphi_{j,k}\,:\,k\in\mathbb{Z}_+\}, \quad j\in\mathbb{Z},$$

обладают свойствами

$$V_j\subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j=\{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j}=L^2(\mathbb{R}_+).$$

Отметим, что каждая функция $\varphi\in L^2(\mathbb{R}_+)$, имеющая носитель на интервале $[0,p^{n-1})$ и порождающая КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяет уравнению вида (1). Действительно, из условий $V_0\subset V_1$ и $\varphi\in V_0$ следует, что функция φ разлагается в ряд Фурье по системе $\{\varphi_{1,k}\,:\,k\in\mathbb{Z}_+\}$. Поэтому имеет место разложение

$$\varphi(x)=p\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k\varphi(px\ominus k)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}|a_k|^2<\infty$. Предположим, что $supp\varphi\subset[0,p^{n-1})$ и разобъем правую часть предыдущего разложения на две суммы:

$$\varphi(x)=S_1(x)+S_2(x)=p\sum_{k=0}^{p^n-1}a_k\varphi(px\ominus k)+p\sum_{k=p^n}^{\infty}a_k\varphi(px\ominus k).$$

Если $x\geq p^{n-1}$ и $k<p^n$, то $px\ominus k\geq p^n$ и, значит, $\varphi(x)=S_1(x)=0$. Если же $x<p^{n-1}$, то $S_2(x)=0$ (так как $px\ominus k\geq p^n$ для всех $k\geq p^n$). Таким образом, для данной функции φ верно равенство (1).

Множество $E\subset\mathbb{R}_+$ называется *конгруэнтным* $[0,1)$ *по модулю* $\mathbb{Z}_+$, если мера Лебега множества E равна 1 и для каждого $x\in[0,1)$ существует $k\in\mathbb{Z}_+$ такое, что $x\oplus k\in E$.

Теорема 1 [9]. *Пусть функция* $\varphi\in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *является решением уравнения* (1) *и маска* m_0 *этого уравнения удовлетворяет условию* (7). *Предположим, что существует множество* $E\subset\mathbb{R}_+$, *конгруэнтное* $[0,1)$ *по модулю* $\mathbb{Z}_+$, *состоящее из конечного числа* p*-ичных интервалов, содержащее интервал* $[0,p^{-n})$ *и такое, что выполнено условие*

$$\inf_{j\in\mathbb{N}}\inf_{\omega\in E}|m_0(p^{-j}\omega)|>0. \tag{9}$$

Тогда функция φ *порождает КМА в* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Неравенство (9) выражает модифицированное условие Коэна, которое при построении всплесков и масштабирующих функций на группах Кантора и Виленкина использовалось в [11] и [12] соответственно. При условиях теоремы 1 по функции φ и указанным в формуле (4) значениям маски m_0 можно построить ортогональные всплески $\psi_1,\ldots,\psi_{p-1}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (о численных методах реализации соответствующего алгоритма см. в [13] - [16]).

Предложение 3. *Если коэффициенты уравнения* (1) *выбраны так, чтобы выполнялись условия* (6) *и* $m_0(\omega)\neq 0$ *для всех* $\omega\in[0,1/p)$, *то система* $\{\varphi(\cdot\ominus k)\ :\ k\in\mathbb{Z}_+\}$ *ортонормирована в* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Действительно, легко видеть, что при условиях предложения 3 условие (9) выполняется для $E=[0,1)$.

Обозначим через $\Im_n^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ множество всех функций $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$, принимающих постоянные значения на p-ичных интервалах ранга m и равных нулю на промежутке $[p^n,+\infty)$. Согласно [5, § 6.2] для любых $m,n\in\mathbb{Z}_+$ имеем

$$f\in\Im_n^{(m)}(\mathbb{R}_+)\iff\widehat{f}\in\Im_m^{(n)}(\mathbb{R}_+). \tag{10}$$

Для построения ступенчатых масштабирующих функций, удовлетворяющих уравнению (1), полезны следующие два предложения.

Предложение 4. *Если функция* $\varphi\in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (1), $\widehat{\varphi}(0)=1$ *и* $\widehat{\varphi}(\omega)=0$ *для всех* $\omega\geq p^m$, *то функция* φ *принадлежит классу* $\Im_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ *и для любого* $\omega\in\mathbb{R}_+$ *верно равенство*

$$\widehat{\varphi}(\omega)\ =\ \prod_{j=1}^{\infty}m_0(p^{-j}\omega). \tag{11}$$

Предложение 5. *Если функция* $\varphi\in\Im_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и* $\widehat{\varphi}(0)=1$*, то для маски* m_0 *уравнения* (1) *выполнены равенства*

$$\prod_{j=1}^{m+n}m_0(p^{-j}\omega)=0\quad \textit{для всех}\quad \omega\in[p^m,p^{m+1}). \tag{12}$$

Обратно, если для маски m_0 *уравнения* (1) *выполнены условия* (6) *и* (12), *то формула* (11) *задаёт функцию* $\varphi\in\Im_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$, *удовлетворяющую уравнению* (1).

Предложения 4 и 5 выводятся из свойства (10), предложения 1 и формулы

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\widehat{\varphi}(p^{-m-n}\omega)\prod_{j=1}^{m+n}m_0(p^{-j}\omega),\quad \omega\in\mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Для того чтобы система целых сдвигов функции $\varphi\in\Im_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ была ортонормированной, достаточно (см. теорему 1) выбрать значения соответствующей маски m_0 так, чтобы выполнялись условия (6) и (9), причем множество E в условии (9) должно быть конгруэнтно интервалу $[0,1)$ по модулю $\mathbb{Z}_+$. Отсюда с учетом предложения 5 замечаем, что при построении масштабирующей функции $\varphi\in\Im_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ с помощью формулы (11) в качестве маски m_0 может быть выбран произвольный полином вида (2), для которого выполнены условия (7), (9) и (12) (сравните с рис. 6.1 в [17, с.254], иллюстрирующим результат работы типа "разрежь и склей" при построении ортогональных всплесков на прямой $\mathbb{R}$). При этом вместо проверки условия (12) достаточно убедиться, что $\widehat{\varphi}(\omega)=0$ для всех $\omega\ge p^m$.

Пример 1. Для $p=2$, $n=3$ значения маски m_0 в условии (7) выберем такими, что

$$b_0=1,\quad |b_1|=|b_3|=1,\quad b_2=0,\quad b_4=b_5=0,\quad |b_6|=1,\quad b_7=0.$$

В этом случае модуль маски m_0 на интервале $[0,1)$ совпадает с характеристической функцией множества

$$\widetilde{E}=\bigcup_{k=0}^{3}I_k,\quad I_0=[0,1/8),\ I_1=[1/8,1/4),\ I_2=[3/8,1/2),\ I_3=[3/4,7/8),$$

а условие (9) выполнено на множестве $E=2\widetilde{E}$. Учитывая предложение 3, расширим множество значений маски m_0, заменив равенства $b_2=0$ и $|b_6|=1$ условием $|b_2|^2+|b_6|^2=1$. Тогда из формулы (11) получим

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\mathbf{1}_{[0,1/4)}(\omega)+b_1\mathbf{1}_{[1/4,1/2)}(\omega)+b_1b_2\mathbf{1}_{[1/2,3/4)}(\omega)+b_1b_3\mathbf{1}_{[3/4,1)}(\omega)+b_1b_3b_6\mathbf{1}_{[3/2,7/4)}(\omega)$$

и, следовательно,

$$\varphi(x)=(1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1+b_1w_1(x/4)+b_1b_2w_2(x/4)+b_1b_3w_3(x/4)+b_1b_3b_6w_6(x/4)).$$

Видно, что $supp\varphi\subset[0,4)$ и $\widehat{\varphi}(\omega)=0$ для всех $\omega\ge 2$. Отсюда с учетом (10) получаем, что $\varphi\in\Im_2^{(1)}(\mathbb{R}_+)$. Отметим также, что функция Хаара $\varphi=\mathbf{1}_{[0,1)}$ отвечает значениям $b_0=b_1=b_2=b_3=1$ (в силу (6) тогда $m_0(\omega)=1$ для $\omega\in[0,1/2)$ и $m_0(\omega)=0$ для $\omega\in[1/2,0)$).

Пример 2. Для $p=3$, $n=2$ выберем в (7) значения

$$b_0=1,\quad |b_1|=1,\quad b_2=b_3=b_4=0,\quad |b_5|=1,\quad b_6=b_7=b_8=0$$

и, соответственно, возьмем

$$\widetilde{E}=\bigcup_{k=0}^{2}I_k,\quad I_0=[0,1/9),\ I_1=[1/9,2/9),\ I_2=[5/9,2/3).$$

Как в примере 1 заменим равенства $b_2=0$ и $|b_5|=1$ условием $|b_2|^2+|b_5|^2=1$. Тогда условие (9) выполнено на множестве $E=3\widetilde{E}$ и с помощью формулы (11) получается ступенчатая масштабирующая функция

$$\varphi(x)=(1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1+b_1w_1(x/3)+b_2w_2(x/3)+b_1b_5w_5(x/3)),$$

порождающая КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Аналогично, если в (7) выбрать значения

$$b_0=1,\quad |b_1|^2+|b_7|^2=1,\quad |b_2|=1,\quad b_3=b_4=b_5=b_6=b_8=0,$$

то получится масштабирующая функция

$$\varphi(x)=(1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1+b_1w_1(x/3)+b_2w_2(x/3)+b_2b_7w_7(x/3)).$$

В случае $b_1 = 0$ условие (9) для соответствующей маски m_0 выполняется с множеством $E = [0, 1/3) \cup [2/3, 1) \cup [7/3, 8/3)$. Обе полученные в этом примере масштабирующие функции принадлежат классу $\Im_1^{(1)}(\mathbb{R}_+)$.

Пример 3. Пусть $n = 2$, $p \geq 3$ и модуль маски

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^2-1} a_k \overline{w_k(\omega)}, \quad \omega \in \mathbb{R}_+, \tag{14}$$

принимает всего два значения: 0 и 1, причем выполнено условие (6). Покажем, как выбрать значения

$$b_s = m_0(s/p^2), \quad s = 0, 1, \ldots, p^2 - 1, \tag{15}$$

так, чтобы функция φ, заданная равенством (11), имела ортонормированную систему целых сдвигов $\{\varphi(\cdot \ominus k) \ : \ k \in \mathbb{Z}_+\}$. Записывая индекс s в p-ичной системе, из (6) и (15) имеем

$$b_0 = 1, \quad \sum_{s_0=0}^{p-1} |b_{s_0+s_1p}|^2 = 1, \quad s_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{16}$$

Выберем множество $E_l^{(0)} \subset \{1, 2, \ldots, p-1\}$, состоящее из l чисел, и положим $E_l^{(1)} = \{0, 1, \ldots, p-1\} \setminus E_l^{(0)}$ (так что $0 \in E_l^{(1)}$). Для $s \in \{1, \ldots, p-1\}$ положим

$$|b_s| = \begin{cases} 1, & s \in E_l^{(1)}, \\ 0, & s \in E_l^{(0)}. \end{cases} \tag{17}$$

Применяя (16) и (17), получим

$$b_{s_0+s_1p} = 0 \quad \text{для всех} \quad s_0 \in E_l^{(1)}, \ s_1 \in \{1, \ldots, p-1\}. \tag{18}$$

Для фиксированного $j_0 \in E_l^{(1)}$, $j_0 \neq 0$, возьмем $j_1 \in E_l^{(0)}$ и положим

$$|b_{j_1+j_0p}| = 1, \ b_{j_1+jp} = 0 \quad \text{для} \quad j \neq j_0, \ j \in \{1, \ldots, p-1\}.$$

Далее, выберем $j_2 \in E_l^{(0)}$, $j_2 \neq j_1$, и положим

$$|b_{j_2+j_1p}| = 1, \ b_{j_2+jp} = 0 \quad \text{для} \quad j \neq j_1, \ j \in \{1, \ldots, p-1\}.$$

Продолжая этот процесс, на l-м шаге возьмем $j_l \in E_l^{(0)} \setminus \{j_1, \ldots, j_{l-1}\}$, и положим

$$|b_{j_l+j_{l-1}p}| = 1, \ b_{j_l+jp} = 0 \quad \text{для} \quad j \neq j_l, \ j \in \{1, \ldots, p-1\}.$$

Тем самым с учетом (17) и (18) определены все значения маски m_0 из формулы (15). А именно, для значений маски m_0 имеем

1) $b_0 = 1$,
2) $|b_s| = 1$ для всех $s \in E_l^{(1)} \setminus \{0\}$,
3) $|b_{j_1+j_0p}| = |b_{j_2+j_1p}| = \cdots = |b_{j_l+j_{l-1}p}| = 1$,
4) $b_s = 0$ в остальных случаях.

Видно, что модуль построенной маски m_0 равен 1 на p попарно непересекающихся p-ичных интервалах ранга 1 (поэтому для m_0 выполнено условие (9)). Таким образом, заданное по формуле (11) решение φ уравнения (1) принадлежит классу $\Im_1^{(l)}(\mathbb{R}_+)$ и имеет ортонормированную систему целых сдвигов в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Отметим, что в терминах группы Виленкина G_p пример 3 получается из [18, Теорема 4.6] (см. также [13, замечание 3.11]).

Обозначим через $\Im^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ класс функций $f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, принимающих постоянные значения на p-ичных интервалах ранга m. Положим $\Im(\mathbb{R}_+) := \cup_m \Im^{(m)}(\mathbb{R}_+)$. Следующее предложение для случая $p = 2$ доказано в [10].

Предложение 6. *Пусть $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ – решение масштабирующего уравнения (1) такое, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Функция φ не принадлежит классу $\Im(\mathbb{R}_+)$ в том и только в* *том случае, когда существует набор чисел* $\{d_k\}_{k=1}^{l}$, $l \le p^{n-1}+n-1$, $d_k \in \{0,1,\dots,p-1\}$ *такой, что*

(i) $d_1 = \dots = d_{n-1} = 0,\ d_n \ne 0$;

(ii) *существует целое число* j *такое, что* $n-1 \le j \le l-1$ *и* $d_{j-s} = d_{l-s}$ *для* $s = 0,\dots,n-2$;

(iii) $m_0(\omega^{(0)})m_0(\omega^{(1)})\dots m_0(\omega^{(l-n)}) \ne 0$, *где* m_0 *– маска масштабирующего уравнения* (1), *а значения* $\omega^{(k)}$ *вычисляются по формуле*

$$\omega^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\nu+k}p^{-\nu}, \quad k = 0,1,\dots,l-n.$$

В этом предложении условие (ii) означает, что для данного j в последовательности $\{d_k\}_{k=1}^{l}$ последние $n-1$ чисел совпадают с числами d_{j-n+2} , d_{j-n+3} , ... , d_{j-1} , d_j , т.е.

$$d_{l-n+2} = d_{j-n+2},\ d_{l-n+3} = d_{j-n+3},\ \dots,\ d_{l-1} = d_{j-1},\ d_l = d_j.$$

В частности, при $j = n-1$ последовательность $\{d_k\}_{k=1}^{l}$ будет начинаться и оканчиваться $n-1$ нулями, а при $j = l-1$ последние $n-1$ чисел последовательности $\{d_k\}_{k=1}^{l}$ совпадают с d_{l-n+1} . Для небольших p и n с помощью предложения 6 могут быть получены ступенчатые масштабирующие функции, указанные в [10, § 6] и [19, Приложение Б]. Известно [2, теорема 2.2], что при условии (8) эти масштабирующие функции порождают фреймы Парсеваля для $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Пример 4. В случае $p = 2$, $n = 3$ при условии $m_0(0) = 1$ уравнению (1) удовлетворяют следующие ступенчатые функции:

1) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)$, если $b_1 = 0$,

2) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)\,(1 + b_1w_1(x/4))$, если $b_1 \ne 0,\ b_2 = b_3 = 0$,

3) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)\,(1 + b_1w_1(x/4) + b_1b_2w_2(x/4))$, если $b_1b_2 \ne 0$, $b_3 = b_4 = b_5 = 0$,

4) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)\,(1 + b_1w_1(x/4) + b_1b_3w_3(x/4))$, если $b_1b_3 \ne 0$, $b_2 = b_6 = b_7 = 0$,

5) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b_1w_1(x/4) + b_1b_2w_2(x/4) + b_1b_3w_3(x/4) + b_1b_3b_6w_6(x/4))$, если $b_1b_2b_3b_6 \ne 0,\ b_4 = b_5 = b_7 = 0$ (сравните с примером 1).

Наряду с условием Коэна при построении ортогональных всплесков на вещественной прямой $\mathbb{R}$ применяются блокирующие множества и соответствующие им бинарные деревья (см. [20, § 3.2], [21]). Для маски вида (2) при $p = 2$ понятие блокирующего множества было введено в [10], а для масок на группе G_p это понятие использовалось, например, в [9,15].

Для маски m_0 масштабирующего уравнения (1) блокирующее множество определяется следующим образом. Для произвольного $M \subset [0,1)$ положим

$$T_pM = \bigcup_{l=0}^{p-1}\Big\{ l/p + \omega/p \mid \omega \in M \Big\}.$$

Множество M называется *блокирующим для маски* m_0 , если оно представимо в виде объединения p -ичных интервалов ранга $n-1$, не содержит интервала $[0, p^{-n+1})$ и удовлетворяет условию

$$T_pM \setminus M \subset \mathrm{Z}(m_0),$$

где $\mathrm{Z}(m_0) := \{\,\omega \in [0,1) \mid m_0(\omega) = 0\,\}$. Видно, что каждая маска может иметь только конечное число блокирующих множеств. Блокирующие множества для масок из примеров 1 и 2 указаны в [10, пример 3] и [13, пример 3.8] (некоторые другие примеры имеются в [19,22]).

Теорема 2 [9]. *Пусть функция* $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *является решением уравнения* (1) *и маска* m_0 *этого уравнения удовлетворяет условию* (6). *Тогда функция* φ *порождает КМА в том и только в том случае, когда маска* m_0 *не имеет блокирующих множеств.*

В работах [23]- [25] для построения масштабирующих функций на группе G_p применелялись (N,m)-элементарные множества и N-валидные деревья. Сформулируем определения этих понятий для полупрямой $\mathbb{R}_+$ и проиллюстрируем на примерах выполнимость для соответствующих масок модифицированного условия Коэна.

Определение 1. Пусть $N, m \in \mathbb{N}$. Множество E называется (N,m)*-элементарным множеством*, если существуют числа ζ_j, $j = 0, 1, \dots, p^N - 1$, такие, что

$$E = \bigcup_{j=0}^{p^N-1} \Delta^{(N)}(\zeta_j), \quad \Delta^{(N)}(\zeta_j) \cap \Delta^{(N)}(\zeta_{j'}) = \emptyset \quad \text{для} \quad j \neq j',$$

где $\Delta^{(N)}(\zeta_j) := [\zeta_j/p^N, (\zeta_j+1)/p^N)$, $\zeta_0 = 0$, и для $\eta_j = [\zeta_j]$, $\xi_j = \{\zeta_j\}$ выполнены условия:

1) $\eta_j \in \{0, 1, \dots, p^m - 1\}$;

2) $\xi_j \in \{0, 1/p^N, \dots, (p^N - 1)/p^N\}$, $\xi_j \neq \xi_{j'}$ для $j \neq j'$;

3) $E \cap [p^{-N+l}, p^{-N+l+1}) \neq \emptyset$ для $l = 0, 1, \dots, m + N - 1$.

Заметим, что из условия 2) следует равенство

$$\bigcup_{j=0}^{p^N-1} [\xi_j, \xi_j + p^{-N}) = [0, 1).$$

Кроме того, очевидно, всякое (N,m)-элементарное множество E имеет единичную меру Лебега и содержится в интервале $[0, p^m)$.

