Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2021, Vol. 137, №4, P.6-13
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.33.15**

Л.Н.Раджабова [1] , Ф.М.Ахмадов [1,2]

[1] *Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан*
[2] *Институт туризма, предпринимательства и сервиса, Душанбе, Таджикистан*
(E-mail: lutfya62@mail.ru, farvar90@gmail.com)

Явные решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные

Аннотация: В работе изучается двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра с особой и сильно-особой граничными линиями. Решение двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особыми ядрами ищется в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль на граничных линиях.

В случаях, когда корни характеристических уравнений вещественные, разные и равные, параметры уравнений связаны между собой определенным образом, в зависимости от корней характеристических уравнений и знака параметров интегрального уравнения, находятся явные решения интегрального уравнения.

Доказано, что решения двумерного интегрального уравнения в зависимости от знака параметров могут содержать от одного до четырех произвольных непрерывных функций. Определены случаи, когда решение интегрального уравнения единственно.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение, особая линия, сильно-особая линия, характеристическое уравнение, произвольные непрерывные функции.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2021/4.1

2000 Mathematics Subject Classification: 45Rxx, 45-xx

Введение. Пусть дан открытый прямоугольник $D=\{(x,y):a<x<a_1,b<y<b_1\}$ с границами $\Gamma_1=\{y=b,\ a<x<a_1\}$, $\Gamma_2=\{x=a,\ b<y<b_1\}$.

Рассмотрим в прямоугольнике D двумерное интегральное уравнение:

$$u(x,y)+\int_a^x\left[p+q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt+$$
$$+\int_b^y\left[\lambda+\mu\big(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\big)\right]\frac{u(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+\int_a^x\left[p_1+q_1\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{dt}{t-a}\times$$
$$\times\int_b^y\left[\lambda_1+\mu_1\big(\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\big)\right]\frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds=f(x,y), \tag{1}$$

В уравнении (1) p, q, λ, μ, p_1, q_1, λ_1, μ_1 — заданные постоянные числа, $f(x,y)$ — заданная функция, $u(x,y)$ — искомая функция, $\omega_b^\beta(s)=\left[(\beta-1)(y-b)^{\beta-1}\right]^{-1}$, $\beta>1$.

Ранее в работах [1-2] Н.Раджабова были исследованы модельные одномерные интегральные уравнения типа Вольтерра со сверхсингулярной точкой, также были получены многообразия решений одномерного интегрального уравнения с сингулярной и логарифмической особенностью в ядре. В работах Л.Н.Раджабовой [3-5] изучены двухмерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми, сильно-особыми линиями, также с особенностью и логарифмической особенностью. В работах Л.Н.Раджабовой, А.Ф.Ахмадова [6-9] изучено двумерное интегральное уравнение типа Вольтерра (1) в случаях, когда корни характеристических уравнений являлись вещественными и разными, а также вещественными и равными. В данной работе исследуется случай, когда корни характеристических уравнений являются вещественными, разными и равными.

Решение интегрального уравнения (1) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{D})$, обращающихся в нуль при $x \to a$, $y \to b$ с асимптотическими поведениеми:

$$u(x,y) = o[(x-a)^{\varepsilon}],\ \varepsilon > 0 \text{ при } x \to a,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\nu}],\ \nu > 2(\beta-1) \text{ при } y \to b.$$

Рассмотрим случай, когда параметры уравнения (1) связаны между собой равенствами:

$$p = p_1,\ q = q_1,\ \lambda = \lambda_1,\ \mu = \mu_1. \tag{2}$$

При выполнении условий (2) уравнение (1) представим в виде:

$$\Pi^y_{\lambda,\mu}(T^x_{p,q}(u)) = f(x,y), \tag{3}$$

где

$$T^x_{p,q}(u) = u(x,y) + \int\limits_a^x \left[p + q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{u(t,y)}{t-a}dt = \psi(x,y), \tag{4}$$

$$\Pi^y_{\lambda,\mu}(\psi) = \psi(x,y) + \int\limits_b^y \left[\lambda + \mu\big(\omega^\beta_b(s) - \omega^\beta_b(y)\big)\right]\frac{\psi(x,s)}{(s-b)^\beta}ds = f(x,y). \tag{5}$$

