Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2021, Vol. 136, №3, P.37-41
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

А.Б. Утесов

Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова,Актобе, Казахстан
(E-mail: adilzhan_71@mail.ru)

Оптимальное восстановление функций из анизотропных классов Соболева в степенно-логарифмической шкале

Аннотация: В данной работе в рамках К(В)П-постановки в метрике $L^q(2 \le q \le \infty)$ решена задача оптимального восстановления функций из анизотропных классов Соболева в степенно-логарифмической шкале. Именно, в случае, когда в качестве числовой информации о функции используются значения $l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f)$ линейных функционалов $l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$, определенных на рассматриваемом функциональном классе, во-первых, установлен точный порядок погрешности восстановления, во-вторых, указан конкретный вычислительный агрегат $\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f), ..., \bar{l}_N^{(N)}(f); \cdot\right)$, реализующий установленный точный порядок.

Ключевые слова: компьютерный (вычислительный) поперечник, оптимальное восстановление, вычислительный агрегат, линейный функционал, точный порядок погрешности восстановления.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182

1. Постановка задачи. Общая К(В)П-постановка задачи восстановления в последней редакции вместе с историей возникновения и развития дана в статьях [1-2]. Исходной в этой постановке является величина

$$\delta_N(\varepsilon_N,\, D_N, T,\, F)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)},\, \varphi_N)\in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N, (l^{(N)},\, \varphi_N), T, F\right)_Y, \tag{1}$$

где $\delta_N\left(\varepsilon_N, (l^{(N)},\, \varphi_N), T, F\right)_Y =$

$$= \sup_{\substack{f\in F \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 (\tau=1,...,N)}} \left\| (T\, f)(\cdot) - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N, ..., l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N;\, \cdot\right)\right\|_Y.$$

Здесь математическая модель задается посредством оператора $T : F \mapsto Y$, X и Y нормированные пространства функций, заданных соответственно на множествах Ω_X и Ω_Y, $F \subset X-$ класс функций. Числовая информация $l^{(N)} \equiv l^{(N)}(f) = \left(l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f)\right)$ объема $N(N = 1, 2, ...)$ об f из класса F снимается с функционалов $l_N^{(1)} : F \mapsto C, ..., l_N^{(N)} : F \mapsto C.$ Алгоритм переработки информации $\varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C$ есть соответствие, которое при всяком фиксированном $(z_1, ..., z_N) \in C^N$ как функция от $(\cdot)$ есть элемент $Y.$

Далее, $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ есть вычислительный агрегат восстановления по точной информации о функции $f \in F$, действующий по правилу $\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f); \cdot\right)$ и пусть $D_N \subset \{(l^{(N)},\ \varphi_N)\}$.

Величину (1) называют *информативной мощностью набора вычислительных агрегатов* D_N *точности* ε_N, где ε_N есть неотрицательная последовательность.

Всюду ниже, записи $A << B\,(B \ge 0)$ и $A \succ\prec B\,(A \ge 0,\ B \ge 0)$ для $A \equiv \{A_n\}$ и $B \equiv \{B_n\}$ соответственно означают $|A| \le cB\,(c > 0,\ \forall n = 1, 2, ...)$ и одновременное выполнение $A << B$ и $B << A$.

При заданных F, Y, T, D_N (фиксированных всюду по последующему контексту) в рамках приведенных обозначений и определений, проблема оптимального восстановления по неточной информации, оформленная под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» (в сокращении – К(В)П), заключается, в собирательном смысле, в последовательном решении трех задач:

К(В)П-1. Находится порядок $\succ\prec$ $\delta_N(0, D_N, T, F)_Y$, *–информативная мощность набора вычислительных агрегатов* D_N;

К(В)П-2. Производится построение конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ из D_N, поддерживающего порядок $\succ\prec$ $\delta_N(0, D_N, T, F)_Y$ и находится последовательность $\bar{\varepsilon}_N > 0$ (предельная погрешность оптимального вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$) такая, что

$$\delta_N(0,\, D_N, T, F)_Y \succ\prec \delta_N(\bar{\varepsilon}_N, (\bar{l}^{(N)},\, \bar{\varphi}_N), T, F)_Y =$$

$$= \sup \left\{\| \, (T\, f)(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1(f), ..., z_N(f);\,)\|_Y \,:\, f \in F, \left| \bar{l}_N^{(\tau)} - z_\tau \right| \le \bar{\varepsilon}_N(\tau = 1, ..., N) \right\},$$

с одновременным выполнением для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N\ge 1}$ равенства $\overline{\lim\limits_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N \bar{\varepsilon}_N,\, (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N), T, F\right)_Y}{\delta_N(0, D_N, T, F)_Y} = +\infty$;

К(В)П-3. Устанавливается массивность предельной погрешности $\bar{\varepsilon}_N$: находится как можно большое множество вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$ (обычно связанных со структурой исходного $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$), построенных по всевозможным функционалам $l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$ таких, что для каждого из которых выполнено $\overline{\lim\limits_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N \bar{\varepsilon}_N,\, \left(l^{(N)}, \varphi_N\right), T, F\right)_Y}{\delta_N(0, D_N, T, F)_Y} = +\infty$.