Определение 2. *Периодическим продолжением* $(N,1)$-элементарного множества $\widetilde{E}$ называется множество

$$P(\widetilde{E}) := \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{p^s-1} (\widetilde{E} + l \cdot p). \tag{19}$$

Отметим, что $P(\widetilde{E}) \supset \widetilde{E} \supset [0, p^{-N})$.

Пример 5. В случае $N = 1$, $p = 3$ множество $\widetilde{E}$ в определении 2 имеет вид

$$\widetilde{E} = [0, 1/3) \cup [\zeta_1/3, (\zeta_1 + 1)/3) \cup [\zeta_2/3, (\zeta_2 + 1)/3),$$

где числа ζ_1 и ζ_2 представимы в виде

$$\zeta_j = \eta_j + \xi_j, \quad \eta_j \in \{0, 1, 2\}, \quad \xi_j \in \{1/3, 2/3\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad \xi_1 \neq \xi_2.$$

Числа ζ_1 и ζ_2 выбираются так, чтобы пересечение множества $\widetilde{E}$ с каждым из интервалов $[1/3, 1)$ и $[1, 3)$ было не пустым. В частности, при $\eta_1 = 0$, $\xi_1 = 1/3$, $\eta_2 = 2$, $\xi_2 = 2/3$, получаем $(1,1)$-элементарное множество

$$\widetilde{E} = [0, 1/3) \cup [1/3, 2/3) \cup [8/3, 3).$$

Периодическое продолжение этого множества:

$$P(\widetilde{E}) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s(\widetilde{E}),$$

где

$$F_1(\widetilde{E}) = \widetilde{E} \cup (\widetilde{E} + 3) \cup (\widetilde{E} + 6),$$

$$F_2(\widetilde{E}) = F_1(\widetilde{E}) \cup (\widetilde{E} + 9) \cup (\widetilde{E} + 12) \cup (\widetilde{E} + 15) \cup (\widetilde{E} + 18) \cup (\widetilde{E} + 21) \cup (\widetilde{E} + 24),$$

и, вообще,

$$F_s(\widetilde{E}) = F_{s-1}(\widetilde{E}) \cup \left(\bigcup_{k=3^{s-1}-1}^{3^s-1} (\widetilde{E} + 3k) \right) \quad \text{для} \quad s \geq 2.$$

Определение 3. Будем говорить, что задано N*-валидное дерево* T, если T ориентировано от листьев к корню и удовлетворяет условиям:

1) каждая вершина дерева T имеет значение из множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$;

2) корень и все вершины дерева T до $(N-1)$-го уровня включительно имеют значение 0;

3) любой путь длины $N-1$ встречается в T и притом только один раз.

Отметим, что N-валидные деревья в случае $p = 2$ аналогичны бинарным деревьям, применявшимся в [21]. Каждому N-валидному дереву T сопоставим множество индексов $I(T)$ по правилу:

$$s \in I(T) \iff s = 0 \quad \text{или} \quad s = \sum_{k=0}^{N} s_k p^k, \ s_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

при условии, что путь $s_0 \to s_1 \to \cdots \to s_N$ встречается хотя бы один раз в каком-нибудь из путей дерева T.

Предложение 7 [23]. *Для любого N-валидного дерева T множество*

$$\widetilde{E}_T := \bigcup_{s \in I(T)} [sp^{-N}, (s+1)p^{-N}) \tag{20}$$

является $(N+1,1)$-элементарным.

Пример 6. Пусть $N = 2$, $p = 3$, а дерево T выбрано как на рис. 1 в [23], но с противоположной ориентацией. Дерево T имеет следующие пути, начинающиеся в листьях и оканчивающиеся в корне:

$$P_1: \ 0 \to 1 \to 2 \to 0 \to 0, \quad P_2: \ 1 \to 1 \to 0 \to 2 \to 0 \to 0,$$

$$P_3: \ 2 \to 1 \to 0 \to 2 \to 0 \to 0, \quad P_4: \ 2 \to 2 \to 0 \to 0.$$

Множество индексов

$$I(T) = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 19, 21\}$$

находится из условия

$$s \in I(T) \setminus \{0\} \iff s = s_0 + 3s_1 + 9s_2,$$

где $s_0 \to s_1 \to s_2$ встречается хотя бы один раз в каком-нибудь из путей P_1, P_2, P_3, P_4. Из формулы (20) для данного дерева T получается множество

$$\widetilde{E}_T = [0, 1/9) \cup [2/9, 1/3) \cup [4/9, 1) \cup [19/9, 20/9) \cup [7/3, 22/9).$$

Отличные от нуля значения маски

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{26} a_k \overline{w_k(\omega)}$$

в условии (7) выберем такими, что $b_0 = 1$, $|b_2| = |b_4| = |b_5| = |b_6| = |b_7| = |b_8| = |b_{19}| = |b_{21}| = 1$. Отметим, что если все эти значения равны 1, то маска m_0 на интервале $[0, 1)$ совпадет с характеристической функциией множества $\widetilde{E}_T/3$. Кроме того, $m_0(\omega) = 1$ для всех $\omega \in [0, 1/27)$ и в силу предложения 4 формула

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{3} m_0(3^{-j}\omega), \quad \omega \in [0, 3),$$

задаёт масштабирующую функцию $\varphi \in \Im_2^{(1)}(\mathbb{R}_+)$. Для этой функции с помощью [15, формула (16)] получается разложение

$$\varphi(x) = \frac{1}{9} \mathbf{1}_{[0,1)}(y)(1 + b_2 w_2(y) + b_2 b_6 w_6(y) + b_2 b_7 w_7(y) + b_2 b_8 w_8(y)$$

$$+ b_2 b_6 b_{19} w_{19}(y) + b_2 b_7 b_{21} w_{21}(y) + b_2 b_4 b_6 b_{19} w_{58}(y) + b_2 b_5 b_6 b_{19} w_{59}(y)),$$

где $y = x/9$, $x \in [0,9)$. По построению, функция φ отлична от нуля на множестве $\widetilde{E}_T$ и обращается в нуль на $\mathbb{R}_+ \setminus \widetilde{E}_T$. Более того, модифицированное условие Коэна

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} \inf_{\omega\in E} |m_0(3^{-j}\omega)| > 0$$

выполнено для $E = \widetilde{E}_T$. Значит, по теореме 1 система $\{\varphi(\cdot \ominus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Определение 4. Говорят, что множество E *порождено* N*-валидным деревом* T, если

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} p^k P(\widetilde{E}_T/p),$$

где множество $\widetilde{E}_T$ задано по формуле (20).

Предложение 8 [23]. *Пусть множество* E *порождено* N*-валидным деревом* T *с высотой* H. *Тогда множество* E *представимо в виде*

$$E = \bigcap_{k=1}^{H-N+1} p^k P(\widetilde{E}_T/p)$$

и является (N,m)*-элементарным множеством с* $m = H - 2N + 1$.

Следующая теорема представляет собой переформулировку теоремы 4.1 статьи [23].

Теорема 3. *Пусть модуль маски* m_0 *масштабирующего уравнения* (1) *принимает только два значения:* 0 *или* 1, *причем* $m_0(0) = 1$. *Предположим, что решение* φ *уравнения* (1), *заданное по формуле*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

таково, что $\widehat{\varphi} \in \Im_m^{(N)}(\mathbb{R}_+)$ *и* $|\widehat{\varphi}| = \mathbf{1}_E$, *где* $N = n - 1$ *и* E *является* (N,m)*-элементарным множеством. Тогда существует* N*-валидное дерево* T *с высотой* $H = m + 2N - 1$, *порождающее множество* E.

При условиях предложения 8 имеем $E \subset [0, p^m)$ и

$$\mathbf{1}_E(\omega) = \prod_{k=1}^{m+N} \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/p)}(p^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{21}$$

С другой стороны, согласно (13) верно равенство

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(p^{-m-N}\omega) \prod_{j=1}^{m+N} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{22}$$

Отметим, что формула (22) совпадает с (21), если $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_E$ и $m_0(\omega) = \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/p)}(\omega)$ для $\omega \in \widetilde{E}_T/p$ (отметим, что $p^{-m-N}E \subset [0, p^{-N}) \subset E$).

Пример 7. Пусть $N = 2$, $p = 3$, а дерево T и множество $\widetilde{E}_T$ как в примере 6. Тогда $H = 5$ и по предложению 8 множество

$$E = \bigcap_{k=1}^{4} 3^k P(\widetilde{E}_T/3), \quad E \subset [0,9),$$

является $(2,2)$-элементарным. Полагая $\widetilde{E}_0 = \widetilde{E}_T/3$, как в примере 5 определим множества

$$F_1(\widetilde{E}_0) = \widetilde{E}_0 \cup (\widetilde{E}_0 + 3) \cup (\widetilde{E}_0 + 6)$$

и

$$F_s(\widetilde{E}_0) = F_{s-1}(\widetilde{E}_0) \cup \left(\bigcup_{k=3^{s-1}-1}^{3^s-1} (\widetilde{E}_0 + 3k) \right) \quad \text{для} \quad s \geq 2.$$

Тогда

$$P(\widetilde{E}_T/3) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s(\widetilde{E}_0).$$

Таким образом, если функция φ определена условием $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_E$, то согласно (21) и (22) имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{4} \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/3)}(3^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и с помощью теоремы 1 проверяется, что система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \, : \, k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Произвольное N-валидное дерево T может быть записано в *векторной форме* $\widetilde{T}$ таким образом, что выполнены условия:

1) вершинами дерева $\widetilde{T}$ являются N-мерные векторы $\boldsymbol{s} = (s_N, s_{N-1}, \dots, s_1)$ с компонентами $s_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $i \in 1, 2. \dots, N$;

2) дерево $\widetilde{T}$ ориентировано от листьев к корню, причем корнем дерева $\widetilde{T}$ является N-мерный нулевой вектор;

3) для любой дуги $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{t}$ дерева $\widetilde{T}$ выполнено условие *суффикс – префикс*: первые $N-1$ компонент вектора $\boldsymbol{t}$ совпадают с последними $N-1$ компонентами вектора $\boldsymbol{s}$.

Высоты деревьев $\widetilde{T}$ и T связаны равенством $\widetilde{H} = H - N + 1$. Векторная форма применяется при $N \geq 2$; в случае $N = 1$ эти формы отождествляются: $\widetilde{T} = T$.

Вектору $\boldsymbol{t} = (t_N, t_{N-1}, \dots, t_1)$ сопоставим число $t = t_1 + t_2 p + \dots + t_N p^{N-1}$, $t \in \{0, 1, \dots, p^N - 1\}$. Всем исходящим из вершины $\boldsymbol{s} = (s_N, s_{N-1}, \dots, s_1)$ дерева $\widetilde{T}$ дугам $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{t}$ приписываются положительные веса λ_t, сумма которых равна 1. Аналогом сформулированной в [**?**] теоремы является следующее предложение.

Предложение 9. *Пусть числа* λ_t *определены для* N*-валидного дерева* $\widetilde{T}$ *как указано выше, причем* $N = n - 1$. *Предположим, что ненулевые значения маски* m_0 *выбраны так, что* $b_0 = 1$ *и* $|b_{t+kp^N}|^2 = \lambda_t$ *для* $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $t \in \{0, 1, \dots, p^N - 1\}$. *Тогда решение* φ *уравнения* (1), *заданное по формуле*

$$\widehat{\varphi}(\omega) \; = \; \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

принадлежит классу $\Im_N^{(m)}(\mathbb{R}_+)$, *где* $m = \widetilde{H} - N$.

Отметим в заключение, что аналоги приведенных выше конструкций относятся к масштабирующим функциям, порождающим кратномасштабные анализы и соответствующие им ортогональные всплески с компактными носителями, ассоциированные с обобщенными функциями Уолша на группе Виленкина G_p. Для группы G_p необходимые и достаточные условия ортонормированности системы целых сдвигов масштабирующей функции, определяемой аналогично функции φ из предложения 9, доказаны в [25]. Ступенчатые ортогональные всплески в пространстве $L^2(G_p)$ (и аналогичные всплески в $L^2(\mathbb{R}_+)$) могут быть получены также итерационным методом построения всплесковых множеств (wavelet sets) (см. [26, Пример 5.4], [27]).

Список литературы

1 Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H. Construction of wavelets through Walsh functions / Industrial and Applied Mathematics. — Singapore: Springer, 2019. — 382 p.

2 Farkov Yu. A. Wavelet frames related to Walsh functions // Eur. J. Math. - 2019. - V. 5. - № 1. - P. 250-267.

3 Фарков Ю. А. Дискретные вейвлет-преобразования в анализе Уолша // Материалы международной конференции «International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17», Санкт-Петербургский политехнический университет, 24–28 июля 2017 г., Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 160, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 126–136.

4 Schipp F., Wade W. R., Simon, P. Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. New York: Adam Hilger, 1990.

5 Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. - 346 с.

6 Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh functions // Pacific. J. Math. - 1955. - V. 5. - № 1. - P. 17-32.

7 Беспалов М. С. Порождающий оператор для дискретных функций Крестенсона // Пробл. передачи информ.- 2015. - Т. 51. - № 1. - С. 42–53; Problems Inform. Transmission, - 2015. - V. 51. - № 1. - P. 37–48.

8 Щербаков В. И. Расходимость рядов Фурье по обобщенным системам Хаара в точках непрерывности функции // Изв. вузов. Матем. - 2016. - № 1. - С. 49–68; Russian Math. (Iz. VUZ) - 2016. - V. 60. - № 1. - P. 42–59.

9 Farkov Yu. A. On wavelets related to the Walsh series // J. Approx. Theory. - 2009. - V. 161. - № 1. - P. 259-279.

10 Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. - 2006. - Т. 197. - № 10. - С. 129-160.

11 Lang W. C., Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. - 1998. - V. 24.- P. 533-544.

12 Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. - 2005. - Т. 69. - № 3. - С. 193-220.

13 Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl., Special Issue (IWWFA-II, Delhi). - 2015. - V. 2. - P. 13-36.

14 Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. - 2015. - V. 5. - № 1. - Article ID 1550036, 19 p.

15 Фарков Ю. А. Ортогональные всплески в анализе Уолша// Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. К 80-летию В.А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ/ Под редакцией Т.П. Лукашенко и А.П. Солодова. М.: Издательство Московского университета, 2016. С. 62–75.

16 Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. - 2011. - V. 3. - № 3. - P. 181-195.

17 Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.- 464 с.

18 Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. - 2014. - V. 20.- P. 42-65.

19 Родионов Е. А. Разработка вейвлет-методов для выявления предвестниковых эффектов землетрясений: дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. – Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе (МГРИ-РГГРУ). – М., 2018. – 161 с.

20 Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006 (перевод: I. Ya. Novikov, V. Yu. Protassov, and M. A. Skopina. Wavelet Theory. Translations of Mathematical Monographs 239. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2011).

21 Protasov V. Yu. A complete solution characterizing smooth refinable functions // SIAM J. of Math. Anal. - 2000. - V. 31. - № 6. - P. 1332-1350.

22 Фарков Ю. А., Родионов Е. А. Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши // Матем. заметки. - 2009. - Т.86. - Вып. 3. - С. 429-444.

23 Lukomskii S. F., Berdnikov G. S., N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups. Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. - 2015. - V. 13. - № 5 - Article ID 1550037, 23 p.

24 Лукомский С. Ф., Бердников Г. С., Крусс Ю. С. Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина // Матем. заметки. - 2015. - Т. 98. - Вып. 2. - С. 310–313.

25 Berdnikov G. S. Necessary and sufficient condition for an orthogonal scaling function on Vilenkin groups // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. - 2019. - Т.19. - Вып. 1. - С. 24–33.

26 Benedetto R.L. Examples of wavelets for local fields // Contemporary Mathematics. - 2004. - V. 345. - P. 27-47.

27 Benedetto J. J., Benedetto R. L. The construction of wavelet sets // In: Cohen, Jonathan (ed.) et al., Wavelets and multiscale analysis. Theory and applications. Selected papers based on the presentations at the international conference on wavelets: *Twenty Years of Wavelets*, DePaul University, Chicago, IL, USA, May 15–17, 2009. New York, NY: Springer (Applied and Numerical Harmonic Analysis). 2011. P.17-56.

Ю.А. Фарков

Ресей Федерациясы Президенті жанындағы Ресей халық шаруашылығы және мемлекеттік қызмет академиясы, Мәскеу, Ресей

Крестенсон-Леви жүйесі және баспалдақты масштабтаушы функциялар

Аннотация: $L^2(\mathbb{R}_+)-$ дегі еселі масштабты анализдерді туындатушы Крестенсон-Леви жүйесі мен модификацияланған Коэн шарты арқылы баспалдақты масштабтаушы функциялар құрылды. Виленкин топтарындағы ортогоналды вэйвлеттер және Парсеваль фреймдеріне ұқсас құрылымдар талқыланады.

Түйін сөздер: Уолш функциялары, ортогоналды вэйвлеттер, масштабтаушы баспалдақты функциялар, еселі масштабты анализ, Парсеваль фреймдері, Виленкин топтары, Крестенсон-Леви жүйесі.

Yu. A. Farkov

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Moscow, Russian Federation

Chrestenson-Levy system and step scaling functions

Abstract: Using the Chrestenson-Levy system and the modified Cohen condition, step scaling functions are constructed that generate multiresolution analyzes in $L^2(\mathbb{R}_+)$. Analogies with orthogonal wavelet constructions and Parseval frames for Vilenkin groups are discussed.

Keywords: Walsh functions, orthogonal wavelets, step scaling functions, multiresolution analysis, Parseval frames, Vilenkin groups, Chrestenson-Levy system.

References

1 Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H. Construction of wavelets through Walsh functions / Industrial and Applied Mathematics. — Singapore: Springer, 2019. 382 p.

2 Farkov Yu. A. Wavelet frames related to Walsh functions, Eur. J. Math. 2019. Vol. 5. № 1. P. 250-267.

3 Farkov Yu. A. Discrete wavelet transforms in Walsh analysis, Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS-17, St. Petersburg Polytechnic University, July 24-28, 2017, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 160, VINITI, Moscow, 2019, 126–136

4 Schipp F., Wade W. R., Simon, P. Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. New York: Adam Hilger, 1990.

5 Golubov, B.; Efimov, A.; Skvortsov, V. Walsh series and transforms. Theory and applications. Transl. from the Russian by W. R. Wade. Mathematics and Its Applications. Soviet Series. 64. Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers Group. xiii. 1991. 368 p.

6 Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh functions, Pacific. J. Math. 1955. Vol. 5. № 1. P. 17-32.

7 Bespalov M.S. Generating operator for discrete Chrestenson functions, Problems Inform. Transmission, 2015. Vol. 51. № 1. P. 37–48.

8 Shcherbakov V.I. Divergence of the Fourier series by generalized Haar systems at points of continuity of a function, Russian Mathematics. 2016. Vol 60. № 1. P. 42–59.

9 Farkov Yu. A. On wavelets related to the Walsh series, J. Approx. Theory. 2009. V. 161. № 1. P. 259-279.

10 Protasov V. Yu., Farkov Yu.A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line, Sb. Math. 2006. V. 197. № 10. P. 1529–1558.

11 Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group, Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533-544.

12 Farkov Yu.A. Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups, Izvestiya: Mathematics. 2005. V. 69. № 3. P. 623-650.

13 Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis, Poincare J. Anal. Appl., Special Issue (IWWFA-II, Delhi). 2015. V. 2. P. 13-36.

14 Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties, Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. V. 5. № 1. Article ID 1550036, 19 p.

15 Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets in Walsh analysis, Sovremennye problemy matematiki i mehaniki. T. XI. Vyp. 1. Matematika. K 80-letiju V.A. Skvorcova. Obobshhennye integraly i garmonicheskij analiz [Modern problems of mathematics and mechanics. T. XI. Issue 1. Mathematics. On the 80th anniversary of V.A. Skvortsov. Generalized integrals and harmonic analysis]/ Pod redakciej T.P. Lukashenko i A.P. Solodova [Edited by T.P. Lukashenko and A.P. Solodova] (Moscow University Press, Moscow, 2016, P. 62–75).