Для интегральных уравнений (4) и (5), согласно [1-2], характеристические уравнения имеют вид:

$$(D_x)^2 u(x,y) + p(D_x)u(x,y) + qu(x,y) = (D_x)^2\psi(x,y),$$

$$(D_y)^2\psi(x,y) + \lambda(D_y)\psi(x,y) + \mu\psi(x,y) = (D_y)^2 f(x,y),$$

где $D_x = (x-a)\frac{d}{dx}$, $D_y = (y-b)^\beta\frac{d}{dy}$.

В случае, когда $\lambda < 0, \mu > 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$, если решение интегрального уравнения (5) существует, оно представимо в виде [1]:

$$\psi(x,y) = \varphi_1(x)e^{\eta_1\omega^\beta_b(y)} + \varphi_2(x)e^{\eta_2\omega^\beta_b(y)} + f(x,y) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2(\omega^\beta_b(y)-\omega^\beta_b(s))} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1(\omega^\beta_b(y)-\omega^\beta_b(s))}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds. \tag{6}$$

Соответственно, если решение интегрального уравнения (4) при $p < 0$, $p^2 - 4q = 0$ существует, тогда оно имеет вид [2]:

$$u(x,y) = (x-a)^{-\frac{p}{2}}\Big[\theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y)\Big] + \psi(x,y) +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\frac{p}{2}}\left[2 + \frac{p}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\psi(t,y)}{t-a}dt. \tag{7}$$

На основе равенств (6),(7) решение интегрального уравнения (1) представим в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{-\frac{p}{2}}\Theta(y) + e^{\eta_1\omega^\beta_b(y)}\Phi_1(x) + e^{\eta_2\omega^\beta_b(y)}\Phi_2(x) +$$

$$+K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = M_{p,\lambda,\mu}\Big[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)\Big], \tag{8}$$

где

$$\Theta(y) = \theta_1(y) + \ln(x-a)\theta_2(y),$$

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(x) + \frac{\lambda}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\frac{p}{2}}\left[2 + \frac{p}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\varphi_1(t)}{t-a}dt,$$

$$\Phi_2(x) = \varphi_2(x) + \frac{\lambda}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\frac{p}{2}}\left[2 + \frac{p}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\varphi_2(t)}{t-a}dt,$$

$$K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = f(x,y) + \frac{\lambda}{2}\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\frac{p}{2}} \left[2 + \frac{p}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,y)}{t-a}dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\right]\frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds+$$

$$+\frac{\lambda}{2\sqrt{\lambda^2-4\mu}}\int_b^y \left[(\eta_2)^2 e^{\eta_2(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))} - (\eta_1)^2 e^{\eta_1(\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s))}\right]\frac{ds}{(s-b)^\beta}\times$$

$$\times\int_a^x \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{-\frac{p}{2}} \left[2 + \frac{p}{2}\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{f(t,s)}{t-a}dt.$$

Основные результаты. На основе вышеизложенного имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры и правая часть удовлетворяют условиям (2), а также*

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0\,,\ p < 0\,,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda < 0, \mu > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})\,, f(a,b) = 0$ с асимптотическим поведением на Γ_1 и Γ_2:

$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\delta_1}\Big],\ \delta_1 > \frac{|p|}{2}$ при $x \to a,$

$f(x,y) = o\Big[e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_1}\Big],\ \nu_1 > \beta - 1$ при $y \to b.$

Тогда двумерное интегральное уравнение (1) в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x \to a$, $y \to b$ *всегда разрешимо. Явное решение интегрального уравнения (1) представимо в виде (8), где* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ – *произвольные непрерывные функции точек Г1 и Г2, обращающиеся в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$\varphi_i(x) = o\big[(x-a)^{\delta_2}\big],\ \delta_2 > \frac{|p|}{2},$ при $x \to a,\ i = (1,2)$