Конкретизируя в (1) класс F, пространство Y, множество D_N, оператор T получаем различные задачи оптимального восстановления по точной и по неточной информации (см., напр., [1-2] и имеющуюся в них библ.).

В данной статье получено полное решение задачи К(В)П-1 в случае $F = W_2^{r;\alpha}(0,1)^s$ классов Соболева в степенно - логарифмической шкале (определение класса $W_2^{r;\alpha}(0,1)^s$ дано ниже в пункте 2), $Tf = f, Y = L^q(0,1)^s (2 \le q \le \infty), D_N = L^{(N)} \times \{\varphi_N\}$, где $L^\infty(0,1)^s \equiv C[0,1]^s, L^{(N)}$ есть множество всех $N-$ мерных векторов $l^{(N)} = \left(l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}\right)$, состоящих из N линейных функционалов $l_N^{(i)} : W_2^{r;\alpha}(0,1)^s \mapsto C (i = 1, ..., N)$.

Здесь же отметим, что ряд задач восстановления функций по числовой информации, полученной от линейных функционалов, в К(В)П-постановке изучались в работах [3 - 6].

2. **Определение классов Соболева** $W_2^{r;\alpha}(0,1)^s$ **в степенно-логарифмической шкале.** Пусть даны целое число $s \ge 2$, векторы $r = (r_1, ..., r_s)$ и $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ такие, что $r_i > 0$ и $\alpha_i \in R$ для каждого $i = 1, ..., s$.

Класс $W_2^{r;\alpha}(0,1)^s \equiv W_2^{r_1,...,r_s;\alpha_1,...,\alpha_s}(0,1)^s$ есть, по определению, множество всех суммируемых 1–периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье – Лебега $\hat{f}(m), m \in Z^s$ которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m\in Z^s} |\hat{f}(m)|^2 (\bar{m}_1^{2r_1} \ln^{2\alpha_1}(\bar{m}_1 + 1) + ... + \bar{m}_s^{2r_s} \ln^{2\alpha_s}(\bar{m}_s + 1)) \le 1,$$

где $\bar{m}_j = \max\{1; |m_j|\}$ для каждого $j = 1, ..., s$.

Тем самым, нами введена более тонкая шкала классификации периодических функций многих переменных в зависимости от скорости убывания их коэффициентов Фурье: при $\alpha_1 = 0, ..., \alpha_s = 0$ класс $W_2^{r_1,...,r_s;\alpha_1,...,\alpha_s}(0,1)^s$ обращается в анизотропный класс Соболева $W_2^{r_1,...,r_s}(0,1)^s$ (см., напр., [7, стр. 11]).

3. Вспомогательные утверждения. При доказательстве основного результата статьи используются следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть даны векторы* $r = (r_1, ..., r_s)$ *и* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ *такие, что* $r_i > 0\,, \alpha_i \in R$ *и* $r_i + \alpha_i > 0$ *для каждого* $i = 1, ..., s$ *и пусть выполнено неравенство*

$$\left(\frac{1}{\min\{r_1, r_1+\alpha_1\}} + ... + \frac{1}{\min\{r_s, r_s+\alpha_s\}}\right)^{-1} > \frac{1}{2}.$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье каждой функции $f \in W_2^{r;\alpha}$ *сходится абсолютно (и равномерно при любом методе суммирования).*

Лемма 2. *Для каждого действительного числа* γ *имеет место соотношение*

$$\ln(N \ln^\gamma N) \succ\prec \ln N (N = 2, 3, \ldots).$$

Лемма 3[8]. *Пусть дано целое число* $s \geq 1$. *Тогда для каждого целого* $N \geq 1$ *выполнено следующее утверждение: для любого множества* $G \equiv \{m^{(1)}, ..., m^{(N')}\} \subset Z^s$ *такого, что* $N' = |G| \geq 2N$ и $|G| \succ\prec N$, *и для произвольных линейных функционалов* $l_1, ..., l_N$, *определенных, по крайней мере, на множестве всех тригонометрических полиномов со спектром в* G *найдутся комплексные числа* $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$, *удовлетворяющие условиям*

$$\sum_{k=1}^{N'} |c_k| \geq N, \sum_{k=1}^{N'} |c_k|^2 = N,$$

причем если $\chi(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i (m^{(k)},x)}$, то $l_1(\chi) = 0\,, ...,\ l_N(\chi) = 0$ и $\|\chi\|_\infty \geq N,\ \|\chi\|_2 = \sqrt{N}$.

