Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2021, Vol. 137, №4, P.25-59
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: **27.23; 24.01.45; 27.01.33**

Н. Темірғалиев

Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
(E-mail: ntmath10@mail. ru)

«Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты 2019 жылы» ғылыми, ғылыми-әдістемелік және ұйымдастырушылық есебі (IV бөлім)

Аннотация: Мақалада "Математикалық анализ" оқулығының *Синопсис*-Мазмұны аяқталады. III бөлімде берілген алғашқы бөлігінің "әр пункт пен параграф бір жағынан тақырыптың мәні мен ондағы идеяларды дамыту тұрғысынан егжей-тегжейлі баяндалып берілсе, екінші жағынан, мүмкіндігінше қысқа және мәліметті түрде келтіру" мақсаты осы IV бөлімде де сақталған.

Түйін сөздер: Математикалық анализ, *Синопсис*-Мазмұн, математиканы түсіну "Математикалық анализ" оқулығының мақсаты ретінде.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2021/4.3

2000 Mathematics Subject Classification: 97E10; 97-02.

§ 8. «Математикалық анализ» (*өңделген және толықтырылған екінші басылым*) оқулығының [1] Синопсис түріндегі мазмұны (аяқталуы)

X ТАРАУ. $\mathbf{R}^n$ ЕВКЛИД КЕҢІСТІГІ
§1. МАТЕМАТИКАЛЫҚ $\mathbf{R}^n$ ҚҰРЫЛЫМЫ

1. Математика – математикалық құрылымдар жайындағы ғылым, құрылым – элементтерінің арасына кейбір қатынастар тағайындалған жиын.

2. R^1 барлық нақты сандар жиыны математиканың негізгі құрылымы ретінде кейбір қасиеттерімен бөлісіп, көптеген топ, сақина, өріс тәрізді жаңа құрылымдарға әкеледі, солардың ішіндегі Математикалық анализ теориясындағы ең мазмұндысы – n-өлшемді R^n Евклид кеңістігі.

3. Жиындардың тіке көбейтіндісі бастапқылардан туындайтын жаңа құрылым ретінде – алдын ала берілген жиындар тізбесінен бір элементтен ала отырып, рет-ретімен тізбеленген біртұсас элементтер жиыны.

4. R^n жиыны n рет алынған R^1 жиынының тіке көбейтіндісі – әр элементі координата атты реттелген n нақты сандар тізбесі болатын құрылым.

5. Толық анықтамасыз, тек түсінік деңгейінде қолданылған, "ереже", "сәйкестік", "тәртіп" ұғымдарынсыз функция анықтамасының тағы бір түрі – анықталу және мәндер қабылданатын екі жиынның тіке көбейтіндісінің графигі түрінде, ширатып айтқанда, бірінші жиынның әр элементі мен екінші жиынның бір ғана элементі жұптасқан арнайы жиыншасы түрінде.

6. Сызықтық R^1 кеңістігі – элементтерінің арасында қосу және нақты санға көбейту амалдары анықталған жиын, қосу амалы бойынша топ құратын.

7. R^1 негізгі құрылымындағы нақты санның абсолютті шамасын толық сипаттайтын қасиеттері негізіндегі R^n сызықтық кеңістігіндегі норманың жалпы анықтамасы – норманың теріс еместігі, элемент сол сызықтық кеңістіктің нөлі болғанда ғана және сол жағдайда ғана норманың нөл нақты санына тең болуы, біртектілігі мен үшбұрыштар теңсіздігін қанағаттандыруы.

8. R^n сызықтық кеңістігіндегі әр элементтің евклидтік нормасы – екі өлшемді жағдайда Пифагор теоремасы бойынша координаттық жүйе басынан сол нүктеге дейін есептелген арақашықтық сол элементтің нормасы деп қабылданған, ары қарай n өлшемді жағдада $\|x\|_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ түрінде жалғасатын Евклид атты норма.

9. R^n нормаланған кеңістігіндегі Евклид нормасына эквивалентті тағы екі норма – координаталарымен анықталатын әр элементтің координаталарының абсолют шамаларының қосындысы және абсолют шамаларының ең үлкені түрінде анықталған нормалар және сол нормалардың эквиваленттілігі атты нормалары бірін-бірі шенейтін теңсіздіктерді қанағаттандыруы.

10. Метрикалық кеңістік анықтамасы мен R^n метрикалық кеңістігі – R^n кеңістігінде норма арқылы екі элементтің $\rho(x, y) = \|x - y\|_r$ нақты сан болып табылатын арақашықтығын енгізіп, оның теріс еместік, R^n-дегі екі элемент өзара тең болғанда және тек сонда ғана метриканың нөл нақты санына тең болуы, симметриялық, үшбұрыштар теңсіздігін қанағаттандыруы және метрика деп аталуы, метрика анықталған жиынның метрикалық кеңістік деп аталуы, соның ішінде, R^n кеңістігінің нормаланғанынан метрикалық кеңістікке дейін кеңеюі.

11. R^n сызықтық кеңістігіндегі скалярлық көбейтінді – геометрияның ұзындық пен бұрыш ұғымдарын R^n кеңістігіне енгізетін және олардың сандық мәндерін нүкте координаталары арқылы сипаттауға мүмкіндік беретін, аттас координаталарының көбейтіндісінің қосындысы арқылы анықталатын амал.

12. R^n сызықтық кеңістігі векторлық кеңістік ретінде – басы координаттар жүйесінің бас нүктесінде, ал соңы R^n-дегі нүктеде орналасқан реттелген жұп, не бастапқы нүктеден соңғы нүктеге бағытталған кесінді R^n-дегі вектор деп аталады да, векторлардың соңы болып табылатын нүктелердің скалярлық көбейтіндісі векторлардың скалярлық көбейтіндісі деп қабылданып, осы векторлардың скалярлық көбейтіндімен жабдықталудан пайда болған құрылым R^n векторлық кеңістігі деп аталады. $n = 2$ және $n = 3$ жағдайларында Евклид геометриясымен беттесетін соңғы нүктенің координаталарының квадраттарының қосындысының квадрат түбірі вектор ұзындығы деп, ал екі вектордың соңғы нүктелерінің скалярлық көбейтіндісінің олардың ұзындықтарының көбейтіндісіне қатынасы екі вектор арасындағы бұрыш деп аталып және екі вектор арасындағы бұрыш $\frac{\pi}{2}$-ге тең болған жағдайда және тек сонда ғана скалярлық көбейтінділері нөлге тең болатын векторлар ортогоналды деп аталады.

13. R^n кеңістігіндегі ортогоналды және нормаланған стандартты базис – әртүрлі екеуінің скалярлық көбейтіндісі нөлге, ұзындықтары бірге тең, бір координатасы бірге қалғандары нөлге тең, R^n кеңістігінің әр элементін бірмәнді жіктейтін n векторлы жүйе.

§2. R^n НОРМАЛАНҒАН КЕҢІСТІКТІҢ ЖИЫНШАЛАРЫ

1. Тағы да жиындарға қолданылатын амалдар туралы – қабылдайтын мәндері индекс атты белгімен таңбаланған жиындарға бірігу, қиылысу амалдарын қолдану.

2. R^n нормаланған кеңістігіндегі евклидтік норма жағдайындағы маңай – алдын ала берілген нүктеден арақашықтығы алдын ала берілген саннан аспайтын барлық нүктелерден құрылған шар деп аталатын евклид нормасына қатысты маңай атты R^n кеңістігінің жиыншасы.

3. R^n нормалаған кеңістігіндегі үш түрлі маңайлар және олардың арақатынастары – алдын ала берілген нүктемен алдын ала бекітілген эквивалетті үш норманың бірі бойынша анықталған арақашықтығы маңай радиусы атты алдын ала берілген оң саннан аспайтын барлық нүктелерден құрылған сол нормаға сәйкес маңай атты R^n кеңістігінің жиыншасы және нормалардың эквиваленттілігінен олар арқылы анықталған маңайлардың әрқашан да бірінің ішіне бірінің салынуы.

4. R^n кеңістігінің берілген жиыншасының ішкі нүктесі, жиынның ашық болуы және де осы анықтамалардың эквивалентті үш нормаға тәуелсіздігі – берілген жиынның қайсыбір маңайымен сол жиында толығымен жататын ішкі нүкте атты нүктесі, әрбір нүктесі ішкі болатын ашық атты жиын және бір нормамен ішкі нүкте болса, қалғандарымен де ішкі болуы.

5. R^n кеңістігінің берілген жиыншасының шектік және оңашаланған нүктелері, жиынның тұйық болуы – сәйкес R^n кеңістігінен алынған нүктенің кез келген маңайында жиынның ақырсыз көп нүктелерінің не соған пара-пар одан өзге кемінде бір нүктенін болуы және сол жиыннан алынған нүктенің қандай да бір маңайында сол жиынның одан өзге бір де бір нүктесінің болмауы, әр шектік нүктесі өзінде жататын жиын.

6. Берілген жиынның R^n кеңістігіне дейінгі толықтауыш жиыны, ашық және тұйық жиындардың өзара толықтауыш болу қасиеті – R^n кеңістігі мен берілген жиынның толықтауыш атты сол жиында жатпайтын барлық нүктелерден құрылған айырмасы, әрқашанда тұйық жиынның толықтауышының ашық, ашық жиынның толықтауышының тұйық болуы.

7. Берілген жиынның іші, сырты және шекарасы – R^n кеңістігіндегі әр жиын бойынша кеңістік өзара қиылыспайтын үш жиынға жіктеледі: қайсыбір маңайымен жиында толық жататын ішкі нүктелерден құрылған жиынның іші, сыртқы нүкте деп аталатын қайсыбір маңайында жиынның бір де бір нүктесін қамтымайтын барлық нүктелерден құрылған жиынның сырты, шекаралық нүкте атты кез келген маңайында жиында жататын да, жатпайтын да нүктелер табылатын барлық нүктелерден құралған жиынның шекарасы.

§3. R^n СЫЗЫҚТЫҚ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ТІЗБЕК ЖӘНЕ ФУНКЦИЯ ШЕКТЕРІ

1. Мәндері R^n кеңістігіндегі тізбек және оның шегі – әрбір оң бүтін санға R^n кеңістігінің бір элементін сәйкес қоятын ереже және сандық тізбек шегі анықтамасындағы $|x_n - a| < \varepsilon$ модулді теңсіздігін $\|x_n - a\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \varepsilon$ нормалы теңсіздігімен алмастырғандағы анықтаманың сөзбе сөз қайталануы.

2. R^n сызықтық кеңістіктегіндегі тізбек шегінің оның координаталық тізбегі болатын R^1 кеңістігіндегі шектермен өзара байланысы – R^n сызықтық кеңістіктегіндегі бір тізбектің сол жиын элементіне жинақталуының координаталық тізбек атты n сандық тізбек жинақталуына пара-парлығы және R^n кеңістігіндегі шектің координаталық тізбек шектері арқылы жазылуы.

3. R^n сызықтық кеңістігіндегі Коши критерийі $-R^n$ кеңістігіндегі тізбектің сол кеңістік элементіне жинақталуын оның ішкі құрылысы арқылы бейнелеген, сандық тізбек үшін берілген Коши критерийінің модулді нормаға алмастырғандағы оқылуы мен талқылауының дәлме-дәл қайталануы болатын қажетті және жеткілікті шарты.

4. R^n жағдайындағы Больцано-Вейерштрасс теоремасы – кез келген шенелген тізбектен шегі бар тізбекше бөліп алу мүмкіндігі.

5. Көп айнымалылы сандық функция – R^n сызықтық кеңістігінің жиыншасы болатын жиынның әр элементіне бір ғана нақты сан сәйкес қоятын ереже.

6. Көп айнымалылы сандық функцияның нақты мәнді шегінің анықтамасы – бір айнымалы сандық функция шегі анықтамасындағы аргументке қатысты модулді теңсіздігін нормалы теңсіздікпен алмастырғандағы анықтаманың сөзбе-сөз қайталануы.

§4. R^n КЕҢІСТІГІНДЕГІ ТҰЙЫҚ ЖӘНЕ ШЕНЕЛГЕН ЖИЫНДА АНЫҚТАЛҒАН ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ЕРЕКШЕ ҚАСИЕТТЕРІ ТУРАЛЫ ВЕЙЕРШТРАСС ЖӘНЕ КАНТОР ТЕОРЕМАЛАРЫ. КОМПАКТІ ЖИЫНДАР

1. Көп айнымалылы сандық функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамасы – көп айнымалы сандық функцияның анықталу жиынында жатқан нүктесіндегі нақты мәнді шегінің бар және сол шектің функция мәніне тең болуы.

2. Барлық мүшелері тұйық және шенелген R^n жиында жататын тізбектен әрқашанда шегі сол жиында жататын тізбекше бөліп алу мүмкіндігі.

3. Көп айнымалылы сандық функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері бар болуын қамтамасыз ететін Вейерштрасс шарттары – функцияның тұйық және шенелген жиында анықталған және үзіліссіз болуы.

4. Көп айнымалылы сандық функцияның анықталу жиындағы бірқалыпты үзіліссіздігі мен оны қамтамасыз ететін шарттарды анықтайтын Кантор теоремасы – көп айнымалы сандық функцияның нүктеде үзіліссіздік анықтамасында табылатын оң сан әр нүктеге тәуелді жеке табылмай жиынның барлық нүктелеріне ортақ бір сан табылуы және осы

үзіліссіздіктің бірқалыптылығын қамтамасыз ететін функция анықталу жиынының тұйық және шенелген болуы мен әр нүктесінде үзіліссіз болуы.

5. Жиынның компактылығы атты оны бүркейтін кез келген ашық жиындар үйірінен сол жиынды бүркейтін ақырлы санды жиындар үйірін бөліп алудың әрдайым мүмкіндігі – қайсыбір локалді қасиетті бүкіл анықталу жиынына тарату.

6. Гейне-Борель теоремасы – R^n кеңістігіндегі жиынның шенелуі және тұйықтылығы мен компактылығының пара-парлығы, мысал ретінде, сегменттердің тіке көбейтіндісі болатын тұйық параллелепипедтің компакт жиын болуы.

7. Анықталу жиынының тұйықтылығы мен шенелгендігін пайдалана отырып дәлелденген Вейерштрасс және Кантор теоремаларының ашық жиындардың бүркемесі арқылы анықталған компактілік қасиетін қолданылуымен тағы бір дәлелдемесі.

§5. R^m – МӘНДІ ФУНКЦИЯЛАР ЖАЙЛЫ

1. Вектор-функция деп те аталатын және реттелген m сандық функцияға пара-пар болатын мәндер қабылданатын жиыны R^m кеңістігінде жататын көп айнымалылы функция және оның x айнымалысы a нүктесіне E жиыны бойынша ұмтылғандағы шегі – R^n сызықтық кеңістігінің жиыншасы болатын жиынның әр элементіне R^m кеңістігінен алынған бір ғана элементін сәйкес қоятын ереже және бір айнымалы сандық функция шегі анықтамасындағы аргументке қатысты модулді теңсіздігін R^n кеңістігінің нормалы теңсіздігімен, функцияға қатысты модулді R^m кеңістігі нормасына алмастырғандағы анықтаманың сөзбе-сөз қайталануы.

2. $R^n \supset E \overset{f}{\mapsto} R^m$ түріндегі E жиыны бойынша нүктеде және жиында үзіліссіз функциялар – сәйкес функцияның анықталу жиынынан алынған нүктедегі E жиыны бойынша шегі бар және сол нүктедегі функция мәніне тең болуы мен осы қасиеттің E жиынының әрбір нүктесінде орындалуы.

3. R^n сызықтық кеңістігіндегі қисық – мәндері R^n сызықтық кеңістігінде жататын сегментте анықталған үзіліссіз функция, соның арасында, әр координаталық функция сызықты болғандағы қисықтың кесінді деп аталуы.

4. R^n кеңістігіндегі дөңес жиын – жиынның кез келген екі нүктесімен бірге оларды қосатын кесіндінің де сол жиында толық жатуы.

5. Қисық бойында үзіліссіз функция – қисықтың мәндер жиынында анықталған және сол жиын бойынша үзіліссіз функция.

6. R^3 кеңістіктегі бет – мәндері үш өлшемді Евклид кеңістігінде жататын екі айнымалылы үзіліссіз функция.

7. Скаляр және векторлық өрістер – мәндері сәйкес бір өлшемді сандық және үш өлшемді Евклид кеңістігінде жататын үш айнымалы функциялар.

8. Үзіліссіз функциялардан құрылған күрделі функция да үзіліссіз – сәйкестенген ішкі функция да, сыртқы функция да өз өлшемдерінде үзіліссіз болғанда үзіліссіздік қасиеттің олардан құрылған күрделі функцияда сақталуы.

9. Көп айнымалылы сандық функция жағдайындағы Больцано-Коши теоремасы – сандық функцияның байланысты жиын атты кез келген екі нүктесін сол жиында жататын қисықпен қосуға болатын жиында үзіліссіздігінен функцияның кез келген екі мәнінің арасындағы әрбір нақты санның да сол функция мәні болуы.

§6. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ӘР КООРДИНАТАСЫ БОЙЫНША ЖЕКЕ-ЖЕКЕ БІР-БІРІНЕ ТӘУЕЛСІЗ ҰМТЫЛАТЫН КООРДИНАТАЛЫҚ ШЕКТЕРІ МЕН ҚАЙТАЛАНҒАН ШЕГІ

1. Көп айнымалылы сандық функцияның әр координатасы бір-біріне тәуелсіз жеке-жеке өз жалпыланған сандық шектеріне ұмтылғандағы барлық n координатасы бойынша бірігіп алынған көп айнымалы шегінің анықтамасы $\lim\limits_{x\in E, x_i\to p_i (i=1,...,n)} f(x_1,.,x_n) = q\ (p_i, q = d, d+0, d-0, +\infty, -\infty, \infty; d \in R^1, i = 1, ..., n)$ – бір айнымалылы сандық функция шегінің 36 түрлі анықтамасы көп айнымалылы функция жағдайында n айнымалы аргументтің әр координаталық сандық айнымалысы мен функция мәні кестедегі 6 жағдайдың әрқайсысын қабылдағанда 6^{n+1} жағдай құрап, сөзбе-сөз қайталануы.

2. Сандық функцияның $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ ақырлы нүктедегі $\lim\limits_{x \in E, x \to a} f(x) = A$ еселі және $\lim\limits_{x \in E, x_i \to a_i (i=1,...,n)} f(x_1, ..., x_n) = A$ координаталық шек анықтамаларының эквиваленттілігі – шек анықтамасындағы өзіндік мағынасы жоқ тек бағыт беретін $x \to a$ және $x_i \to a_i (i = 1, ..., n)$ жазулары көп айнымалылы функцияға ғана тән аргумент ұмтылуының $\|x - a\|_{R^n} < \delta$ теңсіздігі арқылы анықталатын n өлшемді айнымалымен біртұтас ұмтылуы және $|x_i - a_i| < \delta_i (i = 1, \ldots, n)$ теңсіздігімен анықталатын координаталарының жеке-жеке ұмтылуын қамтамасыз ететін шектердің пара-парлығы.