$\theta_j(y) = o\big[(y-b)^{\nu_2}\big],\ \nu_2 > 2(\beta-1),$ при $y \to b,\ j = (1,2).$

$\eta_1 = \frac{\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2} < 0\,, \eta_2 = \frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2} < 0\,, (\eta_1 - \eta_2 > 0).$

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 1 любое решение уравнения (1) из класса* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *обращается в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o\Big[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\Big]$ при $x \to a,$

$u(x,y) = o\Big[(y-b)^{\nu_3}\Big],\ \nu_3 > 2(\beta-1)$ при $y \to b.$

Теорема 2. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры и правая часть удовлетворяют условиям (2), также условиям*

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0\,,\ p > 0\,,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda < 0, \mu > 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})\,, f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2 *:*

$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big],\ \varepsilon > 0,$ при $x \to a,$

$f(x,y) = o\Big[e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_4}\Big],\ \nu_4 > \beta - 1,$ при $y \to b.$

Тогда двумерное интегральное уравнение (1) в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x \to a$, $y \to b$ *всегда разрешимо. Явное решение интегрального уравнения (1) представимо в виде:*

$$u(x,y) = e^{\eta_1\omega_b^\beta(y)}\Phi_1(x) + e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = M_{p,\lambda,\mu}\Big[\varphi_1(x), \varphi_2(x), 0, 0, f(x,y)\Big], \tag{9}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ *–произвольные непрерывные функции точек Г1, обращающиеся в нуль при* $x \to a$ *, с асимптотическими поведениями:*

$\varphi_i(x) = o\big[(x-a)^{\varepsilon}\big],\ \varepsilon > 0,$ при $x \to a,\ i = (1,2)$

$\eta_1 = \frac{\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2} < 0\,, \eta_2 = \frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2} < 0\,, (\eta_1 - \eta_2 > 0).$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 2 любое решение уравнения (1) из класса $u(x,y) \in C(\overline{D})$ обращается в нуль при $x \to a$, $y \to b$ с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big],\ \varepsilon > 0$ при $x \to a$,

$u(x,y) = o\Big[(y-b)^{\nu_5}\Big],\ \nu_5 > 2(\beta-1)$ при $y \to b$.

Теорема 3. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры и правая часть удовлетворяют условиям (2), также условиям*

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0\,,\ p < 0\,,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda > 0, \mu < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})\,, f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2*:*

$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\delta_3}\Big],\ \delta_3 > \frac{|p|}{2},$ при $x \to a$,

$f(x,y) = o\Big[e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_6}\Big],\ \nu_6 > \beta - 1,$ при $y \to b$.

Тогда двумерное интегральное уравнение (1) в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x \to a$, $y \to b$ всегда разрешимо. Явное решение интегрального уравнения (1) представимо в виде:

$$u(x,y) = (x-a)^{-\frac{p}{2}}\Theta(y) + e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)}\Phi_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = M_{p,\lambda,\mu}\Big[0, \varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y), f(x,y)\Big], \tag{10}$$

где $\varphi_2(x), \theta_1(y), \theta_2(y)$ –произвольные непрерывные функции точек Г1 и Г2, обращающиеся в нуль при $x \to a$, $y \to b$ с асимптотическими поведениями:

$\varphi_2(x) = o\big[(x-a)^{\delta_4}\big],\ \delta_4 > \frac{|p|}{2},$ при $x \to a$,

$\theta_j(y) = o\big[(y-b)^{\nu_7}\big],\ \nu_7 > 2(\beta-1),$ при $y \to b,\ j = (1,2),$

$\eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_2}}{2} > 0\,, \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0\,, (\eta_1 - \eta_2 > 0).$

Следствие 3. *При выполнении условий теоремы 3 любое решение уравнения (1) из класса $u(x,y) \in C(\overline{D})$ обращается в нуль при $x \to a$, $y \to b$ с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o\Big[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\Big]$при $x \to a$,

$u(x,y) = o\Big[(y-b)^{\nu_8}\Big],\ \nu_8 > 2(\beta-1)$ при $y \to b$.