16 Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups, p -Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. V. 3. № 3. P. 181-195.

17 Dobeshi I. Desyat' lekcij po vejvletam [Ten lectures on wavelets] (NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika", Izhevsk, 2001, 464 p.).

18 Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on p -adic Vilenkin groups, J. Fourier Anal. Appl. 2014. V. 20. P. 42-65.

19 Rodionov E. A. Razrabotka vejvlet-metodov dlya vyyavleniya predvestnikovyh effektov zemletryasenij [Development of wavelet methods for identifying the precursor effects of earthquakes]: diss. na soiskanie uch. st. kand. fiz.-mat. nauk: 05.13.18 - Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm [diss. for

the competition Art. Cand. Phys.-Math. Sciences: 05.13.18 - Mathematical modeling, numerical methods and complexes of programs]. Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting. Moscow, 2018.– 161 p.

20 Novikov I.Ya., Protassov V.Yu., and Skopina M.A.Wavelet Theory. Translations of Mathematical Monographs 239. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2011).

21 Protasov V. Yu. A complete solution characterizing smooth refinable functions, SIAM J. of Math. Anal. 2000. V. 31. № 6. P. 1332-1350.

22 Rodionov E.A., Farkov Yu.A. Estimates of the smoothness of dyadic orthogonal wavelets of Daubechies type, Mathematical Notes. 2009. V. 86. № 63. P. 407-421.

23 Lukomskii S. F., Berdnikov G. S., N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups, Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. V. 13. № 5 Article ID 1550037, 23 p.

24 Lukomskii S.F., Berdnikov G.S., Kruss Yu.S. On the orthogonality of a system of shifts of the scaling function on Vilenkin groups, Mathematical Notes. 2015. V. 98. P. 339–342.

25 Berdnikov G. S. Necessary and sufficient condition for an orthogonal scaling function on Vilenkin groups, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. V. 19. № 1. P. 24–33.

26 Benedetto R.L. Examples of wavelets for local fields, Contemporary Mathematics. 2004. V. 345. P. 27-47.

27 Benedetto J. J., Benedetto R. L. The construction of wavelet sets // In: Cohen, Jonathan (ed.) et al., Wavelets and multiscale analysis. Theory and applications. Selected papers based on the presentations at the international conference on wavelets: *Twenty Years of Wavelets*, DePaul University, Chicago, IL, USA, May 15–17, 2009. New York, NY: Springer (Applied and Numerical Harmonic Analysis). 2011. P.17-56.

Information about author:

Фарков Ю.А. - д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладных информационных технологий, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (РАНХиГС), проспект Вернадского, 82, 119571 Москва, РФ.

Farkov Yu.A. - Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor, Department of Applied Information Technology, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Prospect Vernadskogo, 82, Moscow, Russian Federation, 119571.

Поступила в редакцию 7.01.2020

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 130, №1, 73-81 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.19**

Б.А. Дуйсенгалиева, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: bibinur.88@mail.ru, altyngul.82@mail.ru)

Структура амальгамированного свободного произведения группы ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова ранга 2

Аннотация: Статья посвящена описанию группы ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова от двух порождающих над полем нулевой характеристики. Используя введенный порядок на множестве базисных элементов этой алгебры, доказаны некоторые свойства базисных слов. Также доказано, что группа ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова ранга два над полем нулевой характеристики допускает структуру амальгамированного свободного произведения групп аффинных автоморфизмов $Af_2(A)$ и треугольных автоморфизмов $Tr_2(A)$ с объединенной подгруппой $Af_2(A) \cap Tr_2(A)$.

Ключевые слова: Алгебра дифференциальных многочленов, свободная алгебра Новикова, амальгамированное свободное произведение, ручной автоморфизм.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-130-1-73-81

1. Введение

Хорошо известно, что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x,y]$ являются ручными [1, 2]. Более того, группа автоморфизмов $Aut(k[x,y])$ этой алгебры допускает структуру амальгамированного свободного произведения [2,3], т.е.

$$Aut(k[x,y]) = A *_C B,$$

где A – подгруппа аффинных автоморфизмов, B – подгруппа треугольных автоморфизмов и $C = A \cap B$. Аналогичные результаты также имеют место для свободных ассоциативных алгебр [4,5], свободных алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики [6] и свободных правосимметричных алгебр [7]. Также доказано, что группа ручных автоморфизмов алгебры дифференциальных многочленов $k\{x,y\}$ допускает структуру амальгамированного свободного произведения [8].

Неассоциативная алгебра $A = (A, \star)$ называется *(левой) алгеброй Новикова*, если A удовлетворяет следующим тождествам:

$$(a \star b) \star c - a \star (b \star c) = (b \star a) \star c - b \star (a \star c),$$

$$(a \star b) \star c = (a \star c) \star b,$$

для любого $a, b, c \in A$.

С.И. Гельфанд и И.Я. Дорфман в работе [8] показали, что дифференциальная коммутативная ассоциативная алгебра с дифференцированием θ относительно умножения $a \star b = a(\theta b)$ становится алгеброй Новикова. В работах [9,10] построены базисы свободных алгебр Новикова. Теорема о свободе для алгебр Новикова доказана в [11].

В работе [10] свободные алгебры Новикова представлены через обыкновенные алгебры дифференциальных многочленов с помощью умножения $a \star b = a(\theta b)$. В работе [12] доказано, что такое представление имеет место и для несвободных алгебр Новикова.

В настоящей работе доказывается, что группа ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова ранга два допускает структуру амальгамированного свободного произведения. Отметим, что вопрос о ручных и диких автоморфизмах для алгебр Новикова от двух переменных остается открытым.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведено описание базиса свободной алгебры Новикова из работы [13] и доказаны некоторые свойства базисных слов. Раздел 3 посвящен представлению группы ручных автоморфизмов свободной алгебры Новикова ранга два над полем нулевой характеристики в виде амальгамированного свободного произведения.

2. Базис свободной алгебры Новикова

Пусть R – произвольное коммутативное кольцо с единицей. Отображение $d : R \to R$ называется *дифференцированием*, если для всех $s, t \in R$ выполняются условия

$$d(s+t) = d(s) + d(t),$$

$$d(st) = d(s)t + sd(t).$$

Пусть $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ – основное множество дифференциальных операторов.

Кольцо R называется *дифференциальным кольцом* или Δ*-кольцом*, если $\delta_1, \dots, \delta_m$ являются коммутирующими дифференцированиями кольца R, т.е. $\delta_i : R \to R$ – дифференцирования и $\delta_i\delta_j = \delta_j\delta_i$ для всех i, j.

Пусть Θ – свободный коммутативный моноид на множестве дифференциальных операторов $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Элементы

$$\theta = \delta_1^{i_1} \dots \delta_m^{i_m}$$

моноида Θ называются *производными операторами*.

Пусть R – произвольное дифференциальное кольцо и пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – множество символов. Рассмотрим множество символов $X^\Theta = \{x_i^\theta | 1 \leq i \leq n, \theta \in \Theta\}$ и алгебру многочленов $R[X^\Theta]$ на множестве символов X^Θ. Полагая

$$\delta_i(x_j^\theta) = x_j^{\theta\delta_i}$$

для всех $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \theta \in \Theta$, превратим алгебру $R[X^\Theta]$ в дифференциальную алгебру. Дифференциальная алгебра $R[X^\Theta]$ обозначается через $R\{X\}$ и называется *алгеброй дифференциальных многочленов* над кольцом R от множества переменных X [14].

Пусть M – свободный коммутативный моноид от множества переменных x_i^θ, где $1 \leq i \leq n$ и $\theta \in \Theta$. Элементы M назовем также *дифференциальными мономами* в алфавите X. Дифференциальные мономы образуют базис алгебры $R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, т.е. любой элемент $a \in R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ однозначно записывается в виде

$$a = \sum_{u \in M} r_u u$$

с конечным числом ненулевых $r_u \in R$.

Пусть $k\{x_1, \dots, x_n\}$ – алгебра дифференциальных многочленов над полем k характеристики 0 от переменных $x_1, \dots, x_n$ с одним дифференцированием δ. Для удобства записи производные $a^\delta, a^{\delta^2}, a^{\delta^s}$ обозначим через $a', a'', a^{(s)}$, соответственно. Положим $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и через X^δ обозначим множество всех символов вида $x_i^{(r)}$, где $1 \leq i \leq n$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Для любого $x_i^{(r)}, x_j^{(s)} \in X^\delta$ будем считать, что $x_i^{(r)} > x_j^{(s)}$, если $i > j$ или если $i = j$, $r > s$. Множество M всех дифференциальных мономов вида

$$u = x_{i_1}^{(s_1)} x_{i_2}^{(s_2)} \dots x_{i_t}^{(s_t)},$$

где $t \geq 0$, $x_{i_j}^{(s_j)} \in X^\delta$ для всех $1 \leq j \leq t$ и $x_{i_1}^{(s_1)} \geq x_{i_2}^{(s_2)} \geq \dots \geq x_{i_t}^{(s_t)}$, образует линейный базис алгебры $k\{x_1, \dots, x_n\}$.

Для любого $x_i^{(r)} \in X^\delta$ положим

$$\deg(x_i^{(r)}) = 1, \quad d(x_i^{(r)}) = r,$$

где $1 \le i \le n$. Если $u = a_1 \dots a_s \in M$, где $a_1, \dots, a_s \in X^\delta$, то положим

$$\deg(u) = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_s), \quad d(u) = d(a_1) + \dots + d(a_s),$$

т.е. через $\deg(u)$ обозначим стандартную функцию степени монома u по переменным $x_1, \dots, x_n$, а через $d(u)$ обозначим дифференциальную степень монома u по дифференцированию δ .

На дифференциальной алгебре $k\{x_1, \dots, x_n\}$ введем новую операцию $\star$ полагая

$$f \star g = fg', \quad f, g \in k\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Легко проверить, что алгебра дифференциальных многочленов $k\{x_1, \dots, x_n\}$ с новой операцией $\star$ становится алгеброй Новикова. Через $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ обозначим подалгебру этой алгебры порожденную элементами $x_1, \dots, x_n$. В [9] доказано, что в случае полей нулевой характеристики $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является свободной алгеброй Новикова от переменных $x_1, \dots, x_n$ без единицы.

В работе [13] была описана структура пространства $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ в терминах дифференциальных мономов.

Предложение 1. *[13] Множество всех дифференциальных мономов $u \in M$ с условием $\deg(u) - d(u) = 1$ представляет базис свободной алгебры Новикова $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.*

Через $N \langle x_1, \dots, x_n \rangle = k \oplus N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle = N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle^\#$ обозначим алгебру полученную из $N_0 \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ формальным присоединением единицы. Тогда $N \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является свободной алгеброй Новикова от переменных $x_1, \dots, x_n$ с единицей. Ниже всюду используется данное представление свободной алгебры Новикова.

Пусть $N \langle x, y \rangle$ – свободная алгебра Новикова над полем k характеристики 0 от двух переменных x, y . Через W обозначим множество всех базисных слов алгебры $N \langle x, y \rangle$.

Положим $x > y$ и u, v – произвольные элементы W . Будем считать, что $u < v$, если $\deg(u) < \deg(v)$. Пусть $\deg(u) = \deg(v) \ge 2$, $u = u_1 \star u_2$, $v = v_1 \star v_2$, то положим $u < v$, если $u_1 < v_1$ или $u_1 = v_1$ и $u_2 < v_2$.

Каждый ненулевой элемент $f \in N \langle x, y \rangle$ единственным образом представляется в виде

$$f = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m,$$

где $w_i \in W$, $0 \ne \lambda_i \in k$ для всех $w_1 > w_2 > \dots > w_m$. Слово w_1 называется *старшим словом* элемента f и обозначается через $\overline{f}$.

Лемма 1. *Пусть u, v, w – произвольные слова алгебры $N \langle x, y \rangle$. Если $u < v$, то $w \star u < w \star v$ и $u \star w < v \star w$.*

Proof. Так как $u < v$, то выполняется одно из следующих условий:

1) $\deg(u) < \deg(v)$, тогда $\deg(w \star u) < \deg(w \star v)$. Следовательно, $w \star u < w \star v$.

2) $\deg(u) = \deg(v)$, $u_1 < v_1$ или $u_1 = v_1$, $u_2 < v_2$. Тогда $\deg(w \star u) = \deg(w \star v)$, $w \star u = w \star (u_1 \star u_2)$ и $w \star v = w \star (v_1 \star v_2)$. Проверяя условия сравнений получаем, что $w \star u < w \star v$.

Аналогично доказывается, что если $u < v$, то $u \star w < v \star w$. □

Следствие 1. Если $f, g \in N \langle x, y \rangle$, то $\overline{f \star g} = \overline{f} \star \overline{g}$.

Лемма 2. *Пусть u, v – слова алгебры $N \langle y \rangle$, w – слово алгебры $N \langle x, y \rangle$ и $u < v$. Тогда $u(w) < v(w)$.*

Proof. Докажем утверждения леммы индукцией по $\deg(v) = t$. Если $t = 2$, то $v = y \star y$, $u = y$. Тогда $u(w) < v(w)$.

Предположим, что утверждения леммы справедливо для всех значений меньше чем t .

Так как $u < v$, то выполняется одно из следующих условий:

1) $\deg(u) < \deg(v)$, тогда $\deg(u(w)) < \deg(v(w))$. Следовательно, $u(w) < v(w)$.

2) $\deg(u) = \deg(v)$, $u_1 < v_1$ или $u_1 = v_1$, $u_2 < v_2$. Тогда по предположению индукции $u_1(w) < v_1(w)$ или $u_1(w) = v_1(w)$, $u_2(w) < v_1(w)$. Следовательно, $u(w) < v(w)$. □

Следствие 2. Пусть $f \in N \langle y \rangle$, $g \in N \langle x, y \rangle$. Тогда $\overline{f(g)} = \overline{f}(\overline{g})$.

Proof. По следствию 1 и лемме 2 имеем $\overline{f(g)} = \overline{f}(\overline{g})$. □

3. Амальгамированное свободное произведение

Пусть $A = N\langle x,y\rangle$ – свободная алгебра Новикова над полем k характеристики 0 от двух переменных x,y и пусть $Aut(A)$ – группа автоморфизмов алгебры A.

Через $\varphi = (f_1, f_2)$ обозначим автоморфизм алгебры A такой, что $\varphi(x) = f_1, \varphi(y) = f_2$. Автоморфизмы вида

$$\sigma(1,a,f) = (ax + f(y), y),$$
$$\sigma(2,a,g) = (x, ay + g(x)),$$

где $0 \neq a \in k$, $f(y) \in N\langle y\rangle$, $g(x) \in N\langle x\rangle$, называются *элементарными*. Подгруппа $T(A)$ группы $Aut(A)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов*. Не ручные автоморфизмы называются *дикими*.

Для автоморфизма $\theta = (f_1, f_2) \in Aut(A)$ определим степень, общую степень, полагая, соответственно

$$\deg(\theta) = \max\{\deg(f_1), \deg(f_2)\},$$
$$tdeg(\theta) = \deg(f_1) + \deg(f_2).$$

Если

$$\theta = (f_1, f_2),\ \ \varphi = (g_1, g_2),$$

то произведение в $Aut(A)$ определяется следующей формулой

$$\theta \circ \varphi = (g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2)).$$

Пусть $Af_2(A)$ – группа аффинных автоморфизмов алгебры A, т.е. группа автоморфизмов вида

$$(a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2),$$

где $a_i, b_i, c_i \in k, a_1b_2 \neq a_2b_1$, $Tr_2(A)$ – группа треугольных автоморфизмов алгебры A, т.е. группа автоморфизмов вида

$$(ax + f(y), by + c),$$

где $0 \neq a, b \in k,\ c \in k,\ f(y) \in N\langle y\rangle$, и пусть $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$.

Пусть G – произвольная группа, G_0, G_1, G_2 – подгруппы группы G, причем $G_0 = G_1 \cap G_2$. Группа G называется *свободным произведением подгрупп* G_1 *и* G_2 *с объединенной подгруппой* G_0 и обозначается $G = G_1 *_{G_0} G_2$, если

(a) G порождается подгруппами G_1 и G_2;

(b) Определяющие соотношения группы G состоят только из определяющих соотношений подгрупп G_1 и G_2.

Если S_1 – система левых представителей G_1 по G_0, S_2 – система левых представителей G_2 по G_0, то группа G является свободным произведением подгрупп G_1 и G_2 с объединенной подгруппой G_0 (см. например [15]) в том и только в том случае, когда каждый $g \in G$ однозначно представляется в виде

$$g = g_1 \dots g_k c,$$

где $g_i \in S_1 \cup S_2,\ i = 1, \dots, k,\ \ g_i, g_{i+1}$ одновременно не принадлежат S_1 или S_2, $c \in G_0$.

Запись $h_i(y)$ в доказательствах следующих нескольких лемм означает, что $h_i(y) \in N\langle y\rangle$ – однородный многочлен степени i по отношению к функции степени deg от одной переменной y. Ясно, что $h_0(y) \in k$.

Лемма 3. *a) Система элементов*

$$A_0 = \{id = (x,y), \gamma = (y, x + ay) | a \in k\}$$

является системой представителей левых смежных классов $Af_2(A)$ *по подгруппе* C.

b) Система элементов

$$B_0 = \{\beta = (x + q(y), y) | q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)\}$$

является системой представителей левых смежных классов $Tr_2(A)$ *по подгруппе* C.

Proof. Проверим условие a). Пусть $l \in Af_2(A)$. Мы должны показать, что для любого l найдутся $\gamma \in A_0,\ \eta \in C$ такие, что $l = \gamma \circ \eta$.

Если $l = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2)$, где $a_2 \neq 0$, то положим $\gamma = (y, x + \frac{b_2}{a_2}y)$, $\eta = ((b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2})x + a_1y + c_1, a_2y + c_2)$. Тогда l представляется в виде

$$l = (y, x + \frac{b_2}{a_2}y) \circ ((b_1 - \frac{a_1b_2}{a_2})x + a_1y + c_1, a_2y + c_2) = \gamma \circ \eta.$$

Если $a_2 = 0$, то $\gamma = id$, $\eta = l$, т.е. $l = id \circ l$.

Допустим $\gamma_1 = (y, x + a_1y)$, $\gamma_2 = (y, x + a_2y)$ и $\gamma_1C = \gamma_2C$, тогда

$$\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 = (-a_1x + y, x) \circ (y, x + a_2y) = (x, (-a_1 + a_2)x + y).$$

Отсюда следует, что $\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$. Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Теперь проверим условие b). Пусть $\psi = (ax + h(y), by + c) \in Tr_2(A)$ и $h(y) = h_n(y) + \ldots + h_1(y) + h_0(y)$. Мы должны показать, что для любого ψ найдутся $\beta \in B_0,\ \mu \in C$ такие, что $\psi = \beta \circ \mu$. Положим $\beta = (x + \frac{1}{a}q(y), y)$, $\mu = (ax + h_1(y) + h_0(y), by + c)$, где $q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)$. Тогда ψ представляется в виде

$$\psi = (x + \frac{1}{a}q(y), y) \circ (ax + h_1(y) + h_0(y), by + c) = \beta \circ \mu.$$

Допустим, $\beta_1 = (x + q(y), y)$, $\beta_2 = (x + q^{(1)}(y), y)$ и $\beta_1C = \beta_2C$. Тогда имеем

$$\beta_1^{-1} \circ \beta_2 = (x - q(y), y) \circ (x + q^{(1)}(y), y) = (x - q(y) + q^{(1)}(y), y).$$

Отсюда следует, что $\beta_1^{-1} \circ \beta_2 \in C$ тогда и только тогда, когда $q(y) = q^{(1)}(y)$. Следовательно, $\beta_1 = \beta_2$. □

Лемма 4. *Пусть* A_0, B_0 *– множества, определенные в лемме 3. Тогда любой ручной автоморфизм* φ *алгебры* A *разлагается в произведение вида*

$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, \tag{1}$$

где $\gamma_i \in A_0,\ \gamma_2, \ldots, \gamma_k \neq id$, $\beta_i \in B_0,\ \beta_1, \ldots, \beta_k \neq id$, $\lambda \in C$.