3. Екі айнымалылы сандық функцияның қандай да болсын $\lim\limits_{x=(x_1,x_2) \in E, x_1 \to p_1, x_2 \to p_2} f(x_1, x_2)$ шегі бар болуын не ешқандай шегі болмайтындығын зерттеу әдістемесі – алдымен шектері сәйкесінше p_1 және p_2-ге ұмтылатын сол тізбек бойынша функция шегі ақырлы не ақырсыз болатын сандық тізбегі табылып, сонан-соң сол шек мәні функция шегі болатындығы тікелей шек анықтамасымен дәлелденеді немесе осы функцияның бір-бірінен өзге ең болмағанда екі ақырлы шегі әлде бір ақырлы, бір ақырсыз шектері болатындай тізбектер қыру арқылы функцияның ешқандай шегі жоқ деген қорытындыға келу.

4. Көп айнымалылы сандық функцияның қайталанған шегі – әрбір айнымалысы өз шектеріне басқаларына тәуелсіз ұмтылуынан айнымалы координаталары бойынша функциядан қалғандарын тұрақты ретінде қабылдап бір айнымалы бойынша шек алғанда бір нақты сан емес, бастапқы функциядан бір айнымалыға кем айнымалылы функция алынып, осы үрдісті ары қарай жалғастыру арқылы айнымалылардың санын азайта отырып, ең соңында бір айнымалы функцияның шегін алу арқылы қайталанған шек деп аталатын сан мәніндегі ізделінді шекке келу, қайталанбалы шек мәнінің айнымалылардың шек алу ретіне қарай әртүрлі мәнді бола алуы, бірақ еселі шек бар жағдайда қайталанған шектің бір түрінің бар болуынан олардың өзара тең болуы.

§7. ҮЗІЛІССІЗДІК, КОМПАКТЫЛЫҚ, БАЙЛАНЫСТЫЛЫҚ ҰҒЫМДАРЫНЫҢ ӨЗАРА БАЙЛАНЫСТЫ ДАМУЫНЫҢ НОРМАЛАНҒАН ЖӘНЕ МЕТРИКАЛЫҚ КЕҢІСТІКТЕРДІҢ ТОПОЛОГИЯЛЫҚ КЕҢІСТІККЕ ДЕЙІНГІ КЕҢЕЮІ АЯСЫНДА

1. Екеуі де маңай ұғымынан басталатын функция үзіліссіздігі мен ашық жиынның текті байланысын көрсететін сандық функцияның ашық жиында, соның ішінде R^n кеңістігінде үзіліссіздігінің ашық жиындар тіліндегі критерийі – функцияның жиындағы үзіліссіздігі локалді ұғым ретінде анықталған әр нүктедегі үзіліссіздік арқылы берілген еді, сол ұғым тек ашық жиын тілінде де беріледі: кеңістіктің ашық жиыншасында функцияның үзіліссіздігі мен мүмкін мәндер жиыны кеңістігінің кез келген ашық жиынының алғашқы бейнесінің ашық болуының пара-парлығы және де осы критерийдегі алғашқы бейне ұғымының бейне ұғымына ауыстырымсыздығын көрсететін ашық жиында анықталған және де ондағы кез келген ашық жиынды ашық жиынға аударатын үзілісті сандық функцияның мысалы.

2. Сандық функцияның міндетті түрде ашық емес жиынға бейімделген үзіліссіздігінің ашық жиындар тіліндегі критерийі – кеңістіктің кез келген жиыншасында функцияның үзіліссіздігі мен мүмкін мәндер жиынының кез келген ашық жиынының алғашқы бейнесінің берілген жиын мен қандай да бір ашық жиын қиылысуы түрінде өрнектелуінің пара-парлығы.

3. Үзіліссіздік және компактылық – компакты жиынның үзіліссіз бейнесінің де компакты болуы.

4. Жалпы және сызықтық атты екі түрлі байланыстылық және олардың өзара арақатынасы – сәйкес жиынды қандай да екі бөлікке бөлсек те, бірінің шектік нүктесінің екіншісінде жатуы және жиынның кез келген екі нүктесін сонда жататын қисықпен жалғау мүмкіндігі, әрбір сызықты байланысты жиын жай байланысты болғанымен, керісінше әрқашан орындала бермеуі.

5. Үзіліссіздік және сызықты байланыстылық – сызықты байланысты жиынның үзіліссіз бейнесінің де сызықты байланысты болуы.

6. Шек ұғымын беретін абсолютті шама, оның негізінде анықталған нормаланған кеңістік, норма негізінде шек анықтамасын беретін арақашықтық үрдісі арқылы туындайтын метрикалық кеңістік тізбесінің ең кең жалпылауы болып табылатын топологиялық кеңістік – R^n кеңістігіндегі ашық жиындардың негізгі қасиеттерін сақтай отырып, «ашық» атты жиындары аксиомалық түрде берілетін кеңістік.

7. Кез келген сандық функция өзі анықтайтын жеке "топологиясында" үзіліссіз – түйсік деңгейінде қарандашты көтермей көрнекті салғандағы функция графигі берген үзіліссіздік ұғымын бастапқы ашық жиын ретінде қабылданған интервалдар арқылы құрылған топология растаса, кез келген бос емес жиында анықталған сандық фунцияның өзі тудырған топологияда, соның ішінде, $sgn\ x$ функциясы нақты сандар жиынындағы ашық жиындардың алғашқы бейнелері ашық деп қабылданған топологияда «үзіліссіз» болуы.

XI ТАРАУ. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ТЕОРИЯСЫ

§1. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУЫ ЛОКАЛДІ СЫЗЫҚТАНДЫРУЫ РЕТІНДЕ

1. Тағы да бір айнымалылы функцияның нүктеде дифференциалдануының анықтамасы мен сондағы дифференциал деп аталатын бір айнымалы сызықтық функция туралы – функция өсімшесінің кездейсоқ емес, қарапайымдылығы тұрғысынан тұрақты функцияға қарағанда келесісі болатын сызықтық функция мен аргумент өсімшесімен салыстырғанда нөлге одан да тез ұмтылатын "бүлдіргіш" деп аталатын қосылғышпен қосынды түрінде эквивалентті жазулары.

2. Көп айнымалының сандық сызықты функциясының анықтамасы және оның жалпы түрі – функцияның әр екі нүктеде бір мән қабылдауы түріндегі тұрақтылық қасиеттен кейінгі қарапайым сызықтылық қасиетін қанағаттандыратын функцияның түрін анықтау.

3. Көп айнымалының сандық сызықтық функцияның коэффициенттері және олар стандарттық базис мүшелерінің сол сызықтық функцияның мәндері ретінде.

4. R^n кеңістігіндегі әр сызықтық функция оның аргументі мен коэффициенттерінің векторлық түріндегі скаляр көбейтіндісі ретінде.

5. Бір айнымалылы сызықтық функцияның координат жүйесінің бас нүктесінен өтетін түзу түріндегі жазықтықтағы геометриялық бейнесі.

6. Екі айнымалылы сызықты функцияның кеңістіктегі координат жүйесінің бас нүктесінен өтетін жазықтық түріндегі кеңістіктегі геометриялық бейнесі.

7. Көп айнымалылы сандық функцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасы – барлық дифференциалданатын функцияларға ортақ, дифференциалданатын функция өсімшесі дифференциал атты аргумент өсімшесіне тәуелді сызықтық функция мен аргумент өсімшесімен бірге, бірақ оның ұзындығына қарағанда нөлге тез ұмтылатын, функцияның нүкте маңайындағы локалді құрылысының ерекшеліктерін сол ортақ жазуда өзіне қамтитын, «бүлдіргіш» атты функциялардың қосындысы түрінде өрнектелуі.

8. Көп айнымалылы фунцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасының скаляр көбейтінді арқылы өрнектелуі.

9. Сызықтық функцияның орта мектеп пен математика ғылымындағы атауы біреу болғанымен, түсінулері өзгеше – орта мектепте сызықтық функция деп түзу теңдеуін атаса, математика ғылымда сызықтық қасиетті қанағаттандыратын функция аталады.

10. Екі және үш айнымалылы функцияның нүктеде дифференциалдануының тікелей қолдануға ыңғайландырылған жазылулары.

11. Көп айнымалылы сандық функцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасындағы қосылғыштарының мағынасын сипаттайтын атаулар мен талқылауларды жинақтап қорытындылау – дифференциалданатын функция өсімшесін құрайтын сызықтық функция мен «бүлдіргіш» жайлы әртүрлі мәліметтер мен әртүрлі өрнектелулері.

12. Көп айнымалылы сандық функцияның ашық жиында дифференциалдануы және де бұл анықтамада жиын ашық болуының себебі – аргумент өсімшесі 0 нүктесінің толық

маңайында өзгеруі қажет, сол себепті функция жайлы мәлімет дифференциалданатын нүкте маңайындағы толық көлемді құрылысына тәуелді.

§2. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ЖӘНЕ СОЛ СЫЗЫҚТЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ БОЛАТЫН ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛАР

1. Көп айнымалылы функцияның нүктедегі дифференциалы – кез келген көп айнымалы сандық функцияның өсімшесінің аргументі 0 нүктесінің қайсібір маңайында анықталған болса, дифференциалданатын функция өсімшесінің сызықтық бөлігі ретінде алынған сызықты функция бүкіл кеңістікте анықталуы.

2. Дифференциал – сызықты функция ретінде өз коэффициенттерімен толық анықталатындықтан, функцияның локалді құрылысы бойынша оның коэффциеттерін бейнелеу мәселесінің қойылуы.

3. Дифференциал анықтамасындағы сызықтық функцияның коэффициенттерін анықтауда дербес туынды атты жаңа ұғымның пайда болуы – есептеулер көрнекі, жазу ықшам болу мақсатында екі өлшемді жағдайды қарастыру.

4. Көп айнымалылы функцияның белгіленген айнымалысы бойынша нүктедегі дербес туындысы – көп айнымалылы функцияның сол нүктедегі дифференциалы атты сызықты функцияның сәйкес айнымалысының коэффициенті.

5. Дербес туындының анықтамасын бір айнымалылы функцияның туындысы ретінде өрнектеу және оның геометриялық суреттемесі – бекітілген айнымалыдан басқаларының барлығын тұрақты ретінде қабылдап бір айнымалылы функция түрінде қарастыру және функция графигі мен осы айнымалыны қамтымайтын $(n-1)$ өлшемді жазықтықтың қиылысуын беретін «қисыққа» $(a_1, a_2, \ldots, a_n, f(a_1, a_2, \ldots, a_n))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті.

6. Көп айнымалылы функцияның дербес туындысын есептеу мәселесінің бір айнымалы жағдайға көшірілуі – бір айнымалы элементар функциялардың туындыларын есептеу ережелері арқылы дербес туындыларды табу есептерін жүргізу.

7. Нүктеде дифференциалданатын функцияның сол нүктедегі дифференциалын дербес туынды арқылы дәл өрнектеу мүмкіндігі – нүктеде дифференциалданатын функцияның сол нүктедегі барлық дербес туындыларының бар болуы және олардың сызықтық функциядағы сәйкес айнымалылар коэффициенттеріне тең болуы, керісінше, нүктеде барлық дербес туындылары бар функцияның сол нүктеде міндетті түрде дифференциалдана бермеуі.

8. Нүктеде дифференциалданатын көп айнымалылы функция сол нүктеде үзіліссіз де – бір айнымалылы функция тәрізді көп айнымалылы функцияның дифференциалдану қасиетінің үзіліссіздік қасиетін де қамтамасыз етуі, бірақ кері жағдайдың әрқашан орындала бермеуі.

9. Көп айнымалылы функцияның нүктедегі дифференциалын белгілеу туралы келісімдер – дифференциалдың әртүрлі жазуларының арасындағы $df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$ түріндегі негізгісіндегі $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ белгілеулерінің әрқайсысы біртұтас болып, толық көлемде R^n кеңістігін құрап, сызықтық функцияның әдеттегі айнымалысы болуы.

§3. ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ БАРЛЫҚ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛАРЫ АРҚЫЛЫ БЕРІЛГЕН ҚАСИЕТТЕРІ

1. Функцияның нүктеде дифференциалдануын қамтамасыз ететін дербес туындылар тіліндегі шарты – сол нүктенің маңайында дербес туындылары бар және сол нүктенің өзінде үзіліссіз болуы.

2. Ашық жиында анықталған және оның әр нүктесінде барлық дербес туындылары бар және үзіліссіз функцияның сол жиынның әр нүктесінде дифференциалдануы – функцияның нүктеде дифференциалдануының дербес туындылар тіліндегі жеткілікті шартының салдары ретінде.

3. Көп айнымалылы функцияның нүктеде дифференциалдануының оның сол нүктедегі барлық дербес туындылары арқылы қорытынды суреттемесі - дифференциалданатын функцияның дербес туындыларының бар болуы, барлық дербес туындылары бар функция дифференциалданбау мүмкіндігі, бірақ олардың әрқайсысы сол нүктеде үзіліссіз болғанда дифференциалдануы.

4. Көп айнымалылы сандық функцияның градиенті және оның көп айнымалылы функция үшін «үзіліссіз дифференциалдану» ұғымын беретін $R^n \mapsto R^n$ бейнелейтін функция ретіндегі үзіліссіздігі – n-өлшемді кеңістіктің ашық жиынында анықталған n-айнымалылы функцияның әр нүктедегі барлық дербес туындылары бар болғанда анықталу жиыны берілген ашық жиын, мәндері n-өлшемді кеңістіктің элементі болатын, дербес туындылардан рет-ретімен n-өлшемді вектор түрінде құрылған градиент атты жаңа функцияны беру, бір айнымалылы функцияның туындысы бар және осы туындының басқа жаңа функция ретінде үзіліссіз болғанда, бастапқы функцияның үзіліссіз дифференциалданатын сандық функция деп аталғанындай, дербес туындылардың әрқайсысының сандық функция ретінде үзіліссіздігінен $R^n \mapsto R^n$ бейнелейтін градиеттік функцияның да үзіліссіз болуы және оның көпайнымалылы функцияның үзіліссіз дифференциалдануын беруі.

5. Жиында дифференциалданатын функция сол жиында үзіліссіз дифференциалданбауы мүмкін – ашық жиында анықталған және оның әр нүктесінде дербес туындылары бар, бірақ дербес туындылары функция ретінде үзілісті болатын функция мысалы.

6. Функцияның графигіне нүктеде жүргізілген жанама жазықтық – екі өлшемді функция жағдайында функция графигіне жургізілген жанама жазықтық теңдеуінің осы нүктедегі дербес туындылар арқылы өрнектелуі.

§4. БІРІНЕН СОҢ БІРІ АНЫҚТАЛАТЫН КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ЖОҒАРЫ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛАРЫ

1. Көп айнымалылы сандық функцияның жоғары ретті дербес туындылары – ашық жиында анықталған көп айнымалылы функцияның қандай да бір айнымалысы бойынша әр нүктеде дербес туындысы бар болғанда анықталған жаңа функцияның дәл сол айнымалысы бойынша немесе аралас дербес туынды деп аталатын басқа айнымалы бойынша алынған туындысы.

2. Нүктедегі аралас туындылары өзара тең емес көп айнымалылы сандық функция мысалы – ашық жиында анықталған функцияның бірінші айнымалысы бойынша алынған туындысынан одан өзге екінші айнымалы бойынша алынған аралас туындысы мен керісінше, ретін ауыстырып алдымен екінші айнымалы бойынша, содан бірінші айнымалы бойынша туындылауда нақты мәнді туындылары бар және өзара тең бола бермейтіндігін көрсететін екі айнымалылы функция мысалы.

3. Нүктедегі аралас туындыларының алыну ретіне тәуелсіз өзара тең болуын қамтамасыз ететін олардың локалді үзіліссіздігі – ашық жиында анықталған функцияның аралас туындыларды алған айнымалылар мен олардың неше рет алыну санын сақтап, реттерін қалай алмастырсақ та мәндірінің өзара бір санға тең болуына сол нүктедегі аталмыш аралас туындылардың барлығының сол нүктенің қайсібір маңайында бар болып, нүктенің өзінде үзіліссіз болуының жеткіліктілігі.

§5. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІ

1. Нүктеде дифференциалданатын көп айнымалылы сандық функцияларға арифметикалық амалдар қолдану нәтижесі болатын жаңа функцияның да сол нүктеде дифференциалдануы және оның дифференциалы берілген функциялар мен олардың дифференциалдары арқылы өрнектелу формулалары.

2. Сәйкес өз нүктелерінде дифференциалданатын ішкі және сыртқы функциялардан құрылған күрделі функцияның да бастапқы нүктеде дифференциалдануы - күрделі функция өсімшесін алдымен дифференциалданатындығынан сызықтық функция мен "бүлдіргіш" функция қосындысы түрінде берілген айнымалысы ішкі функция өсімшесі

болатын сыртқы функция өсімшесі, артынша дәл осындай түрдегі ішкі функцияның өсімшесі арқылы жазып алған соң, ішкі функция өсімшесіне қатысты сызықтық бөлігін бөліп алып, одан кейін нөлге аргумент өсімшесіне қарағанда жылдам ұмтылатын функцияның арифметикалық қасиеттерін қолдана отырып, күрделі функцяның өзінің бүлдіргішін анықтап, күрделі функция өсімшесі де кездейсоқ емес сызықтық функция мен "бүлдіргіш" функция қосындысы түрінде жазылатындығын көрсету.

3. Сәйкес өз нүктелерінде сыртқы функция толық көлемде дифференциалданып, сыртқы функция айнымалыларының санына тең болатын ішкі функциялардың тек дербес туындылары бар болғанда, олардан құрылған күрделі функцияның бастапқы нүктеде дербес туындыларының бар болуы және оларды есептеу формулалары – ішкі функция қанша айнымалыға тәуелді болса, күрделі функцияның сонша түрлі дербес туындысы бар болады да, олардың әрқайсысы сыртқы функцияда қанша айнымалы болса, әр айнымалысы бойынша алынған дербес туындысының сол айнымалыдағы ішкі функцияның дербес туынды алынып жатқан айнымалысы бойынша алынған дербес туындысына көбейтінділерінің сонша қосындысынан тұратын күрделі функцияның дербес туындысын есептеу формуласы.

4. Күрделі функциялардың дербес туындыларын есептеу формулаларының жеке жағдайда толық жазылуы – үш айнымалылы сыртқы, екі айнымалылы ішкі функциядан құрылған екі айнымалылы күрделі функцияның әр айнымалылары бойынша дербес туындылары формулаларын ашып жаза отырып, бір мысал негізінде есептеу жүргізу.

5. Көп айнымалылы сандық функциясы үшін Лагранж формуласы - көп айнымалылы сандық функциясының нүктедегі өсімшесінің оның барлық дербес туындыларының қосындысының аралық нүктедегі мәні арқылы дәл өрнектелуі.