Теорема 4. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры и правая часть удовлетворяют условиям (2), также условиям*

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0\,,\ p > 0\,,$
2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda > 0, \mu < 0,$
3. $f(x,y) \in C(\overline{D})\,, f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2*:*

$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big],\ \varepsilon > 0$ при $x \to a$,

$f(x,y) = o\Big[e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_9}\Big],\ \nu_9 > \beta - 1$ при $y \to b$.

Тогда двумерное интегральное уравнение (1) в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x \to a$, $y \to b$ всегда разрешимо. Явное решение интегрального уравнения (1) представимо в виде:

$$u(x,y) = e^{\eta_2 \omega_b^{\beta}(y)}\Phi_2(x) + K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = M_{p,\lambda,\mu}\Big[0, \varphi_2(x), 0, 0, f(x,y)\Big], \tag{11}$$

где $\varphi_2(x)$ –произвольная непрерывная функция точек Г1, обращающаяся в нуль при $x \to a$ с асимптотическим поведением:

$\varphi_2(x) = o\big[(x-a)^{\varepsilon}\big],\ \varepsilon > 0$ при $x \to a$,

$\eta_1 = \frac{\lambda + \sqrt{\Delta_2}}{2} > 0\,, \eta_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\Delta_2}}{2} < 0\,, (\eta_1 - \eta_2 > 0).$

Следствие 4. *При выполнении условий теоремы 4 любое решение уравнения (1) из класса $u(x,y) \in C(\overline{D})$ обращается в нуль при $x \to a$, $y \to b$ с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big],\ \varepsilon > 0$ при $x \to a$,

$u(x,y)=o\Big[e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Big]$, при $y\to b$.

Теорема 5. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры и правая часть удовлетворяют условиям (2), также условиям*

1. $\Delta_1=p^2-4q=0\,,\ p<0\,,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda<0,\mu<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})\,, f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2 *:*

$f(x,y)=o\Big[(x-a)^{\delta_5}\Big],\ \delta_5>\frac{|p|}{2},$ при $x\to a,$

$f(x,y)=o\Big[e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{10}}\Big],\ \nu_{10}>\beta-1,$ при $y\to b.$

Тогда двумерное интегральное уравнение (1) в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x\to a$ *,* $y\to b$ *всегда разрешимо. Явное решение интегрального уравнения (1) представимо в виде:*

$$u(x,y)=(x-a)^{-\frac{p}{2}}\Theta(y)+e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x)+K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)]=M_{p,\lambda,\mu}\Big[0,\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y),f(x,y)\Big], \tag{12}$$

где $\varphi_2(x),\theta_1(y),\theta_2(y)$ *–произвольные непрерывные функции точек Г1 и Г2, обращающиеся в нуль при* $x\to a$ *,* $y\to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$\varphi_2(x)=o\big[(x-a)^{\delta_6}\big],\ \delta_6>\frac{|p|}{2},$ при $x\to a,$

$\theta_j(y)=o\big[(y-b)^{\nu_{11}}\big],\ \nu_{11}>2(\beta-1),$ при $y\to b,\ j=(1,2),$

$\eta_1=\frac{\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2}>0\,,\eta_2=\frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2}<0\,,(\eta_1-\eta_2>0).$

Следствие 5. *При выполнении условий теоремы 5 любое решение уравнения (1) из класса* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *обращается в нуль при* $x\to a$ *,* $y\to b$ *с асимптотическим поведением:*

$u(x,y)=o\Big[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\Big]$при $x\to a,$

$u(x,y)=o\Big[(y-b)^{\nu_{12}}\Big],\ \nu_{12}>2(\beta-1)$ при $y\to b.$

Теорема 6. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры и правая часть удовлетворяют условиям (2), также условиям*