4. Основной результат. Справедлива

Теорема. *Пусть даны* $s (s = 2, 3, \ldots), 2 \leq q \leq \infty$ *и пусть векторы* $r = (r_1, ..., r_s)$ *и* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ *такие, что* $r_i > 0\,,\ \alpha_i \in R$ *и* $r_i + \alpha_i > 0$ $(i = 1, ..., s)$ $\left(\frac{1}{\min\{r_1, r_1+\alpha_1\}} + ... + \frac{1}{\min\{r_s, r_s+\alpha_s\}}\right)^{-1} > \frac{1}{2}$.

Тогда для всех $K \geq 2$, $N_i \equiv N_i(K) = [K^{\lambda/r_i} (lnK\ )^{\lambda \cdot (\alpha_1/r_1 + ... + \alpha_s/r_s)/r_i} (lnK\ )^{-\alpha_i/r_i}]$ $(i = 1, ..., s; [x]-$ *целая часть числа* $x)$, $N \equiv N(K) = \prod_{i=1}^s (2N_i + 1),\ \lambda = \left(r_1^{-1} + ... + r_s^{-1}\right)^{-1}$ *имеет место соотношение*

$$\delta_N \left(0; L^{(N)} \times \{\varphi_N\}, Tf = f,\ W_2^{r;\alpha}\right)_{L^q} \underset{s,r,\alpha,q}{\succ\prec} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda (\ln N)^{\lambda \cdot (\alpha_1/r_1 + ... + \alpha_s/r_s)}} \quad (L^\infty \equiv C),$$

при этом, оценка сверху реализуется вычислительным агрегатом $(\bar{l}^{(N)},\ \bar{\varphi}_N)$, *состоящим из функционалов* $\bar{l}_N^{(1)}(f) = \hat{f}\left(\bar{m}^{(1)}\right)$, ..., $\bar{l}_N^{(N)}(f) = \hat{f}\left(\bar{m}^{(N)}\right)$ *и функции* $\bar{\varphi}_N(z_1, ..., z_N; x) = \sum_{\tau=1}^N z_\tau e^{2\pi\, i\, (\bar{m}^{(\tau)}, x)}$, *где* $\left\{\bar{m}^{(1)}, \bar{m}^{(2)}, ..., \bar{m}^{(N)}\right\}$ *есть некоторое упорядочение множества* $A_K = \{m \in Z^s : |m_1| \leq N_1, ..., |m_s| \leq N_s\}$.

При $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0$ справедливо

Следствие. *Пусть даны* $s(s = 2, 3, \ldots), 2 \leq q \leq \infty$ *и вектор* $r = (r_1, ..., r_s)$ с *положительными компонентами такой, что* $\left(\frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_s}\right)^{-1} > \frac{1}{2}$.

Тогда для всех $K \geq 2$ $, N_i \equiv N_i(K) = \left[K^{\lambda/r_i}\right]$ $(i = 1, ..., s; [x]-$ *целая часть числа* $x)$ $N \equiv N(K) = \prod_{i=1}^s (2N_i + 1),\ \lambda = \left(r_1^{-1} + ... + r_s^{-1}\right)^{-1}$ *имеет место соотношение*

$$\delta_N \left(0; L^{(N)} \times \{\varphi_N\}, Tf = f,\ W_2^r\right)_{L^q} \underset{s,r,q}{\succ\prec} \frac{N^{1/2-1/q}}{N^\lambda} \quad (L^\infty \equiv C),$$

при этом, оценка сверху реализуется вычислительным агрегатом $(\bar{l}^{(N)},\ \bar{\varphi}_N)$, *состоящим из функционалов* $\bar{l}_N^{(1)}(f) = \hat{f}\left(\bar{m}^{(1)}\right)$, ..., $\bar{l}_N^{(N)}(f) = \hat{f}\left(\bar{m}^{(N)}\right)$ *и функции* $\bar{\varphi}_N(z_1, ..., z_N; x) = \sum_{\tau=1}^N z_\tau e^{2\pi\, i\, (\bar{m}^{(\tau)}, x)}$, *где* $\left\{\bar{m}^{(1)}, \bar{m}^{(2)}, ..., \bar{m}^{(N)}\right\}$ *есть некоторое упорядочение множества* $A_K = \{m \in Z^s : |m_1| \leq N_1, ..., |m_s| \leq N_s\}$.