6. Көп айнымалылы сандық функцияның дөңес және ашық болатын анықталу жиынында тұрақты болу критерийі – сол дөңес және ашық жиында тұрақты болуы мен әрбір нүктесінде барлық дербес туындыларының бар және нөлге тең болуының парапарлығы.

7. Берілген ретті үзіліссіз дифференциалдану деп аталатын сол ретке дейінгі барлық дербес туындылары бар және үзіліссіз болуының көп айнымалылы күрделі функция жағдайындағы жеткілікті шарты – көп айнымалылы күрделі функцияның берілген ретті дербес туындысының бар және үзіліссіз болуын оны құрайтын ішкі және сыртқы функциялардың сол ретті үзіліссіз дербес туындыларының бар болуының қамтамасыз етуі.

8. Сыртқы функцияның дифференциалына ішкі функцияның дифференциалын қойғанда дифференциалдар түрлерінің инварианттылығы деп аталатын күрделі функцияның бастапқы нүктедегі дифференциалына тең болуы – дифференциалдағы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ әрқайсысы біртұтас айнымалыларын тәуелсіз айнымалы ретінде алсақ та, күрделі функция ретінде алсақ та дифференциал жазылуы түрінің өзгеріссіз қалуы, яғни $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ белгілеуіндегі $x_1, x_2, , \ldots, x_n$ тәуелсіз айнымалыларының әрқайсысын функциямен алмастырып, пайда болған күрделі функцияның дифференциалының да бастапқы тәуелсіз айнымалылармен берілген дифференциал жазуының түріне келуі.

§6. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІНІҢ ҚОЛДАНУЛАРЫ

1. Үш өлшемді R^3 кеңістігіндегі сандық функцияның бағыт бойынша туындысы негізінде біржақты дербес туындыларының пайда болуы – бағыт бойынша алынған өсімшенің аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегі ретінде, соның ішінде бағыт координаталық өстермен беттескенде бағыт бойынша туындының сәйкес айнымалылар бойынша біржақты дербес туындыға айналуы және осылардың барлығының геометриялық суреттемесі.

2. Үш өлшемді R^3 кеңістігіндегі сандық функцияның бағыт бойынша туындысының дербес туындылардың толық жүйесі бойынша жіктелуі – ашық жиында анықталған көп айнымалылы ретінде нүктеде дифференциалданатын функцияның кез келген бағыт бойынша туындысының бар болуы және олардың дербес туындылар мен бағыттың сәйкес координата өсімен жасайтын бұрыш косинусына көбейтіндісінің қосындысы түрінде жазылуы.

3. Көп айнымалылы сандық функцияның бағыт бойынша туындысы – дербес туындыларының жалпылауы және де оның дербес туындылардың толық жүйесі бойынша жіктелуі.

4. Көп айнымалылы сандық функцияның ең жылдам өзгеру бағытын сипаттайтын градиент $gradf \equiv \nabla f(a)$ – бағыттар арасындағы абсолют шамасы ең үлкен градиент атты туынды және туындының механикалық мағынасы жылдамдық болғандықтан ең жылдам өзгеру бағытын беруі.

5. Көп айнымалылы сандық функция үшін қалдық мүшесі Лагранж түрінде берілген глобалді Тейлор формуласы – құрлысы шектеусіз күрделі объект деп қабылданатын көп айнымалылы сандық функцияны қарапайым объект болатын арнайы түрдегі сондай айнымалылы алгебралық көпмүшелікпен алмастыру және осы алмастыруда пайда болатын ауытқуының Лагранж түріндегі бағалануы.

6. Көп айнымалылы сандық функция үшін қалдық мүшесі Пеано түрінде берілген локалді Тейлор формуласы – күрделі объект деп қабылданатын көп айнымалылы сандық функцияны қарапайым объект болатын арнайы түрдегі сондай айнымалылы алгебралық көпмүшелікпен берілген нүктенің маңайында алмастыратын, осы алмастыруда пайда болатын ауытқудың осы нүктедегі шегі нөл болатын Пеано түріндегі жазылуы.

§7. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ЛОКАЛДІ ЭКСТРЕМУМЫ

1. Көп айнымалылы сандық функцияның локалді экстремум нүктесі – сол нүктедегі мәні оның қандай да бір маңайында ең үлкен немесе ең кіші мәні болуы.

2. Мүмкін локалді экстремум нүктелерін ерекше оңашалайтын Ферма теоремасы – локалді экстремум нүктесінде барлық дербес туындылары бар көп айнымалылы сандық функцияның сол нүктедегі барлық дербес туындылары нөлге тең болуын шегелейтін локалді экстремумның қажетті шарты.

3. Локалді экстремумге күдікті нүктелерді ерекше оңашалайтын дифференциал тіліндегі шарт – локалді экстремум нүктесінде дифференциалданатын көп айнымалылы сандық функцияның сол нүктедегі дифференциалының нөлге тепе-тең, басқаша айтқанда дифференциал атты сызықты функцияның коэффициенттері болатын сол нүктедегі дербес туындылардың міндетті түрде бар болып және де олардың әрқайсысының нақты сандар ретінде нөлге айналуы.

4. Ферма теоремасындағы қажетті шарттың жеткілікті еместігі – нүктеде барлық дербес туындылары нөлге тең болса да, сол нүкте локалды экстремум нүктесі болмайтынын көрсететін көп айнымалылы сандық функция мысалы.

5. Дифференциалдық есептеу теориясы локалді экстремум тақырыбында негізгі техникалық құрал бола тұра, сол нүктенің өзінде аталған күрделі мәселемен тікелей байланысыздығы: сызықты функция ретіндегі дифференциал толығымен не дербес туындылардың бірі жоқ нүкте локалді экстремум нүктесі болуы да, болмауы да мүмкіндігін көрсететін мысалдар.

6. Көп айнымалылы сандық функцияның локалді экстремум нүктесі бола алуын қанағаттандыратын нүктенің және дәл сол нүктедегі функция қасиеттерінің міндетті түрде орындалатын шарттары – сәйкесінше анықталу жиынының ішкі нүктесі болуы, оған қоса сол нүктеде барлық дербес туындылары бар болған жағдайда олардың нөлге тең болуы немесе ең болмағанда бір дербес туындысының болмауы, дифференциалданатын функция болған жағдайда дифференциалының нөлге тепе-тең болуы.

7. Екі айнымалылы сандық функцияның бірінші ретті дербес туындыларының барлығы нөлге тең болып, сол нүктедегі екінші ретті дербес туындыларының мәндерінен құрылған анықтауыш таңбасы арқылы Тейлор формуласы негізінде локалді экстремумге толық зерттеу – мәселенің бәрі анықтауыштың таңбасымен толық сипатталады: сол нүктедегі екінші ретті дербес туындыларынан құрылған анықтауыштың таңбасы оң болғанда минимум, теріс болғанда максимум, ал нолге тең болғанда нақтылы жауап жоқ, экстремумның бар болуы да болмауы да мүмкіндігі мысалдармен көрсетіледі және де солай болуы тиіс, өйткені экстремум күрделі мәселесі қарапайым екінші туынды мәндері арқылы толық шешілуі мүмкін еместігі.

8. Көп айнымалылы сандық функцияның бірінші ретті дербес туындыларының барлығы нөлге тең болып, сол нүктедегі екінші ретті дербес туындыларының мәндерінен құрылған квадраттық формасы арқылы Тейлор формуласы негізінде локалді экстремумге толық зерттеу – квадраттық форма оң, теріс анықталғанда және анықталмағанда сәйкес локалді минимум, локалді максимум болатындығы мен локалді экстремум болмайтындығы және жартылай анықталғанда локалді экстремумның бар-жоқтығын айта алмайтын жағдайларға жіктелуі.

9. Көп айнымалылы квадраттық форманың оны анықтайтын коэффициенттері арқылы оң, теріс, жартылай оң, жартылай теріс анықталған және анықталмаған болуының әрқайсысын беретін Сильвестр критерийі және осы критерий негізіндегі көп айнымалылы сандық функцияның локалді экстремумға зерттеудің толық суреттемесі – квадраттық форма атты айнымалыларының өз сандық коэффициентімен жабдықталған барлық мүмкін қос-қос көбейтінділері болатын қосындының айнымалыларының барлық мүмкін мәндері үшін оң, теріс, оң емес, теріс емес және де оң да, теріс те мәндерді қабылдайтыны сол симметриялық түрге келтірілген коэффициенттерден құрылған матрицаның минорлар таңбаларының Сильвестр критерийі атты тәртіппен орналасуының көп айнымалылы функцияның нүктедегі локалді экстремум мәселесін толық сипатталуы.

10. Тұйық және шенелген жиында үзіліссіз көп айнымалылы сандық функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін дифференциалдық есептеулер әдістемелері арқылы табуға нұсқау – сандық функцияның локалді экстремум нүктесі емес ішкі нүктенің кез келген маңайында одан үлкен де, кіші де мәндер қабылдайды да, сол себептен функцияның жиын бойындағы ең үлкен де, ең кіші де мәні болмайтындығынан ізденіс мәндерді тек қана локалді экстремум қажетті шарттарын қанағаттандыратын нүктелермен функцияның ішкі нүктеге жатпайтын шекаралық нүктелердегі мәндер арасынан ізделуі.

§8. $f : R^n \mapsto R^m$ ТҮРІНДЕГІ САНДЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ

1. $f : R^n \mapsto R^m$ түріндегі сызықтық функцияның жалпы түрі және де сондай түрдегі функцияның нүктеде дифференциалдануының анықтамасы – R^m-мәнді функция ретімен алынған m сандық координаталық функциялар тізбесі болып, R^m-мәнді сызықтық функция сондай құрылымдағы сызықтық сандық функциядан тұрады, осының жалғасында R^m-мәнді n айнымалылы функцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасы сандық функцияның нүктеде дифференциалдануының анықтамасы түрінде жазылып, ондағы теңдік таңбасымен байланысқан үш өрнек R^m-мағынасында алынады да, ондағы "бүлдіргіштің" R^m-нормасы аргумент өсімшесінің R^n нормасының нөлге ұмтылуына қарағанда нөлге жылдам ұмтылуы.

2. $f : R^n \mapsto R^m$ түріндегі функцияның анықталу жиынының нүктесінде алынған Якоби матрицасы – бір айнымалылы сандық функциясының нүктедегі туындысының $f'(a)$ түрінде жазылуы R^m-мәнді n айнымалылы функция жағдайында бірінші жатық жолында бірінші координаттық функцияның тәуелсіз айнымаларының координаттық нөмерлер ретімен алынған дербес туындыларының, дәл осылай екінші координаттық функция екінші жатық жолын, әрі қарай m-ші координаттық функция m-ші жатық жолы алынған $m \times n$ өлшемді сандық матрица барлық дербес туындылары алынған алдын-ала берілген нүктедегі Якоби матрицасы аталады да, $R^n \mapsto R^m$ түріндегі функциялардың сызықтық комбинацияларың Якоби матрицасы олардың Якоби матрицаларының сондай сызықтық комбинацияларына тең болуы.

3. $\psi : R^s \overset{\varphi}{\mapsto} R^n \overset{f}{\mapsto} R^m$ күрделі функциясының Якоби матрицасы сыртқы және ішкі функцияларының Якоби матрицаларының көбейтіндісіне тең болуы.

4. Якоби анықтауышы $f : R^n \mapsto R^n$ түріндегі функцияның Якоби матирицасының анықтауышы ретінде – $m \times n$ матрицасының анықтауышы $m = n$ жағдайында ғана мағыналы болуы

§9. АЙҚЫНДАЛМАҒАН ФУНКЦИЯ ФУНКЦИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ АЛҒАШҚЫ КООРДИНАТАЛАРДЫҢ БЕКІТІЛГЕН САНЫ ТӘУЕЛСІЗ АЙНЫМАЛЫ, ҚАЛҒАНДАРЫ ОЛАРҒА ФУНКЦИЯЛЫҚ ТӘУЕЛДІЛІКТЕ

БОЛАТЫН ШЕШІМІ РЕТІНДЕ – ФУНКЦИЯ БЕРІЛУІНІҢ ТАҒЫ БІР ӘДІСІ

1. Екі айнымалылы сандық функция арқылы құрылған теңдеу бойынша анықталған айқындалмаған функция – берілген екі айнымалылы функцияның нөлмен теңестіру арқылы құрылған теңдеу деп аталатын шартты теңдік, оның екі координаталы шешімі, солардың негізінде бірінші координатасы тәуелсіз айнымалы деп алынғанда онымен бірге бар және жалғыз болып шешім құрайтын екінші координата функция анықтамасына сай келіп айқындалмаған атты тәуелсіз айнымалысы бірінші координата, екінші координата мәні болатын функция.

2. «Айқындалмаған функция» деп аталатын функция берілуінің тағы бір тәсілінің жалпы анықтамасының жүзеге асыру барысындағы нақтылаулары – құрылған теңдеудің нақты шешімінен бастау алып, соның бірінші координатасының толы маңайында анықталған, мәндері екінші координата маңайында жататын функция ретінде.

3. Берілген функция бойынша құрылған теңдеудің нақты шешімі айқындалмаған функцияны әркашан да анықтай бермеуі және оның дәл мағынасының кері анықтама құру тәртібімен символдық, содан кейін сөзбен жазылулары.

4. Айқындалмаған фунция анықтамасының астарлы тұстары барлық шешімдер жиыны жазықтықтағы бірлік шеңбер болатын функциялық теңдеу мысалында - алдын-ала теңдеу шешімі бекітіледі де, оның бірінші координатасының толық маңайынан алынған әрбір нүктеге теңдеу шешімі болатындай мән дәл сол екінші координатасының маңайынан ізделініп, айқындалмаған функцияны беретін тәуелділік орнауы, бірінші координатаның кез келген маңайындағы қандай да бір нүктеге екінші координатаның маңайынан теңдеу шешімі болатындай не мән табылмауы, не бірден көп мән табылуы себебінен айқындалмаған функцияның анықталмауы.

5. Екі айнымалылы бастапқы функция бойынша анықталған айқындалмаған функция анықтамаларының көп айнымалылы сандық функция жағдайына көшірілуі – көп айнымалылы бастапқы сандық функция бойынша теңдеу құрылады да, оның бекітілген шешімінің онымен беттеспейтін бір топ координаталарының қайсібір толық маңайында алынған әрбір элемент үшін қалған координаталар маңайынан сол элементпен бірігіп теңдеу шешімін құратын дәл бір элемент табылса, онда осы тәртіп бойынша анықталған сәйкестік аталмыш теңдеу бойынша анықталған айқындалмаған функция деп аталады, осы әр шешімге тәуелділігі айқындалмаған функцияны локалді ұғым етеді.

6. Математикалық анализдің кейбір оқулықтарындағы «айқындалмаған функцияның» жалған анықтамалары туралы – айқындалмаған функция атты бастапқы функция арқылы құрылған теңдеудің алдын-ала берілген бір шешімінің қайсыбір маңайындағы шешімдерінің бір бөлігі тәуелсіз айнымалы, ал қалғандары сол бірінші бөлікпен бірігіп аталмыш маңайда теңдеу шешімін құрайтын функция анықтамасына бағынатын тәуелділік болса, айнымалылардың бірінші тобына тәуелді болып және сонымен бірге шешім құрайтын кез-келген функцияны айқындалмаған функция деп атауға болмауы.

7. Бастапқы екі айнымалылы функция бойынша анықталған теңдеудің айқындалмаған функция бар болуын қамтамасыз етудің геометриялық тұрғыдан көрнекі аналитикалық дәлелдемесінің жобасы – айқындалмаған функция локалді ұғым болғандықтан жалпылықты жоғалтпай бүкіл зерттеулерді геометриялық тұрғыдан көрнекі, центрі берілген екі айнымалылы үзіліссіз, бірінші айнымалысын бекітіп алғанда, екінші айнымалысы бойынша қатаң өспелі бастапқы функция бойынша құрылған теңдеу шешімі болатын тіктөртбұрышқа шоғырландырып, тіктөртбұрышты нүкте маңайының жоғарғы және төменгі жағында екі түрлі таңбалы болатындай центрін сақтай отырып, тіктөртбұрышқа дейін қажетінше кішірейтіп, сондағы кез келген бекітілген бірінші координат үшін Больцано-Коши теоремасының негізінде бірінші координатамен бірге бастапқы функцияны нөлге айналдыратын, сонымен бірге ізденісті айқындалмаған функция мәні болатын екінші координаттың бір ғана мәні табылу арқылы анықталған айқындалмаған функция, оның үзіліссіздігі.

8. Бастапқы екі айнымалылы функция бойынша құрылған теңдеудің шешіміне негізделген айқындалмаған функцияның бар болуын, үзіліссіздігі мен

дифференциалдануын қамтамасыз ететін дербес туындылар тілінде бастапқы функцияға қойылатын шарттар – центрі теңдеудің шешімі болатын қайсыбір тіктөртбұрышта анықталған және үзіліссіз, әр нүктесінде әр айнымалы бойынша дербес туындылары бар және үзіліссіз болумен қатар, бастапқы функцияның қажетті монотондылығын қамтамасыз ететін центрдегі екінші айнымалысы бойынша дербес туындысы нөлден өзгеше болуы және де бастапқы функцияға оның өзі жаратқан айқындалмаған функцияны қойғанда пайда болатын нөлмен тепе-теңдікті дифференциалдау арқылы туындыны есептеу формуласы.

9. Бастапқы $n+1$ айнымалылы функция бойынша құрылған теңдеудің шешіміне негізделген n айнымалылы сандық айқындалмаған функцияның бар болуын, үзіліссіздігі мен үзіліссіз дифференциалдануын қамтамасыз ететін $n+1$ айнымалылы бастапқы функцияға қойылатын шарттардың сәйкес екі айнымалылы функциядан көшірмесі – екі айнымалы сандық функция жағдайындағы айқындалмаған функцияның мәні болатын айнымалы бойынша алынған дербес туындының бастапқы теңдеудің шешім нүктесінде нөлге айналмау шарты, басқасы көпайнымалы жағдайға сәйкестіріліп сөзбе-сөз қайталануы.

10. Бастапқы $n+m$ айнымалылы функция бойынша құрылған теңдеудің шешіміне негізделген n айнымалылы $m-$ өлшемді мәнді айқындалмаған функцияның бар болуын, үзіліссіздігі мен үзіліссіз дифференциалдануын қамтамасыз ететін $n+m$ айнымалылы бастапқы функцияға қойылатын шарттардың сәйкес $n+1$ айнымалылы функциядан n айнымалы сандық R^1-мәнді функция жағдайындағы туынды модулінің нөлге айналмау шартының n айнымалы R^m-мәнді функция жағдайында $m\times m$-ретті Якоби анықтауышының нөлге айналмауына сәйкесінше ауыстырылу көшірмесі – $n+1$ айнымалылы сандық функция жағдайындағы айқындалмаған функцияның мәні болатын айнымалы бойынша алынған дербес туындының нөлге айналмау шарты сондай айнымалылар бойынша алынған, бірінші жатық жолында бастапқы функцияның бірінші координаттық функцияның айқындалмаған функция мәндерін құрайтын n айнымалыларының координаттық нөмерлер ретімен алынған дербес туындыларының, дәл осылай екінші координаттық функция екінші жатық жолын, әрі қарай m-ші координаттық функция m-ші жатық жолы алынған бастапқы теңдеудің шешім нүктедегі $m\times m$-ретті Якоби анықтауышы нөлге тең болмау шартына айналады да, центрі аталмыш шешім болатын қайсыбір параллелепипедте анықталған көпайнымалылы жағдайға сәйкестіріліп сөзбе-сөз қайталануы.