1. $\Delta_1=p^2-4q=0\,,\ p>0\,,$
2. $\Delta_2=\lambda^2-4\mu>0,\lambda<0,\mu<0,$
3. $f(x,y)\in C(\overline{D})\,, f(a,b)=0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2 *:*

$f(x,y)=o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big],\ \varepsilon>0,$ при $x\to a,$

$f(x,y)=o\Big[e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\nu_{13}}\Big],\ \nu_{13}>\beta-1$ при $y\to b.$

Тогда двумерное интегральное уравнение (1) в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x\to a$ *,* $y\to b$ *всегда разрешимо. Явное решение интегрального уравнения (1) представимо в виде:*

$$u(x,y)=e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Phi_2(x)+K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)]=M_{p,\lambda,\mu}\Big[0,\varphi_2(x),0,0,f(x,y)\Big], \tag{13}$$

где $\varphi_2(x)$ *–произвольная непрерывная функция точек Г1, обращающаяся в нуль при* $x\to a$ *с асимптотическим поведением:*

$\varphi_2(x)=o\big[(x-a)^{\varepsilon}\big],\ \varepsilon>0$ при $x\to a,$

$\eta_1=\frac{\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2}>0\,,\eta_2=\frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2}<0\,,(\eta_1-\eta_2>0).$

Следствие 6. *При выполнении условий теоремы 6 любое решение уравнения (1) из класса* $u(x,y)\in C(\overline{D})$ *обращается в нуль при* $x\to a$ *,* $y\to b$ *с асимптотическим поведением:*

$u(x,y)=o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big],\ \varepsilon>0$ при $x\to a,$

$u(x,y)=o\Big[e^{\eta_2\omega_b^\beta(y)}\Big],$ при $y\to b.$

Теорема 7. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры и правая часть удовлетворяют условиям (2), также условиям*

1. $\Delta_1=p^2-4q=0\,,\ p<0\,,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda > 0, \mu > 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2 *:*

$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\delta_7}\Big],\ \delta_7 > \frac{|p|}{2},$ при $x \to a,$

$f(x,y) = o\Big[(y-b)^{\nu_{14}}\Big],\ \nu_{14} > 2(\beta-1),$ при $y \to b.$

Тогда двумерное интегральное уравнение (1) в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x \to a$, $y \to b$ *всегда разрешимо. Явное решение интегрального уравнения (1) представимо в виде:*

$$u(x,y) = (x-a)^{-\frac{p}{2}}\Theta(y) + K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = M_{p,\lambda,\mu}\Big[0,0,\theta_1(y),\theta_2(y),f(x,y)\Big], \qquad (14)$$

где $\theta_1(y), \theta_2(y)$ *–произвольные непрерывные функции точек Г2, обращающиеся в нуль при* $y \to b$ *с асимптотическими поведениями:*

$\theta_j(y) = o\big[(y-b)^{\nu_{15}}\big],\ \nu_{15} > 2(\beta-1),$ при $y \to b,\ j = (1,2),$

$\eta_1 = \frac{\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2} > 0\,, \eta_2 = \frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2} > 0\,, (\eta_1 - \eta_2 > 0).$

Следствие 7. *При выполнении условий теоремы 7 любое решение уравнения (1) из класса* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *обращается в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o\Big[(x-a)^{\frac{|p|}{2}}\Big]$ при $x \to a,$

$u(x,y) = o\Big[(y-b)^{\nu_{16}}\Big],\ \nu_{16} > 2(\beta-1)$ при $y \to b.$

Теорема 8. *Пусть в интегральном уравнении (1) параметры и правая часть удовлетворяют условиям (2), также условиям*

1. $\Delta_1 = p^2 - 4q = 0\,,\ p > 0\,,$

2. $\Delta_2 = \lambda^2 - 4\mu > 0, \lambda > 0, \mu > 0,$

3. $f(x,y) \in C(\overline{D})$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением на* Γ_1 *и* Γ_2 *:*