Proof. Очевидно, что

$$(ax + h(y), y) = (x + \frac{1}{a}q(y), y) \circ (ax + h_1(y) + h_0(y), y),$$

где $h(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y) + h_1(y) + h_0(y)$, $q(y) = h_n(y) + \ldots + h_2(y)$,

$$(x, by + h^{(1)}(x)) = (y, x) \circ (x + \frac{1}{b}q^{(1)}(y), y) \circ (y, bx + h_1^{(1)}(y) + h_0^{(1)}(y)),$$

где $h^{(1)}(y) = h_m^{(1)}(y) + \ldots + h_2^{(1)}(y) + h_1^{(1)}(y) + h_0^{(1)}(y)$, $q^{(1)}(y) = h_m^{(1)}(y) + \ldots + h_2^{(1)}(y)$, т.е. любой элементарный автоморфизм имеет вид

$$l_1 \circ \beta \circ l_2,$$

где $\beta \in B_0$, $l_1, l_2 \in Af_2(A)$.

Любой ручной автоморфизм φ представляется в виде композиции элементарных автоморфизмов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т.е.

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n.$$

Следовательно, имеем

$$\varphi = l_1 \circ \beta_1 \circ l_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1},$$

где $\beta_i \in B_0$, $l_i \in Af_2(A)$.

Докажем индукцией по n , что φ представляется в виде произведения (1), с $k \leq n$.

Согласно лемме 3 автоморфизм l_1 записывается в виде $\gamma_1 \circ \lambda_1$, где $\gamma_1 \in A_0$, $\lambda_1 \in C$. Тогда

$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1.$$

Пусть $\lambda_1 = (ax+by+c, b_1y+c_1)$, $\beta_1 = (x+q(y), y)$. Тогда
$$\lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_1^{-1} = (x + \frac{1}{a}q(b_1y+c_1), y).$$
Через $q_{<2}(b_1y+c_1)$ обозначим часть степени меньше чем два элемента $q(b_1y+c_1)$. Пусть $\lambda = (x - \frac{1}{a}q_{<2}(b_1y+c_1), y)$. Ясно, что $\lambda \in C$ и $\lambda_1^{-1} \circ \lambda \in C$. Обозначим $\lambda_1^{-1} \circ \lambda$ через λ_2^{-1}. Тогда
$$l_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \beta_1 = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \lambda_2,$$
где $\beta_1' = \lambda_1 \circ \beta_1 \circ \lambda_2^{-1} = (x + \frac{1}{a}q(b_1y+c_1) - \frac{1}{a}q_{<2}(b_1y+c_1), y) \in B_0$. Имеем
$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ (\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}.$$
По индуктивному предположению произведение
$$(\lambda_2 \circ l_2) \circ \beta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \beta_n \circ l_{n+1}$$
записывается в виде
$$\gamma_2 \circ \beta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda,\ k \leq n.$$
Следовательно,
$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \gamma_2 \circ \beta_2' \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$
Если $\gamma_2 \neq id$, то полученное представление имеет вид (1). Теперь рассмотрим случай когда $\gamma_2 = id$. Так как $\beta_1' \circ \beta_2' = \beta_2'' \in B_0$, то
$$\varphi = \gamma_1 \circ \beta_1' \circ \beta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \gamma_1 \circ \beta_2'' \circ \gamma_3 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$
Поскольку $k-1 < n$, то по индуктивному предположению φ записывается в виде (1). □

Лемма 5. *Пусть $\varphi = (f_1, f_2)$ – автоморфизм алгебры A, представимый в виде произведения*
$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k,$$
где $id \neq \gamma_i \in A_0$, $id \neq \beta_i \in B_0$ для всех i. Если $\beta_i = (x + q_i(y), y)$, $\deg(q_i(y)) = n_i$ для всех $1 \leq i \leq k$, то
$$\deg(f_1) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k,$$
$$\deg(f_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1},\ \textit{если}\ k > 1$$
и
$$\deg(f_2) = 1,\ \textit{если}\ k = 1.$$

Proof. Утверждение леммы докажем индукцией по k. Если $k = 1$, то $\varphi = \beta_1$ и
$$\deg(f_1) = \deg(q_1(y)) = n_1,$$
$$\deg(f_2) = 1.$$
Предположим, что утверждение леммы выполняется для $k-1$. Положим,
$$\varphi_1 = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_{k-1} \circ \beta_{k-1} = (g_1, g_2).$$
По индуктивному предположению, имеем
$$\deg(g_1) = n_1 n_2 \ldots n_{k-1},$$
$$\deg(g_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-2}.$$
Тогда
$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \beta_k = \varphi_1 \circ \gamma_k \circ \beta_k = (g_1, g_2) \circ \gamma_k \circ \beta_k.$$
Применяя $\gamma_k = (y, x+ay)$ к (g_1, g_2), получим
$$(u_1, u_2) = (g_1, g_2) \circ \gamma_k = (g_2, g_1 + ag_2).$$
Тогда
$$\deg(u_1) = \deg(g_2) = n_1 n_2 \ldots n_{k-2},$$
$$\deg(u_2) = max\{\deg(g_1), \deg(g_2)\} = n_1 n_2 \ldots n_{k-1}.$$
Далее,
$$\varphi = (f_1, f_2) = (u_1, u_2) \circ \beta_k = (u_1, u_2) \circ (x + q_k(y), y) = (u_1 + q_k(u_2), u_2).$$

Следовательно,

$$\deg(f_1) = max\{\deg(u_1), \deg(q_k(u_2))\},$$

$$\deg(f_2) = \deg(u_2).$$

Напомним, что $\deg(q_k) = n_k$ и $\deg(u_2) = n_1 n_2 \dots n_{k-1}$. По следствию 2 имеем

$$\deg(q_k(u_2)) = \deg u_2 \cdot \deg q_k = n_1 n_2 \dots n_k.$$

Следовательно,

$$\deg(f_1) = n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k,$$

$$\deg(f_2) = n_1 n_2 \dots n_{k-1}.$$

Что и требовалось доказать. □

Лемма 6. *Разложение* (1) *автоморфизма* φ *из леммы 4 является однозначным.*

Proof. Достаточно показать, что

$$\gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda \neq id,$$

при $k \geq 1$, $\gamma_i \in A_0,\ \gamma_2, \dots, \gamma_k \neq id$, $\beta_i \in B_0,\ \beta_1, \dots, \beta_k \neq id$, $\lambda \in C$.

Докажем от противного. Допустим

$$\gamma_1 \circ \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = id.$$

Тогда

$$\beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}. \qquad (2)$$

Согласно лемме 5 автоморфизм

$$\varphi = (f_1, f_2) = \beta_1 \circ \gamma_2 \circ \beta_2 \circ \dots \circ \gamma_k \circ \beta_k$$

имеет общую степень

$$tdeg(\varphi) = \deg(f_1) + \deg(f_2) = n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k + n_1 n_2 \dots n_{k-1}.$$

Правую часть равенства (2) обозначим через ρ, т.е.

$$\rho = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}.$$

Ясно, что $\rho \in Af_2(A)$ и $tdeg(\rho) = 2$. Следовательно, $tdeg(\varphi) \neq tdeg(\rho)$, что противоречит равенству (2). □

Теорема 1. *Пусть* $A = N\langle x, y\rangle$ *– свободная алгебра Новикова от двух порождающих* x, y *над полем* k *нулевой характеристики. Группа ручных автоморфизмов алгебры* A *является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов* $Af_2(A)$ *и треугольных автоморфизмов* $Tr_2(A)$ *с объединенной подгруппой* $C = Af_2(A) \cap Tr_2(A)$, *т.е.*

$$T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

Proof. Так как A_0 и B_0 – системы левых смежных классов $Af_2(A)$ и $Tr_2(A)$ по подгруппе C, соответственно, то по лемме 4 и по лемме 6 любой ручной автоморфизм алгебры A однозначно представляется в виде (1), т.е.

$$T(A) = Af_2(A) *_C Tr_2(A).$$

□

Подтверждение

Работа выполнена в рамках проекта AP 08052290 МОН РК.

Список литературы

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. reine angew Math. – 1942. – Vol. 184. – P. 161–174.
2 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables // Nieuw Archief voor Wisk. – 1953. – Vol. 1. № 3. – P. 33–41.
3 Shafarevich I.R. On some infinite dimensional algebraic groups // Rend. Mat. e Appl. – 1966. – Vol. 25. № 5. – P. 208–212.
4 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 160. – P. 393–401; – 1972. – Vol. 171. – P. 309–315.
5 Макар-Лиманов Л. Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих // Функцион. анализ и его прил. – 1970. – Т. 4. № 3. – С. 107–108.
6 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra – 2009. – Vol. 322. № 9. – P. 3318 – 3330.
7 Алимбаев А.А., Науразбекова А.С., Козыбаев Д.Х. Линеаризация автоморфизмов и триангуляция дифференцирований свободных алгебр ранга 2 // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1133–1146.
8 Дуйсенгалиева Б.А., Науразбекова А.С., Умирбаев У.У. Ручные и дикие автоморфизмы алгебры дифференциальных многочленов ранга 2 // Фундаментальная и прикладная математика. – 2019. – Т. 22. № 4. – С. 101-114.
9 Гельфанд И.М., Дорфман И.Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – Т. 13. № 4. – С. 248–262.
10 Dzhumadil'daev A.S. Codimension growth and non-koszulity of Novikov operad // Commun. Alg. – 2011. – Vol. 39. – P. 2943–2952.
11 Dzhumadil'daev A.S., Lofwall C. Trees, free right-simmetric algebras, free Novikov algebras and identities // Homology, Homotopy and Applications. – 2002. – Vol. 4. № 2. – P. 165–190.
12 Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz for Novikov algebras // TWMS J. Pure Appl. Math. – 2011. – Vol. 2. – P. 228–235.
13 Bokut L.A., Chen Y., Zhang Z. Grobner-Shirshov bases method for Gelfand-Dorfman-Novikov algebras // J. Algebra Appl. – 2017. – Vol. 16. № 1. – P. 1750001-1–1750001-22.
14 Дуйсенгалиева Б.А., Умирбаев У.У. Дикий автоморфизм свободной алгебры Новикова // Сибирские электронные математические известия – 2018. – Т. 15. – С. 1671–1679.
15 Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic Groups. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973.
16 Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. М.: Наука, 1974.

Б.Ә. Дүйсенғалиева, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Рангі 2 тең еркін Новиков алгебрасының қолды автоморфизмдер группасының амальгамирленген еркін көбейтіндісінің құрылымы

Аннотация: Мақала сипаттамасы нөлге тең өрістегі екі айнымалы еркін Новиков алгебрасының қолды автоморфизмдер группасын сипаттауға арналған. Осы алгебраның базистік элементтер жиынында енгізілген ретті қолданып, базистік сөздердің кейбір қасиеттері дәлелденген. Сонымен қатар, сипаттамасы нөлге тең өрістегі рангі екіге тең еркін Новиков алгебрасының қолды автоморфизмдер группасы $Af_2(A)\cap Tr_2(A)$ ішкі группасымен біріктірілген $Af_2(A)$ аффиндік автоморфизмдер мен $Tr_2(A)$ үшбұрышты автоморфизмдер группаларының амальгамирленген еркін көбейтіндісінің құрылымын қабылдайтыны дәлелденген.

Түйін сөздер: Дифференциалды көпмүшеліктер алгебрасы, еркін Новиков алгебрасы, амальгамирленген еркін көбейтінді, қолды автоморфизм.

B.A. Duisengaliyeva, A.S. Naurazbekova

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Amalgamated free product structure of the tame automorphism group of a free Novikov algebra of rank 2

Abstract: The article is devoted to the description the tame automorphism group of a free Novikov algebra of two generators over a field of characteristic zero. Using the introduced order on the set of basis elements of this algebra, some properties of basis words are proved. It is also proved that the tame automorphism group of a free Novikov algebra of rank two over a field of characteristic zero admits the amalgamated free product structure of the affine automorphism group $Af_2(A)$ and of the triangular automorphism group $Tr_2(A)$ with the united subgroup $Af_2(A)\cap Tr_2(A)$.

Keywords: Differential polynomial algebra, free Novikov algebra, amalgamated free product, tame automorphism.

References

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene, J. reine angew Math., 184, 161–174(1942).

2 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wisk., 1(3), 33–41(1953).
3 Shafarevich I.R. On some infinite dimensional algebraic groups, Rend. Mat. e Appl., 25(5), 208–212(1966).
4 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II, Trans. Amer. Math. Soc., 160, 393–401(1971); 171, 309–315(1972).
5 Makar-Limanov L. Avtomorfizmy svobodnoj algebry ot dvuh porozhdayushchih [The automorphisms of the free algebra of two generators], Funkcion. analiz i ego pril. [Functional Analysis and Its Applications], 4(3), 107–108(1970).
6 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, J. Algebra, 322(9), 3318–3330 (2009).
7 Alimbaev A.A., Naurazbekova A.S., Kozybaev D.Kh. Linearizaciya avtomorfizmov i triangulyaciya differencirovanij svobodnyh algebr ranga 2 [Linearization of automorphisms and triangulation of derivations of free algebras of rank 2], Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports], 16, 1133–1146(2019).
8 Duisengaliyeva B.A., Naurazbekova A.S., Umirbaev U.U. Ruchnye i dikie avtomorfizmy algebry differencial'nyh mnogochlenov ranga 2 [Tame and wild automorphisms of differential polynomial algebras of rank 2], Fundamental'naya i prikladnaya matematika [Fundamental and Applied Mathematics], 22(4), 101–114(2019).
9 Gel'fand I.M., Dorfman I.Ya. Gamil'tonovy operatory i svyazannye s nimi algebraicheskie struktury [Hamiltonian operators and algebraic structures related to them], Funkcion. analiz i ego pril. [Functional Analysis and Its Applications], 13(4), 248–262(1979).
10 Dzhumadil'daev A.S. Codimension growth and non-koszulity of Novikov operad, Commun. Alg., 39, 2943–2952(2011).
11 Dzhumadil'daev A.S., Lofwall C. Trees, free right-simmetric algebras, free Novikov algebras and identities, Homology, Homotopy and Applications, 4(2), 165–190(2002).
12 Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz for Novikov algebras, TWMS J. Pure Appl. Math., 2, 228–235(2011).
13 Bokut L.A., Chen Y., Zhang Z. Grobner-Shirshov bases method for Gelfand-Dorfman-Novikov algebras, J. Algebra Appl., 16(1), 1750001-1–1750001-22(2017).
14 Duisengaliyeva B.A., Umirbaev U.U. Dikij avtomorfizm svobodnoj algebry Novikova [A wild automorphism of a free Novikov algebra] Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya [Siberian Electronic Mathematical Reports], 15, 1671-1679(2018).
15 Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic Groups (Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973).
16 Magnus W., Karrass A., Soliter D. The Combinatorial Group Theory (Wiley Interscience, Hoboken, 1966).

Сведения об авторах:

Дуйсенгалиева Б.А. – преподаватель кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана 13, Нур-Султан, Казахстан.

Науразбекова А.С. – PhD, и.о. доцента кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана 13, Нур-Султан, Казахстан.

Duisengaliyeva B.A. – Lecturer of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – PhD, Assosiate Professor of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 21.02.2020

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 130, №1, 82-92 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.29.23**

S.A. Shchogolev

Odessa I.I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine
(E-mail: sergas1959@gmail.com)

On the Reduction of the Linear System of the Differential Equations with coefficients of oscillating type to the Triangular Kind in the Non-resonant Case

Abstract: For the linear homogeneous differential system, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, the conditions of the existence of the transformation which leads it to triangular kind, are obtained in the non-resonant cases.

Keywords: linear differential systems, Fourier series.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-130-1-82-92

Introduction. In the theory of linear systems of differential equations is well known problem of the consruction for the linear homogeneous system of the differential equations

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

where $x = \mathrm{colon}(x_1, ..., x_n)$, $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$, Lyapunov's transformation

$$x = L(t)y,$$

which leads the system (1) to the triangular kind

$$\frac{dy}{dt} = T(t)y,$$

where $T(t) = (b_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$, $b_{jk}(t) \equiv 0 \quad (j < k)$ [1–4].

In this paper, we assume, that the system (1) already reduced to a kind, close to triangular:

$$\frac{dx}{dt} = (T(t) + \mu P(t))x, \tag{2}$$

where μ – small parameter, and the matrix $P(t)$ has a some special kind. And we study the problem on bringing the system (2) to a purely triangular form

$$\frac{dy}{dt} = D(t)y,$$

where $D(t) = (d_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$, $d_{jk} \equiv 0 \quad (j < k)$.

Basic notations and definitions.

Let $G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \ t \in \mathbb{R}\}$.

Definition 1. We say, that a function $p(t,\varepsilon)$ belongs to a class $S(m;\varepsilon_0)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), if

1) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, 2) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ with respect t;

3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon) \quad (0 \le k \le m)$,

$$\|p\|_{S(m;\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Under the slowly varying function we mean the function of the class $S(m;\varepsilon_0)$.

Definition 2. We say, that a function $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ belongs to a class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m \in \mathbb{N}\cup\{0\})$, if this function can be represented as:

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

and:
1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$;
2)

$$\|f\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \stackrel{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty,$$

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

State some properties of the functions of the classes $S(m;\varepsilon_0)$, $F_0(m;\varepsilon_0;\theta)$ (the proofs are given in [5]). Let $k = \mathrm{const}$, $p,q \in S(m;\varepsilon_0)$, $u,v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Then kp, $p \pm q$, pq belongs to the class $S(m;\varepsilon_0)$, ku, $u \pm v$, uv belongs to the class $F_0(m;\varepsilon_0;\theta)$, and
1) $\|kp\|_{S(m;\varepsilon_0)} = |k|\cdot\|p\|_{S(m;\varepsilon_0)}$.
2) $\|p \pm q\|_{S(m;\varepsilon_0)} \le \|p\|_{S(m;\varepsilon_0)} + \|q\|_{S_0(m,\varepsilon_0)}$.
3) $\|pq\|_{S(m;\varepsilon_0)} \le 2^m\|p\|_{S(m;\varepsilon_0)}\|q\|_{S_0(m;\varepsilon_0)}$.
4) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k|\cdot\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.
5) $\|u \pm v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.
6) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

For $f(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ we denote:

$$\Gamma_n[f] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

In particular

$$\Gamma_0[f] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta)d\theta.$$

Definition 3. For the vector $u = \mathrm{colon}(u_1,\ldots,u_n)$ with elements from the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ we define the norm:

$$\|u\|^*_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Statement of the Problem. We consider the next system of differential equations:

$$\frac{dx}{dt} = (B(t,\varepsilon) + \mu P(t,\varepsilon,\theta))x, \tag{3}$$

where $x = \mathrm{colon}(x_1,...,x_n)$, $B(t,\varepsilon)$ – lower triangular matrix with the elements from $S(m;\varepsilon_0)$, and $P(t,\varepsilon,\theta) = (p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=\overline{1,n}}$, $p_{jk}(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j,k = \overline{1,n})$, $\mu \in (0,\mu_0)$ – the real parameter.