11. Айқындалмаған функция анықтамасының локалділігі негізінде сызықтық теңдеулер жүйесіне көшу арқылы оның концепциясын іштей-техникалық түсіну – соңғы m айнымалысы ізделінді және алдыңғы n айнымалыға тәуелді болатын $n+m$ айнымалылы бастапқы m сандық функциядан құралған m теңдеуден тұратын жүйенің жетекші қасиеттерін жоғалтпай бастапқы функцияның дифференциалындану анықтамасының жазуындағы "бүлдіргіштерді" алмай тек басты сызықтық бөлігін ғана қалдырып, Крамер ережесі бойынша сызықтық теңдеулер шешімінің бірмәнділік шартымен сәйкес берілген қатынастағы шешімділігі тұрғысынан эквиваленттілігінің айқындалмаған функцияның бар болуындағы жоғарыдағы дәлелдемелердегі шарттармен беттесуі.

12. Айқындалмаған функция айқын түрде емес, тек бар болу түрінде анықталған болса да, оның жоғарғы ретті дербес туындыларын оны жаратқан бастапқы функцияның дербес туындылары арқылы дәл есептеу формулалары – бастапқы функция арқылы анықталған теңдеуді айқындалмаған функциялар тепе-теңдікке айналдырады, сол тепе-теңдікті айқындалмаған функцияның тәуелсіз айнымалының әрқайсысы бойынша дербес туынды алғанда күрделі функцияның дербес туындыларын есептеу формуласы бойынша саны айқындалмаған функцияның тәуелсіз айнымалысының өлшеміне тең ізденісті айқындалмаған функцияның дербес туындылары арқылы сызықты теңдеу, ал оның Крамер анықтауышы нөлге тең емес Якоби анықтауыштарымен беттесіп мақсатымыз болатын шешім беруі.

§10. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ШАРТ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ЭКСТРЕМУМЫ - ЛОКАЛДІ ЭКСТРЕМУМ

ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДІЕГІ МӘНІ СОНЫҢ ҚАЙСІБІР МАҢАЙЫНДА ЕҢ ҮЛКЕНІ НЕ ЕҢ КІШІСІ БОЛУЫНЫҢ СОЛ НҮКТЕ ЖАТАТЫН ҚАНДАЙ ДА БІР ШАРТ РЕТІНДЕ БЕРІЛГЕН ЖИЫНШАСЫНА АУЫСТЫРЫЛУЫ

1. Берілген көп айнымалылы сандық функцияның қайсыбір нүктедегі локалді экстремум мәселесі оның сол нүктедегі мәнін ең үлкен не ең кіші болатындай мақсатпен алынған толық маңайындағы мәндерімен салыстыруда болса, шарт жағдайындағы экстремум деп аталатын экстремумды табу мәселесі оның нүктедегі мәнін маңайдың шарт деп аталатын қандай да бір жиыншасындағы мәндерімен салыстыруда және де анықтаманы мағынасыз ететін жағдайлардан сақтандыру талқылаулары.

2. Шарт жағдайындағы көп айнымалылы сандық функцияның нүктедегі локалді экстремум анықтамасындағы маңай жиыншасының берілу тәсілдері, соның ішінде қолымызда бар – математикалық анализдің дамыған аппаратын қолдануға ыңғайландырылған теңдеулер жүйесінің барлық шешімдері түрінде берілуі.

3. Шарт жағдайындағы көп айнымалылы сандық функцияның нүктедегі локалді экстремум анықтамасындағы маңай жиыншасы функциялық теңдеулер жүйесі түрінде беріліп және де сол жүйе айқын шешілгенде зерттеу мәселесі локалді экстремум есебіне айналуы мен соның төңірегіндегі мысалдар.

4. Шарт жағдайындағы көп айнымалылы сандық функцияның нүктедегі локалді экстремум анықтамасындағы маңай жиыншасы функциялық теңдеулер жүйесі түрінде беріліп және де сол жүйе айқын шешілгенде зерттеу мәселесі локалді экстремум есебіне әкелу әрекеттерінің тізбесі – шартты құрайтын теңдеулер жүйесінің барлық шешімдері анықталып, артынша реті теңдеулер санына тең Якобианы нөлден өзгеше болатын шешім табылады да, шартты құрайтын теңдеулер осы айнымалылар бойынша шешіліп, соларды бастапқы функцияға қойғанда шарт жағдайындағы экстремум табу есебі қалған қатыспаған айнымалылар бойынша шешімнің сол координаталы нүктедегі шартсыз, таза локалді экстремум есебіне айналуы.

5. Шарт жағдайындағы көп айнымалылы сандық функцияның нүктедегі экстремум анықтамасындағы маңай жиыншасы функциялық теңдеулер жүйесі түрінде беріліп және де сол жүйе айқын шешілгенде зерттеу мәселесі локалді экстремум есебіне өту жолында қолданылған анықтамалардағы шартты экстремумге шектік нүктесі және локалді экстремумде толық маңай болу талаптарының орындалуы.

6. Көп айнымалылы функцияның локалді экстремум нүктесі мен оның экстремум анықтамасындағы маңайы сол экстремум нүктесін қамтитын және ол шектік нүкте болатындай экстремум анықтамасындағы маңайдың кез келген жиыншасы бойынша шартты экстремумге айналуы.

7. Көп айнымалылы сандық функцияның шарт жағдайындағы нүктедегі экстремумында дәлелдеулердің техникалық ұтымдылығына байланысты анықтама оқылуындағы маңайды шар түріндегі емес, онымен эквивалентті параллелепипед түрінде қолдану мәжбүрі.

8. Көп айнымалылы сандық функцияның шарт жағдайындағы нүктедегі экстремумының қажеттілігі шартты құрайтын теңдеулер жүйесін шешкенде шешімдері тәуелсіз айнымалылардан тәуелді айнымалылар атты функциялар жүйесіне айналатын локалді экстремумге өткендегі тәуелсіз айнымалылар дербес туындыларын нөлге теңестіретін қажетті шартындағы теңдеулер мен шартты құрайтын теңдеулер бірігіп, олардың саны белгісіз айнымалылар санына тең болу талабының орындалуы.

9. Көп айнымалылы экстремумге зерттелінді сандық функцияның шарт жағдайындағы нүктедегі экстремумының қажеттілігінде шартты құрайтын теңдеулер жүйесін шешкенде шешімдері тәуелсіз айнымалылардан тәуелді айнымалылар атты функциялар жүйесіне айналатын локалді экстремум қажетті шартынан тұратын бөлігінің экстремумге зерттелі функцияның тәуелсіз айнымалылар бойынша дербес туындылар жүйесі арқылы жазылуы.

10. Көп айнымалылы экстремумге зерттелінді сандық функцияның шарт жағдайындағы нүктедегі экстремумының қажеттілігін беретін Лагранждың анықталмаған көбейткіштер әдісі айнымалыларды тәуелсіз және тәуелді етіп бөлуден әдемі арылу ретінде – шартты

құрайтын теңдеулер жүйесіндегі әрбір функциясының көбейткіші ретінде енгізілген Лагранждың көбейткіші деп аталатын жаңа тәуелсіз айнымалылар енгізіліп, сол көбейтінділердің барлығының көп айнымалылы сандық функцияның экстремумына зерттелінді функциямен қосындылары болатын Лагранждың көмекші функциясы құрылады да, шарт жағдайындағы экстремумның қажеттілігіндегі тәуелді және тәуелсіз айнымалылардың арасындағы айырмашылықты жоғалтатын және де айнымалылар санының теңдеулер санына тең болуын сақтай отырып, Лагранж функциясының локалді экстремумының үйреншікті барлық ескі және жаңа айнымалылар бойынша дербес туындыларын нөлге теңестіретін жүйеден тұратын қажетті шартына алып келуі.

11. Көп айнымалылы экстремумге зерттелінді сандық функцияның шарт жағдайындағы экстремум нүктесі болуына күдікті нүктелерді табудың Лагранждың анықталмаған көбейткіштер әдісінің қадам-қадаммен жіктелуі.

12. Көп айнымалылы экстремумге зерттелінді сандық функцияның шарт жағдайындағы экстремум нүктесі болуына күдікті нүктелерді табудағы Лагранждың анықталмаған көбейткіштер әдісінің көмекші функциясының нөлге тепе-тең дифференциалы түріндегі жазылуы.

13. Көп айнымалылы экстремумге зерттелінді сандық функцияның шарт жағдайындағы экстремум нүктесі болуына күдікті нүктелердің экстремум нүктесі болуын Лагранж көмекші функциясының локалді экстремумына сәйкес квадраттық формасы арқылы зерттеуге келтіру.

14. Шенелген және тұйық жиындағы үзіліссіз көп айнымалылы сандық функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу есебі және де оған сол жиын шарт болған жағдайындағы эктремумге зерттеу нәтижелерін қолдану әдістемесі.

§11. АЙҚЫНДАЛМАҒАН ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЕРІ ФУНКЦИЯНЫҢ БАР БОЛУЫ МЕН ФУНКЦИЯЛАР АҚЫРЛЫ ЖИЫНЫНЫҢ ФУНКЦИЯЛЫҚ ТӘУЕЛДІГІ МӘСЕЛЕЛЕРІНЕ ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ

1. Кері функция бар болу мәселесін шешу барысында локалді түрде анықталған айқындалмаған функция теориясын қолдану нәтижесінен локальді болуы – кері функция бар болуына пара-пар күрделілігі одан да кем түспейтін функцияның айтылуы оңай инъективтілік қасиетін көрсету барысындағы дәлелдемеге қолдағы зерттеу құралы дифференциалдық есептеу теориясын қолданғанда мәселе бір нүктенің маңайына шоғырланып, сол себепті нәтижелердің локалді түрде болуы.

2. Үзіліссіз дифференциалданатын бір айнымалылы функцияның екі жақты туындысы нөлден өзгеше әр нүктенің маңайында кері функциясының бар болуы – туындының нөлден өзгеше болуы сол нүктенің қандай да бір маңайында локалді түрде туынды таңбасын біртаңбалы түрде сақтайды да, функцияның қатаң монотондылығын, сол себепті инъективтілігін және онымен пара-пар кері функциясының бар болуын қамтамасыз етеді және де кері функцияның да дифференциалдануын беріп, туындысын есептеу формуласын ұсынады.

3. Үзіліссіз дифференциалданатын көп айнымалылы функцияның кері функциясы бар болуы туралы теореманың міндетті түрде локалді құрылымда болуы мен кері функцияның дербес туындыларын матрицалық теңдік арқылы есептеу формуласы.

4. Көп айнымалылы үзіліссіз дифференциалданатын функцияның кері функциясының бар болуы туралы теорема айқындалмаған функцияның бар болуы туралы теоремадағы тәуелді және тәуелсіз айнымалылар сандарының өзара тең болған жағдайындағы тікелей салдары ретінде.

5. «Дифференциалданатын функция нүктенің маңайындағы құрылысы функция өсімшесінің басты-сызықты бөлігі болатын дифференциалы сияқты» жалпы қағиданың тағы бір куәсі – кері функциясының бар болуының Якоби анықтауышы арқылы берілуі сызықтық функциялар жүйесінің Крамер ережесі беретін шешілімділігіне тәріздіглігі.

6. Үзіліссіз дифференциалданатын көп айнымалылы функцияның кері функциясы бар болуы туралы теореманың міндетті түрде локалді құрылымда болуы – локалді түрде әр нүктесінде қарастырылғанда нүкте маңайында кері функциясы бар, бірақ берілген

жиынды толық қарастырғанда әр нүктесінде Якобианы нөлден өзге болса да, кері функциясы болмайтын функция мысалы.

7. Үзіліссіз дифференциалданатын көп айнымалылы функцияның локалді сипатта кері функциясының да үзіліссіз дифференциалдануы.

8. Үзіліссіз дифференциалданатын функцияның кері функциясы бар болуы туралы теоремада «үзіліссіз дифференциалдану» шартын жай «дифференциалдану» шартына теорема қорытындысын сақтай отырып ауыстыруға болмауының мысалы.

9. Кері функция туралы теореманы декарттық координаталар жүйесінен поляр координаталар жүйесіне көшіру және қисықты «түзету» есебінде қолдану.

10. Функциялардың ақырлы тізбегінің функциялық тәуелділігі мен сызықтық тәуелділігі – функциялардың ақырлы тізбегіндегі біреуі сәйкес қалғандарынан құрылған күрделі функция ретінде және қалғандарының сызықтық комбинациясы ретінде бейнеленуі.

11. Функциялардың ашық жиында берілген айнымалылар санынан аспайтын ақырлы тізбегінде функциялық тәуелділік бар болғанда анықталу жиынының әр нүктесіндегі Якоби матрицасының рангісі сол тізбектегі функциялар санынан кіші болуы, осының салдары ретінде Якоби матрицасының рангісі ең болмағанда бір нүктеде функциялар санына тең болған жағдайда сол ақырлы тізбектің функциялық тәуелсіздікте болуы.

12. Функционалдық тәуелді функциялардың ақырлы тізбегінен тәуелсіз функциялар тізбекшесін бөліп алу үрдісі – функциялардың ашық жиында берілген айнымалылар санынан аспайтын ақырлы тізбегінен қандай да бір нүктеде Якоби матрицасының рангісі берілген санға тең болатындай етіп берілген ақырлы тізбектен тәуелсіз функциялар тізбегі мен айнымалыларды таңдап алуға болуы және осы нүктенің қандай да бір маңайында оған сол ақырлы тізбектің ең боламағанда бір қалған функциясын қосқанда тәуелділіктің пайда болуы.

13. Градиент және Лаплас операторларын декарттықтан поляр координаталарына көшіру формулалары.

XII ТАРАУ. ТІКТӨРТБҰРЫШТАҒЫ ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

§1. ТІКТӨРТБҰРЫШТАҒЫ ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ АНЫҚТАМАСЫ

1. Екі сегменттің тіке көбейтіндісі ретіндегі тіктөртбұрыш және оның жазықтықтағы геометриялық бейнесі.

2. Тіктөртбұрыштың бөлшектенуі оны анықтайтын кесінділердің бөлшектенулерінің тіке көбейтіндісі ретінде.

3. Тіктөртбұрышта анықталған және шенелген сандық функцияның жоғарғы және төменгі интегралдық қосындылары.

4. Тіктөртбұрышта анықталған және шенелген сандық функцияның жоғарғы және төменгі интегралдары және олар тең болған жағдайда ортақ мәні болып табылатын екі еселі Риман интегралы.

5. Риман бойынша интегралданбайтын екі айнымалы шенелген функция мысалы.

6. Екі еселі Риман интегралын анықтама бойынша тікелей есептеудің мысалы.

7. Екі еселі Риман интегралының геометриялық мағынасы.

§2. ЕКІ АЙНЫМАЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ РИМАН БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАНУЫНЫҢ ТЕХНИКАЛЫҚ КРИТЕРИЙІ

1. Тіктөртбұрышта анықталған және шенелген сандық функцияның жоғарғы және төменгі интегралдық қосындыларының бөлшектенуге қатысты қасиеттері. Кез келген шенелген функцияның жоғарғы интегралының әрқашанда төменгі интегралынан аспайтындығы.

2. Шенелген сандық функцияның Риман бойынша интегралдануының техникалық критерийі – функция интегралдануының алдын ала берілген кез келген дәлдіктен жоғарғы және төменгі интегралдық қосындыларының бір-бірінен ауытқуы аспайтындай бөлшектену табылуына пара-парлығы.

§3 ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Риман интегралының сызықтық қасиеттері – тіктөртбұрышта интегралданатын функцияларға қолданылатын сызықтық амалдардың интеграл мәндері үшін де сақталуы.

2. Интегралдың аддитивтік қасиеті – аддетивтілік қасиетке сай іштей қиылыспайтын тіктөртбұрыштардың ақырлы санына жіктелетін тіктөртбұрыштағы интеграл мәнінің сол жіктелу бойынша алынған интегралдар мәні арқылы өрнектелуі.

3. Тіктөртбұрышта анықталған және интегралданатын екі сандық функция арасындағы теңсіздіктің олардың интегралдарының мәндері үшін де сақталуы. Тіктөртбұрышта интегралданатын функцияның мәндерінің ортасы туралы теоремалар: сандардың ақырлы жиынын орташа мән деп аталатын бір санмен сипаттаған тәрізді функцияның тіктөртбұрыштағы ақырсыз көп мәндерінің орташа мәнінің интеграл арқылы анықталған бір санмен өрнектелу түрлері. Интегралдың абсолюттік шамасының функция абсолюттік шамасының интегралынан аспауы туралы.

§4. ТІКТӨРТБҰРЫШТА ЕКІ АЙНЫМАЛЫЛЫ ҮЗІЛІССІЗ ФУНКЦИЯНЫҢ СОЛ ЖИЫНДА РИМАН БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАНУЫ

1. Шенелген функцияның Риман бойынша интегралдану себебін техникалық критерий негізінде айқындау.

2. Шенелген және тұйық тіктөртбұрыштағы үзіліссіз функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі оның Риман бойынша интегралдануының себебі ретінде.

§5. ТІКТӨРТБҰРЫШТА ШЕНЕЛГЕН ЖӘНЕ ҮЗІЛІС НҮКТЕЛЕРІ ЖОРДАН ӨЛШЕМІ НӨЛГЕ ТЕҢ ЖИЫН ҚҰРАЙТЫН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ РИМАН БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАНУЫ ТУРАЛЫ

1. Тіктөртбұрышта шенелген және үзілісті функцияның Риман бойынша интегралдану себебін техникалық критерий негізінде айқындау.

2. Жазықтықта Жордан өлшемі нөлге тең жиындар.

3. Тіктөртбұрышта шенелген және үзіліс нүктелері Жордан өлшемі нөлге тең жиын құрайтын функцияның Риман бойынша интегралдануы.

4. Жазықтықтағы Жордан өлшемі нөлге тең жиындар мысалдары.

5. Жордан өлшемі нөлге тең жиындардың қасиеттері.

§6. ТІКТӨРТБҰРЫШТАҒЫ ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫН СОЛ ТІКТӨРТБҰРЫШТЫ ҚҰРАЙТЫН КЕСІНДІЛЕРДЕ БІРІНЕН КЕЙІН БІРІ АЛЫНҒАН БІР ЕСЕЛІ ЕКІ ИНТЕГРАЛҒА ӘКЕЛЕТІН ФУБИНИ ТЕОРЕМАСЫ

1. Екі еселі интегралды есептеуде бұрын кеңінен зерттелген бір еселі интегралға әкелу мәселесінің қойылуы және шешімінің болжамды түрі.