$f(x,y) = o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big],\ \varepsilon > 0,$ при $x \to a,$

$f(x,y) = o\Big[e^{\eta_1\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\nu_{17}}\Big],\ \nu_{17} > 2(\beta-1),$ при $y \to b.$

Тогда двумерное интегральное уравнение (1) в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль при $x \to a$, $y \to b$ *всегда разрешимо. Единственное решение интегрального уравнения (1) представимо в виде:*

$$u(x,y) = K_{p,\lambda,\mu}[f(x,y)] = M_{p,\lambda,\mu}\Big[0,0,0,0,f(x,y)\Big], \qquad (15)$$

где $\eta_1 = \frac{\lambda+\sqrt{\Delta_2}}{2} > 0\,, \eta_2 = \frac{\lambda-\sqrt{\Delta_2}}{2} > 0\,, (\eta_1 - \eta_2 > 0).$

Следствие 8. *При выполнении условий теоремы 8 любое решение уравнения (1) из класса* $u(x,y) \in C(\overline{D})$ *обращается в нуль при* $x \to a$, $y \to b$ *с асимптотическим поведением:*

$u(x,y) = o\Big[(x-a)^{\varepsilon}\Big],\ \varepsilon > 0$ при $x \to a,$

$u(x,y) = o\Big[(y-b)^{\nu_{18}}\Big],\ \nu_{18} > 2(\beta-1)$ при $y \to b.$

Заключение. Для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой граничными линиями получены явные представления многообразия решений, которые в зависимости от знака параметров уравнения могут содержать от одного до четырёх произвольных функций одной переменной. Выделен случай, когда решение двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и сильно-особой линиями единственно, который совпадает с классической теорий интегральных уравнений типа Вольтерра с регулярным ядром или ядром со слабой особенностью.

Список литературы

1 Раджабов Н. Об одном классе модельного сверх-сингулярного интегрального уравнения, обобщающий одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверх-сингулярной точкой в ядре// Материалы III международной конференции Проблемые дифференциальных уравнений анализа и алгебры -Актобе.- 2015.- С. 202-206.

2 Раджабов Н. Об одном классе модельного сингулярного интегрального уравнения, обобщающего одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сингулярной точкой в ядре// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук - 2012. - №1. - С. 21-32.

3 Rajabova L. On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super-singularity // Mathematical Notes.- Miscolc.- 2003.- V4.- №1.- Pp. 65-76.

4 Раджабова Л.Н. Об одном общем двухмерном интегральном уравнении типа Вольтерра с особенностями на границе области// Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук - 2007. - №3(35). - С.30-38.

5 Rajabova L. About a class of two dimenshional Volterra type integral equations with singular boundary lines// Corrent Trends in analisis and its applications. Proccedings of the 9- th ISAAC Congress.- Krakow. - Pp. 128-133.

6 Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерного интегрального уранения типа Вольтерра с граничными особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные//Материалы международной конференции Актуальные проблемы современной математики-Душанбе. - 2021. - С.29-32.

7 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. О явных решениях двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и равные//Материалы международной научной конференции Современные проблемы математики и физики. - Стерлитамак. - 2021. - Т.1. - С.91-96.

8 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. К теории двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные//Вестник ТНУ. - серия естественных наук. - 2021. - №1. - С.78-88.

9 Раджабова Л.Н., Ахмадов Ф.М. О некоторых случаях решения двумерных интегральных уранений типа Вольтерра с граничной особой и сильно-особой линиями//ДНАН РТ. - 2021. - Т.64. - №(5-6). - С.283-290.