We study the problem of the existence of a transformation of kind

$$x = (E_n + \mu\Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu))y, \tag{4}$$

$y = \mathrm{colon}(y_1,...,y_n)$, E_n – unit matrix of order n, Ψ – matrix with elements from $F(l;\varepsilon_1;\theta)$ $(0 < l_1 \le m,\ 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0)$, which leads at sufficiently small μ the system (3) to the kind:

$$\frac{dy}{dt} = K(t,\varepsilon,\theta,\mu))y, \tag{5}$$

where $K = (k_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu))_{j,k=\overline{1,n}}$, $k_{jk} \equiv 0$ $(j < k)$, $k_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(l;\varepsilon_1;\theta)$.

We will study this problem for a third-order system $(n = 3)$ so as not to clutter up the presentation with secondary technical difficulties associated with the dimension of the system. All fundamental difficulties take place in this case too.

So, consider the system of the differential equations:

$$\frac{dx}{dt} = (B(t,\varepsilon) + \mu P(t,\varepsilon,\theta))x, \tag{6}$$

$x = \mathrm{colon}(x_1, x_2, x_3)$,

$$B(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} b_{11}(t,\varepsilon) & 0 & 0 \\ b_{21}(t,\varepsilon) & b_{22}(t,\varepsilon) & 0 \\ b_{31}(t,\varepsilon) & b_{32}(t,\varepsilon) & b_{33}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$b_{jk}(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$ $(j,k = 1,2,3; j \geq k)$, $P(t,\varepsilon,\theta) = (p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,2,3}$, $p_{jk}(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Auxiliary results.

Lemma 1. *Let we have the system*

$$\frac{dv}{dt} = \left(A(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} Q_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l \right) v, \tag{7}$$

$x = \mathrm{colon}(x_1, x_2, x_3)$, $q \in \mathbb{N}$,

$$A(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} im_{12}(t,\varepsilon) & -c_{32}(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & im_{13}(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & c_{21}(t,\varepsilon) & im_{23}(t,\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$m_{jk}(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$, $m_{jk}(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $c_{jk}(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$, *and*

$$\begin{aligned} &\inf_{G(\varepsilon_0)} |m_{13}(t,\varepsilon) - m_{12}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0, \\ &\inf_{G(\varepsilon_0)} |m_{23}(t,\varepsilon) - m_{12}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0, \\ &\inf_{G(\varepsilon_0)} |m_{13}(t,\varepsilon) - m_{23}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(t,\varepsilon)$ *– the function in the definition of class* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *the elements of matrices* Q_l $(l = \overline{1,q})$ *belongs to the class* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Then there exists $\mu_1 \in (0,\mu_0)$, *such that for all* $\mu \in (0,\mu_1)$ *there exists the Lyapunov's transformation of kind*

$$v = \left(E + \sum_{l=1}^{q} \Psi_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l \right) w, \tag{9}$$

where elemens of matrices $\Psi_l(t,\varepsilon,\theta)$ $(l = \overline{1,q})$ *belongs to the class* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *which leads the system (7) to kind:*

$$\frac{dw}{dt} = \left(A(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l + \varepsilon \sum_{l=1}^{q} V_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l + \mu^{q+1} W(t,\varepsilon,\theta,\mu) \right) w, \tag{10}$$

where $U_l(t,\varepsilon)$ *– the matrices with elements from* $S(m;\varepsilon_0)$, V_l, W *– the matrices with elements from* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Proof. We substitute the expression (9) into system (7), and require that the transformed system has the kind (10). We obtain the next chain of matrix differential equations for detemining matrices $\Psi_1, ..., \Psi_q$:

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = A(t,\varepsilon)\Psi_1 - \Psi_1 A(t,\varepsilon) + Q_1(t,\varepsilon,\theta) - U_1(t,\varepsilon) - \varepsilon V_1(t,\varepsilon,\theta), \tag{11}$$

$$\frac{d\Psi_l}{dt} = A(t,\varepsilon)\Psi_l - \Psi_l A(t,\varepsilon) + Q_l(t,\varepsilon,\theta) - \sum_{\nu=1}^{l-1} Q_\nu \Psi_{l-\nu} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{l-1} \Psi_\nu U_{l-\nu}(t,\varepsilon) - \varepsilon \sum_{\nu=1}^{l-1} \Psi_\nu V_{l-\nu}(t,\varepsilon,\theta) - U_l(t,\varepsilon) - \varepsilon V_l(t,\varepsilon,\theta), \ l = \overline{2,q}. \tag{12}$$

where $\Psi_l = (\psi^l_{jk})_{j,k=1,2,3}$, $Q_l = (q^l_{jk})_{j,k=1,2,3}$, $U_l = (u^l_{jk})_{j,k=1,2,3}$, $V_l = (v^l_{jk})_{j,k=1,2,3}$ $(l = \overline{1,q})$.

Then the matrix W at sufficiently small values μ is determined from the equation:

$$\left(E+\sum_{l=1}^{q}\Psi_l\mu^l\right)W=\sum_{s=0}^{q-1}\left[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1}(Q_\sigma\Psi_\delta-\Psi_\sigma U_\delta\right]\mu^s-$$
$$-\sum_{s=0}^{q-1}\left(\sum_{\sigma+\delta=s+q+1}\Psi_\sigma V_\delta\right)\mu^s. \qquad (13)$$

We consider the equation (11). In the component it looks like this:

$$\frac{d\psi_{11}^1}{dt}=-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1+q_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{11}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{11}^1(t,\varepsilon,\theta),$$
$$\frac{d\psi_{12}^1}{dt}=i(m_{12}(t,\varepsilon)-m_{13}(t,\varepsilon))\psi_{12}^1-c_{32}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1-\psi_{11}^1)-c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{13}^1+$$
$$+q_{12}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{12}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{12}^1(t,\varepsilon,\theta),$$
$$\frac{d\psi_{13}^1}{dt}=i(m_{12}(t,\varepsilon)-m_{23}(t,\varepsilon))\psi_{13}^1-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1+$$
$$+q_{13}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{13}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{13}^1(t,\varepsilon,\theta),$$
$$\frac{d\psi_{21}^1}{dt}=i(m_{13}(t,\varepsilon)-m_{12}(t,\varepsilon))\psi_{21}^1+q_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{21}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{21}^1(t,\varepsilon,\theta),$$
$$\frac{d\psi_{22}^1}{dt}=c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1-c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{32}^1+q_{22}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{11}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{22}^1(t,\varepsilon,\theta), \qquad (14)$$
$$\frac{d\psi_{23}^1}{dt}=i(m_{13}(t,\varepsilon)-m_{23}(t,\varepsilon))\psi_{23}^1+q_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{23}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{23}^1(t,\varepsilon,\theta),$$
$$\frac{d\psi_{31}^1}{dt}=i(m_{23}(t,\varepsilon)-m_{12}(t,\varepsilon))\psi_{31}^1+c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1+$$
$$+q_{31}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{31}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{31}^1(t,\varepsilon,\theta),$$
$$\frac{d\psi_{32}^1}{dt}=i(m_{23}(t,\varepsilon)-m_{13}(t,\varepsilon))\psi_{32}^1+c_{21}(t,\varepsilon)(\psi_{21}^1-\psi_{33}^1)+c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{31}^1+$$
$$+q_{32}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{32}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{32}^1(t,\varepsilon,\theta),$$
$$\frac{d\psi_{33}^1}{dt}=c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1+q_{33}^1(t,\varepsilon,\theta)-u_{33}^1(t,\varepsilon)-\varepsilon v_{33}^1(t,\varepsilon,\theta).$$

Define ψ_{jk}^1, u_{jk}^1, v_{jk}^1 by the following expression:

$$\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}(t,\varepsilon)-m_{12}(t,\varepsilon)-n\varphi(t,\varepsilon))}\,e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$
$$u_{21}^1(t,\varepsilon)\equiv 0,$$
$$v_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}(t,\varepsilon)-m_{12}(t,\varepsilon)-n\varphi(t,\varepsilon))}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$
$$\psi_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$
$$u_{11}^1(t,\varepsilon)=\Gamma_0[q_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$
$$v_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)=-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{31}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_n[q_{31}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{23}(t,\varepsilon) - m_{12}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\, e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{31}^1(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$v_{31}^1(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{31}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}(t,\varepsilon) - m_{12}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\right) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_n[q_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}(t,\varepsilon) - m_{23}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\, e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{23}^1(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$v_{23}^1(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}(t,\varepsilon) - m_{23}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\right) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{33}^1(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[q_{33}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\, e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{33}^1(t,\varepsilon) = \Gamma_0[q_{33}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{33}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{33}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\right) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{22}^1(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[q_{22}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta) - c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\, e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{22}^1(t,\varepsilon) = \Gamma_0[q_{22}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta) - c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{22}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{22}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta) - c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\right) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{32}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_n[q_{32}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{21}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1 - \psi_{33}^1) + c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{31}^1]}{i(m_{23}(t,\varepsilon) - m_{13}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\, e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{32}^1(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$v_{32}^1(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{32}^1(t,\varepsilon,\theta) + c_{21}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1 - \psi_{33}^1) + c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{31}^1]}{i(m_{23}(t,\varepsilon) - m_{13}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\right) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{13}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_n[q_{13}^1(t,\varepsilon,\theta) - c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{12}(t,\varepsilon) - m_{23}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\, e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{13}^1(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$v_{13}^1(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{13}^1(t,\varepsilon,\theta) - c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{12}(t,\varepsilon) - m_{23}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\right) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{12}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_n[q_{12}^1(t,\varepsilon,\theta) - c_{32}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1 - \psi_{11}^1) - c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{13}^1]}{i(m_{12}(t,\varepsilon) - m_{13}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\, e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{12}^1(t,\varepsilon) \equiv 0,$$

$$v_{12}^1(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{12}^1(t,\varepsilon,\theta) - c_{32}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1 - \psi_{11}^1) - c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{13}^1]}{i(m_{12}(t,\varepsilon) - m_{13}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))}\right) e^{in\theta(t,\varepsilon)}.$$

All the elements of matrix U_1 belongs to the class $S(m;\varepsilon_0)$. All the elements of matrix Ψ_1 belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. All the elements of matrix V_1 belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

All the equations (12) are considered similarly to equations (11), and so the matrices Ψ_l, U_l, V_l $(l=\overline{1,q})$ are determined. And also all the elements of matrix Ψ_l belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, all the elements of matrix U_l belongs to the class $S(m;\varepsilon_0)$, all the elements of matrix V_l belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ $(l=\overline{1,q})$. Matrix W are determined from the equations (13).

Lemma 1 are proved.

Problem solving method and basic results.

We seek the transformation of the kind:

$$x=(E_3+\mu\Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu))y, \tag{15}$$

$y=\mathrm{colon}(y_1,y_2,y_3)$, E_3 – unit matrix of third order,

$$\Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu)=\begin{pmatrix} 0 & \psi_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & \psi_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \\ 0 & 0 & \psi_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\psi_{jk}\in F(m_1;\varepsilon_1;\theta)$ $(0\le l_1\le m;\ 0\le\varepsilon_1<\varepsilon_0)$, which leads the system (6) to the kind:

$$\frac{dy}{dt}=(B(t,\varepsilon)+\mu D(t,\varepsilon,\theta,\mu))\,y, \tag{16}$$

where

$$D(t,\varepsilon,\theta,\mu)=\begin{pmatrix} d_{11}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & 0 & 0 \\ d_{21}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & d_{22}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & 0 \\ d_{31}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & d_{32}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & d_{33}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \end{pmatrix}.$$

We substitute the expression (15) into system (6), and require that the transformed system has the kind (16). We obtain the next system of the differential equations for detemining $\psi_{12},\psi_{13},\psi_{23}$:

$$\begin{aligned} \tfrac{d\psi_{12}}{dt}&=K_{12}(t,\varepsilon,\theta,\psi_{12},\psi_{13},\psi_{23},\mu),\\ \tfrac{d\psi_{13}}{dt}&=K_{13}(t,\varepsilon,\theta,\psi_{12},\psi_{13},\psi_{23},\mu),\\ \tfrac{d\psi_{23}}{dt}&=K_{23}(t,\varepsilon,\theta,\psi_{12},\psi_{13},\psi_{23},\mu), \end{aligned} \tag{17}$$

where

$$K_{12}=(b_{11}(t,\varepsilon)-b_{22}(t,\varepsilon))\psi_{12}-b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{13}+p_{12}(t,\varepsilon,\theta)+$$
$$++\mu b_{21}(t,\varepsilon)\psi_{12}^2+\mu b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{12}\psi_{23}-$$
$$-\mu^2p_{21}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12}^2+\mu^2b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{12}^2\psi_{23}+\mu^2p_{32}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12}\psi_{23}+$$
$$+\mu^2b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{12}\psi_{13}+\mu^2p_{32}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}+\mu^3p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12}^2\psi_{23}+\mu^3p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12}\psi_{13},$$
$$K_{13}=(b_{11}(t,\varepsilon)-b_{33}(t,\varepsilon))\psi_{13}+p_{13}(t,\varepsilon,\theta)+\mu(p_{11}(t,\varepsilon,\theta)-p_{33}(t,\varepsilon,\theta))\psi_{13}+$$
$$+\mu p_{12}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{23}-\mu b_{13}(t,\varepsilon)\psi_{13}^2-\mu b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{13}\psi_{23}-$$
$$-\mu^2p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}^2-\mu^2p_{32}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}\psi_{23},$$
$$K_{23}=(b_{22}(t,\varepsilon)-b_{33}(t,\varepsilon))\psi_{23}+b_{21}(t,\varepsilon)\psi_{13}+p_{23}(t,\varepsilon,\theta)+\mu p_{21}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12}+$$
$$+\mu(p_{22}(t,\varepsilon,\theta)-p_{33}(t,\varepsilon,\theta))\psi_{23}-\mu b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{13}\psi_{23}-$$
$$-\mu b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}^2-\mu^2p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}\psi_{23}-\mu^2p_{32}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{23}^2.$$

In this case $d_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j\ge k)$ has a kind:

$$d_{31}(t,\varepsilon,\theta)=p_{31}(t,\varepsilon,\theta),$$
$$d_{32}(t,\varepsilon,\theta,\mu)=p_{32}(t,\varepsilon,\theta)+b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{12}+\mu p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12},$$
$$d_{33}(t,\varepsilon,\theta,\mu)=p_{33}(t,\varepsilon,\theta)+b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{13}+b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}+\mu(p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}+p_{32}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{23}),$$
$$d_{21}(t,\varepsilon,\theta,\mu)=p_{21}(t,\varepsilon,\theta)-b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{13}-\mu p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{23},$$
$$d_{22}(t,\varepsilon,\theta,\mu)=p_{22}(t,\varepsilon,\theta)-b_{21}(t,\varepsilon)\psi_{12}-b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}+\mu p_{21}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12}-\mu d_{32}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\psi_{23},$$
$$d_{11}(t,\varepsilon,\theta,\mu)=p_{11}(t,\varepsilon,\theta)-b_{21}(t,\varepsilon)\psi_{12}-b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{13}-\mu(d_{21}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\psi_{12}+p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}). \tag{18}$$

The case 1. $|\mathrm{Re}(b_{jj}(t,\varepsilon)-b_{kk}(t,\varepsilon))|\ge\gamma>0$ $(j\ne k)$.

From the results of the paper [6] follows the theorems.

Theorem 1. *In the case 1 there exists* $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ *such that for all* $\mu \in (0, \mu_1)$ *there exists unique particular solution* $\psi_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ $(j < k)$ *of the system (17), all the components of which belongs to the class* $F(m; \varepsilon_0; \theta)$.

Theorem 2. *In the case 1 there exists* $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ *such that for all* $\mu \in (0, \mu_1)$ *there exists the transformation of the kind (15), whose coefficients* $\psi_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ $(j < k)$ *belongs to the class* $F(m; \varepsilon_0; \theta)$*, which leads the system (6) to the triangular kind (16), where* $d_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ $(j \geq k)$ *are determined by the formulas (18).*

The case 2. $b_{jj}(t, \varepsilon) - b_{kk}(t, \varepsilon) = im_{jk}(t, \varepsilon)$, $m_{jk} \in \mathbb{R}$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} |m_{jk}(t, \varepsilon) - n\varphi(t, \varepsilon)| \geq \gamma > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Together with the system (17) we consider the auxiliary system:

$$\begin{aligned} \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi_{12}}{d\theta} &= K_{12}(t,\varepsilon,\theta,\psi_{12},\psi_{13},\psi_{23},\mu), \\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi_{13}}{d\theta} &= K_{13}(t,\varepsilon,\theta,\psi_{12},\psi_{13},\psi_{23},\mu), \\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi_{23}}{d\theta} &= K_{23}(t,\varepsilon,\theta,\psi_{12},\psi_{13},\psi_{23},\mu), \end{aligned} \tag{19}$$

where $\varphi(t, \varepsilon)$ – function in the definition of the class $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, and t, ε are considered as constant. Using the method of the small parameter of Poincarais [7], we construct the partial sums of the series in degrees of the small parameter representing the 2π-periodic with respect to θ solution of the system (19):

$$\psi^*_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \psi^0_{jk}(t,\varepsilon,\theta) + \mu\psi^1_{jk}(t,\varepsilon,\theta) + \ldots + \mu^{2q-1}\psi^{2q-1}_{jk}(t,\varepsilon,\theta), \tag{20}$$

where $\psi^s_{jk}(t, \varepsilon, \theta)$ $(s = \overline{0, 2q-1})$ – 2π-periodic with respect to θ functions. Regarding these functions, we obtain the chain of the system of the differential equations:

$$\begin{aligned} \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi^0_{12}}{d\theta} &= im_{12}(t,\varepsilon)\psi^0_{12} - b_{32}(t,\varepsilon)\psi^0_{13} + p_{12}(t,\varepsilon,\theta), \\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi^0_{13}}{d\theta} &= im_{13}(t,\varepsilon)\psi^0_{13} + p_{13}(t,\varepsilon,\theta), \\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi^0_{23}}{d\theta} &= im_{23}(t,\varepsilon)\psi^0_{23} + b_{21}(t,\varepsilon)\psi^0_{13} + p_{23}(t,\varepsilon,\theta), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi^s_{12}}{d\theta} = im_{12}(t,\varepsilon)\psi^s_{12} - b_{32}(t,\varepsilon)\psi^s_{13} + \\ +P^s_{12}(t,\varepsilon,\theta,\psi^0_{12},\psi^0_{13},\psi^0_{23},\ldots,\psi^{s-1}_{12},\psi^{s-1}_{13},\psi^{s-1}_{23}), \\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi^s_{13}}{d\theta} = im_{13}(t,\varepsilon)\psi^0_{13} + \\ +Q^s_{13}(t,\varepsilon,\theta,\psi^0_{12},\psi^0_{13},\psi^0_{23},\ldots,\psi^{s-1}_{12},\psi^{s-1}_{13},\psi^{s-1}_{23}), \\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\psi^s_{23}}{d\theta} = im_{23}(t,\varepsilon)\psi^s_{23} + b_{21}(t,\varepsilon)\psi^s_{13} + \\ +R^s_{23}(t,\varepsilon,\theta,\psi^0_{12},\psi^0_{13},\psi^0_{23},\ldots,\psi^{s-1}_{12},\psi^{s-1}_{13},\psi^{s-1}_{23}),\ s = 1,2,\ldots,2q-1. \end{gathered} \tag{22}$$

$P^s_{12}, Q^s_{13}, R^s_{23}$ – polynomials from $\psi^0_{12}, \ldots, \psi^{s-1}_{23}$ with coefficients from the class $F(m; \varepsilon_0; \theta)$.