2. Тіктөртбұрышта үзіліссіз екі айнымалы сандық функция жағдайындағы Фубини теоремасы.

3. Тіктөртбұрышта Риман бойынша интегралданатын үзілісті функция жағдайында Фубини теоремасы оқылуының ерекшеліктері – екі еселі Риман интегралының өзіндік техникалық бітіміне орай Фубини теоремасын қарастыруды Риман интегралын қолдану өрісінде тіктөртбұрышта үзіліссіз не көп болғанда бір немесе бірнеше қисықтар бойында үзілісті функциялармен шектелсе де болғаны, осы және келесі пункттерде үзіліс жағдайлары тек математикалық толықтық мақсатында ғана зерттеледі, бұл ыңғайсыздықтарды Риман интегралының жалпылауы болып табылатын Лебег интегралы жояды.

4. Тіктөртбұрышта Риман бойынша интегралданатын үзілісті функция жағдайындағы Фубини теоремасы.

5. Екі еселі Риман интегралы үшін Фубини теоремасының бірөлшемді төменгі және жоғарғы интегралдар арқылы жазылуы.

6. Фубини формуласындағы Риманның жоғары және төменгі интегралдарынан жай интегралға көшіруге мүмкіндік беретін жағдайлар.

7. Фубини формуласындағы бір еселі қайталанған интегралдар ретінің ауыстырымдылығы.

8. Фубини теоремасының төңірегіндегі ескертулер, мысалдар және қолданулар.

XIII ТАРАУ. ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ЖИЫНДАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ БОЙЫНДАҒЫ ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

§1. ТҮЗУ БОЙЫНДАҒЫ САНДЫҚ ЖИЫННЫҢ ЖОРДАН ӨЛШЕМІНІҢ СОЛ ЖИЫННЫҢ СИПАТТАМАЛЫҚ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ АРҚЫЛЫ БЕРІЛУІ

1. Әуелі сегмент пен оның ұзындығы анықталып, сонан соң солар негізінде құрылған сегменттегі Риман интегралы.

2. Сегмент ұзындығының бір еселі Риман интегралы арқылы бейнеленуі және де соны түзу бойындағы кейбір жиындардың «жалпыланған ұзындықтарына» тарату.

3. Түзу бойындағы сандық жиындардың «созықтығы» Риман интегралы арқылы енгізілген Жордан өлшеуіші және оның мәнінің анықтамасында қолданылған кесіндіге тәуелсіздігі. Жордан өлшемі барлық шенелген сандық жиындарды қамтымайтындығын көрсететін жиын мысалы.

§2. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ЖИЫН АУДАНЫНЫҢ ЕКІ ӨЛШЕМДІ ЖОРДАН ӨЛШЕУІШІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

1. Жазықтықтағы Жордан бойынша өлшенетін жиын – сипаттамалық функциясы Риман бойынша интегралданатын жиын ретінде.

2. Жазықтықтағы шенелген жиынның шекаралық нүктелер жиынының Жордан өлшемі нөлге тең болуының жиынның өзінің Жордан бойынша өлшенуін қамтамасыз етуі – себебі нүктенің берілген жиынның сипаттамалық функциясының үзіліс нүктесі болуы мен оның шекаралық нүктесі болуымен пара-парлығы және үзіліс нүктелер жиынының Жордан өлшемі нөлге тең болуы оның Риман бойынша интегралдануын беруі.

3. Жазықтықта Жордан бойынша өлшенетін жиындар мысалдары.

4. Жазықтықтағы Жордан бойынша өлшенетін жиынның ішінен және сыртынан орналасқан, әрқайсысы іштей өзара қиылыспайтын тіктөртбұрыштардың бірігулерінің аудандарының кез келген дәлдікпен бір-біріне жақын болуы және осының геометриялық суреттемесі.

5. Жазықтықтықта шенелген жиынның Жордан өлшемінің Риман интегралы арқылы берілген анықтамасына эквивалентті және де оған тәуелсіз әрқашан бар болатын ішкі және сыртқы Жордан өлшемдері атты нақты сандардың тең болған жағдайдағы ортақ мәні ретінде анықталған Жордан өлшемі, осы екі анықтамадағы жиынның Жордан өлшемдерінің теңдігі. Оған қоса, Жорданның төменгі және жоғарғы өлшемдерінің сәйкес сандық тізбектің төменгі және жоғарғы шектерімен, өлшемді болған жағдайда жинақталуымен ұқсастығы.

6. Жордан өлшемі нөлге тең жиынның екі анықтамасының эквиваленттілігі – аудандарының қосындысы алдын-ала берілген оң саннан аспайтын тіктөртбұрыштардың бірігуінің бүркеуі және сипаттамалық функциясының Риман интегралы нөлге тең болуы.

7. Жордан өлшеуішінің теріс еместік, монотондылық, аддитивтілік және кез келген жиынды Жордан өлшемі нөлге тең жиынға ұлғайтып не азайтып өзгерткенде оның өлшенуі не өлшенбеуі сақталып, өлшенген жағдайда өлшемдердің сандық мәндерінің өзгермеуі.

§3. ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН ЖИЫН БОЙЫНДА АЛЫНҒАН ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

1. Жордан бойынша өлшенетін жиында берілген функцияның осы жиын бойынша Риман интегралын осы жиынды қамтитын тіктөртбұрыштағы Риман интегралы арқылы анықтау.

Тіктөртбұрыштағы Риман интегралы арқылы анықталған Жордан өлшеуішігің сол жиын бойынша да алынған Риман интегралы арқылы сол мәнмен берілуі, Риман интегралы мәнінің жиынды көмкеруші тіктөртбұрышқа тәуелсіздігі, геометриялық бейнесіндегі декарттық координаталар жүйесіне қатынасы және көмекші $f_{\Omega}(x,y)$ функциясының берілген функция мен жиынның сипаттамалық функциясының көбейтіндісі түрінде жазылуының ұтымдылығы.

3. Жиында үзіліс нүктелері Жордан өлшемі нөлге тең жиын құратын екі айнымалылы сандық функцияның Риман бойынша интегралдануы.

4. Жордан бойынша өлшемді жиын бойында алынған сандық функцияның екі еселі Риман интегралының сызықтық және монотондық қасиеттері.

5. Жордан өлшемі нөлге тең жиын бойында алынған екі айнымалы шенелген сандық функцияның Риман интегралының нөлге тең болуы.

6. Жордан бойынша өлшемді жиын бойында алынған сандық функцияның екі еселі Риман интегралының аддитивтік қасиеті.

7. Жордан бойынша өлшемді жиынның жалпы топологиялық құрылысы.

§4. ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН ЖИЫН БОЙЫНДА АЛЫНҒАН ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ШЕК АРҚЫЛЫ БЕРІЛЕТІН S-ТІЛІНДЕГІ АНЫҚТАМАСЫ

1. Риман интегралын шек ретінде бейнелеу үшін қажетті «жиынның бөлшектенуі», «жиын диаметрі» және «интегралдық қосынды шегі» ұғымдары.

2. Жордан бойынша өлшемділік сыртқы және ішкі Жордан өлшемдері беттесуімен берілгенде жазықтықтағы Жордан бойынша өлшенетін жиында екі еселі Риман интегралын интегралдық қосындының шегі арқылы анықтау.

§5. ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН ЖИЫНДАҒЫ ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ФУБИНИ ТЕОРЕМАСЫ

1. Тағы да тіктөртбұрыштағы жоғары және төменгі интегралдар арқылы Фубини теоремасының жалпыланған жазылуы туралы.

2. Фубини формуласы бойынша үш өлшемді тік параллепипед көлемін есептеу.

3. Қисықсызықты трапеция бойындағы Риман интегралы үшін Фубини формуласы.

4. Жордан бойынша өлшенетін жиындағы Риман интегралы үшін Фубини формуласы.

5. Фубини теоремасының арнайы жағдайындағы Дирихле формуласы.

6. Риманның екі еселі интеграл аппаратының күшін Фубини теоремасы арқылы аралас туындылар теңдігінің тағы бір дәлелдеуі мысалында көрсету.

7. Жалпыланған қисықсызықты трапециядағы қайталанған интегралдың Фубини формуласы бойынша тіктөртбұрыштағы екі еселі Риман интегралдары арқылы бейнеленуі.

8. Қайталанған интегралдың екеуі де бар болса да, олардың мәндерінің беттеспеу мүмкіндігі.

§6. КЕСІНДІДЕГІ БІР ЖӘНЕ ТІКТӨРТБҰРЫШТАҒЫ ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛДАРЫНДА АЙНЫМАЛЫНЫ АЛМАСТЫРУ

1. Бір еселі Риман интегралындағы тәуелсіз айнымалыны басқа дифференциалданатын функцияға ауыстырғандағы сол ауыстыру айнымалысы бойынша интегралға көшу формуласы.

2. Жордан бойынша өлшенетін жиындарда екі еселі Риман интегралында айнымалыны алмастыру барысында бір айнымалы Риман интегралындағы өзгеру жылдамдығын сипаттайтын туынды орнына дәл сол қасиетті беретін дербес туындылар арқылы өрнектелген Якобиан атты жазылуына әкелу жолындағы болжамдар.

3. Жордан бойынша өлшенетін жиында екі еселі Риман интегралында айнымалыны алмастыру формуласы.

4. Екі еселі Риман интегралының түрлі белгілеулері жөнінде.

5. Сыртқы көбейтінді және сол арқылы екі еселі Риман интегралында айнымалыны ауыстыру формуласының символдық дәлелдемесі.

XIV–ТАРАУ. n АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ n-ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

§1. n-ӨЛШЕМДІ ТІК ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД БОЙЫНДАҒЫ n АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ n-ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

1. n өлшемді тік параллелепипед және оның бөлшектенуі.

2. n айнымалылы сандық функцияның жоғарғы және төменгі интегралдық қосындылары және олардың арасындағы реттік қатынасы мен монотондылық қасиеттері.

3. n айнымалылы сандық функцияның n өлшемді тік параллелепипедтегі жоғарғы және төменгі интегралдары мен оның Риман бойынша интегралдануының анықтамасы.

4. n айнымалылы шенелген сандық функцияның n өлшемді тік параллелепипедте Риман бойынша интегралдануының техникалық критерийі.

§2. ЖОРДАН ЖӘНЕ ЛЕБЕГ ӨЛШЕМДЕРІ НӨЛГЕ ТЕҢ n-ӨЛШЕМДІ ЖИЫНДАР

1. Жордан өлшемі нөлге тең n-өлшемді жиындар, сондай жиындардың мысалдары мен қасиеттері.

2. n-өлшемді жиынның Жордан өлшемі нөлге тең болуының техникалық критерийі.

3. Лебег өлшемі нөлге тең n-өлшемді жиын анықтамасы, қасиеттері мен мысалдары. Жордан өлшемі нөлге тең жиынның Лебег өлшемі де нөлге тең болуы және керісінше бағытта орындала бермеуі.

§3. n-ЕСЕЛІ РИМАН БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАНАТЫН n АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ӨЗІНДІК ҚҰРЫЛЫМЫН СИПАТТАЙТЫН ЛЕБЕГ КРИТЕРИЙІНІҢ ДӘЛЕЛДЕУІНЕ ДАЙЫНДЫҚ

1. n айнымалылы сандық функцияның нүктедегі тербелісі.

2. n айнымалылы сандық функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің сол нүктедегі тербелісі арқылы берілген критерийі.

3. Лебег критерийін дәлелдеуге қажетті функция тербелісі арқылы берілген техникалық көмекші леммалар.

§4. n АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ n-ЕСЕЛІ РИМАН БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАНУЫНДАҒЫ ДӘЛ ЕСЕПТЕЛІНБЕЙТІН SUP-INF, INF-SUP ТІЛІНДЕГІ ТЕҢДІК ОРЫНДАЛУЫ АРҚЫЛЫ БЕРІЛГЕН РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ШЫТЫРМАН АНЫҚТАМАСЫН ФУНКЦИЯНЫҢ НАҚТЫ ШЕНЕЛГЕНДІК ПЕН ҮЗІЛІС НҮКТЕЛЕРІНІҢ САНЫ АЙТАРЛЫҚТАЙ АЗ, ДӘЛ АЙТҚАНДА ЛЕБЕГ ӨЛШЕМІ НӨЛГЕ ТЕҢ БОЛУЫ АРҚЫЛЫ БЕРЕТІНДІГІМЕН МАТЕМАТИКАНЫҢ МАҚСАТЫ МЕН МҮМКІНДІГІН КӨРСЕТЕТІН ҮЛГІ БОЛАТЫН ЛЕБЕГ КРИТЕРИЙІ

1. n айнымалылы сандық функцияның n өлшемді тік параллелепипедте Риман бойынша интегралдануының Лебег критерийінің оқылуы мен дәлелдемесі.

2. n айнымалылы сандық функцияның n өлшемді тік параллелепипедте Риман бойынша интегралдануының "Математикадағы мазмұнды теореманың" үлгісі болатын Лебег берген және техникалық критерийлерін салыстыру қорытындылары.

3. n айнымалылы сандық функцияның n өлшемді тік параллелепипедте Риман бойынша интегралдануының Лебег критерийінің екі жақты оқылуының таңқаларлық талқылаулары.

§5. ЛЕБЕГ КРИТЕРИЙІНІҢ САЛДАРЫ

1. Параллелепипедте барлық Риман бойынша интегралданатын функциялар жиынының қосу, көбейту амалдарына қатысты тұйықтылығы мен Жордан бойынша өлшенетін жиыншасында интегралдануының себептерін тікелей көрсететін тағы да бір дәлелдеуі.

2. Күрделі функцияның Риман бойынша интегралдану себебін оны құрайтын интегралданатын ішкі функцияның үзіліссіз сыртқы функциялармен біріккен механизімін тікелей сипаттайтын тағы бір дәлелдемесі.

3. Риман бойынша интегралдау теориясындағы терең және анық Лебег критерийі негізінде сондағы көптеген жасырын қасиеттердің ішкі себептерін ашу мысалдарындағы жалпы математикалық қорытындылар.

4. Лебег критерийі аясындағы монотонды функция интегралдану себебі – үзіліс нүктелерінің саны саналымдыдан артық емес, сондықтан да олардың жиынының Лебег өлшемі нөлге тең болуы.

§6. n АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ n ӨЛШЕМДІ ТІК ПАРАЛЛЕПИПЕД БОЙЫНДАҒЫ n-ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1. n айнымалылы сандық функцияның n өлшемді тік параллелепипедтегі Риман интегралының сызықтық қасиеттері – Риман бойынша интегралданудың санға көбейту және қосу амалдары бойынша тұйықтылығы.

2. n өлшемді тік параллелепипедтің сондай параллелепидтерге жіктелуіндегі n айнымалылы сандық функцияның Риман интегралының аддитивтік қасиеті.

3. n айнымалылы сандық функциялардың n өлшемді тік параллелепипедтегі Риман интегралдары арасындағы теңсіздіктер мен интеграл астындағы функцияның сол параллелепипедтегі орташа мәні туралы теорема.

§7. n АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ n ӨЛШЕМДІ ТІК ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД БОЙЫНДАҒЫ n-ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫН ӨЛШЕМДЕРІНІҢ ҚОСЫНДЫСЫ СОЛ n БОЛАТЫН ЕКІ ҚАЙТАЛАНҒАН ИНТЕГРАЛДАРҒА АЛМАСТЫРАТЫН ФУБИНИ ТЕОРЕМАСЫ

1. Фубини теоремасының жоғарғы және төменгі интегралдар арқылы оқылуы.

2. Фубини теоремасының үзіліссіз не ең көп болғанда ақырлы жиында үзілісті функция жағдайында жай интегралдар арқылы жазылуы.

3. Кавальери принципі – Жордан бойынша өлшенетін кеңістіктегі екі дененің Жордан бойынша өлшенетін жазықтағы қималарының аудандарының теңдігінен көлемнің теңдігін беретін Фубини теоремасының салдары

§8. ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН n-ӨЛШЕМДІ ЖИЫНДАР

1. Жиынның сипаттамалық функциясының Риман бойынша интегралы арқылы берілетін Жордан өлшемі және Жордан бойынша өлшенетін жиындар.

2. Жордан өлшемі нөлге тең жиынның екі анықтамаларының эквиваленттілігі – көлемдерінің қосындысы алдын ала берілген кез келген оң саннан аспайтын n өлшемді тік параллелепипедтің бірігуінің бүркеуі және сипаттамалық функциясының Риман интегралы нөлге тең болуы.

3. Кез келген n өлшемді шенелген жиынның Жордан бойынша сыртқы және ішкі өлшемдері. Жиынның сипаттамалық функциясының Риман бойынша интегралдану мен сол жиынның ішкі және сыртқы өлшемдерінің тең болуының пара-парлығы және геометриялық суреттемесі.

4. Шенелген жиынның Жордан бойынша өлшену критерийі – n өлшемді шенелген жиынның Жордан бойынша өлшенуі үшін оның шекаралық жиынының Жордан өлшемі нөлге тең болуы қажеттілігі мен жеткіліктілігі.

5. Жордан бойынша өлшенетін жиындардың бірігу, қиылысу және айырым амалдарының ақырлы саны бойынша тұйықтылығы.

6. Жордан өлшеуішінің теріс еместік, монотондылық, аддитивтілік және кез келген жиынды Жордан өлшемі нөлге тең жиынға ұлғайтып не азайтып өзгерткенде оның өлшенуі не өлшенбеуі сақталып, өлшенген жағдайда өлшемдердің сандық мәндерінің өзгермеуі.

§9. ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН n-ӨЛШЕМДІ ЖИЫН БОЙЫНДАҒЫ n-ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

1. Жордан бойынша өлшенетін n өлшемді жиын бойындағы n-еселі Риман интегралының анықтамасын жиынның сипаттамалық функциясы арқылы оны қамтитын n өлшемді тік параллелепипедтегі интегралға келтірілу – жиын бойында анықталған функцияны жиынды қамтитын тіктөртбұрышқа жиынның осы тіктөртбұрышқа дейінгі толықтауышында мәні нөлге тең етіп тарату.

2. n айнымалылы шенелген сандық функцияның Жордан бойынша өлшенетін жиын бойынша интегралдануы мен оның ішкі үзіліс нүктелерінің жиынының Лебег өлшемі нөлге тең болуының пара-парлығы.

3. n айнымалылы сандық функцияның Жордан бойынша өлшенетін жиындағы n-еселі интегралының сызықтық және монотондық қасиеттері. Интеграл мәнін бір нақты санмен өрнектейтін орташа мән туралы теоремалар.

4. n айнымалылы сандық функцияның Жордан бойынша өлшенетін жиын бойында алынған n-еселі Риман интегралының сол жиынның іштей қиылыспайтын Жордан бойынша өлшенетін жиындарға ақырлы жіктелуі арқылы жалпы жағдайындағы аддитивтік қасиеті.