Л.Н.Раджабова [1] , Ф.М.Ахмадов [1,2]

[1] *Тәжік ұлттық университеті, Душанбе, Тәжікстан*
[2] *Туризм, кәсіпкерлік және сервис институты, Душанбе, Тәжікстан*

Сипаттамалық теңдеулердің түбірлері нақты, әртүрі және тең болғанда, шекаралық сингулярлы және күшті дара сызықтары бар Вольтерра типті екі өлшемді интегралдық теңдеудің айқын шешімдері

Аннотация: Мақалада ерекше және күшті-ерекше шекаралық сызықтарымен берілген екі өлшемді Вольтерра типті интегралдық теңдеуі қарастырылады. Ерекше ядролы екі өлшемді Вольтерра типті интегралдық теңдеуінің шешімі шекаралық сызықтарда нөлге айналатын үзіліссіз функциялар классында іздестіріледі.

Сипаттамалық теңдеулердің түбірлері нақты, әртүрлі және тең болған жағдайларда, теңдеу параметрлері сипаттамалық теңдеулердің түбірлеріне және интегралдық теңдеудің параметрлерінің белгісіне қарай байланысып, интегралдық теңдеудің айқын шешімдері табылады.

Екі өлшемді интегралдық теңдеудің шешімдері параметрлердің таңбасына байланысты бірден төртке дейін үзіліссіз функцияларды қамтуы мүмкін екендігі дәлелденді. Интегралдық теңдеудің шешімі жалғыз болатын жағдайлар анықталды.

Түйін сөздер: екі өлшемді интегралдық теңдеу, ерекше сызық, күшті дара сызық, сипаттамалық теңдеу, үзіліссіз функциялар.

[1] **L.N. Rajabova,** [1,2] **F.M.Ahmadov**

[1] *Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan*
[2] *Institute of Tourism, Entrepreneurship and Service, Dushanbe, Tajikistan*

Explicit solutions of a two-dimensional integral equation of Volterr type with boundary singularity and strongly singular line when the roots of the characteristic equations are real, different and equal

Abstract: The paper studies a two-dimensional integral equation of Volterra type with singular and strongly singular boundary lines. The solution of a two-dimensional integral equation of the Volterra type with singular kernels is sought in the class of continuous functions that vanish on the boundary lines.

In the case when the roots of the characteristic equations are real, different and equal, the parameters of the equations are related to each other in a certain way, depending on the roots of the characteristic equations and the sign of the parameters of the integral equation, explicit solutions of the integral equation are found.

It is proved that the solutions of a two-dimensional integral equation, depending on the sign of the parameters, can contain from one to four arbitrary continuous functions. The cases are determined when the solution to the integral equation is unique.

Keywords: two-dimensional integral equations, singular line, strongly singular line, characteristic equation, arbitrary continuous functions.

References

1 Rajabov N. Ob odnom klasse model'nogo sverkh-singulyarnogo integral'nogo uravneniya, obobshchayushchiy odnomernoye integral'noye uravneniye Vol'terra s levoy granichnoy sverkh-singulyarnoy tochkoy v yadre [On one class of a model super-singular integral equation, generalizing the one-dimensional Volterra integral equation with a left boundary super - singular point in the kernel], Materialy III mezhdunarodnoj konferencii Problemye differencial'nyh uravnenij analiza i algebry [Proceedings of the III International Conference Problems of Differential Equations of Analysis and Algebra],Aktobe, 2015, P. 202-206.

2 Rajabov N. Ob odnom klasse model'nogo singulyarnogo integral'nogo uravneniya, obobshchayushchego odnomernoye integral'noye uravneniye Vol'terra s levoy granichnoy singulyarnoy tochkoy v yadre [On one class of a model singular integral equation generalizing the one-dimensional Volterra integral equation with a left boundary singular point in the kernel], Vestnik Tadzhikskogo natsional'nogo universiteta. Seriya yestestvennykh nauk [Bulletin of the Tajik national University. Natural sciences series], 2012, №1, P. 21-32.

3 Rajabova L. On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super-singularity, Mathematical Notes. Miscolc. 2003. Vol. 4. №1. P. 65-76.