Consider a generating system (21). In the case 2 this system has unique 2π-periodic with respect to θ solution:

$$\psi^0_{13}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi^0_{13,n}(t,\varepsilon)\exp(in\theta),$$

where

$$\psi^0_{13,n}(t,\varepsilon) = -\frac{\Gamma_n[p_{13}(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))},$$

$$\psi^0_{12}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi^0_{12,n}(t,\varepsilon)\exp(in\theta),$$

where

$$\psi^0_{12,n}(t,\varepsilon)=-\frac{\Gamma_n[p_{12}(t,\varepsilon,\theta)]-b_{32}(t,\varepsilon)\psi^0_{13,n}(t,\varepsilon)}{i(m_{12}(t,\varepsilon)-n\varphi(t,\varepsilon))},$$

$$\psi^0_{23}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\psi^0_{23,n}(t,\varepsilon)\exp(in\theta),$$

where

$$\psi^0_{23,n}(t,\varepsilon)=-\frac{\Gamma_n[p_{23}(t,\varepsilon,\theta)]+b_{21}(t,\varepsilon)\psi^0_{13,n}(t,\varepsilon)}{i(m_{23}(t,\varepsilon)-n\varphi(t,\varepsilon))},$$

and $\psi^0_{13}(t,\varepsilon,\theta)$, $\psi^0_{12}(t,\varepsilon,\theta)$, $\psi^0_{23}(t,\varepsilon,\theta)$ belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Similarly, all systems in the chain (22) also have a unique 2π-periodic with respect to θ solutions, and all components of theese solutions belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Consequently, the functions $\psi^*_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ also.

We make in the system (17) the substitution:

$$\psi_{jk}=\psi^*_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\xi_{jk}\ (j<k). \tag{23}$$

We obtain:

$$\begin{gathered}
\frac{d\xi_{12}}{dt}=im_{12}(t,\varepsilon)\xi_{12}-b_{32}(t,\varepsilon)\xi_{13}+\varepsilon g_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\\
+\mu^{2q}c_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\left(\sum_{l=1}^{q}b_{12l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{12}+\left(\sum_{l=1}^{q}c_{12l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{13}+\\
+\left(\sum_{l=1}^{q}d_{12l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{23}+\mu^{q+1}\left(\alpha_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{12}+\beta_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{13}+\right.\\
\left.+\gamma_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{23}\right)+\mu\Xi_{12}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu),\\
\frac{d\xi_{13}}{dt}=im_{13}(t,\varepsilon)\xi_{13}+\varepsilon g_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\\
+\mu^{2q}c_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\left(\sum_{l=1}^{q}b_{13l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{12}+\left(\sum_{l=1}^{q}c_{13l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{13}+\\
+\left(\sum_{l=1}^{q}d_{13l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{23}+\mu^{q+1}\left(\alpha_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{12}+\beta_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{13}+\right.\\
\left.+\gamma_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{23}\right)+\mu\Xi_{13}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu),\\
\frac{d\xi_{23}}{dt}=im_{23}(t,\varepsilon)\xi_{23}+b_{21}(t,\varepsilon)\xi_{13}+\varepsilon g_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\\
+\mu^{2q}c_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\left(\sum_{l=1}^{q}b_{23l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{12}+\left(\sum_{l=1}^{q}c_{23l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{13}+\\
+\left(\sum_{l=1}^{q}d_{23l}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi_{23}+\mu^{q+1}\left(\alpha_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{12}+\beta_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{13}+\right.\\
\left.+\gamma_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi_{23}\right)+\mu\Xi_{23}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu),
\end{gathered} \tag{24}$$

where $g_{12},g_{13},g_{23}\in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $c_{12},c_{13},c_{23},b_{jkl},c_{jkl},d_{jkl},\alpha_{jk},\beta_{jk},$
$\gamma_{jk}\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j<k)$, $\Xi_{12},\Xi_{13},\Xi_{23}$ – polynomials with respect to $\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23}$ with coefficients from the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, containing terms not lower than second order with respect $\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23}$.

We introduce $\xi=\mathrm{colon}(\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23})$,

$$A_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} im_{12}(t,\varepsilon) & -b_{32}t,\varepsilon) & 0\\ 0 & im_{13}(t,\varepsilon) & 0\\ 0 & b_{21}(t,\varepsilon) & im_{23}(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

$g(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \mathrm{colon}(g_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu), g_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu), g_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu))$,
$c(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \mathrm{colon}(c_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu), c_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu), c_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu))$,

$$K_l(t,\varepsilon,\theta) = \begin{pmatrix} b_{12l}(t,\varepsilon,\theta) & c_{12l}t,\varepsilon,\theta) & d_{12l}t,\varepsilon,\theta) \\ b_{13l}(t,\varepsilon,\theta) & c_{13l}(t,\varepsilon,\theta) & d_{13l}(t,\varepsilon,\theta) \\ b_{23l}(t,\varepsilon,\theta) & c_{23l}(t,\varepsilon,\theta) & d_{23l}(t,\varepsilon,\theta) \end{pmatrix},$$

$$L(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \begin{pmatrix} \alpha_{12}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & \beta_{12}t,\varepsilon,\theta,\mu) & \gamma_{12}t,\varepsilon,\theta,\mu) \\ \alpha_{13}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & \beta_{13}t,\varepsilon,\theta,\mu) & \gamma_{13}t,\varepsilon,\theta,\mu) \\ \alpha_{23}(t,\varepsilon,\theta,\mu) & \beta_{23}t,\varepsilon,\theta,\mu) & \gamma_{23}t,\varepsilon,\theta,\mu) \end{pmatrix},$$

$\Xi(t,\varepsilon,\theta,\xi,\mu) = \mathrm{colon}(\Xi_{12}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu), \Xi_{13}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu),$
$\Xi_{23}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu))$.

Then the system (24) can be written as:

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(A_1(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} K_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\xi + \varepsilon g(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}c(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$
$$+\mu^{q+1}L(t,\varepsilon,\theta,\mu)\xi + \Xi(t,\varepsilon,\theta,\xi,\mu). \tag{25}$$

Based on Lemma 1, using the conditions (8) and the transformation of kind:

$$\xi = \left(E + \sum_{l=1}^{q} \Psi_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\eta, \tag{26}$$

where $\eta = \mathrm{colon}(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$, we leads the system (25) to the kind:

$$\frac{d\eta}{dt} = \left(A_1(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)\eta + \varepsilon g^1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}c^1(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$
$$+\varepsilon\left(\sum_{l=1}^{q} V_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\eta + \mu^{q+1}L^1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu H(t,\varepsilon,\theta,\eta,\mu), \tag{27}$$

where $U_l(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(u_{1l}(t,\varepsilon), u_{2l}(t,\varepsilon), u_{3l}(t,\varepsilon))$, and $u_{jl}(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$ $(j=1,2,3;\ l=\overline{1,q})$.

Lemma 2. *Let the system (27) satisfy the next conditions*:
1) *the eigenvalues* $\lambda_j(t,\varepsilon,\mu)$ $(j=1,2,3)$ *of the matrix*

$$U(t,\varepsilon,\mu) = A_1(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l$$

such that

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\mathrm{Re}\lambda_j(t,\varepsilon,\theta)| \geq \gamma_0\mu^{q_0}\ (\gamma_0 \geq 0,\ 0 < q_0 \leq q);$$

2) *for the matrix* $U(t,\varepsilon,\mu)$ *there exists the matrix* $Y(t,\varepsilon,\mu)$ *such that*
a) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} |\mathrm{det}Y(t,\varepsilon,\mu)| > 0,$
b) $Y^{-1}UY = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)$ *– diagonal matrix.*

Then there exists $\mu_2 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_1(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ *such that for all* $\mu \in (0,\mu_2)$ *and for all* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1(\mu))$ *there exists the particular solution of the system (27), all the components of which belongs to the class* $F(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$.

Proof. Based on condition 2) of Lemma, we make in the system (27) the substitution:

$$\eta = \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0}}\ Y(t,\varepsilon,\mu)\chi. \tag{28}$$

We obtain:

$$\frac{d\chi}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)\chi + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ g^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ c^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$
$$+\varepsilon A_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi + \mu^{q+1}C(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}\ X(t,\varepsilon,\theta,\chi,\mu), \tag{29}$$

where elements of vector g^2 and matrix A_2 belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, elements of vector c^2 and matrix C belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, elements of vector-function X belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ in respect to t,ε,θ and polynomials in respect to elements of vector χ.

Together with the system (29) we consider the linear nonhomogeneous system:

$$\frac{d\chi^0}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)\chi^0 + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, g^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, c^2(t,\varepsilon,\theta,\mu). \qquad (30)$$

From the results of the paper [6], based on conditions 1) of Lemma, we obtain, that there exists particular solution $\chi^0(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ of the system (30), all elements of which belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, and there exists $K\in(0,+\infty)$ such that:

$$\|\chi^0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \le \frac{K}{\gamma\mu^{q_0}}\left(\frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\,\|g^2\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\,\|c^2\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right) <$$

$$< \frac{K}{\gamma}\left(\|g^2\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \|c^2\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right).$$

We construct the process of succesive approximation, defininng as initial approximation χ^0, and subsequent approximations defining as solutions from the class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ of the systems:

$$\frac{d\chi^{j+1}}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)\chi^{j+1} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, g^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, c^2(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\varepsilon A_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^j + \mu^{q+1}C(t,\varepsilon,\theta,\mu)\chi^j + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}\, X(t,\varepsilon,\theta,\chi^j,\mu),\ j=0,1,2,.... \qquad (31)$$

Using an usual techniques contraction mapping principle [8] it is easy to show that there exists $\mu_3\in(0,\mu_0)$ and $\varepsilon_1(\mu)=K_2\mu$, where K_2 – sufficiently small constant, such that for all $\mu\in(0,\mu_3)$ and for all $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1(\mu))$ the process (31) converges to the solution $\chi(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ of the system (29), and all components of this solution belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$.

Lemma 2 are proved.

The following statements are an immediate consequences of Lemma 2.

Lemma 3. *Let the system (17) be such that:*

1) *conditions (8) are satisfies;*

2) *for the system (27), obtained from the system (17) using the transformation (23), (26), all conditions of Lemma 2 are satisfies.*

Then there exists $\mu_4\in(0,\mu_0)$, $\varepsilon_2(\mu)\in(0,\varepsilon_0)$ such that for all $\mu\in(0,\mu_4)$ and for all $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2(\mu))$ there exists the particular solution of the system (17), all the components of which belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$.

Theorem 3. *Let the system (17) satisfies all conditions of Lemma 3. Then in the case 2 there exists $\mu_4\in(0,\mu_0)$, $\varepsilon_2(\mu)\in(0,\mu_0)$ such that for all $\mu\in(0,\mu_4)$* and for all *$\varepsilon\in(0,\varepsilon_2(\mu))$ there exists the transformation of the kind (15), whose coefficients $\psi_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j<k)$ belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$, which leads the system (6) to a triangular kind (16), where $d_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j\ge k)$ are determines by the formulas (18).*

Conclusions. Thus, for the system (2) the conditions of the existence of the transformation with coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, which leads it to triangular kind, are obtained in the non-resonant cases.

References

1 Perron O. Uber eine Matrixtransformation// Math. Zeitschr. – 1930. – V.32. – pp. 465–473.

2 Персидский К.П. О характеристичных числах дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ. – 1947, вып. 1. – P. 5–47.

3 Изобов Н. А. О канонической форме линейной двумерной дифференциальной системы // Дифференц. уравн. – 1971. – Т. 7, № 12. – С. 2136–2142.
4 Костин А. В. Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем. Одесса, ОГУ, 1984. – 95 с.
5 Щоголев С.А. Деякі задачі теорії коливань для диференціальних систем, які містять повільно змінні параметри. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук. Київ, 2012. – 290 с.
6 Костин А.В., Щёголев С.А. Об устойчивости колебаний, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами // Дифференц. уравн. – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 45 – 51.
7 Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
8 Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. – 496 с.

С.А. Щёголев

И.И. Мечников атындағы Одесса ұлттық университеті, Одесса, Украина

Резонансты емес жағдайда осцилляциялы типті коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесін үшбұрышты түрге келтіру туралы

Аннотация: Коэффициенттері мен жиіліктері баяу өзгереіп, абсолютті және бірқалыпты жинақталатын Фурье қатарлары түрінде өрнектелетін сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін осы жүйені резонансты емес жағдайда үшбұрышты түрге келтіретін түрлендірудің бар болу шарттары алынған.

Түйін сөздер сызықты дифференциалдық жүйелер, Фурье қатарлары.

С. А. Щёголев

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Украина

О приведении линейной системы дифференциальных уравнений с коэффициентами осциллирующего типа к треугольному виду в нерезонансном случае

Аннотация: Для линейной однородной дифференциальной системы, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования преобразования, приводящего эту систему к треугольному виду в нерезонансном случае.

Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, ряды Фурье.

References

1 Perron O. Uber eine Matrixtransformation, Math. Zeitschr. 1930. V.32. P. 465–473.
2 Persidsky K.P. O kharakteristicnyh chislah differentsialnyh uravnenyi [On the characteristic numbers of the differential equations], Izv. AN KazSSR, ser. math. and mechan. 1947. № 1. P. 5–47.
3 Izobov N.A. O kanonicheskoi forme lineynoi dvumernoi differentsialnoi sistemy [On the canonical form of the linear two-dimensional differential system], Differencial'nye uravneniya [Differential equations]. 1971. V. 7. № 12. P. 2136–2142.
4 Kostin A.V. Ustoychivostj i asymptotica kvazilineynyh neavtonomnyh differentsialnyh sistem [The stability and asyptotics of the nonautonomous differential systems] (Odessa, OGU, 1984, 95 p.).
5 Shchogolev S.A. Dejaki zadachi teorii kolyvanj dlja differentsialnyh sistem, yaki mistyatj povilno zminni parametry [The some problem of the theory of oscillations for the differential systems, containing slowly varying parameters], The thesis for obtaining the scientific degree of Doctor of physical and mathematical sciencies. Kyiv, 2012. 290 p.
6 Kostin A.V., Shchogolev S.A. Ob ustoychivosti kolebaniy, predstavimyh ryadami Furye s medlenno menyajuchimisya parametravi [On the Stability of Oscillations Representable by Fourier Series with Slowly Varying Parameters], Differencial'nye uravneniya [Differential equations]. 2008. V. 44. № 1. P. 45-51.
7 Malkin I.G. Nekotorye zadachi teorii nelineynyih kolebaniy [Some problems of the theory of nonlinear oscillations] (Gostehizdat, Moscow, 1956, 491 p.).
8 Trenogin V.A. Funktsionalnyi analiz [Functional analysis] (Nauka, Moscow, 1980, 496 p.).

Сведения об авторах:

Щёголев С.А. – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, И.И. Мечников атындағы Одесса ұлттық университеті, Дворянская көш., 2, Одесса, 65026, Украина.

Shchogolev S.A. – Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Odessa I.I. Machnikov National University, Dvoryanskaya str., 2, Odessa, 65082, Ukraine.

Поступила в редакцию 17.02.2020

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 130, №1, 93-102 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 27.25.19

Н.Ж. Наурызбаев [1] , Г.Е. Таугынбаева [2] , М. Бейсенбек [3]

[1,2] *Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан,*
[3] *QSI Международная школа Астана, Нур-Султан, Казахстан*
(E-mail: [1] nngmath@mail.ru, [2] galija_1981tau@mail.ru, [3] mbeisenbek2002@gmail.com)

Аспекты применения алгебраической теории чисел в финансовой математике

Аннотация: Рассматривается задача применения специальных математических методов в финансовом инжиниринге, то есть в комбинировании финансовых инструментов с различными параметрами риска и доходности. В особенности, когда речь идет об управлении крупными финансовыми ресурсами, где часто встречаются высокие уровни рисков, предупреждение и нейтрализация которых нередко сопровождается разработкой уникальных приемов и методов.

Ключевые слова: финансовый инжиниринг, равномерно распределенные сетки, метод квази-Монте Карло, дискрепанс

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-130-1-93-102

Основным моментом в финансовом инжиниринге является то, что при определенных обстоятельствах цена производной ценной бумаги – деривативa, то есть договора (контракт), по которому стороны получают право или обязуются выполнить некоторые действия в отношении базового актива, может быть представлена в виде ожидания – в более общем плане в виде интеграла (см. [1, стр. 282])

$$E(f) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Вычисления стоимости производной ценной бумаги, таким образом, сводится к вычислению интеграла. Во многих случаях размерность вычисляемого интеграла s является очень большой или даже бесконечной, она обычно будет по крайней мере столь же большой как число временных шагов в моделировании. Это именно тот случай, в котором является метод квази-Монте Карло эффективным. Поскольку, обычно, в (1) не известна предварительная информация о гладкости подынтегральной функции, то здесь главным рабочим инструментом является метод квази-Монте Карло

$$E(f) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx \approx \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k), \tag{2}$$

где $\xi_1, ..., \xi_p$ конечная последовательность из $[0,\,1]^s$, выбранная случайным образом.

Список литературы по финансовой математике в [1] (см. также [2-9] и библ. к ним) показывает современное состояние темы исследований, как активного развития эффективного соединения математических методов квази-Монте Карло и теории финансов.

Таким образом, задача вычисления стоимости производной ценной бумаги сводится к задаче вычисления кратного интеграла (1), что в свою очередь использует метод квази-Монте Карло (2). В методе квази-Монте Карло основным техническим инструментарием в финансовой математике выступает *теория малых дискрепансов* (см. [1, стр. 283]): «*Идея метода малых дискрепансов состоит в построении узлов* $\xi_1, ..., \xi_p$ *таким образом, чтобы ошибка в* (2) *была минимальной для большого класса функций*», где дискрепансом конечного множества точек из $[0,\,1]^s$ называют число

$$D_s(\xi_1,...,\xi_p) = \sup\left\{\left|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\chi_I(\xi_k) - \prod_{j=1}^{s}(d_j - b_j)\right| : I = [b_1, d_1]\times\cdots\times[b_s, d_s] \subset [0,1]^s\right\},$$

где $\chi_I(t)$ - характеристическая функция множества I, равная 1 или 0 смотря по тому $t \in I$ или $t \notin I$.

Об обширном применения дискрепанса пишут многие специалисты (см. напр., в [10]) "*Последний представляет собой теоретико-числовое понятие и соответствует ошибкам в наихудшей ситуации в так называемых квази-Монте Карло методах аппроксимации интегралов по d-мерному единичному кубу (см.,напр., [2], [3], [5], [6], [17], [21], [38], [42]). Эта связь собирает вместе исследователей сложности, вычислительной теории чисел, КМК, компьютерной теории и служит причиной многих новых достижений и результатов*".

Задача построения сеток $\xi_1,...,\xi_p$ с малым дискрепансом (т.е. равномерно распределенных сеток) является актуальной и относится к разряду сложнейших, чему посвящена обширная литература (см. [11-20], где результаты [15-20] основаны на алгебраический теории чисел).

На примере построения равномерно распределенных сеток (что, по сути, и составляет метод квази-Монте Карло) прокомментируем современное состояние технических средств в Международной финансовой математике.

В финансах сетка $\xi_1,...,\xi_p$ понимается как конечное множество точек, в которых сосредоточена финансовая и вспомогательная информация.

В целях исключения элемента случайности в построении равномерно распределенных сеток, присущей методу Монте Карло, было проведено большое количество исследований и построены различные теоретико-числовые и иные сетки.

Самыми популярными равномерно распределенными последовательностями являются последовательности ван дер Корпута (van der Corput, 1935), Холтона (Halton, 1960), Коробова Н.М. (1963), Соболя (Sobol', 1967, 1976), Фора (Faure 1982), Нидеррейтера (Niederreiter, 1988), Хэммерсли (Hammersley 1964), Бойля (Boyle) (см., напр., [11-20]).