Список литературы

1 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж.Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления // Известия ВУЗов. Математика. 2019, №1, стр. 89-97.

2 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, том 55, №9, стр. 1474– 1985.

3 Fisher S.D., Micchelli Ch.A.Optimal sampling of holomorphic functions // Amer. J. Math. -1984. 106:3. P. 593-609.

4 Fisher S.D., Micchelli Ch.A. Optimal sampling of holomorphic functions. II// Amer. J. Math., -1985. 273:1. -P.131-147.

5 Ажгалиев Ш., Темиргалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов // Матем. заметки. -2003. -Т. 3. -№.6. -С. 803-812.

6 Ажгалиев Ш. У., Темиргалиев Н. Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω //Матем. сб. -2007. -Т. 198. №11. -С. 3-20.

7 Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник ЕНУ. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2019. -Т. 126. -№ 1. -С. 8–51.

8 Ажгалиев Ш. О дискретизации решений уравнения теплопроводности// Матем. Заметки. -2007. -Том 82, выпуск 2. -С. 177–182.

Ә.Б. Өтесов

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Дәреже - логарифмдік шкаладағы анизотропты Соболев кластарының функцияларын оптималды жуықтау

Аннотация: Бұл жұмыста жуықтау есебінің К(Е)Д- қойылымы аясында дәреже- логарифмдік шкаладағы анизотропты Соболев кластарының функцияларын оптималды жуықтау есебі $L^q\,(2 \le q \le \infty)$ метрикасында шешілген. Атап айтқанда, функция туралы сандық мәліметтер ретінде қарастырылып отырылған класта анықталған сызықтық $l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f)$ функционалдарының $l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$ мәндері алынғанда, біріншіден, жуықтау қателігінің дәл реті анықталған, екіншіден, сол дәл ретті жүзеге асыратын $\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f), ..., \bar{l}_N^{(N)}(f); \cdot\right)$ есептеу агрегаты көрсетілген.

Түйін сөздер: компьютерлік (есептеуіш) диаметр, оптималды жуықтау, есептеу агрегаты, сызықтық функционал, жуықтау қателігінің дәл реті.

A.B. Utessov

K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

Optimal recovery of functions from anisotropic Sobolev classes on a power – logarithmic scale

Abstract: In this paper, within the framework of the C (N) D - formulation of the recovery problem, the problem of optimal recovery of functions from anisotropic Sobolev classes in a power-logarithmic scale in the metric $L^q\,(2 \le q \le \infty)$ is solved. Namely, in the case when the values $l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f)$ of linear functionals $l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$ defined on the considered functional class are used as numerical information about a function, firstly, the exact order of the recovery error is established, and secondly, a specific computing unit $\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f), ..., \bar{l}_N^{(N)}(f); \cdot\right)$ is indicated that implements the established exact order.

Keywords: computational (numerical) diameter, optimal recovery, computing unit, linear functional, exact order of the recovery error.

References

1 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ), N 1, 89-97(2019).

2 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432–1443(2015).

3 Fisher S.D., Micchelli Ch.A., Optimal sampling of holomorphic functions , Amer. J. Math., 106(3), 593 – 609(1984).

4 Fisher S.D., Micchelli Ch.A. Optimal sampling of holomorphic functions. II, Amer. J. Math., 273(1), 131-147(1985).

5 Azhgaliev Sh. , Temirgaliev N. Informativeness of Linear Functionals, Mathematical Notes, 73(6), 759-768(2003).

6 Ажгалиев Ш. У., Temirgaliev N. Informativeness of all the linear functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω //Sbornik: Mathematics,198(11),1535-1551(2007).

7 Temirgaliev N.,Taugynbayeva G.E., Abikenova Sh.K. Discretization of solutions of partial differential equations in the context of Computational(numerical) diameter //Bulletin of the L.N.Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 126(1), 8-51 (2019).
8 Azhgaliev Sh., Discretization of the solutions of the heat equation, Math. Notes, 82(2), 153–158(2007).

Сведения об авторе:
Утесов Адилжан Базарханович – кандидат физико–математических наук, доцент кафедры «Математика» Актюбинского регионального университета им. К. Жубанова, ул. А. Молдагуловой, 34, 030000 Актобе, Казахстан.
Utessov Adilzhan Bazarkhanovich – candidate of physico - mathematical sciences, associate professor of the Mathematic department K.Zhubanov Aktobe Regional University, A.Moldagulova Prospect, 34, 030000 Aktobe, Kazakhstan.