5. Кез келген n айнымалылы шенелген сандық функцияның Жордан өлшемі нөлге тең жиын бойынша алынған n-еселі Риман интегралы мәнінің нөлге тең болуы және оның тікелей салдары: Жордан бойынша өлшенетін жиында анықталған және де мәндері бір-бірінен өзге болатын нүктелерінен құрылған жиыны Жордан бойынша өлшемі нөлге тең екі шенелген функцияның бірі n-еселі Риман бойынша берілген жиында интегралданса, екіншісі де интегралданады да, олардың Риман интегралдарының мәндері өзара тең болады.

6. n-өлшемді Жордан бойынша өлшенетін интегралдану жиындарында шекке көшкендегі n-еселі Риман интегралының толық аддитивтілік қасиеті.

7. Жордан бойынша өлшенетін жиындағы n-еселі Риман интегралы нөлге тең теріс емес n айнымалылы сандық функцияның құрылысы – оң мәнді нүктелерінен құрылған жиынның Лебег өлшемі нөлге тең.

8. Жордан бойынша өлшенетін не өлшенбейтін және Лебег өлшемі нөлге тең жиындардың өзара және солар бойынша алынған n-еселі Риман интегралымен арақатынасын анықтайтын мысалдар – Лебег өлшемі нөлге тең жиында ғана нөлден өзге болатын теріс емес шенелген функция Риман бойынша интегралданбауы мүмкін; Лебег өлшемі нөлге тең жиын Жордан бойынша өлшенбеуі мүмкін; Лебег өлшемі нөлге тең жиында анықталған және шенелген функция Риман бойынша интегралданбауы мүмкін; Жордан өлшемі нөлге тең жиындардың саналымды ақырсыз біріктіруі Жордан бойынша өлшенбеуі мүмкін; Лебег өлшемі нөлге тең шенелген жиынның шекаралық жиыны Жордан өлшемі оң болатын жиын болуы мүмкін; шенелген ашық жиын Жордан бойынша өлшенбеуі мүмкін.

9. Үзіліссіз функция жағдайындағы Риман еселі интегралының S-тіліндегі анықтамасы орнына – n айнымалылы үзіліссіз сандық функцияның Жордан бойынша өлшенетін n-өлшемді жиындағы n-еселі Риман интегралының іштей қиылыспайтын Жордан бойынша өлшенетін жиындарға жіктегендегі интегралдық қосындылардың шегі арқылы өрнектелуі.

§10. ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН БІР ЖИЫННАН ЕКІНШІСІНЕ ӨТУ ЖОЛЫНДА n-ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНДА АЙНЫМАЛЫНЫ АЛМАСТЫРУ

1. Екі еселі жағдайдағы айнымалыны алмастыру формуласынан жалпы n-еселі Риман интегралы жағдайына ауысу.

2. n-өлшемді ашық жиынды сондай жиынға аударатын үзіліссіз дифференциалданатын өзара бірмәнді функциялар – жиынның жатық түрлендірулері.

3. n-өлшемді Жордан бойынша өлшенетін жиынның үзіліссіз дифференциалданатын бейнесінің де Жордан бойынша өлшенуі.

4. n-өлшемді жиынды сондай жиынға алмастыратын түрлендіру функциясы анықтауышы нөлден өзгеше сызықты функция дербес жағдайындағы n-еселі Риман интегралындағы айнымалыны алмастыру формуласының толық дәлелдемесі.

5. n-еселі Риман интегралындағы айнымалыны алмастыру жолындағы дербес жағдайлар – алғашқы интеграл астындағы функция кубта тұрақты, түрлендіру функциясы өзара бірмәнді жатық.

6. n-еселі Риман интегралындағы айнымалыны алмастыру теоремасының толық дәлелдемесі.

7. n-еселі Риман интегралындағы айнымалыны алмастыру формуласын интегралдау жиындарын түрлендіру функциясына қойылатын жатықтық шарттары сақталмайтын ескерілмейтін жиындар деп аталатын Жордан өлшемі нөлге тең жиындарға тарату.

8. n-еселі Риман интегралы мәнінің декарттық координаталар жүйесіне тәуелсіздігі.

9. n-еселі Риман интегралындағы айнымалыны ауыстыру формуласындағы көлем элементі және оларды есептеу мысалдары – үш өлшемді сфералық, цилиндрлік және жалпы сфералық.

XV ТАРАУ. ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛ

§1. БІРІНШІ ТҮРДЕГІ ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛ – РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ СЕГМЕНТТЕН ҚИСЫҚ БОЙЫНА ЖАЛПЫЛАУЫ

1. Қисық – сегментте анықталған үзіліссіз R^n-мәнді функция мен оның кеңістіктегі жіп болатын геометриялық сипаттамасы.

2. Бірінші түрдегі қисықсызықты интеграл бір айнымалылы Риман интегралының сегменттен қисық бойына таратылуы ретінде.

3. Үзіліссіз функцияның үзіліссіз дифференциалданатын жай қисық бойында бірінші түрдегі қисықсызықты интегралының бар болуы және есептеу формуласы.

§2. ЕКІНШІ ТЕКТІ ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛ

1. Жазықтықтағы облыс – ашық байланысты жиын және де оның кез келген екі нүктесін осы жиындағы жай сынық сызықпен қосу мүмкіндігі.

2. Бір және көп байланысты облыстар.

3. Дифференциалдық форма – анықталу жиыны облыс және мәндер жиыны жазықтықтағы (dx, dy) айнымалыларының сызықтық функциясы болатын сәйкестік ретінде.

4. Дифференциалдық форма интегралы өзінің және үзіліссіз дифференциалданатын қисық жазулары бойынша анықталған бір айнымалылы Риман интегралы ретінде – екінші түрдегі қисықсызықты интеграл.

5. Қисықсызықты интегралдың бөлік-бөлік үзіліссіз дифференциалданатын қисық бойына таратылуы.

§3. ГРИН ФОРМУЛАСЫ – ОБЛЫС ШЕКАРАСЫ БОЛАТЫН ТҰЙЫҚ ҚИСЫҚ БОЙЫНДА ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ФОРМАДАН АЛЫНҒАН ЖАЛПЫ ТҮРДЕГІ ЕКІНШІ ТЕКТІ ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДЫҢ СОЛ ОБЛЫС БОЙЫНДА АЛЫНҒАН ИНТЕГРАЛ АСТЫНДАҒЫ ФУНКЦИЯСЫ СОЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ФОРМА КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ АРҚЫЛЫ АНЫҚТАЛҒАН ЕКІ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛ ТҮРІНДЕ ЖАЗУ

1. Жазықтықтағы жай тұйық қисық бойында алынған жалпы түрдегі екінші текті қисықсызықты интегралды сол қисықпен шенелген облыс бойында алынған екі еселі интеграл түрінде өрнектеу мүмкіндігі мен сонда пайда болатын интеграл астындағы арнайы оператор болып табылатын функцияны анықтау.

2. Жазықтықтағы тұйық шекаралы облыстың шекарасының оң ориентациялы және теріс ориентациялы деп аталатын жүріп өту бағыттарын таңдау.

3. Бір байланысты облысқа жалпыланатын қисық сызықты трапеция жағдайындағы Грин формуласының дәлелдеуі.

4. Көп байланысты облыстағы Грин формуласы.

5. Грин формуласының аддитивтік қасиеті – Грин формуласы орындалатын іштей қиылыспайтын облыстардың ақырлы бірігуінде де оның орындалуы.

§4. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ФОРМАНЫҢ АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯСЫ

1. Жазықтықтағы дифференциалдық форманың алғашқы функциясы және оның бар болуының жабық сипаттағы критерийі – кез келген жай тұйық қисық бойында алынған екінші түрдегі қисық сызықты интегралының нөлге тең болуымен пара-парлығы.

2. Алғашқы функциясы бар дифференциалдық форманың алғашқы функциялар жиынының құрылысы – алғашқы функцияларының тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықталуы.

3. Жазықтықтағы дифференциалдық форманың бір байланысты облыста алғашқы функциясы бар болуының ашық сипаттағы критерийі – дифференциалдық форманы анықтайтын дербес туындылардың теңдігі түрінде.

XVI ТАРАУ. БЕТ ЖӘНЕ ОНЫҢ АУДАНЫ. БЕТТІК ИНТЕГРАЛДАР. КЕҢІСТІКТЕГІ НЕГІЗГІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ФОРМУЛАЛАР

§1. АЙҚЫН ТҮРДЕ БЕРІЛГЕН БЕТ ЖӘНЕ ОНЫҢ АУДАНЫ

1. Бет тақырыбына теориялық дайындық – оң және теріс бағытталған декарттық жүйелер.

2. Тағы да кеңістегі векторлар туралы – вектор белгілеуінде оның бас нүктесінің координатасы енгізіліп, сол арқылы векторларға қатысты ұғымдар мен амалдар дәлірек нақтыланған.

3. Айқын түрде берілген бет – облыстағы екі айнымалылы үзіліссіз сандық функция. Беттің кеңістіктегі көрнекі геометриялық сипаттамасы – мыжылған қағаз тәрізді беттің өзі, оған әр нүктесінде жүргізілген жанама жазықтық пен нормал вектор, олардың бетті анықтайтын функция арқылы берілген аналитикалық сипаттамалары.

4. Айқын түрде берілген бет ауданының анықтамасы және де оның мәнін бетті анықтайтын екі айнымалылы функция бойынша құрылған функцияның облыс бойындағы екі еселі интегралы арқылы есептеу формуласы.

§2. БЕТТІҢ ЖАЛПЫ АНЫҚТАМАСЫ

1. Көрнекі геометриялық мағыналы беттің жалпы анықтамасының жазықтықтағы облыстың кеңістіктегі үзіліссіз бейнесі түріндегі аналитикалық берілуі.

2. Кеңістіктегі беттің жалпы анықтамасы және беттің айқын түрдегі анықтамасының оның дербес жағдайы болуы – әр геометриялық бет, маселен кеңістіктегі сфера, жазықтықтағы облыста анықталған сандық функция арқылы бейнелене бермейтіндіктен мәндері кеңістіктегі бет параметрі деп аталатын тәуелсіз айнымалылар енгізіліп, солар арқылы беттің жалпы анықтамасының берілуі.

3. Бөлік-бөлік үзіліссіз дифференциалданатын бет – тұйық жиында анықталған функцияның шекаралық нүктелерде дифференциалдану ұғымы анықталмағандықтан туындаған қиыншылықтарды шешу.

§3. ЖАЛПЫ АНЫҚТАМАМЕН БЕРІЛГЕН БЕТТІҢ АУДАНЫ

1. Бет бойындағы қисық – бет анықтамасындағы облыста жатқан қисықтың бет функциясы бойынша бейнесі.

2. Бет бойындағы қисыққа оның нүктесінен жүргізілген жанама түзу теңдеуі.

3. Бетке оның нүктесінде жүргізілген жанама жазықтық теңдеуі.

4. Жалпы түрде квадратта берілген бет ауданының оған жүргізілген жанама жазықтық арқылы анықтамасы және де оның мәнін бетті анықтайтын екі айнымалылы функциялар бойынша құрылған функцияның облыс бойындағы екі еселі интегралы арқылы есептеу формуласы.

5. Жалпы түрдегі бет ауданының анықтамасы мен оның мәнін есептеудің интегралдық түрдегі формуласын квадраттан бет берілген кез келген облысқа тарату.

6. Айқын түрде берілген бет ауданының мәнін жалпы түрде берілген беттің ауданының формуласының салдары ретінде шығару.

§4. БІРІНШІ ТҮРДЕГІ БЕТТІК ИНТЕГРАЛ – ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ БЕРІЛУ ЖИЫНЫНЫҢ ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ОБЛЫСТАН БЕТКЕ ТАРАЛУЫ

1. Бірінші түрдегі беттік интеграл анықтамасының бет жіктелуі бойынша алынған интегралдық қосындыларының шегі ретінде негізделуі

§5. БЕТТІҢ ОРИЕНТАЦИЯСЫ – ЕКІ ЖӘНЕ БІРЖАҚТЫ БЕТТЕР

1. Айқын түрде берілген бет ориентациясы – беттің жоғарғы және төменгі жақтары.

2. Жалпы жағдайдағы бет ориентациясы және оның беттің аналитикалық берілуіне тәуелділігі.

3. Ориентацияланбайтын біржақты Мебиус беті.

§6. ОРИЕНТАЦИЯЛАНҒАН БЕТТЕГІ ЕКІНШІ ТҮРДЕГІ БЕТТІК ИНТЕГРАЛ

1. Екінші түрдегі беттік интегралдың декарттық координаталар өсінің біріне негізделген анықтамасы мен бірінші түрдегі беттік интеграл түрінде өрнектелуі.

2. Екінші түрдегі беттік интегралдың декарттық координаталар өсінің біріне негізделген жазықтықтағы облыста бет берілуінің аналитикалық жазылуындағы функцияларының Риман интегралы арқылы формулалық бейнеленуі.

3. Барлық үш декарттық координаталар өсіне негізделген екінші түрдегі беттік интегралдың толық анықтамасы.

§7. КЕҢІСТІКТЕГІ ЖИЫН МЕН ОНЫҢ ШЕКАРАЛАРЫ БОЙЫНДАҒЫ ИНТЕГРАЛДАР АРАҚАТЫНАСТАРЫ

1. Гаусс-Остроградский формуласы – үш өлшемді кеңістіктегі облыс бойынша алынған Риман интегралы мен оның шекарасы бойымен алынған екінші түрдегі беттік интегралдар арақатынасы.

2. Стокс формуласы – үш өлшемді кеңістіктегі екінші түрдегі қисық бойында алынған интеграл мен оған бекітілген бет бойынша алынған екінші түрдегі беттік интегралдар арақатынасы.

XVII Т А Р А У. СКАЛЯРЛЫҚ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛЫҚ ӨРІСТЕР

1. Скалярлық өріс үш өлшемді кеңістіктегі жиында анықталған сандық функция және векторлық өріс үш өлшемді кеңістіктегі жиынды үш өлшемді кеңістікке бейнелейтін функция ретінде.

2. Екінші түрдегі қисықсызықты интегралдың механикалық мағынасының үлгісі – күш векторлық өрісінің жұмысы.

3. Екінші түрдегі беттік интегралдың физикалық мағынасы – векторлық өрістің беттен өткен ағыны, дербес жағдайда, векторлық күш өрісінің ағыны.

4. Стокс және Гаусс-Остроградский теоремаларындағы интегралдық формулаларының векторлық түрлері.

5. Векторлық анализдің негізгі функциялары – градиент, дивергенция және роторды Гамильтонның символдық векторын сәйкесінше скаляр өріске, векторлық өріске скалярлық және векторлық көбейту арқылы анықтау.

6. Үш өлшемді кеңістіктегі облыс пен бет және олардың шекаралары бойынша алынған интегралдардың арақатынастарында Гамильтон символының векторлық өріспен сәйкес скаляр және векторлық көбейтінділерінің пайда болуы.

7. Дивергенция ұғымының декарттық координаталар жүйесінің таңдалынуына тәуелсіздігі. Соленоидты векторлық өріс атты дивергенциясы нөлге тепе-тең – «бұлақсыз» векторлық өріс.

8. Ротор ұғымының декарттық координаталар жүйесінің таңдалынуына тәуелсіздігі. Потенциалдық векторлық өріс атты роторы нөлге тепе-тең – «құйынсыз» векторлық өріс.

XVIII ТАРАУ. МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ – РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ШЕНЕЛМЕГЕН АРАЛЫҚ ПЕН ШЕНЕЛМЕГЕН ФУНКЦИЯ ЖАҒДАЙЛАРЫНА ТАРАТЫЛУЫ ЖӘНЕ ДИСКРЕТТІ ДЕП ҚАБЫЛДАНАТЫН САНДЫҚ ҚАТАРДЫҢ ҮЗІЛІССІЗ КӨШІРМЕСІ РЕТІНДЕ

§1. ШЕНЕЛМЕГЕН АРАЛЫҚТА АНЫҚТАЛҒАН БІРІНШІ ТЕКТІ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ

1. Жоғарыдан біржақты шенелмеген аралықтағы меншіксіз интеграл – Риман интегралының жоғарғы шегі шексіздікке сол жақты ұмтылғандағы нақты мәнді шегі ретінде.

2. Төменнен біржақты шенелмеген аралықтағы меншіксіз интеграл – Риман интегралының төменгі шегі шексіздікке оң жақты ұмтылғандағы нақты мәнді шегі ретінде.

3. Екі жақты шенелмеген аралықтағы меншіксіз интеграл ортақ ақырлы ұшты жоғарыдан және төменнен біржақты шенелмеген аралықтардағы меншіксіз интегралдардың қосындысы ретінде.

4. Біржақты шенелмеген аралықтағы меншіксіз интегралмен шектелу арқылы жазулар мен зерттеулерді ықшамдау.

5. Меншіксіз интеграл Ньютон-Лейбниц формуласы аясында.

6. Дискретті деп қабылдайтын сандық қатардың үзіліссіз көшірмесі ретіндегі меншіксіз интегралдардың сызықтық және аддитивтілік қасиеттері.

7. Теріс емес функцияның меншіксіз интегралының жинақталу критерийі теріс емес сандық қатардың жинақталу критерийі тәрізді.

8. Теріс емес функцияның меншіксіз интегралының жинақталуының теріс емес сандық қатардағыдай салыстыру теоремасы.

9. Меншіксіз интеграл жинақталуының сандық қатардағыдай Коши критерийі.

10. Меншіксіз интегралдың абсолютті жинақталуы.

11. Меншіксіз интеграл жинақталуының орташа мән туралы екінші теорема мен Коши критерийіне негізделген сандық қатардағыдай Дирихле және Абель белгілері.

12. Дискреттік сандық қатар мен үзіліссіз меншіксіз интеграл араларындағы айырмашылық – жинақталатын қатардың жалпы мүшесі әрқашан нөлге ұмтылса, жинақталатын меншіксіз интеграл үшін интеграл астындағы функция бұл қасиетті қанағаттандыра бермейді.

§2. ШЕНЕЛГЕН АРАЛЫҚТАҒЫ ШЕНЕЛМЕГЕН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ЕКІНШІ ТҮРДЕГІ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛЫ

1. Интервалдың шеткі нүктесінде локалды шенелмеген функцияның меншіксіз интегралы – Риман интегралының жылжымалы шегі сол нүктеге іштей ұмтылғандағы нақты мәнді шегі ретінде.

2. Екінші түрдегі меншіксіз интеграл анықтамасының меншікті Риман интегралын қамтуы – сегменте Риман бойынша интегралданатын шенелген функция үшін меншіксіз интеграл анықтамасындағы шектердің бар және Риман интегралының мәніне тең болуы.

3. Меншіксіз интегралдардың сәйкес айнымалы ауыстыру арқылы шенелген аралықтан шенелмеген аралықтарға және керісінше өтуі.

4. Шенелмеген функцияның меншіксіз интегралының жай, абсолютті жинақталуы және де шенелмеген аралық жағдайындағы меншіксіз интеграл қасиеттерінің шенелген аралық пен шенелмеген функция жағдайындағы меншіксіз интегралға толық көшірілуі.

§3. БІР ҒАНА ЕРЕКШЕЛІГІ БАР МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ АНЫҚТАМАЛАРЫН БІРДЕН АРТЫҚ ЕРЕКШЕЛІКТІ ЖАҒДАЙДАҒЫ ЕКІ ТҮРДЕГІ ДЕ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРҒА ТАРАТУ

1. Бірден артық ерекшеліктері бар меншіксіз интегралды бір ғана ерекшелігі бар интегралдарға жіктеу арқылы анықтау.

2. Локалді шенелмеген нүкте интегралдау аралығының ішкі нүктесі және де сан түзуі жағдайларындағы шекке көшу амалы симметриялы түрде жүргізілгендегі сәйкес екінші және бірінші түрдегі бас мән атты меншіксіз интегралдар.

3. Меншіксіз интегралдар үшін Коши теңсіздігі.

4. Коши теңсіздігінің төңірігендегі функция мен оның квадратының меншіксіз интегралдануының арақатынастары – бірі жинақталып, екіншісі жинақталмау мүмкіндігі.

§4. АБСОЛЮТТІ ЖӘНЕ ЖАЙ ЖИНАҚТАЛУЫНЫҢ ПАРА-ПАРЛЫҒЫМЕН ЕРЕКШЕЛЕНГЕН КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯЛАР ҮШІН ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН, ЖИЫННЫҢ МОНОТОНДЫ САРҚЫЛУЛАРЫ ҚАСИЕТТІ ЖИЫН БОЙЫНДАҒЫ МЕНШІКСІЗ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛЫ СОЛ ЖИЫНДАР БОЙЫНДАҒЫ МЕНШІКТІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛДАРЫНЫҢ ШЕГІ РЕТІНДЕ

1. Жордан өлшемді жиын бойындағы меншікті Риман интегралын жалпылайтын көп айнымалылы функцияның Жордан өлшемді монотонды сарқылатын жиын бойындағы еселі меншіксіз атты интегралы.

2. Теріс емес функциялардың меншіксіз еселі интеграл мәнінің анықтамасындағы жиындардың монотонды сарқылу әдісіне тәуелсіздігі.

3. Меншіксіз еселі интегралдың жай және абсолютті жинақталуының пара-парлығы.

XIX ТАРАУ. ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ ИНТЕГРАЛДАР – ӘДЕТТЕ ОСЫЛАЙ АТАЛАТЫН АРГУМЕНТІ СОЛ «ПАРАМЕТР» БОЛАТЫН ФУНКЦИЯНЫҢ ДИСКРЕТТІ СИПАТТАҒЫ ФУНКЦИЯЛЫҚ ҚАТАР ТҮРІНДЕ БЕРІЛУІНІҢ ҮЗІЛІССІЗ ЖАҒДАЙДАҒЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ БАЛАМАСЫ

§1. ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ МЕНШІКТІ ИНТЕГРАЛ – ФУНКЦИЯ БЕРІЛУІНІҢ ТАҒЫ БІР ӘДІСТЕМЕСІ

1. Тіктөртбұрыштағы үзіліссіз екі айнымалылы функцияның аргументінің бірі бойынша алынған сегменттегі Риман интегралында параметр ретінде қатысқан екінші айнымалыға тәуелді функциясының тіктөртбұрышты қырайтын екінші сегментте үзіліссіздігі.

2. Интеграл мен туынды анықтамаларындағы екі шектің ауыстырымдылығын бейнелейтін Лейбниц ережесі – тіктөртбұрышта үзіліссіз, сонымен бірге параметр деп аталған айнымалысы бойынша үзіліссіз дифференциалданатын екі айнымалылы функцияның сегменттегі Риман интегралында параметр ретінде қатысқан айнымалыға тәуелді функциясының тіктөртбұрышты қырайтын екінші сегментте үзіліссіз дифференциалданып, оның туындысының сегмент бойында параметр бойынша алынған дербес туынды интегралына тең болуы.

3. Лейбниц ережесінің әрқашанда орындала бермеуі – интеграл мен дербес туынды алу ретін теңдікті сақтай отырып алмастыра алмайтындығын көрсететін сегментте үзіліссіз функция мысалы.

4. Лейбниц ережесін күрделі теориялық нәтиже болып табылатын аралас туындылардың теңдігінің тағы бір дәлелдеуі мен интеграл арқылы берілген параметрге-аргументке тәуелді функцияны айқын түрде жазуға қолдану.

5. Тіктөртбұрыштағы үзіліссіз екі айнымалылы функцияның аргументінің бірі бойынша алынған сегменттегі Риман интегралында параметр ретінде қатысқан екінші айнымалыға тәуелді функциясының сегментте интегралдануы және екі интегралдың ауыстырымдылығы – Фубини теоремасының салдары.

6. Интегралдау шектері де, интеграл астындағы функция да анықталатын функция аргументі болатын параметрге тәуелді болғандағы интеграл арқылы функцияның кеңітілген берілуі мен сол функцияның туындысын есептеу формуласы.

§2. ПАРАМЕТР ДЕП АТАЛАТЫН АЙНЫМАЛЫҒА ТӘУЕЛДІ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДЫҢ ФУНКЦИЯНЫ АНЫҚТАЙТЫН НҮКТЕЛІ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛ АСТЫНДАҒЫ ФУНКЦИЯ ҚАСИЕТТЕРІН САҚТАУҒА МҮМКІНДІК БЕРЕТІН БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУЛАРЫ

1. Біржақты шенелмеген және шенелген аралықтардың тіке көбейтіндісі болатын жолақта берілген екі айнымалылы функцияның меншіксіз интегралында параметр ретінде қатысқан екінші айнымалыға тәуелді шенелген аралықта функцияны анықтауға қойылатын ең дәл және аз шарт – интегралдың нүктелі жинақталуы, функциялық қатар тәрізді.

2. Жолақта меншіксіз интеграл арқылы анықталған функция нүктелі жинақталғанда интеграл астындағы функцияның үзіліссіздік, дифференциалдану және интегралдану қасиеттерін сақтамайтындығын көрсететін қайшы мысалдар, функциялық қатар тәрізді.

3. Жолақта нүктелі жинақталатын меншіксіз интеграл арқылы анықталған функция интеграл астындағы функцияның қасиеттерін сақтау мақсатында бірқалыпты деп аталатын әр нүктеге тәуелсіз талаптың қойылуы – меншіксіз интегралдың бірқалыпты жинақталуы, функциялық қатар тәрізді.

4. Параметр деп аталатын айнымалыға тәуелді меншіксіз интегралдың параметр бойынша нүктелі мен бірқалыпты жинақталуын қатар қамтамасыз ететін Коши критерийі, функциялық қатар тәрізді.

5. Параметрге тәуелді меншіксіз интегралдың бірқалыпты жинақталуының Вейерштрасс белгісі – интеграл астындағы функцияның абсолют шамасының интегралдану айнымалысы бойынша меншіксіз интегралы жинақталуымен бірге параметрге тәуелсіз теріс емес мәнді функциямен шенелуі.

6. Параметрге тәуелді меншіксіз интегралдың параметр бойынша бірқалыпты жинақталуының орташа мән туралы екінші теоремасы мен Коши критерийіне негізделген Дирихле және Абель белгілері, функциялық қатар тәрізді.

7. Сегмент пен біржақты шенелмеген аралықтың тіке көбейтіндісі болатын жолақтағы параметр деп аталатын айнымалыға тәуелді үзіліссіз теріс емес функцияның меншіксіз интегралының параметр бойынша бірқалыпты жинақталуының Дини белгісі – сол меншіксіз интеграл арқылы анықталған функцияның сегментте үзіліссіз болуы, функциялық қатар тәрізді.

8. Меншіксіз интеграл түрінде берілген функциялардың қайталамалы шектер арқылы сипатталатын локалді қасиеттері, функциялық қатар тәрізді.

§3. МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДЫҢ ПАРАМЕТР БОЙЫНША БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУЫ, ФУНКЦИЯЛЫҚ ҚАТАРДАҒЫДАЙ, ИНТЕГРАЛ АСТЫ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІК, ИНТЕГРАЛДАНУ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУ ҚАСИЕТТЕРІНІҢ ПАРАМЕТР ДЕП АТАЛАТЫН АЙНЫМАЛЫҒА ТӘУЕЛДІ НҮКТЕЛІ ЖИНАҚТАЛАТЫН МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛМЕН АНЫҚТАЛҒАН ФУНКЦИЯҒА КӨШІРІЛУІ

1. Параметр деп аталатын айнымалыға тәуелді нүктелі жинақталатын меншіксіз интеграл анықтайтын функцияның үзіліссіздігі – интеграл астындағы функцияның үзіліссіздігі мен меншіксіз интегралдың бірқалыпты жинақталуы үзіліссіздік анықтамасындағы шек пен интеграл амалдарының ауыстырымдылығын қамтамасыз етуі.

2. Параметр деп аталатын айнымалыға тәуелді нүктелі жинақталатын меншіксіз интеграл анықтайтын функцияның интегралдануы – интеграл астындағы функцияның үзіліссіздігі мен меншіксіз интегралдың параметр бойынша бірқалыпты жинақталуының қайталанған интегралдар теңдігін қамтамасыз етуі.

3. Параметр деп аталатын айнымалыға тәуелді нүктелі жинақталатын меншіксіз интегралдың дифференциалдануы және меншіксіз интегралдану мен дифференциалдану амалдарының ауыстырымдылығы түрінде берілген туындыны есептеу формуласы – интеграл астындағы функцияның дербес туындыларының бар болуы, интеграл асты функция мен оның параметр бойынша алынған дербес туындысының меншіксіз интегралдарының бірқалыпты жинақталуы, туынды мен интеграл амалдарының ауыстырымдылығын қамтамасыз етуі, функциялық қатар тәрізді.

§4. ЕРЕКШЕ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРДЫ ДӘЛ ЕСЕПТЕУ ҮШІН ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ

1. $\int_0^\infty \frac{sint}{t}dt$ интегралы.

2. $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt$ Пуассон интегралы.

§5. ГАММА-ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ БЕТА-ФУНКЦИЯ - НЕГІЗГІ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР МАҢЫЗДЫЛЫҒЫ ДЕҢГЕЙІНДЕГІ ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛДАРЫ

1. Гамма-функция – дискретті факториал тізбегін ақырсыз дифференциалданатын үзіліссіз жалпылауы.

2. Бета-функция – дискретті айнымалылы бинаминалды коэффициенттердің үзіліссіз жалпылауы.

3. Эйлер интегралдарының арасындағы байланыс формулалары.

XX ТАРАУ. ФУРЬЕ ҚАТАРЛАРЫ

§1. ОРТОНОРМАЛАНҒАН ЖҮЙЕ БОЙЫНША ФУРЬЕ-РИМАН ҚАТАРЫ

1. Жазықтықтағы вектордың тік декарттық координаталар жүйесінің орттары бойынша жіктелуі Фурье қатары теориясының екі өлшемді геометриялық суреттемесі ретінде.

2. Жазықтықтағы вектордың екіөлшемді тік декарттық координаталар жүйесінің орттарына түсірілген вектор проекциясының қосындысы түріндегі Фурье жіктелуінің

аналитикалық сипаттамасы – вектордың ортқа түсірілген проекциясы Фурье коэффициенті атты оның ортпен скалярлық көбейтіндісі мен сол ортқа көбейту түрінде жазылуы.

3. Жазықтықтағы Фурье жіктеуінің жалпы n-өлшемі Евклид кеңістігіне аналитикалық көшірмесі.

4. n-өлшемді Евклид кеңістігіндегі Фурье жіктеуінің бекітілген сегментте анықталған және Риман бойынша интегралданатын барлық функциялар жиынына тарату тәртібі – n-өлшемді Евклид кеңістігіндегі әр векторды n вектордан құралған ортонормаланған базис арқылы жіктеуінің сегментте анықталған екі Риман бойынша интегралданатын функцияның Риман интегралы арқылы анықталған скаляр көбейтіндісі арқылы функциялар тізбегінің ортонормаланған, ашып айтқанда ортогоналды және нормаланған, жүйесі бойынша функция жағдайына тарату.

5. Ақырлы n-өлшемді Евклид кеңістігіндегі Фурье жіктеуі әр элементтің өзіне тең болса, Риман бойынша интегралданатын функциялар жиынындағы Фурье қатары нүктелі жинақталуы және жинақталғанда да сол функцияның өзіне тең болу мәселелерімен ерешеленуі.

6. Функция мен оның Фурье қатарының арақатынасын «˜» таңбасымен белгілеу – Фурье қатарына оның коэффициенттерінің Фурье формулалары бойынша функция арқылы жазылуынан басқа байланыстар талап етілмейді, соның ішінде Фурье қатарының жинақталуы не жинақталмауы, нүктелі жинақталған жағдайда сол функцияға жинақталуы да талап етілмеуін зерттеу арнайы терең теорияны дамытуды қажет етеді.

7. Функция мен оның Фурье қатарының арақатынасын «˜» таңбасымен белгілеуді нақтылау мәселелері – Фурье қатарының жеке нүктеде, жиында нүктелі және бірқалыпты, т.с.с. жинақталу түрлері мен соларды қамтамасыз ететін функцияға қойылатын шарттар.

8. Ортогоналды жүйені нормаландырып, ортонормаланған жүйеге айналдыру және түрленген жүйе арқылы Фурье формулаларын жазу мен Фурье қатарын құру.

9. Тригонометриялық ортогоналды жүйе және оның Фурье формулалары.

10. Сызықты тәуелсіз жүйе мен оны ортогоналдандыру және $1, x, x^2, \ldots$ дәрежелік жүйені ортогоналдырғанда пайда болатын Лежандр көпмүшеліктер мысалы.

11. Ортогоналды жүйе құрамы артық та, кем де болмауы керек – сызықтық тәуелсіз болуына байланысты олардың сызықтық комбинациясы түріндегі бір ғана жаңа функцияны қосқан бойда жүйенің тәуелсіздігін, онымен қоса жаңарған жүйенің ортогоналдылығын жоғалтқандықтан ешқандай артық мүшені қамтымайды және де сол функцияны өзінің Фурье қатарына жіктелу қасиетін жоғалтуына байланысты бір де бір элементін алып тастай алмайды.

12. Ортогоналды нормаланбаған тригонометриялық жүйе бойынша оның нормалау коэффициентін Фурье формулаларына көбейткіш ретінде жазу арқылы Фурье қатарының сол жүйе бойынша жазылуы.

13. Тригонометриялық Фурье қатарының жинақталу анықтамасындағы дербес қосындылары.

14. Ортонормаланған жүйе, сол бойынша құрылған кез келген коэффициентті ортогоналды қатар мен коэффициенттері Фурье формуласы арқылы анықталған оның дербес жағдайы болатын интегралданатын функцияның Фурье қатары және Фурье қатарларының толық атауындағы жүйе, интеграл, Фурье сөздерінің орны.

§2. ОРТОНОРМАЛАНҒАН ЖҮЙЕ БОЙЫНША ФУРЬЕ-РИМАН ҚАТАРЛАРЫНЫҢ ОРТТАРҒА ТҮСІРІЛГЕН ПРОЕКЦИЯЛАРЫ ТІЛІНДЕГІ ЖУЫҚТАУ ҚАСИЕТТЕРІ

1. Функциялар жүйесі бойынша құрылған көпмүшеліктер, солардың ішінде алгебралық көпмүшелік және тригонометриялық көпмүшелік.

2. Орторнормаланған жүйе бойынша Фурье-Риман қатарының дербес қосындысының минималдық қасиеті – функцияның дербес қосындысындай ретті кез келген көпмүшеліктен ауытқуының орташа квадраттық нормасы мәнінің көпмүшелік коэффициенті Фурье формуласымен есептелгенде ең кіші болуы.

3. Бессель теңсіздігі атты орторнормаланған жүйе орттарына түсірілген функция проекцияларының квадраттарының қосындысының функция «ұзындығының» квадратынан аспауы.

4. Риман бойынша интегралданатын функцияның әр ортонорормаланған жүйе бойынша Фурье-Риман коэффициенттерінің нөлге ұмтылуы.

5. Ортогоналды және нормаланған жүйе бойынша Фурье-Риман қатарының дербес қосындысының минималдық қасиетінің нормалану талабы қойылмай, тек ортогоналды ғана жүйе жағдайына көшірілуі.

6. Орторнормаланған жүйе бойынша Фурье-Риман қатарының дербес қосындысының минималдық қасиетінің және Фурье-Риман коэффициенттерінің нөлге ұмтылуының меншіксіз Риман интегралы жағдында да сақталуы.

7. Ортогоналды және нормаланған жүйедегі Бессель теңсіздігі жазылуын тек ортогоналды ғана жүйе жағдайына көшірілуі.

8. Риман бойынша интегралданатын барлық функциялардан құрылған жиында толық және тұйық ортонормаланған жүйелердің пара-парлығы – сәйкесінше, сол жүйеде әр интегралданатын функцияның Фурье-Риман қатары оған орташа квадраттық мағынада жинақталуы мен Бессель теңсіздігінің Парсеваль атты теңдікке айналуының бір уақытта орындалуы.

9. Ортонормаланған жүйе бойынша алынған Фурье-Риман қатарының дербес қосындыларының минималдық қасиеттің геометриялық суреттемесін үш өлшемді евклид кеңістік мысалында сипаттау – функция мен n-өлшемді евклид кеңістігінің элементтерінің Фурье қатары мен қосындысы негізінде идеялық тұрғадан бірдейлігі.

10. Парсеваль теңдігінің үзіліссіз жағдайды беретін Риман бойынша интегралданатын барлық функциялар жиынында дискреттік n-өлшемді евклид кеңістігіндегі Пифагор теоремасымен орттарға түсірілген проекциалары тұрғысындағы мазмұндық бірлігі.

11. Ортонормаланған жүйе бойынша алынған Фурье-Риман қатары бола алмайтын ортогоналды қатар – коэффициенттері нөлге ұмтылмаса болғаны.

§3. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУРЬЕ-РИМАН ҚАТАРЛАРЫНЫҢ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ТӨҢІРЕГІНДЕГІ МӘСЕЛЕЛЕР

1. Тригонометриялық жүйе – ортогоналды және ортонормаланған түрлері.

2. Ортонормаланған тригонометриялық жүйе жағдайындағы Бессель теңсіздігі және де сондағы Риман теоремасы атты тригонометриялық Фурье-Риман коэффициенттерінің нөлге ұмтылуының айқын көрінісі. Риман теоремасының жалпылауы – периодтың орнына шенелмегенді де қамтитын кез келген аралық алынып, бүтін мәнді параметр кез келген нақты санға алмастырылып, оны шексіздікке ұмтылдырғанда осылай кеңейтілген Фурье формуласының нөлге ұмтылуы.

Коэффициенттері нөлге ұмтылса да тригонометриялық қатар Фурье-Риман қатары болмауы да мүмкін.

§4. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУРЬЕ-РИМАН ҚАТАРЫНЫҢ ДЕРБЕС ҚОСЫНДЫЛАРЫНЫҢ ДИРИХЛЕ ИНТЕГРАЛЫ АТТЫ ЖИНАҚЫ ТҮРДЕ ЖАЗЫЛУЫ МЕН ОНЫҢ ЖИНАҚТАЛУЫНЫҢ РИМАН КӨРСЕТКЕН ЛОКАЛДАНДЫРУ ПРИНЦИПІ

1. Функцияның тригонометриялық Фурье-Риман қатарының дербес қосындысының сол функцияның Дирихле ұйтқысымен үйірткісі(сверткасы) түрінде бейнеленуі.

2. Тригонометриялық Фурье-Риман қатарының үзіліссіздік нүктесінде функцияның өзіне жинақталуының Риман локалдандыру принципі – қатардың дербес қосындысы анықталу жиыны болатын бүкіл периодтағы функция құрылысына тәуелді Фурье коэффициенттері арқылы құрылғанмен де, әр үзіліссіздік нүктесінде жинақталуы таңқаларлық түрде функцияның сол бір нүктенің маңайындағы ғана өзгеру тәртібіне тәуелді.

§5. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ НҮКТЕДЕ ЖИНАҚТАЛУЫНЫҢ КЕЙБІР ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ

1. Тригонометриялық Фурье-Риман қатарының нүктеде жинақталуының кеңейтілген Фурье формуласының нөлге ұмтылуын беретін Риман теоремасына бейімделген Дирихле формуласымен өрнектелген жазылуы.

2. Функция өсімшесінің интегралдау айнымалысы болатын нүктедегі аргумент өсімшесіне қатынасының абсолютті интегралдануы тригонометриялық Фурье-Риман қатарының сол нүктеде функцияның мәніне жинақталуын қамтамасыз етеді.

3. Функцияның оң және сол жақты ақырлы туындылары бар болуы тригонометриялық Фурье-Риман қатарының сол нүктеде оң және сол жақты шектерінің арифметикалық ортасына жинақталуын қамтамасыз етеді де бұл жайт функцияның осы нүктеде оң және сол жақты шектер өзара тең болғандағы үзіліссіздік жане олар өзара тең болмағандағы үзіліс жағдайларын қамтиды.

4. 2π-периодты функцияның сан өсінің әр нүктесінде тең болуы міндетті емес оң және сол жақты ақырлы туындылары бар болуы тригонометриялық Фурье-Риман қатарының сан өсінде нүктелі жинақталуын қамтамасыз етеді де, әр нүктедегі аталмыш қатар шегі функцияның сондағы оң және сол жақты шектерінің қосындысының жартысына тең болады.

5. 2π-периодты функцияның әр нүкте ақырлы(екі жақты) дифференциалдануы тригонометриялық Фурье-Риман қатарының сол үзіліссіз функцияға сан өсінде нүктелі жинақталуын қамтамасыз етеді.

6. 2π-периодты функция толық периодта Риман бойынша меншіз абсолютті интегралданып, міндетті түрде үзіліссіз емес, қайсібір нүктеде оң және сол жақты ақырлы шектері бар болып, оң және сол жақты шектер арқылы анықталған сәйкес оң жақты және сол жақты туындыларының бар болуы меншіксіз Риман интегралы арқылы анықталған тригонометриялық Фурье-Риман қатарының сол нүктеде функцияның оң және сол жақты шектерінің қосындыларының жартысына жинақталуын қамтамасыз етеді.

7. Міндетті түрде үзіліссіз емес, әр нүктеде оң және сол жақты ақырлы шектері бар функцияның меншіксіз Риман интегралы бойынша анықталған тригонометриялық Фурье қатарының, әрине Фурье-Риман жағдайын да қамтитын, сол нүктеде функцияның оң және сол жақты шектерінің қосындыларының жартысына жинақталуын беретін Дини теоремасы – Дини интегралдық шарты деп аталатын оң және сол жақты шектер арқылы анықталған функция өсімшесінің интегралдау айнымалысы болатын аргумент өсімшесіне қатынасының қосындысының нөл нүктесінің маңайында өсімше ретінде алынған интегралдау айнымалысы бойынша интегралының абсолютті жинақталуы.

8. 2π-периодтта саны ақырлы болатын нүктелерде үзілісті болуы мүмкін, қалған нүктелерде оң жақты да, сол жақты да үзіліссіз дифференциалданатын, соның ішінде период бойында үзіліссіз дифференциалданатын функциялардың тригонометриялық Фурье-Риман қатары үзіліс нүктелерінде оң және сол жақты шектерінің қосындыларының жартысына, ал басқа нүктелерде функция мәніне нүктелі жинақталуы – Дини теоремасының салдары.

9. 2π-периодты абсолютті интегралданатын функцияның берілген нүктедегі функция өсімшесінің абсолют шамасының аргумент өсімшесінің модулінің оң бірден аспайтын дәрежесімен шенелетін және дәреже көрсеткіші бірге тең болғанда Липщиц шартына айналатын Гельдер шарты атты теңсіздікті қанағаттандыратын нүктеде тригонометриялық Фурье қатарының функция мәніне жинақталуы – Дини теоремасының салдары.

10. Айқын түрде берілген функцияны Фурье қатарына жіктеу мақсатында ұзындығы 2π-ге тең кесінді таңдап, сол таңдалған периодтың шеткі нүктелерінде арифметикалық орта арқылы функцияны анықтау, түбінде жинақталу теоремаларын қолдануға ыңғайлап, нәтижесінде интегралдарды Фурье формуласымен есептеуге әкелу жолын мысалдармен көрсету.

§6. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУРЬЕ-РИМАН ҚАТАРЫНЫҢ ОНЫ ЖАРАТҚАН ФУНКЦИЯНЫ АНЫҚТАУ ТӨҢІРЕГІНДЕГІ МӘСЕЛЕЛЕР

1. Дю Буа Реймон алдын ала берілген нүктеде тригонометрикалық Фурье қатары жинақталмайтын үзіліссіз функцияның, А.Н.Колмогоров сан өсінің әр нүктесінде жинақталмайтын Фурье қатарының мысалын бергендіктен, өзінің коэффициенттерімен толық анықталатын тригонометриялық қатар соның Фурье жіктелуі болатын функцияны құру мәселесінің туындауы.

2. Берілген n нақты санды қосынды мәнін сақтай отырып әрқайсысын алмастыратын, сол сандардың арифметикалық ортасы деп аталатын бір санмен сипаттау.

3. Фейер теоремасы – 2π-периодты үзіліссіз функцияның тригонометриялық Фурье-Риман қатарының алғашқы n дербес қосындыларының Фейер ортасы деп аталатын арифметикалық ортасы болатын тізбектің сол Фурье қатарын жаратқан функцияға бірқалыпты жинақталуы.

4. Коэффициенттерімен толық анықталған тригонометриялық қатар үзіліссіз функцияның Фурье-Риман қатары екендігі қандай да бір себептермен белгілі болғанда, тіпті Дю Буа Реймон мысалындағыдай үзіліссіз бола тұра кейбір нүктелерде жинақталмағандықтан қатардың нүктелі жинақталуы арқылы ізденісті функция тікелей табылмайды да, Фейер теоремасы қатарды жаратқан функцияны тригонометриялық қатардың дербес қосындыларының арифметикалық ортасының бірқалыпты шегі түрінде бейнелейді.

5. Вейерштрасс теоремасы – кез келген 2π-периодты үзіліссіз функция алдын ала берілген дәлдікпен тригонометриялық көпмүшелікпен жуықталады, әйткенмен сол көпмүшелік реті ешқандай тәртіпке бағынбайды.

6. Ортогоналды жүйелер арасындағы тригонометриялық жүйе ерекшелігі – Бессель теңсіздігінің Пифагор теоремасының жалпылануы болатын Парсеваль теңдігіне айналуы.

7. Үзіліссіз функцияның тригонометриялық Фурье-Риман қатарының жалғыздығы - тригонометриялық Фурье-Риман қатарлары бірдей екі үзіліссіз 2π-периодты функциялар периодта өзара беттеседі.

§7. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ЖҮЙЕНІҢ КОМПЛЕКС ТҮРІ ЖӘНЕ СОЛ БОЙЫНША АНЫҚТАЛҒАН ФУРЬЕ-РИМАН ҚАТАРЛАРЫН МҮШЕЛЕП ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДАУ

1. Бүкіл математиканы құрайтын ұғымдарды таңдау негізгі есептерді шығару барысында да жүзеге асырылады – бір қарағанда алгебралық теңдеулердің, соның ішінде ең қарапайым, квадратының бірмен қосындысы нөл болатын теңдеудің де шешімі бар болатындай көрінгендіктен, сол санды табу ниетінде емес, коэффициенттерімен берілген кубтық теңдеудің шешімдерін сол коэффициенттер арқылы табу формуласы, тіпті коэффициенттері де, шешімдері де нақты сандар болғанда да, комплекс сандар өрісіне шықпай сол шешімдерді табу мүмкін еместігінен пайда болған комплекс сандар.

2. Комплекс сандар туралы алғашқы мәлімет – квадраты -1 санына тең нақты сан болмағандықтан осы қасиетті қанағаттандыратын жорамал бірлік атты табиғаты мүлдем жаңа сан енгізіліп, нақты саннан тұратын нақты бөлік пен нақты сан мен жорамал бірліктің көбейтіндісі болатын жорамал бөліктердің қосындысынан құралған комплекс сандар және оларға қолданылатын арифметикалық амалдар.

3. Нақты мәнді айнымалылы комплекс мәнді функция және оның нақты және жорамал бөліктерді құрайтын қос нақты мәнді функциялармен қажетті де, жеткілікті де байланысы – комплекс мәнді функцияның шегін, туындысын, интегралын және скаляр көбейтіндісін оны анықтайтын екі айнымалылы функциялар арқылы есептеу формулалары.

4. Эйлер формуласы – жаратылыстағы қасиетті бес санның бірі болатын санының бұрыннан анықталған нақты мәнді дәрежесінің жаңа жорамал дәрежелі мағынамен толтырылып, нәтижесінде комплекс дәрежеге кеңейтілуі.

5. Бүтін сандар жиынында анықталған комплекс мәнді функция – бүтін сандар жиынында анықталған комплекс мәнді тізбек және оның жинақталу анықтамалары.

6. Тригонометриялық жүйенің комплекс түріндегі жазылуы – теріс емес бүтін сандар жиындағы тригонометриялық жүйедегі sin пен cos функцияларын Эйлер формулалары арқылы көшірілгендегі барлық бүтін сандар жиынында анықталған жүйе ретінде.

7. Қатар түрін сақтайтын ерекше қасиетпен тригонометриялық Фурье-Риман қатарын мүшелеп дифференциалдау – периодта r-ретті бөлік-бөлік үзіліссіз дифференциалданатын 2π-периодты функцияның r-ретті туындысының Фурье-Риман қатарының бастапқы функция Фурье-Риман қатарын r-рет мүшелеп туындылау арқылы анықталуы, туындының Фурье коэффициенттерін есептеу формулалары және бастапқы функцияның абсолютті және бірқалыпты жинақталатын Фурье қатарының дербес қосындыларының оны жаратушы функциядан ауытқуының абсолют шамасының жоғарыдан бағалауы.

8. Нүктелі жинақталуы талап етілмейтін тригонометриялық Фурье-Риман қатарын мүшелеп интегралдағандағы қатардың период бойында бірқалыпты жинақталуы – бөлік-бөлік үзіліссіз 2π-периодты функцияның Фурье-Риман қатарын периодта жататын кез келген сегментте мүшелеп интегралдағандағы қатардың бірқалыпты жинақталуы.

XXI ТАРАУ. ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІ – ПЕРИОДТЫ ЕМЕС БҮКІЛ НАҚТЫ САНДАР ЖИЫНЫНДА БЕРІЛГЕН ФУНКЦИЯЛАР ҮШІН ФУРЬЕ ҚАТАРЛАРЫНЫҢ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ АРҚЫЛЫ ТАРАТЫЛУЫ

§1. НАҚТЫ САНДАР ЖИЫНЫНДА АБСОЛЮТТІ ИНТЕГРАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯНЫҢ ЖЕКЕ НҮКТЕДЕ ЖӘНЕ БАРЛЫҚ АНЫҚТАЛУ ЖИЫНДА ФУРЬЕ-РИМАН ИНТЕГРАЛЫ ТҮРІНДЕ ӨРНЕКТЕЛУІ

1. Гармоникалық анализдегі 2π-периодты функцияның Фурье-Риман қатары болатын дискретті жағдайынан барлық сан өсінде анықталған және меншіксіз Риман бойынша абсолютті интегралданатын функцияның Фурье-Риман интегралы атты үзіліссіз жағдайға өту – Фурье коэффициентінен Фурье түрлендірулеріне, Фурье-Риман қатарынан Фурье-Риман интегралына.

2. Сан өсінде берілген және абсолютті интегралданатын функцияның жеке нүктедегі оң және сол жақты ақырлы шектері арқылы анықталған функция өсімшесінің интегралдау айнымалысы болатын аргумент өсімшесіне қатынасының интегралының нөлдің маңайында абсолютті жинақталуы функцияның нүктедегі оң және сол жақты шектер қосындысының жартысына Фурье-Риман интегралының теңдігін беретін Дини теоремасы.

3. Сан өсінде берілген және абсолютті жинақталатын функция үшін Дини теоремасының шарттарын жеке-жеке қамтамасыз ететін математикалық анализдің қалыпты тілімен берілген үш жағдайы – ақырлы туындысы бар болатын немесе функция үзіліссіздік өлшемінің деңгейін дәрежелік жылдамдықпен беретін Гелдер теңсіздігін қанағаттадыратын нүктеде, соның ішінде әр нүктеде орындалғанда барлық анықталу жиынында, Фурье-Риман қатары тәрізді Фурье-Риман интегралының функция мәніне теңдігін және функцияның нүктеде оң және сол жақты ақырлы туындыларының бар болуы Фурье интегралының оң жақты және сол жақты шектер қосындысының жартысына теңдігін беруі.

§2. ФУРЬЕ-РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ КОМПЛЕКС ТҮРІНДЕГІ ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ТҮРЛЕНДІРУЛЕРІ

1. Фурье-Риман интегралының комплекс түрдегі жазылуы.

2. Фурье коэффициенттерінен Фурье түрлендіруіне – периодты функцияның комплекс түрдегі Фурье-Риман қатарындағы Фурье коэффициенттерінен сан өсінде абсолютті интегралданатын функция үшін баламасы болатын Фурье түрлендіруіне өту жолы.

3. Коэффициенттері Фурье формуласымен есептелетін Фурье-Риман қатарын қамтитын кез келген коэффициенті дискретті тригонометриялық қатардың үзіліссіз жағдайы болатын кері Фурье түрлендіруі.

4. Фурье-Риман түрлендіруі бойынша функцияның өзіне оралу формуласы – өз коэффициенттерімен анықталатын тригонометриялық қатарға берілген функцияның Фурье формуласымен есептелген коэффициенттерін қойғанда сол функцияға нүктелі

жинақталатын жағдайындағыдай тура Фурье-Риман түрлендіруінің кері Фурье-Риман түрлендіруі сол функцияға қайтадан нүктелі алып келуі.

5. Тура және кері Фурье түрлендіруінің сан өсіндегі қасиеттері – шенелгендігі мен үзіліссіздігі, шексіздікте нөлге ұмтылуы, функцияның жатықтық қасиеттерін сақтауы, Фурье түрлендіруінің туындысы мен оны есептеу формуласы, жылдам азаятын функциялардың Фурье түрлендіруі.

6. Тригонометриялық тура және кері Фурье түрлендіру формулаларындағы тек экспонента көрсеткішінің таңбасындағы ғана айырмашылық – Гармоникалық анализ атты терең теориялы ілімнің негізін қалайтын ерекше жағдай.

§3. ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ МЕН ОНЫҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНУЛАРЫ

1. Тура және кері Фурье-Риман түрлендірулерінің қолданысын моделдік жай дифференциалдық теңдеу мысалында көрсету – тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеуге тура Фурье-Риман түрлендіруін қолданғанда пайда болған сызықтық теңдеу шешіміне кері Фурье-Риман түрлендіруін қолдану арқылы бастапқы теңдеудің шешімін табу.

2. Тура және кері Фурье түрлендірулерін толқындық тендеуге қолдану – жай дифференциалдық теңдеуге әкелу арқылы.

3. Пуассон формуласы – бүкіл нақты сандар жиынында анықталған сандық функцияның барлық бүтін мәнді нүктелердегі мәндерінен және сол нүктелердегі функцияның тура Фурье-Риман түрлендіруінен құрылған қатарлар қосындыларының теңдігі.

4. Функцияның сирек мәндері бойынша бүкіл мәндерін дәл беретін Котельников формуласы – функцияны бірқалыпты тор деп аталатын нөлді қамтитын арифметикалық прогрессиядағы оның тек дискретті мәндері арқылы барлық нүктедегі мәндерін дәл бейнелеу.

Список литературы

1 Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым). -Нұр-Сұлтан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2022. -2000 бет.

N. Temirgaliyev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Scientific, scientific-methodological and organizational report “The Institute of theoretical mathematics and scientific computing (ITMandSC) L.N.Gumilyov Eurasian National University in 2019 year (Part IV)”

Abstract: In the article ends *Synopsis*-Table of contents of the textbook "Mathematical analysis". The beginning was presented in Part III, where each chapters and paragraphs is entitled, on the one hand, in an expanded form conveying their theme in highlighting the essence and development of ideas, on the other hand, in a brief and informative form which is also sustained in this Part IV.

Keywords: Mathematical analysis, *Synopsis*-Content, mathematical structures in implementation, understanding of mathematics as the goal of the "Mathematical Analysis".

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный, научно-методический и организационный отчет «Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева в 2019 году (Часть IV)»

Аннотация: В статье завершается *Синопсис*-Оглавление учебника "Математикалық анализ". Начало было представлено в Части III, где каждый пункт и параграф озаглавлены с одной стороны в развернутой форме, передающей их темы в выделении сути и развитии идей, с другой стороны в возможно краткой и информативной форме, что выдержено и в этой Части IV.

Ключевые слова: Математический анализ, *Синопсис*-Оглавление, понимание математики как цель учебника "Математикалық анализ".

References

1 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz (ondelgen zhane tolyktyrylgan ekinshi basylym)[Mathematical analysis (revised and enlarged second edition)]. (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, 2022, 2000 p.).

Автор туралы мәлімет:

Темиргалиев Н. – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Теориялық математика және ғылыми есептеулер институтының директоры, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Қажымұқан, 11, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Temirgaliyev N. –Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukan str., 11, Nur-Sultan, Kazakhstan.