Ряд равномерно распределенных последовательностей является s-мерным обобщением последовательности Ван дер Корпута $\gamma_n(b)$ $(n = 1, 2, \dots)$ получаемых обращением порядкового номера числа последовательности: функция обращения по базису b представляется в виде

$$v_n(b) = \sum_{k=0}^{m_n}\frac{a_k(n)}{b^{k+1}}, \quad n = \sum_{k=0}^{m_n} a_k(n)\, b^k,\ a_k(n) = 0, 1, \dots, b-1.$$

Последовательностью Холтона называется последовательность векторов, определяемая равенством

$$\gamma_{\mathbf{b}}(n) = (v_{b_1}(n), \dots, v_{b_s}(n)) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $b_1, \dots, b_s$ – первые s простые числа.

Набор точек (сетка) Хэммерсли есть последовательность точек вида

$$h_{(b)}(n) = \left(\frac{n}{N}, v_{b_1}(n), \dots, v_{b_{s-1}}(n)\right), \quad n = 1, 2, \dots N,$$

Для построения s-мерной последовательности Фауре $(n = 1, 2, \dots)$ также используется последовательность Ван дер Корпута с одним базисом, $s-1$ координат которых получаются преобразованием первой:

$$\varphi_{(b)}(n) = \left(v_b(n), T(v_b(n)) \dots, T^{s-1}(v_b(n))\right),$$

где

$$T(v_b(n)) = \sum_{k=0}^{m_n}\frac{d_k}{b^{k+1}}, \quad d_k = \sum_{i=k}^{m_n} C_i^k a_i(n).$$

s-мерная последовательность Нидеррейтера $(n = 1, 2, \dots)$ определяется формулой

$$\eta_{(b)}(n) = \left(\sum_{k=0}^{m_n} \frac{z_k^{(1)}}{b^{k+1}}, \dots, \sum_{k=0}^{m_n} \frac{z_k^{(s)}}{b^{k+1}} \right), \quad z_k^j = \sum_{i=0}^{m_n} c_{k,i}^{(j)} a_i(n),$$

где $(c_{k,i}^j)$ - образующая матрица j-й координаты, алгоритм вычисления которой введен в [21].

Последовательность Соболя определяется как

$$s(n) = \left(\bigoplus \sum_{k=0}^{m_n} a_k(n) V_k^{(1)}, \dots, \bigoplus \sum_{k=0}^{m_n} a_k(n) V_k^{(s)} \right), \quad n = \sum_{k=0}^{m_n} a_k(n) 2^k, \ a_k(n) = 0, 1,$$

где $V_k^{(j)}$ - направляющие числа (выраженные в виде двоичной дроби), полученные из s различных примитивных полиномов, а знак $\bigoplus \sum$ означает побитовую операцию XOR.

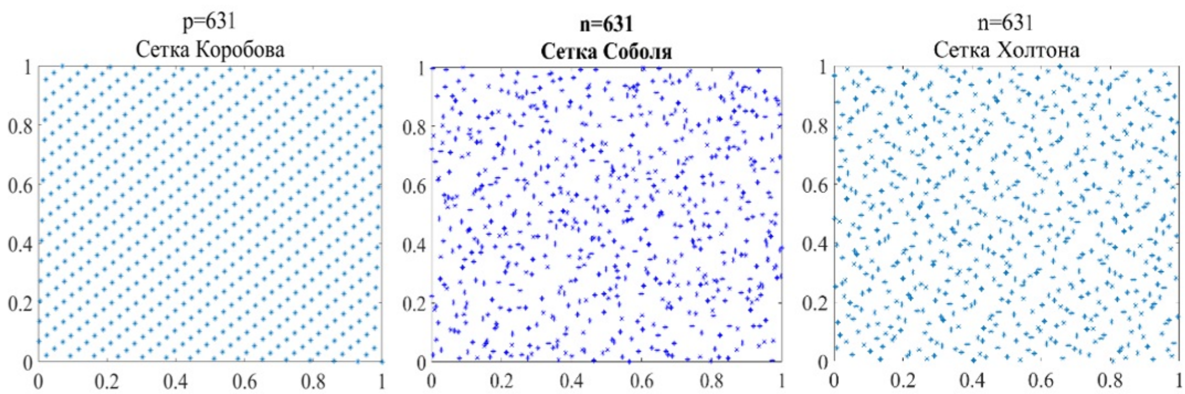
Сетки Коробова

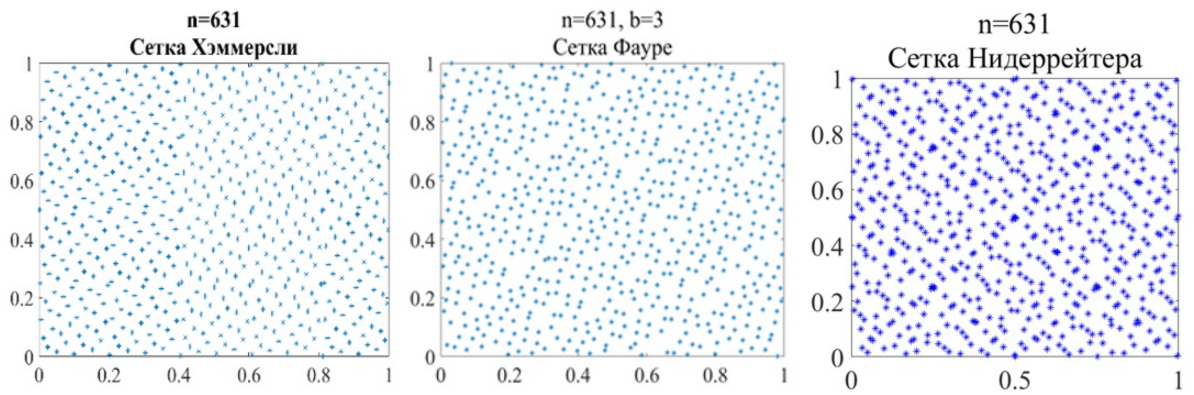
$$\xi_k(a) \equiv \xi_k(a_1, ..., a_s) = \left(\left\{ \frac{a_1}{N} k \right\}, ..., \left\{ \frac{a_s}{N} k \right\} \right) (k = 1, ..., N) \tag{3}$$

привлекательны в теоретическом и в вычислительном смысле (в то время как, вышеуказанные последовательности сеток требует выполнения большого количества операций для вычисления каждого узла) в том плане, что несмотря на обильное цитирование результатов (см., напр., [22-23] и имеющуюся в них библиографию) нигде не акцентируется, что сетка (3) есть такое *сжатие информации*, когда по $s+1$ целым числам выписывается сетка любого объема N. Именно, теоретический и практический интерес к построению сеток вида (3) объясняется, в частности, следующим. В общем случае, для записи сетки объема N требуется sN действительных чисел. Достоинством сеток вида (3) является тот факт, что она полностью определяется, независимо от объема N, заданием $s+1$ целых чисел $(N, a_1(N), ..., a_s(N)) \in Z^{s+1}$ (и легко выписывается за $\asymp N$ элементарных арифметических операций), причем каждая координата каждого узла сетки есть обыкновенная дробь с малым, в данных условиях, знаменателем N.

Так, например, при размерности $s = 10$ и количестве узлов сетки $N = 10^6$ объем записи и хранения сетки в памяти ЭВМ составляет $sN = 10^7$ чисел, в то время как в случае сетки вида (3) запись и хранение обеспечивается $s+1 = 11$ целыми числами (причем, независимо от числа узлов N).Тем самым, в случае равномерно распределенных сеток Коробова (3) речь идет о *сверхсжатии* информации объема sN до $s+1$ и, по тем же причинам, в *сверхэкономном* хранении в памяти ЭВМ.

Равномерное заполнение единичного квадрата геометрический показывают следующие картинки (по программам Институте теоретической математики и научных вычислений ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (ИТМиНВ) вычислены сетки Коробова и по известным программам все остальные следующие сетки):





Большинство имеющиеся результатов по квази-Монте Карло методам имеют теоретический характер и не имеют оптимальных алгоритмов построения данных сеток или практически реализуемы только для малой размерности пространства и количества узлов сетки. В этом ключе в [24] разработан эффективный (в том числе N узлов сетки находятся за предельно возможные $\asymp N \ln\ln N$ элементарных арифметических операций) алгоритм построения равномерно распределенных сеток на s-мерном единичном кубе $[0,1]^s$, что в принципе дает решение задачи нахождения оптимальных коэффициентов. Однако, при реализации алгоритма возникает задача вычисления норм целых алгебраических чисел, что есть многочлен степени большей или равной число переменных.

При возрастании размерности s степень многочлена вместо с количеством его слагаемых сильно возрастает. Поэтому, для нахождения простых N и соответствующих им *оптимальных коэффициентов* $a_1(N), ..., a_s(N)$, используется метод перебора, предложенный в [17].

Алгоритм построения сетки Коробова: *Пусть дано целое* $s(s = 2, 3, \ldots)$, *положительное* $r \geq 2$ *и* $R \geq 3$.

Шаг 1. Определяется простое $l = min\{t \in P : t \geq s + 1\}$.

Шаг 2. Выписываются в порядке возрастания простые числа p_n,

$$p_n \equiv 1 (mod\ l),\ p_n \leq T \quad (T = c(s) R lns R).$$

Шаг 3. Для каждого p_n находится наименьшее целое положительное число $a = a(s,\ p_n)$ такое, что $(a,\ p) = 1$, $a^{\frac{p_n-1}{l}} \not\equiv 1 (mod\ p_n)$.

Шаг 4. По найденному числу $a = a(s,\ p_n)$ находятся целые положительные числа $a_j:\ 0 \leq a_j < p_n,\ a^{\frac{p_n-1}{l}(j-1)} \equiv a_j\ (mod\ p_n)\ (j = 2, \ldots, s)$.

Шаг 5. Затем вычисляются величины $(p = p_n)$

$$\triangle(s,\ r,\ p,\ a) \leq \beta_p 10^{-\tau} \ (1 \leq \beta_p < 10,\ \tau = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Шаг 6. Величины $\beta_p 10^{-\tau}$ разбиваются на группы с одинаковым показателем $\tau(\tau = 1,\ 2,\ \ldots)$. Для каждого τ из данной группы берутся значения оптимальных коэффициентов соответствующих четырем (в некоторых случаях больше) наименьшим числом узлов p (если таковы существуют).

Возникает задача сравнительного вычисления приведенного выше алгоритма построение сетки Коробова с известными, в качестве примера возьмем коллатизированную ипотечную облигацию.

Пашков и Трауб [25] изучали коллатизированную ипотечную облигацию из m траншев. Основной пул составляет оплата в течение n лет и поток денег поступает каждый месяц, т.е. имеется $s = m \cdot n$ денежных потоков. По факту правила достаточно сложные и они характеризуют финансовый проект.

Оценим сумму денежных потоков в каждом транше. Пусть C - сумма ежемесячных выплат базового пула $i_j \quad (j = 1, ..., s)$ есть процентная ставка соответствующая j-ому месяцу, w_j процент предварительного платежа в j-ом месяце, а a_{s-j+1} есть остаточный аннуитет после j-го месяца.

Остаточный аннуитет определяется $a_j = 1 + \nu_0 + ... + \nu_0^{j-1}$. Ставка дисконтирования $\nu_0 = \frac{1}{1+i_0}$ и i_0 месячная ставка. Здесь C и a_j – постоянные, а i_j и w_j – стохастические переменные, определяемые как

$$i_j = K_0 e^{\xi_j} i_{j-1} = K_0^j i_0 e^{\xi_1+...+\xi_k},$$

где $\{\xi_j\}_{j=1}^s$- нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и с дисперсией $\sigma^2 = 0,0004$, K_0 - заданная постоянная. Модель предварительной оплаты w_j вычисляется по формуле

$$w_j = w_j(\xi_1, ..., \xi_j) = K_1 + K_2 arctg(K_3 i_j + K_4) = K_1 + K_2 arctg\left(K_3 K_0^j i_0 e^{\xi_1+...+\xi_j} + K_4\right),$$

где K_1, K_2, K_3 и K_4 заданные постоянные. Ежемесячный денежный поток j, $j = 1, 2, ..., N$ составляют

$$M_j = M_j(\xi_1, ..., \xi_j) = C \prod_{l=1}^{j-1} (1 - w_l(\xi_1, ..., \xi_l)) (1 - w_l(\xi_1, ..., \xi_l) + w_l(\xi_1, ..., \xi_l) a_{s-l+1}).$$

Денежный поток распределяется по траншам, соответствеующим законам коллатизированной ипотечной облигации. Пусть $G_{j;T}(\xi_1, ..., \xi_j)$-часть денежного потока M_j по траншу T в j-ом месяце. Форма этой функции сложная, для нас достаточно того, что она непрерывна. Чтобы посчитать денежный поток T транша j-ом месяце надо умножить на дисконтный коэффицент

$$u_j(\xi_1, ..., \xi_{k-1}) = v_0 v_1(\xi_1) ... v_{j-1}(\xi_1, ..., \xi_{j-1}).$$

Для всех T траншев в j -ом месяце текущаяя стоимость PV_T равна

$$PV_T(\xi_1, ..., \xi_s) = \sum_{j=1}^{s} G_{j;T}(\xi_1, ..., \xi_j)\ u_j(\xi_1, ..., \xi_j).$$

Тогда, математическое ожидание $E[PV_T]$ вычисляется по формуле

$$E[PV_T] = \int\limits_{[0,1]^s} PV_T(y_1(x_1), ..., y_s(x_s))\, dx_1, ..., dx_s,$$

где $y_j = y_j(x_j)$ находится из условия $x_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int\limits_{-\infty}^{y_i} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt.$

Таким образом, задача сводиться к вычислению кратного интеграла в s-мерном кубе. После генерации равномерно распределенных на $[0,1]^s$ точек $\{(x_1^{(k)}, ..., x_s^{(k)})\}_{k=1}^N$, для каждого $x_j^{(k)}, j = 1, 2, ..., s, k = 1, ..., N$ посредством обратной куммулятивной функции вычисляются значения $\{(y_1^{(k)}, ..., y_s^{(k)})\}_{k=1}^N$.

Приведем результаты численного интегрирования интеграла $E[PV_T]$ методом квази - Монте Карло. Все расчеты проводились в программной среде Matlab. Рассматривается коллатизированная ипотечная облигация на общую сумму 400 млн у.е. разделенных на четыре транша, обозначаемые через А, Б, В, Г, с суммами 194500000, 36000000, 96500000, 73000000 соответственно.

Пусть базовый пул ипотеки имеет десятилетний срок погашения, выплачиваемого ежемесячно. Таким образом получается, что всего $10 \cdot 12 = 120$ денежных потоков, которые распределяются между траншами по правилу, согласно которому все предварительные выплаты сначала идут на погашение основного долга транша A, после его погашения — на погашение транша B и так далее.

Сначала приведем все расчеты при количестве узлов $N \approx 10000 \cdot k$, $k = 1, 2;;\ldots, 20$. Для наглядности результаты реализации представлены на графике (Рис. 1).

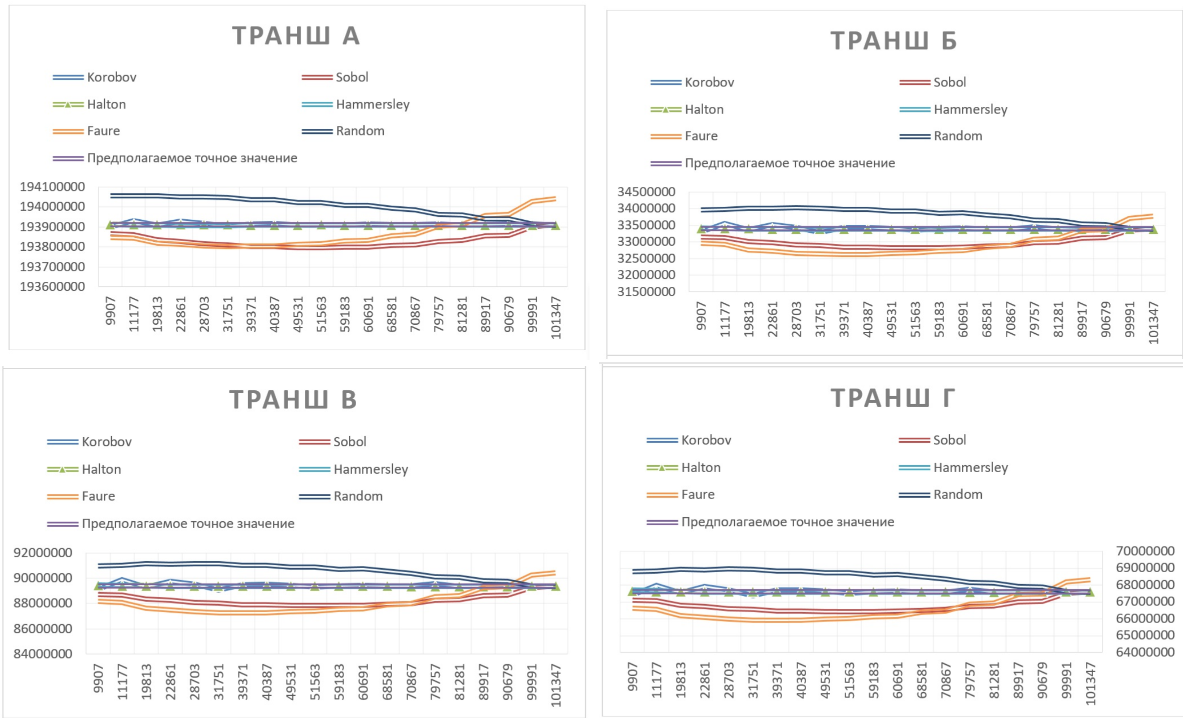


Рисунок 1 – Значения вычислительных агрегатов для $E(PV_T)$
$(i_0 = 0.08125, K_0 = 1, K_1 = -4.09106, K_3 = 5, K_3 = 10, K_3 = 1, N \approx 10000 \cdot k, k = 1, 2, \ldots, 20)$.

На Рисунке 1 показаны результаты вычислений приведенных стоимостей четырех траншев применением случайной 120-мерной последовательности с нормальным распределением (в среде Matlab функция *normrnd*). Здесь сетки Коробова подсчитаны по алгоритму 1-6, а сетки Соболя, Холтона, Хэммерсли, Фора по приведенным выше формулам и составленным нами программам.

Как видно из Рисунка 1, при $9907 < N \leq 101347$ алгоритмы с сетками Коробова, Холтона, Хэммерсли группируются лучше к числам соответствующим значениям 193699678.3, 29998489.14, 79355687.16, 58494364.1 нежели с сетками Фора, Соболя и случайными числами.

На Рисунке 2 указано потраченное время на выполнение алгоритмов, с указанными выше сетками.