4 Rajabova L.N. Ob odnom obshchem dvukhmernom integral'nom uravnenii tipa Vol'terra s osobennostyami na granitse oblasti [On one general two-dimensional integral equation of Volterra type with singularities on the boundary of the region], Vestnik Tadzhikskogo natsional'nogo universiteta. Seriya yestestvennykh nauk [Bulletin of the Tajik national University. Natural Sciences series], 2007, №. 3(35), P. 30-38.

5 Rajabova L. About a class of two dimenshional Volterra type integral equations with singular boundary lines, Corrent Trends in analisis and its applications. Proccedings of the 9- th ISAAC Congress. Krakow. P. 128-133.

6 Akhmadov F.M. O nekotorykh sluchayakh resheniya dvumernogo integral'nogo uraneniya tipa Vol'terra s granichnymi osobymi liniyami, kogda korni kharakteristicheskikh uravneniy veshchestvennyye i ravnyye [On some cases of solving a two-dimensional integral equation of the Volterra type with boundary singular lines, when the roots of the characteristic equations are real and equal], Materialy megdunarodnoy nauchnoy konferentsii, Actualnie problemi sovremennoy matematici [Materials of the international conference Actual problems of modern mathematics]. Dushanbe, 2021, P. 29-32.

7 Rajabova L.N., Akhmadov F.M. O yavnykh resheniyakh dvumernykh integral'nykh uraneniy tipa Vol'terra s granichnoy osoboy i sil'no-osobymi liniyami, kogda korni kharakteristicheskikh uravneniy veshchestvennyye i ravnyye [On explicit solutions of two-dimensional integral equations of the Volterra type with boundary singular and strongly singular lines, when the roots of the characteristic equations are real and equal], Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii Sovremennye problemy matematiki i fiziki [Materials of the international scientific conference Modern problems of mathematics and physics], Sterlitamak, 2021, Vol. 1. P. 91-96.

8 Rajabova L.N., Akhmadov F.M. K teorii dvumernykh integral'nykh uraneniy tipa Vol'terra s granichnymi osoboy i sil'no-osobymi liniyami, kogda korni kharakteristicheskikh uravneniy veshchestvennyye i raznyye,[To the theory of two-dimensional integral equations of the Volterra type with boundary singular and strongly singular lines, when the roots of the characteristic equations are real and different], Vestnik TNU. Ceriya estestvennyh nauk [Bulletin of TNU. A series of natural sciences], 2021, №.1, P. 78-88.

9 Rajabova L.N., Akhmadov F.M. O nekotorykh sluchayakh resheniya dvumernykh integral'nykh uraneniy tipa Vol'terra s granichnoy osoboy i sil'no-osoboy liniyami, [On some cases of solving two-dimensional integral equations of the Volterra type with boundary singular and strongly singular lines], Doklady nacional'noj akademii nauk respubliki Tadzhikistan[DNAN RT], 2021, Vol. 64, №. 5-6, P. 283-290.

Сведения об авторах:

Раджабова Лутфия Нусратовна – автор для корреспонденции, доктор физико-математических наук, профессор, Таджикский национальный университет, проспект Рудаки 17, Душанбе, Республика Таджикистан.

Ахмадов Фарвариддин Муфазалович – соискатель кафедры математического анализа и теории функций, Таджикский национальный университет, проспект Рудаки 17, Душанбе, Республика Таджикистан; ассистент кафедры математика в экономике Института туризма, предпринимательства и сервиса, Душанбе, Таджикистан.

Rajabova Lutfya Nusratovna – corresponding author, Tajik national University, doctor of physical and mathematical sciences, professor. Address: 734025, Republic of Tajikistan, Dushanbe, Rudaki Avenue 17. Tajik National University.

Ahmadov Farvariddin Mufazalovich – Tajik National University, applicant of the department of mathematical analysis and the theory of functions. Address: 734025, Republic of Tajikistan, Dushanbe, Rudaki Avenue 17; Assistant of the Department of Mathematics in Economics of the Institute of Tourism, Entrepreneurship and Service, Dushanbe, Tajikistan.

Поступила в редакцию 27.11.2021