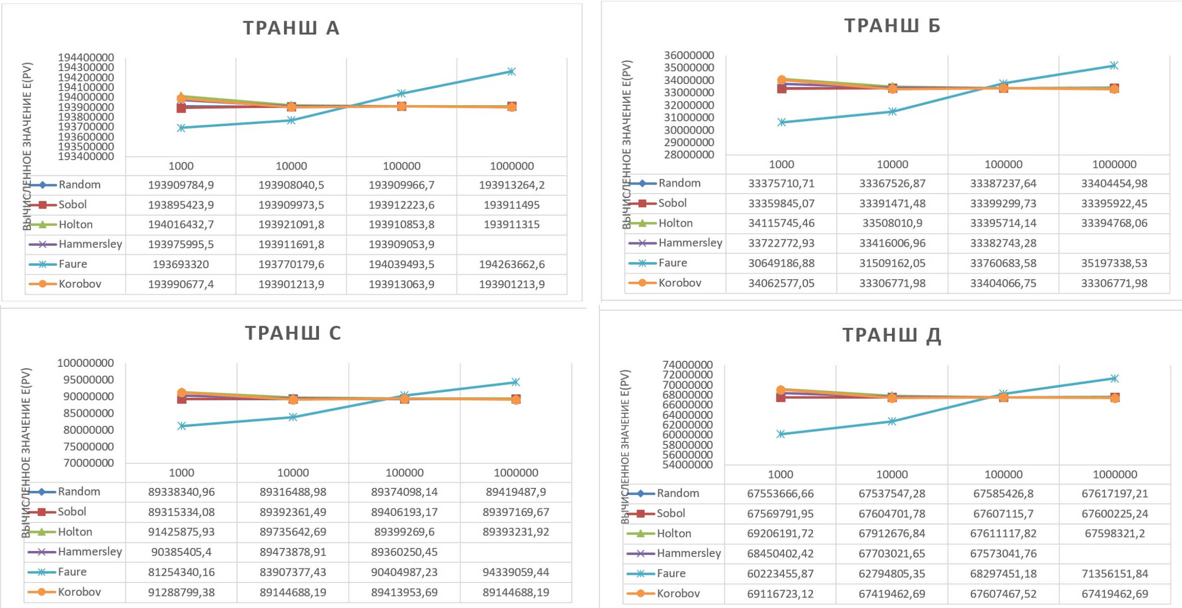
	9907	11177	19813	22861	28703	31751	39371	40387	49531	51563	59183	60691	68581	70867	79757	81281	89917	90679	99991	101347
Korobov	1,54	1,68	3,04	3,42	4,37	4,8	6,1	6,24	7,77	7,94	9,35	9,33	10,6	10,9	12,4	12,5	13,9	14	15,3	15,4
Sobol	5,89	1,7	2,92	3,47	4,35	4,81	5,7	5,71	7,15	7,65	8,59	8,91	10,4	11,1	11,9	11,5	12,9	12,7	14	14,3
Halton	1,63	1,81	3,06	3,55	4,47	4,99	6,35	6,54	7,88	8	9,52	9,55	11	11,6	12,5	12,8	14,1	14,3	16	16
Faure	1,63	5,64	10,2	11,9	15,5	17,3	22	22,5	28,6	29,6	34,8	36	40,7	42,2	48,7	48,8	54,9	55,5	61,9	62,7
Random	1,63	1,63	2,73	3,13	3,96	4,45	5,55	5,72	6,98	7,09	8,21	8,39	9,68	10,3	11,6	11,9	13,4	13,1	14,5	14,8

N

Рисунок 2 – Затраченное время на реализацию вычислительных агрегатов для интеграла $E(PV_T)$

Время подсчета во всех случаях сравнительно одинаково, за исключением сетки Фора.

Далее приведем результаты вычисление значения $E(PV)$ для $N = 10^k$ $(k = 3, 4, 5, 6)$



ТРАНШ А

	1000	10000	100000	1000000
Random	193909784,9	193908040,5	193909966,7	193913264,2
Sobol	193895423,9	193909973,5	193912223,6	193911495
Holton	194016432,7	193921091,8	193910853,8	193911315
Hammersley	193975995,5	193911691,8	193909053,9	
Faure	193693320	193770179,6	194039493,5	194263662,6
Korobov	193990677,4	193901213,9	193913063,9	193901213,9

ТРАНШ Б

	1000	10000	100000	1000000
Random	33375710,71	33367526,87	33387237,64	33404454,98
Sobol	33359845,07	33391471,48	33399299,73	33395922,45
Holton	34115745,46	33508010,9	33395714,14	33394768,06
Hammersley	33722772,93	33416006,96	33382743,28	
Faure	30649186,88	31509162,05	33760683,58	35197338,53
Korobov	34062577,05	33306771,98	33404066,75	33306771,98

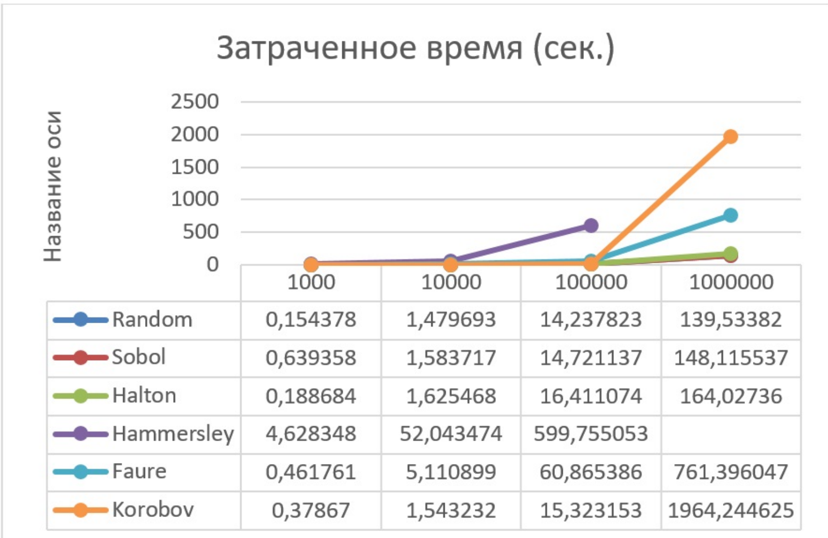
ТРАНШ С

	1000	10000	100000	1000000
Random	89338340,96	89316488,98	89374098,14	89419487,9
Sobol	89315334,08	89392361,49	89406193,17	89397169,67
Holton	91425875,93	89735642,69	89399269,6	89393231,92
Hammersley	90385405,4	89473878,91	89360250,45	
Faure	81254340,16	83907377,43	90404987,23	94339059,44
Korobov	91288799,38	89144688,19	89413953,69	89144688,19

ТРАНШ Д

	1000	10000	100000	1000000
Random	67553666,66	67537547,28	67585426,8	67617197,21
Sobol	67569791,95	67604701,78	67607115,7	67600225,24
Holton	69206191,72	67912676,84	67611117,82	67598321,2
Hammersley	68450402,42	67703021,65	67573041,76	
Faure	60223455,87	62794805,35	68297451,18	71356151,84
Korobov	69116723,12	67419462,69	67607467,52	67419462,69

Рисунок 3 – Значения вычислительных агрегатов для $E(PV_T)$
$(N = 10^k,\ \ k = 3, 4, 5, 6)$.



	1000	10000	100000	1000000
Random	0,154378	1,479693	14,237823	139,53382
Sobol	0,639358	1,583717	14,721137	148,115537
Halton	0,188684	1,625468	16,411074	164,02736
Hammersley	4,628348	52,043474	599,755053	
Faure	0,461761	5,110899	60,865386	761,396047
Korobov	0,37867	1,543232	15,323153	1964,244625

Рисунок 4 – Затраченное время на реализацию вычислительных агрегатов для интеграла $E(PV_T)$

По итогам вычисления видим, что математический инструмент хорошо применяется в финансовых проблемах. На примере показано, что через n – мерный интеграл можно оценить сумму денежных потоков в каждом транше. В свою очередь, значение n – мерного интеграла определяется по методу квази-Монте Карло, который требует построение равномерно распределенной сетки с малыми дискрепансами.

Приведенные результаты вычислительных экспериментов показывают только взаимоотношения между значениями используемых в финансах математических инструментов, но без оценок возникающих при этом погрешностей.

Исследование точности квадратурных формул это отдельный тема исследований (см. напр., [11-13])

Список литературы

1 Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. –New York: Springer-Verlag, –2003. 596 p.
2 Glasserman P., Yu B. Simulation for American Options: Regression Now or Regression Later? In: Niederreiter H. (eds) Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2002. Springer, Berlin, Heidelberg. –2004.
3 Garcia D. Convergence and biases of Monte Carlo estimates of American option prices using a parametric exercise rule // Journal of Economic Dynamics and Control. –2003. –V.27, №10. –P.1855-1879. –V. 27. –P. 855–1879.
4 Glasserman P., Yu B. Large sample properties of weighted Monte Carlo estimators // Operat. Res. –2005. –V. 53. –P. 298-312.
5 Paskov S.H. Computing high dimensional integrsls with applicationsto finance //Journal of portfolio management. –1995. –P. 13-20.
6 Джекел П. Применение методов Монте-Карло в финансах. –M: Интернет-Трейдинг, –2004. –263 с.
7 Korn R., Korn E., Kroisandt G. Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance. CRC Press, –2010. – 410 p.
8 Галиц Л. Финансовый инжиниринг: инструменты и способы управления финансовым риском. / Лоуренс Галиц. – М.: ТВП, 1998. – 600 с.
9 Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P. Monte Carlo methods forsecurity pricing // Journal of Economic Dynamics and Control. –1997. –№21. –P. 1267–1321.
10 Василковский Г. В., Возняковский Г. Обзор сложности в средней ситуации для линейных многомерных проблем // Изв. вузов. Матем. – 2009. –№4. –С. 3–19.
11 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2-е издание, переработанное и дополненное. –Москва: МЦНМО. –2004. –287 стр.
12 Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. In: Schriftenreihe der Osterreichischen Computer Gesellschaft. –Vol. 12. R. Oldenbourg Verlag, Wien/Munchen. –1981.
13 Hua L.-K., Wang Y. Application of Number Theory of Numerical Analysis. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Science press. Beijing, –1981. –241 p.
14 Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. –Москва: Наука, –1985. – 408 с.
15 Баилов Е. А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. –Т. 54, № 7. – С. 1059-1077.
16 Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. Быстрые "Алгебраические" преобразования Фурье на равномерно распределенных сетках// Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 5. –С. 93-98.
17 Темиргалиев Н., Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН. – 2007. –Т. 416, №2. – С.169-173.
18 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж.Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики. –2009. –Т.49, №1. –С. 14-25.
19 Темиргалиев Н. Обзор-2010: Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод Квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье. // Вест.ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – 2010. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. -С. 1-194.
20 Темиргалиев Н. Обзор-1997: Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестн. Евразийского ун-та. –1997. –№ 3. –С. 90-144.
21 Niederreiter H. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods. SIAM. Philadelphia, Pennsylvania, –1992. 241 pages.
22 Бабенко К.И. Основы численного анализа. –Москва-Ижевск.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». –2002. –848 с.
23 Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. 2-е изд. –М.: Наука, –1975. –472 с.
24 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем.сб. –1990. –Т.181, № 4. –С. 490-505.
25 Paskov S. Computing High Dimensional Integrals with Applications to Finance. Technical Report CUCS-023-94. Department of Computer Science, Columbia University, New York. –1993.

Н.Ж. Наурызбаев [1] , Г.Е. Таугынбаева [2] , М. Бейсенбек [3]

[1,2] *Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан,*
[3] *QSI Астана халықаралық мектебі, Нұр-Сұлтан, Қазақстан*

Алгебралық сандар теориясының қаржылық математикада қолдану аспектілері

Аннотация. Қаржы инжинирингінде, яғни әртүрлі тәуекел мен кірістілік параметрлерлі қаржы құралдарың құрамдастыруда арнайы математикалық әдістердіқолдану мәселелері қарастырылады. Әсіресе жоғары деңгейлі

тәуекелдер жиі кездесетін үлкен қаржылық ресурстарды басқарғанда, олардың алдын алу және бейтараптандыру барысында бірегей әдістер мен тәсілдерді құру қатар жүреді.

Түйін сөздер: қаржылық инженерия, бірқалыпты үлестірілген торлар, квази-Монте-Карло әдісі, дискрепанс.

N. Zh. Nauryzbayev [1], G.E. Taugynbayeva [2], M. Beisenbek [3]

[1,2] *Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of the L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan,*
[3] *QSI International School of Astana, Nur-Sultan, Kazakhstan*

Application aspects of algebraic number theory in financial mathematics

Abstract. The problem of applying special mathematical methods in financial engineering that is, in combining financial instruments with various risk and profitability parameters, is considered. Especially when it comes to managing large financial resources, where high levels of risks are often encountered, the prevention and neutralization of which is often accompanied by the development of unique techniques and methods.

Keywords: financial engineering, uniform distributed grids, quasi-Monte Carlo method, discrepancy.

References

1 Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Springer-Verlag, New York, 2003, 596 p.).

2 Glasserman P., Yu B. Simulation for American Options: Regression Now or Regression Later? In: Niederreiter H. (eds) Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2002 (Springer, Berlin, Heidelberg, 2004).

3 Garcia D. (2003) Convergence and biases of Monte Carlo estimates of American option prices using a parametric exercise rule, Journal of Economic Dynamics and Control. V.27. №10. P.1855-1879.

4 Glasserman P., Yu B. (2005) Large sample properties of weighted Monte Carlo estimators, Operat. Res. V. 53. P. 298-312.

5 Paskov S.H. (1995) Computing high dimensional integrsls with applicationsto finance, Journal of portfolio management. P. 13-20.

6 Jackel P. Monte Carlo Methods in Finance (New York, John Wiley & Sons Inc, 2002. -238 p.).

7 Korn R., Korn E., Kroisandt G. Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance (CRC Press, 2010, 410 p.).

8 Galic L. Finansovyj inzhiniring: instrumenty i sposoby upravlenija finansovym riskom [Financial engineering: tools and methods for managing financial risk]. (TVP, Moscow, 1998, 600p.).

9 Boyle, P., Broadie, M., and Glasserman, P. (1997) Monte Carlo methods forsecurity pricing, Journal of Economic Dynamics and Control. №21. P. 1267–1321.

10 Vasilkovskij G. V., Voznjakovskij G. (2009) Obzor slozhnosti v srednej situacii dlja linejnyh mnogomernyh problem [A survey of average case complexity for linear multivariate problems], Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. [Russian Math. (Iz. VUZ), V. 53. No. 4. P. 1-14]. V. 53. No. 4. P. 3-19.

11 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize. 2-e izdanie, pererabotannoe i dopolnennoe [Number-Theoretic Methods in Approximate Analysis. 2nd. revised and extended edition] (MTsNMO, Moscow, 2004, 287p.).

12 Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. In: Schriftenreihe der Osterreichischen Computer Gesellschaft. Vol. 12. (R. Oldenbourg Verlag, Wien/Munchen. 1981).

13 Hua L.-K., Wang Y. Application of Number Theory of Numerical Analysis (Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Science press, Beijing, 1981, 241 p.).

14 Kuipers L., Niederreiter H. Ravnomernoe raspredelenie posledovatel'nostej [Uniform Distribution of Sequences] (Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974; Nauka, Moscow, 1985).

15 Bailov E.A., Sikhov M.B., Temirgaliev N. (2014) Ob obshhem algoritme chislennogo integrirovanija funkcij mnogih peremennyh [On an algorithm for constructing uniformly distributed Korobov grids], Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. [Comput. Math. Math. Phys., Vol. 54. No. 7). P. 1061-1078]. Vol. 54, No 7. P. 1059-1077.

16 Temirgaliyeva Zh. N. , Temirgaliyev N. (2016) Bystrye "Algebraicheskie" preobrazovanija Fur'e na ravnomerno raspredelennyh setkah [Rapid “algebraic” Fourier transforms on uniformly distributed meshes], Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. [Russian Math. (Iz. VUZ), Vol. 60. No 5. P. 81-85]. No 5. P. 93-98.

17 Temirgaliev N., Bailov E.A., Zhubanysheva A.Zh. (2007) Ob obshhem algoritme chislennogo integrirovanija periodicheskih funkcij mnogih peremennyh [General Algorithm for the Numerical Integration of Periodic Functions of Several Variables], Dokl. Akad. Nauk [Dokl. Math. Vol. 76, P. 681-685]. Vol. 416. No2. P.169-173.

18 Zhubanysheva A.Zh., Temirgaliev N., and Temirgalieva Zh.N. (2009) Primenenie teorii divizorov k postroeniju tablic optimal'nyh kojefficientov kvadraturnyh formul [Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas], Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. [Comput. Math. Math. Phys. Vol.49. No. 1. P. 12-22] Vol. 49. No. 1. P. 14-25.

19 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series.], Vest. ENU

im. L. N. Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L. N. Gumilev ENU], 1-194 (2010)

20 Temirgaliyev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham Analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e [Numerical-theoretic methods and the probability-theoretic approach to the problems of the Analysis. The theory of embeddings and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Vestnik Evrazijskogo universiteta [Bulletin of the Eurasian University], (3), 90-144 (1997).

21 Niederreiter H. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods (SIAM. Philadelphia, Pennsylvania, 1992, 241 p.).

22 Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza [Foundations of numerical analysis] (Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika, Moscow-Izhevsk, 2002, 848 p.).

23 Ermakov S.M. Metod Monte-Karlo i smezhnye voprosy [The Monte Carlo method and related problems] (Moscow, Nauka, 1975, 472 p.).

24 Temirgaliev N. (1990) Primenenie teorii divizorov k chislennomu integrirovaniju periodicheskih funkcij mnogih peremennyh [Application of Divisor Theory to Numerical Integration of Periodic Functions of Several Variables]. Mat. Sb. [Math. USSR-Sb. (1991), Vol. 69. No. 2 , P. 527–542] Vol. 181. No. 4. P. 490–505.

25 Paskov S. Computing High Dimensional Integrals with Applications to Finance (Technical Report CUCS-023-94. Department of Computer Science, Columbia University, New York,1993).

Сведения об авторах:

Наурызбаев Н.Ж. – PhD, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Таугынбаева Г.Е. – PhD, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Бейсенбек М. – учащийся "QSI Международная школа Астана", Нур-Султан, Казахстан

Nauryzbayev N. Zh. – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Taugynbayeva G.E. – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Beisenbek M. – Pupil at "QSI International School of Astana", Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 02.02.2020

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

Журналдың потенциалды авторлары мақала құрылымы бойынша келесі талаптарды ұстанулары қажет:

- Мақала мәтінін түсінуді қамтамасыз ететін қажетті белгілер мен анықтамалар;
- Мақалада қарастырылатын есептің қойылымы;
- Қарастырылатын есеп бойынша тарихи мәліметтер - мақала тақырыбына сәйкес бұрын алынған нәтижелер кіммен және қашан алынғандығы туралы толық сілтемелерімен берілген ақпарат;
- Кез келген ғылыми жұмыстың ең жауапты бөлігі ретінде мақаланың қажеттілігі мен өзектілігін негіздеу;
- Мақалада қойылған есеп шешімін нақты тұжырымдау және сипаттау;
- Бұрын белгілі мәнмәтінінде мақала нәтижесінің(нәтижелерінің) жаңалы?ын егжей-тегжейлі негіздеу;
- Есептің шешімі толық негіздеулермен (дәлелдемелермен) жабдықталуы тиіс.

Осы талаптардың ең болмағанда біреуі сақталмаған жағдайда мақала қарастыруға қабылданбайды.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса),

орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аудармa мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

Potential authors of the journal should adhere to the following rules on the structure of the article point by point with headings:

- The necessary notation and definitions to ensure understanding of the text of the article;
- Statement of the problem, the solution of which the article is devoted to;
- Historical information on the statement of the problem - by whom and when the results were obtained that preceded the topic of the article with the corresponding full links;
- Justification of the necessity and relevance of the task of the article, as the most critical part of any scientific work;
- The exact wording and description of the solution to the problem presented in the article;
- A detailed justification of the novelty of the result (s) of an article in the context of a previously known one;
- The solution to the problem should be provided with detailed justifications (evidence).

If at least one of these requirements is not observed, the article is not accepted for consideration.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал *"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика"*

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz*.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

Потенциальные авторы журнала должны попунктно с заголовками придерживаться следующих правил по структуре статьи:

- Необходимые обозначения и определения для обеспечения понимания текста статьи;
- Постановка задачи, решению которой посвящена статья;
- Исторические сведения по постановке задачи - кем и когда были получены результаты, предшествующие теме статьи с соответствующими полными ссылками;
- Обоснование необходимости и актуальности задачи статьи, как самая ответственная часть любой научной работы;
- Точная формулировка и описание представленного в статье решения поставленной задачи;
- Подробное обоснование новизны результата(ов) статьи в контексте ранее известного;
- Решение задачи должно быть снабжено подробными обоснованиями (доказательствами).

При несоблюдении хотя бы одного из этих требований статья не принимается к рассмотрению.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья

оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2020. 1(130)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 109-б.
Шартты б.т. - 3,88. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды