

IRSTI: 30.19.17

Л.А. Алексеева¹, В.Н. Украинец²

¹ *Института математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан*

² *Торайгыров университет, Павлодар, Казахстан*

(E-mail: ¹ alexeeva47@mail.ru, ² vitnikukr@mail.ru)

МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ТОННЕЛЯ И ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК

Аннотация: Разработана математическая модель воздействия транспортных нагрузок на подкрепленный многослойной обделкой тоннель и подземный многослойный трубопровод при их мелком заложении. В качестве расчетной схемы данных подземных сооружений рассматривается упругая цилиндрическая многослойная оболочка, расположенная в упругом полупространстве (массиве). Перемещение слоев оболочки и упругого полупространства описывается уравнениями Ламе в подвижной системе координат. Получено аналитическое решение задачи определения компонентов напряженно-деформированного состояния массива и оболочки при произвольных скоростях нагрузки в дозвуковом случае, когда транспортная нагрузка движется со скоростью, меньшей скоростей распространения продольных и поперечных волн в массиве и оболочке. Представлены результаты компьютерных экспериментов, которые иллюстрируют напряженно-деформированное состояние трубопровода и земной поверхности при действии осесимметричной транспортной нагрузки.

Ключевые слова: упругое полупространство, дозвуковая транспортная нагрузка, многослойная цилиндрическая оболочка, напряженно-деформированное состояние

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-133-4-28-39>

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования показывают, что при действии на протяженные транспортные подземные сооружения в виде тоннелей и трубопроводов транспортных нагрузок (нагрузок от движущегося в тоннеле транспорта или транспортируемых по трубопроводу объектов) возникают вибрации, как в самих сооружениях, так и в окружающем их породном массиве. Превышение уровнями вибраций допустимых норм может привести к потере несущей способности конструкций сооружений или их непригодности для нормальной эксплуатации, а при их мелком заложении – к тем же последствиям для расположенных вблизи наземных сооружений. Следует заметить, что экспериментальные методы исследования вибрационных процессов, возникающих в данных сооружениях вследствие действия транспортных нагрузок, требуют значительных материальных затрат, а в некоторых случаях их проведение не представляется возможным. В связи с этим необходимы эффективные методы их динамических расчётов, основанные на математических моделях с использованием современных представлений механики. В качестве основных модельных задач, используемых для исследований динамики транспортных подземных сооружений под воздействием транспортной нагрузки, обычно рассматриваются задачи о действии на расположенную в упругом пространстве или полупространстве круговую цилиндрическую оболочку нагрузки, равномерно движущейся по внутренней поверхности оболочки вдоль её образующей. Первая задача моделирует динамическое поведение сооружения глубокого заложения, вторая – мелкого заложения.

Задачи о действии подвижной осесимметричной нормальной нагрузки на тонкостенную и толстостенную круговую цилиндрическую оболочку в упругом пространстве решены соответственно в статьях [1, 2]. Аналогичные задачи при действии на оболочку различных неосесимметричных подвижных нагрузок рассматривались в [3–5] и других работах.

В отличие от этих задач, подобные задачи для упругого полупространства являются более сложными, так как возникает необходимость учитывать отражаемые границей полупространства волны. Поэтому количество публикаций, посвященных исследованию этой проблеме, немногочисленно и охватывает, в основном, последние годы, в частности [6–14]. Здесь, при построении математической модели, обделка тоннеля или трубопровод рассматривались как однородная упругая круговая цилиндрическая оболочка. В настоящей работе эти конструкции представляются в виде неоднородной, многослойной упругой оболочки, слоями которой являются толстостенные круговые цилиндрические оболочки с разными физико-механическими и геометрическими характеристиками. В частном случае, когда оболочка является однослойной (однородной толстостенной оболочкой), приводятся и анализируются результаты численного эксперимента.

1. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую многослойную оболочку, состоящую из N концентрических слоёв с разными физико-механическими и геометрическими характеристиками, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве (массиве), отнесенному к неподвижным цилиндрической r, θ, z и декартовой x, y, z системам координат, ось z которых совпадает с осью оболочки и параллельна свободной от нагрузок горизонтальной границе полупространства, ось x – перпендикулярна к этой границе: $x \leq h$ (рисунок 1). Контакт между слоями оболочки полагаем жёстким. Контакт между оболочкой массивом будем полагать либо жестким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении.

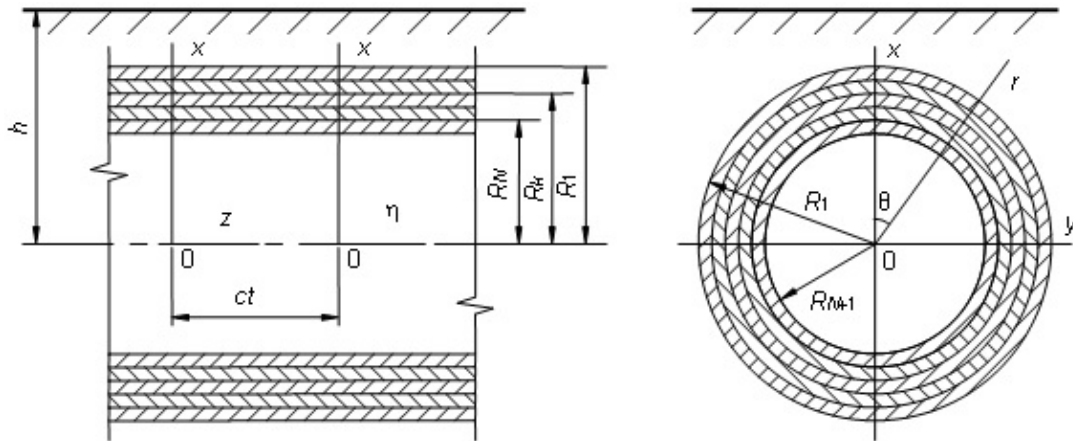


Рисунок 1 – Многослойная оболочка в упругом полупространстве.

По внутренней поверхности оболочки в направлении её оси z с постоянной скоростью c движется нагрузка интенсивностью P , вид которой не меняется с течением времени (транспортная нагрузка). Скорость движения нагрузки принимаем дозвуковой, т.е. меньшей скоростей распространения волн сдвига в массиве и слоях оболочки.

Последовательно пронумеруем слои оболочки, присвоив контактирующему с массивом слою порядковый номер 2. Физико-механические свойства материала массива и слоев оболочки характеризуются соответственно следующими постоянными: $\nu_1, \mu_1, \rho_1; \nu_i, \mu_i, \rho_i (i = 2, 3, \dots, N + 1)$, где ν_k – коэффициент Пуассона, $\mu_k = E_k/2(1 + \nu_k)$ – модуль сдвига, ρ_k – плотность, E_k – модуль упругости ($k = 1, 2, \dots, N + 1$). В дальнейшем индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2, 3, \dots, N + 1$ – к слоям оболочки.

Определим реакцию оболочки и окружающей её среды на данную нагрузку, используя для описания движения массива и слоев оболочки динамические уравнения теории упругости в векторной форме

$$(\lambda_k + \mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_k + \mu_k \Delta \mathbf{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (1)$$

где $\lambda_k = 2\mu_k\nu_k/(1 - 2\nu_k)$, \mathbf{u}_k – векторы смещений точек массива и слоев оболочки, Δ – оператор Лапласа.

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому можно перейти к связанной с нагрузкой подвижной декартовой $(x, y, \eta = z - ct)$ или цилиндрической $(r, \theta, \eta = z - ct)$ системе координат. Тогда уравнения (1) примут вид

$$\left(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_k + M_{sk}^{-2} \Delta \mathbf{u}_k = \partial^2 \mathbf{u}_k / \partial \eta^2, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (2)$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в массиве и слоях оболочки.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ. ПОТЕНЦИАЛЫ ЛАМЕ

Для определения перемещений используем потенциалы Ламе [6]. Выражая \mathbf{u}_k через потенциалы Ламе

$$\mathbf{u}_k = \operatorname{grad} \varphi_{1k} + \operatorname{rot} (\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta) + \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta), \quad k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (3)$$

преобразуем уравнения (2) к виду

$$\Delta \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{jk}}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{e}_η – орт оси η , $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Используя (3) и закон Гука получаем выражения для компонент векторов \mathbf{u}_k и тензоров напряжений в массиве ($k = 1$) и слоях оболочки ($k = 2, 3, \dots, N + 1$) в подвижной цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} u_{rk} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial r}, \\ u_{\theta k} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta}, \\ u_{\eta k} &= \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \eta} + m_{sk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta k} &= (2\mu_k + \lambda_k M_{pk}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k m_{sk}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{\theta\theta k} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu_k}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta} \right), \\ \sigma_{rr k} &= \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{r\eta k} &= \mu_k \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_{sk}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \\ \sigma_{\eta\theta k} &= \mu_k \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_{sk}^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{r\theta k} &= 2\mu_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r^2} - \frac{m_{sk}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $m_{sk}^2 = 1 - M_{sk}^2 > 0$.

В подвижных декартовых координатах выражения для компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС) массива имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_{x1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial x \partial \eta}, \\
 u_{y1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta}, \\
 u_{\eta 1} &= \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \eta} + m_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial \eta^2}; \\
 \sigma_{\eta \eta 1} &= (2\mu_1 + \lambda_1 M_{p1}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 m_{s1}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^3}, \\
 \sigma_{yy1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y^2 \partial \eta} \right), \\
 \sigma_{xx1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x^2 \partial \eta} \right), \\
 \sigma_{x\eta 1} &= \mu_1 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \\
 \sigma_{\eta y 1} &= \mu_1 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta^2} \right), \\
 \sigma_{xy 1} &= 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x^2} - \frac{m_{s1}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x \partial y \partial \eta} \right).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, для определения компонент НДС массива и слоев оболочки необходимо решить уравнения (4) используя следующие граничные условия:

- для свободной от нагрузок поверхности полупространства ($x = h$)

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta 1} = 0; \tag{8}$$

- для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned}
 \text{при } r = R_1 \quad & u_{r1} = u_{r2}, \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \sigma_{r\eta 1} = 0, \sigma_{r\theta 1} = 0, \sigma_{r\eta 2} = 0, \sigma_{r\theta 2} = 0, \\
 \text{при } r = R_k \quad & u_{jk} = u_{jk+1}, \sigma_{rjk} = \sigma_{rjk+1}, \\
 \text{при } r = R_{N+1} \quad & \sigma_{rjN+1} = P_j(\theta, \eta), j = r, \theta, \eta, k = 2, 3, \dots, N;
 \end{aligned} \tag{9}$$

- для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned}
 \text{при } r = R_k \quad & u_{jk} = u_{jk+1}, \sigma_{rjk} = \sigma_{rjk+1}, \\
 \text{при } r = R_{N+1} \quad & \sigma_{rjN+1} = P_j(\theta, \eta), j = r, \theta, \eta, k = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $P_j(\theta, \eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta, \eta)$.

3. РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПО η ЗАДАЧИ

Рассмотрим действие на оболочку синусоидальной по η подвижной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$\begin{aligned}
 P(\theta, \eta) &= p(\theta) e^{i\xi\eta}, p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \\
 P_j(\theta, \eta) &= p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, j = r, \theta, \eta,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (11), поэтому

$$\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi\eta}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (4), получим

$$\Delta_2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, j = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, N + 1, \quad (13)$$

где Δ_2 – двумерный оператор Лапласа, $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$, $m_{1k} \equiv m_{pk}$, $m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}$.

При дозвуковой скорости движения нагрузки $M_{sk} < 1$, $m_{sk} > 0$, $k = 1, 2, \dots, N + 1$, и решения уравнений (13) можно представить в виде [6]

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, j = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, N + 1. \quad (14)$$

Здесь для массива ($k = 1$)

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1}r) e^{in\theta}, \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right) d\zeta;$$

для слоев оболочки ($k = 2, 3, \dots, N + 1$)

$$\Phi_{jk}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3(2k-3)} K_n(k_{jk}r) e^{in\theta}, \Phi_{jk}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6(k-1)} I_n(k_{jk}r) e^{in\theta}.$$

Здесь $I_n(kr)$, $K_n(kr)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{jk} = |m_{jk}\xi|$; $g_j(\xi, \zeta)$, $a_{n1}, \dots, a_{n(6N+3)}$ – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [6, 9], представление потенциалов для полупространства в форме (14) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (15)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}$, $\Phi_{nj} = [(\zeta + f_j)/k_{j1}]^n$, $j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся граничными условиями (8), с учётом (7), (12), (15). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнявая, в силу произвольности y , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем функции $g_j(\xi, \zeta)$ через неизвестные коэффициенты a_{n1} , a_{n2} , a_{n3} :

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta_*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_* &= (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{11}^* &= \frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}} - \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}}, \Delta_{12}^* = -2\zeta(2\rho_*^2 - \beta^2), \Delta_{13}^* = 2\xi(2\rho_*^2 - \beta^2) \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{21}^* &= -\frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2} \Delta_{12}^*, \Delta_{22}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \Delta_{23}^* = -4\xi\zeta \frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2} \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \Delta_{31}^* &= -\frac{\Delta_{13}^*}{m_{s1}^2 \xi^2}, \Delta_{32}^* = \frac{\Delta_{21}^*}{\beta^2}, \Delta_{33}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}} + \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \\ \alpha &= M_{p1}\xi, \beta = M_{s1}\xi, \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2, \Delta_{**} = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \\ \rho_{**}^2 &= \xi^2 + (2/m_{s1}^2 - 1)\zeta^2. \end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_*(\rho_*)$ – определитель Рэлея, который обращается в ноль при $\rho_{*R}^2 = \xi^2 M_R^2$, или в двух точках $\pm\zeta_R = \pm|\xi| \sqrt{M_R^2 - 1}$, где $M_R = c/c_R$ – число Маха, c_R – скорость поверхностных волн Рэлея [15], которую условимся называть рэлеевской скоростью. Из последнего следует, что $\Delta_*(\rho_*)$ не обращается в ноль на действительной

оси, если $M_R < 1$ ($c < c_R$), то есть при дорэлеевских скоростях движения нагрузки. В этом случае потенциалы (15) можно представить в виде

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta.$$

Следует отметить, что рэлеевская скорость несколько ниже скорости волн сдвига в массиве.

Используя известное при $x < h$ соотношение [6, 9]

$$\exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r) e^{in\theta} \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) / k_j \right]^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}},$$

представим Φ_{j1} (14) в цилиндрической системе координат

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_{j1} r) + I_n(k_{j1} r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-hf_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (16) $g_j(\xi, \zeta)$, для $c < c_R$ получим

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_{j1} r) + b_{nj} I_n(k_{j1} r)) e^{in\theta}, \quad (17)$$

где $b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}$, $A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\zeta$.

Подставляя (17) с учётом (12) в (5), (6) получаем формулы для вычислений компонент НДС массива в цилиндрических координатах при $c < c_R$

$$u_{l1}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[T_{lj1}^{(1)}(K_n(k_{j1} r)) a_{nj} + T_{lj1}^{(2)}(I_n(k_{j1} r)) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)},$$

$$\frac{\sigma_{lm1}^*}{\mu_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[S_{lmj1}^{(1)}(K_n(k_{j1} r)) a_{nj} + S_{lmj1}^{(2)}(I_n(k_{j1} r)) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}. \quad (18)$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$;

$$T_{r11}^{(1)} = k_{11} K'_n(k_{11} r), \quad T_{r21}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_{21} r), \quad T_{r31}^{(1)} = -\xi k_{31} K'_n(k_{31} r),$$

$$T_{\theta11}^{(1)} = \frac{n}{r} K_n(k_{11} r) i, \quad T_{\theta21}^{(1)} = -k_{21} K'_n(k_{21} r) i, \quad T_{\theta31}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{31} r) i,$$

$$T_{\eta11}^{(1)} = \xi K_n(k_{11} r) i, \quad T_{\eta21}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta31}^{(1)} = -k_{31}^2 K_n(k_{31} r) i,$$

$$S_{rr11}^{(1)} = 2 \left(k_{11}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11} r) - \frac{2k_{11} K'_n(k_{11} r)}{r},$$

$$S_{rr21}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{21} r) - \frac{2k_{21} K'_n(k_{21} r)}{r}, \quad S_{rr31}^{(1)} = -2\xi \left(k_{31}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{31} r) + \frac{2\xi k_{31} K'_n(k_{31} r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta11}^{(1)} = -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11} r) + \frac{2k_{11} K'_n(k_{11} r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta21}^{(1)} = -\frac{2n K_n(k_{21} r)}{r^2} + \frac{2nk_{21} K'_n(k_{21} r)}{r}, \quad S_{\theta\theta31}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{31} r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{31} K'_n(k_{31} r)}{r},$$

$$S_{\eta\eta11}^{(1)} = -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_1 M_{p1}^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11} r), \quad S_{\eta\eta21}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta31}^{(1)} = 2m_{31}^2 \xi^3 K_n(k_{31} r),$$

$$S_{r\theta11}^{(1)} = \left(-\frac{2n K_n(k_{11} r)}{r^2} + \frac{2nk_{11} K'_n(k_{11} r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta21}^{(1)} = \left(-\left(k_{21}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{21} r) + \frac{2k_{21} K'_n(k_{21} r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta31}^{(1)} = \left(\frac{2n\xi K_n(k_{31} r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{31} K'_n(k_{31} r)}{r} \right) i,$$

$$S_{\theta\eta11}^{(1)} = -\frac{2n\xi K_n(k_{11} r)}{r}, \quad S_{\theta\eta21}^{(1)} = \xi k_{21} K'_n(k_{21} r), \quad S_{\theta\eta31}^{(1)} = \frac{n\xi^2 (1 + m_{31}^2) K_n(k_{31} r)}{r},$$

$$S_{r\eta11}^{(1)} = 2\xi k_{11} K'_n(k_{11} r) i, \quad S_{r\eta21}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_{21} r)}{r} i, \quad S_{r\eta31}^{(1)} = -\xi^2 k_{31} (1 + m_{31}^2) K'_n(k_{31} r) i;$$

$K'_n(k_{j1}r) = \frac{dK_n(k_{j1}r)}{d(k_{j1}r)}$; $T_{lj1}^{(2)}, S_{lmj1}^{(2)}$ получаются из $T_{lj1}^{(1)}, S_{lmj1}^{(1)}$ заменой K_n на I_n .

Подставляя (14) при $k = 2, 3, \dots, N+1$ с учётом (12) в (5), (6) получаем формулы для вычислений компонент НДС слоев оболочки при $c < c_R$

$$u_{lk}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[T_{lj}^{(1)}(K_n(k_{jk}r)) a_{nj+3(2k-3)} + T_{lj}^{(2)}(I_n(k_{jk}r)) a_{nj+6(k-1)} \right] e^{i(\xi\eta+n\theta)},$$

$$\frac{\sigma_{lmk}^*}{\mu_k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[S_{lmjk}^{(1)}(K_n(k_{jk}r)) a_{nj+3(2k-3)} + S_{lmjk}^{(2)}(I_n(k_{jk}r)) a_{nj+6(k-1)} \right] e^{i(\xi\eta+n\theta)}. \quad (19)$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$, $k = 2, 3, \dots, N+1$;

$$T_{rk}^{(1)} = k_{1k} K'_n(k_{1k}r), \quad T_{r2k}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_{2k}r), \quad T_{r3k}^{(1)} = -\xi k_{3k} K'_n(k_{3k}r),$$

$$T_{\theta k}^{(1)} = \frac{n}{r} K_n(k_{1k}r) i, \quad T_{\theta 2k}^{(1)} = -k_{2k} K'_n(k_{2k}r) i, \quad T_{\theta 3k}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{3k}r) i,$$

$$T_{\eta k}^{(1)} = \xi K_n(k_{1k}r) i, \quad T_{\eta 2k}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta 3k}^{(1)} = -k_{3k}^2 K_n(k_{3k}r) i,$$

$$S_{rr1k}^{(1)} = 2 \left(k_{1k}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_k M_{pk}^2 \xi^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r) - \frac{2k_{1k} K'_n(k_{1k}r)}{r},$$

$$S_{rr2k}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{2k}r) - \frac{2k_{2k} K'_n(k_{2k}r)}{r}, \quad S_{rr3k}^{(1)} = -2\xi \left(k_{3k}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{3k}r) + \frac{2\xi k_{3k} K'_n(k_{3k}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta 1k}^{(1)} = -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_k M_{pk}^2 \xi^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r) + \frac{2k_{1k} K'_n(k_{1k}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta 2k}^{(1)} = -\frac{2n K_n(k_{2k}r)}{r^2} + \frac{2nk_{2k} K'_n(k_{2k}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta 3k}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{3k}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{3k} K'_n(k_{3k}r)}{r},$$

$$S_{\eta\eta 1k}^{(1)} = -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_k M_{pk}^2}{2\mu_k} \right) K_n(k_{1k}r), \quad S_{\eta\eta 2k}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta 3k}^{(1)} = 2m_{3k}^2 \xi^3 K_n(k_{3k}r),$$

$$S_{r\theta 1k}^{(1)} = \left(-\frac{2n K_n(k_{1k}r)}{r^2} + \frac{2nk_{1k} K'_n(k_{1k}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta 2k}^{(1)} = \left(-\left(k_{2k}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{2k}r) + \frac{2k_{2k} K'_n(k_{2k}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta 3k}^{(1)} = \left(\frac{2n\xi K_n(k_{3k}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{3k} K'_n(k_{3k}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{\theta\eta 1k}^{(1)} = -\frac{2n\xi K_n(k_{1k}r)}{r}, \quad S_{\theta\eta 2k}^{(1)} = \xi k_{2k} K'_n(k_{2k}r), \quad S_{\theta\eta 3k}^{(1)} = \frac{n\xi^2 (1 + m_{3k}^2) K_n(k_{3k}r)}{r},$$

$$S_{r\eta 1k}^{(1)} = 2\xi k_{1k} K'_n(k_{1k}r) i, \quad S_{r\eta 2k}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_{2k}r) i}{r}, \quad S_{r\eta 3k}^{(1)} = -\xi^2 k_{3k} (1 + m_{3k}^2) K'_n(k_{3k}r) i;$$

$K'_n(k_{jk}r) = \frac{dK_n(k_{jk}r)}{d(k_{jk}r)}$; $T_{ljk}^{(2)}, S_{lmjk}^{(2)}$ получаются из $T_{ljk}^{(1)}, S_{lmjk}^{(1)}$ заменой K_n на I_n .

Для определения коэффициентов $a_{n1}, \dots, a_{n(6N+3)}$ воспользуемся, в зависимости от условия сопряжения оболочки со средой, переписанными для периодической задачи граничными условиями (9) или (10). Подставляя в граничные условия соответствующие выражения и приравнявая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) линейных алгебраических уравнений, для решения которой можно использовать метод редукции или более удобный для решения поставленной задачи метод последовательных отражений [7], позволяющий при каждом последовательном отражении решать систему линейных уравнений блочно-диагонального вида с определителями $\Delta_n(\xi, c)$ вдоль главной диагонали.

После определения коэффициентов, компоненты напряжённо-деформированного состояния массива и слоев оболочки при действии подвижной синусоидальной нагрузки можно вычислить по формулам (18), (19).

4. РЕШЕНИЕ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Зная решение (18), (19) задачи для синусоидальной нагрузки (11), реакцию оболочки и окружающей её среды на движущуюся с постоянной скоростью аперриодическую (локальную) нагрузку вида $P(\theta, \xi) = p(\theta)p(\eta)$ (характерного для транспортных средств) можно найти при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент НДС массива и оболочки в виде интегралов Фурье

$$P(\theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p(\theta)p(\eta) = p(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi,$$

$$P_m(\theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_m^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p_m(\theta)p(\eta) = p_m(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi, m = r, \theta, \eta;$$

$$u_{lk}(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{lk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \sigma_{lmk}(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{lmk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \quad (20)$$

$$l = r, \theta, \eta, \quad m = r, \theta, \eta, \quad k = 1, 2, \dots, N + 1.$$

Здесь $p^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$.

Для вычислений перемещений и напряжений (20) можно использовать любой численный метод интегрирования, если определители $\Delta_n(\xi, c)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), вытекающей из (9) или (10) разрешающей системы уравнений, отличны от нуля, то есть, когда скорость движения нагрузки c меньше её критических скоростей $c_{(n)*}$. Значения $c_{(n)*}$ определяются из дисперсионных уравнений $\Delta_n(\xi, c) = 0$ [9] и могут оказаться меньше рэлеевской скорости. Окончательное решение будет зависеть от конкретного вида движущейся нагрузки.

Заметим, что исключая из постановки задачи граничные условия (8) и исключая из (14) $\Phi_{j1}^{(2)}$, получим решение аналогичной задачи для упругого пространства.

5. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОРОДНОМ МАССИВЕ

В качестве примера рассмотрим динамическое поведение подземного однослойного стального ($\nu_2 = 0,3, \mu_2 = 8,08 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $c_{s2} = 3218,54$ м/с, $c_{p2} = 6021,33$ м/с) трубопровода при действии движущейся в нем нагрузки. Радиус наружных поверхностей труб – $R_1 = R = 1$ м, внутренних – $R_2 = 0,95$ м. Глубина заложения трубопровода в породном массиве – $h = 2R_1$. Массив имеет следующие характеристики: $\nu_1 = 0,25, \mu_1 = \mu = 4,0 \cdot 10^9$ Па, $\rho_1 = 2,6 \cdot 10^3$ кг/м³; $c_{s1} = 1240,35$ м/с, $c_{p1} = 2148,34$ м/с, $c_R = 1140,42$ м/с [16]. Движущаяся в трубопроводе с докритической и дорэлеевской скоростью $c = 100$ м/с осесимметричная цилиндрическая нормальная нагрузка давления интенсивностью q (Па), равномерно распределена в интервале $|\eta| \leq l_0 = 0,2R$. Интенсивность нагрузки подбираем таким образом, чтобы общая нагрузка по всей длине участка нагружения $2l_0$ равнялась эквивалентной сосредоточенной нормальной кольцевой нагрузке интенсивностью $P^{\circ\circ}$ (Н/м), то есть $q = P^{\circ\circ}/2l_0$.

Введем обозначения: $u_r^{\circ} = u_r \mu / P^{\circ}$ (м), $\sigma_{\theta\theta}^{\circ} = \sigma_{\theta\theta} / P^{\circ}$, $\sigma_{\eta\eta}^{\circ} = \sigma_{\eta\eta} / P^{\circ}$, $u_x^{\circ} = u_x \mu / P^{\circ}$ (м), $u_y^{\circ} = u_y \mu / P^{\circ}$ (м), $\sigma_{yy}^{\circ} = \sigma_{yy} / P^{\circ}$, где $P^{\circ} = P^{\circ\circ} / \mu$ (Па).

Результаты расчета в поперечном сечении $\eta = 0$ трубопровода (в координатной плоскости xy) приведены в таблицах 1, 2 и на рисунках 2, 3.

В таблицах 1, 2 приведены значения компонент НДС массива при различных контактных условиях с трубопроводом.

На рисунке 2, на наружном ($r = R_1$) и внутреннем ($r = R_2$) контурах трубопровода, показаны эпюры радиальных перемещений u_r° и нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}^{\circ}$, $\sigma_{\eta\eta}^{\circ}$. Кривые 1 соответствуют жёсткому контакту трубопровода с массивом, кривые 2 – скользящему контакту.

Таблица 1 – Компоненты НДС массива в контактных точках $r = R_1, \eta = 0$.

Комп. НДС	θ , град									
	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
Жёсткий контакт трубопровода с массивом										
u_r°	0,30	0,29	0,28	0,26	0,25	0,25	0,24	0,25	0,25	0,25
$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	0,18	0,17	0,17	0,16	0,17	0,16	0,15	0,14	0,14	0,14
$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-0,35	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	-0,37	-0,37
Скользящий контакт трубопровода с массивом										
u_r°	0,32	0,32	0,30	0,28	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27
$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	-0,08	-0,06	-0,07	0,01	0,0	-0,01	-0,03	-0,06	-0,07	-0,07
$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-1,36	-1,36	-1,34	-1,30	-1,29	1,29	-1,29	-1,29	-1,30	-1,31

Таблица 2 – Компоненты НДС земной поверхности ($x = h, \eta = 0$).

Комп. НДС	y/R_1									
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	
Жёсткий контакт трубопровода с массивом										
u_x°	0,11	0,10	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	
u_y°	0,0	0,02	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	
σ_{yy}°	0,21	0,17	0,10	0,03	-0,01	-0,02	-0,03	-0,03	-0,02	
$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	0,25	0,23	0,17	0,12	0,08	0,05	0,03	0,02	0,02	
Скользящий контакт трубопровода с массивом										
u_x°	0,13	0,12	0,09	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	
u_y°	0,0	0,03	0,04	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	
σ_{yy}°	0,24	0,20	0,11	0,02	-0,02	-0,04	-0,03	-0,02	-0,02	
$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	0,29	0,26	0,20	0,13	0,08	0,05	0,04	0,02	0,02	

Из рисунка 2 следует, что при жёстком контакте экстремальные радиальные перемещения u_r и нормальные тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ положительны и несколько меньше, чем при скользящем контакте. Осевые нормальные напряжения $\sigma_{\eta\eta}$ положительны на наружном контуре сечения и отрицательны – на внутреннем контуре. Причём, при жёстком контакте напряжения $|\sigma_{\eta\eta}|$ на наружном контуре почти вдвое ниже, чем на внутреннем, а при скользящем контакте они практически одинаковы. Наибольшие нормальные напряжения – $\sigma_{\theta\theta}$ действуют на внешнем контуре сечения и при любых контактных условиях в 2–3 раза превышают $\sigma_{\eta\eta}$.

На рисунке 3 представлены кривые изменений НДС земной поверхности. Нумерация кривых имеет тот же смысл, что и на рисунке 2.

Как следует из рисунка 3 и таблицы 2, при возрастании $|y|$ происходит быстрое затухание компонент НДС земной поверхности, и при $|y| > 3R$ перемещения и напряжения становятся весьма малы независимо от условия сопряжения трубопровода с массивом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В строгой математической постановке получено аналитическое решение задачи о действии подвижной нагрузки на круговую цилиндрическую многослойную оболочку в упругом полупространстве. Решение получено для докритических скоростей движения нагрузки.

Разработанную методику расчета рекомендуется применять для динамического расчета подкрепленных слоистыми (в частном случае, однородными) обделками тоннелей или слоистых и однородных подземных трубопроводов мелкого заложения при действии транспортных нагрузок.

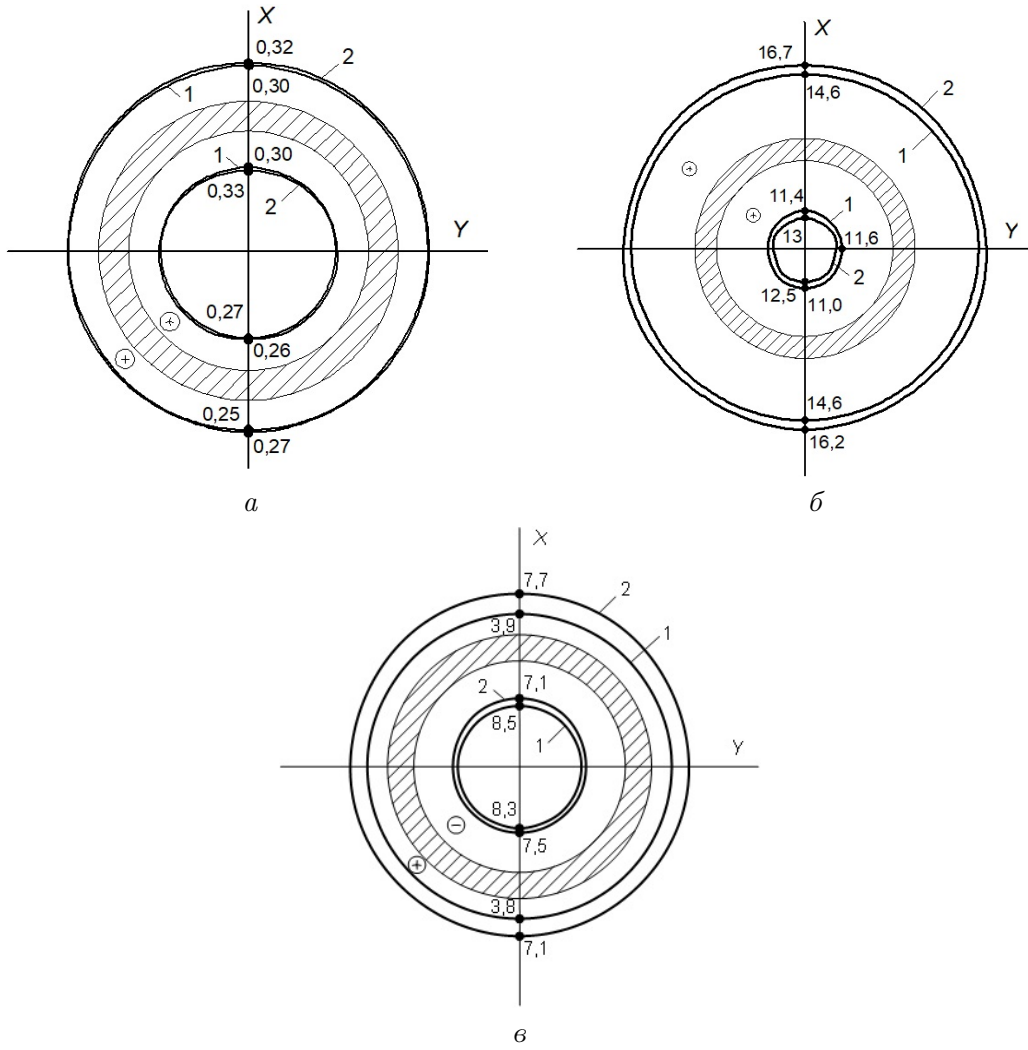


Рисунок 2 – Эшоры u_r^0 (а), $\sigma_{\theta\theta}^0$ (б), $\sigma_{\eta\eta}^0$ (в) в поперечном сечении $\eta = 0$ трубопровода

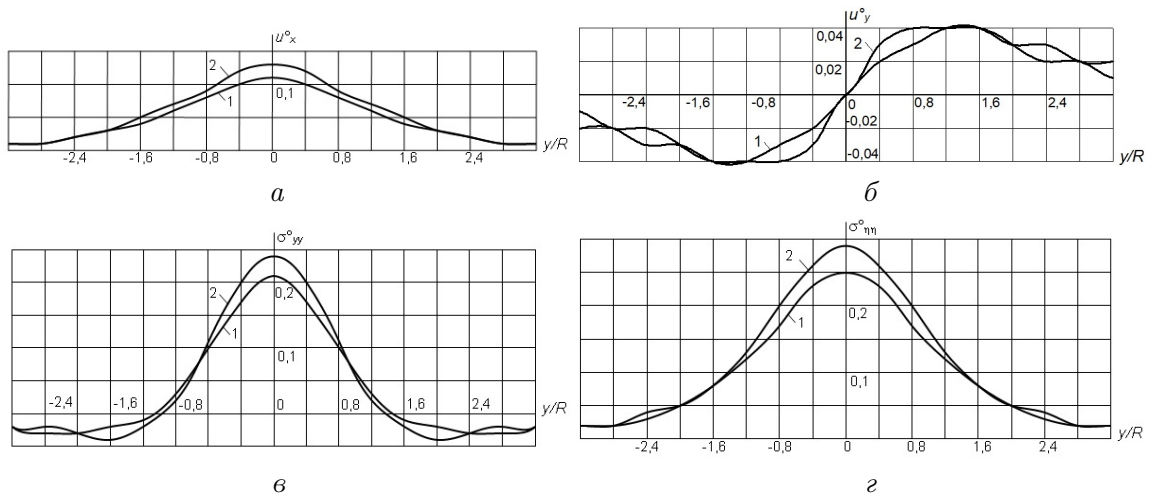


Рисунок 3 – Изменения компонент НДС земной поверхности в координатной плоскости xy ($x = h, \eta = 0$).

При использовании полученного решения исследовано динамическое поведение подземного однослойного (однородного) стального трубопровода при действии движущейся в нем нагрузки.

Список литературы

- 1 Пожуев В.И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 1. – С. 44-48.
- 2 Львовский В.М., Онищенко В.И., Пожуев В.И. Установившиеся колебания цилиндрической оболочки в упругой среде под действием подвижной нагрузки // Сб.: Вопросы прочности и пластичности. – Днепропетровск. – 1974. – С. 98-110.
- 3 Гирнис С.Р. О расчёте заглубленного тоннеля с тонкостенной обделкой при действии стационарной подвижной нагрузки // Наука и техника Казахстана. – Павлодар. – 2006. – № 3. – С. 78-85.
- 4 Гирнис С.Р. Реакция упругого пространства на бегущую в оболочке нагрузку // Вестник Карагандинского государственного университета. Серия Физика. – Караганда. – 2008. – № 2. – С. 65-70.
- 5 Гирнис С.Р. Влияние геометрических параметров обделки на напряжённо-деформированное состояние заглубленного тоннеля // Вестник Бурятского университета. – Улан-Удэ. – 2009. – Вып. 3. – С. 132-139.
- 6 Ержанов Ж.С., Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Наука, 1989. – 240 с.
- 7 Украинец В.Н. Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок. – Павлодар: Издательство Павлодарского государственного университета, 2006. – 123 с.
- 8 Ukrainets V.N. Cojoint effect of mobile normal and torque loads on tunnel with circular support // Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. – 2007. – V. 310, № 1. – P. 55-58.
- 9 Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // International Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45, № 9. – P. 75-85.
- 10 Украинец В.Н. Действие подвижной нагрузки на толстостенную оболочку в упругом полупространстве // Вестник Павлодарского государственного университета. Серия физико-математическая. – Павлодар. – 2010. – № 4. – С. 81-87.
- 11 Coskun İ. and Dolmaseven D. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space // Journal of Engineering. – Hindawi Limited. – 2017. – Vol. 2017. – 12 p. <https://doi.org/10.1155/2017/6145375>.
- 12 Yuan Z., Boström A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space // Journal of Sound and Vibration. – Elsevier. – 2017. – Vol. 387. – P. 177-193.
- 13 Zhou Sh. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems. – Academic Press, 2019. – 276 p.
- 14 Coskun İ., Enginb H., Özmütülcü A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity // Journal of Shock and Vibration. – Hindawi Limited. – 2011. – Vol. 18. – P. 827-838. <https://www.hindawi.com/journals/sv/2011/904936>.
- 15 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
- 16 Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1989. – 270 с.

Л.А. Алексеева¹, В.Н. Украинец²

¹ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

² Торайғыров университеті, Павлодар, Қазақстан

Көлік жүктемелерінің әсерінен тоннель мен ұсақ төсемді жерасты құбыры динамикасының моделі

Аннотация: Көлік жүктемелерінің көп қабатты қаптамамен бекітілген туннельге және жер асты көп қабатты құбырға олардың таяз төселуімен әсер етудің математикалық моделі жасалды. Жер асты құрылыстарының есептік схемасы ретінде серпімді жартылай кеңістікте (массивте) орналасқан серпімді цилиндрлік көп қабатты қабық қарастырылады. Қабық қабаттары мен серпімді жартылай кеңістіктің қозғалысы жылжымалы координаттар жүйесіндегі Лама теңдеулерімен сипатталады. Көлік жүктемесі массив пен қабықтағы бойлық және көлденең толқындардың таралу жылдамдығынан төмен жылдамдықпен қозғалатын субсондық жағдайда еркін жүктеме жылдамдығы кезінде массив пен қабықтың кернеулі-деформацияланған күйінің компоненттерін анықтау мәселесінің аналитикалық шешімі алынды. Компьютерлік эксперименттердің нәтижелері ұсынылған, олар асимметриялық көлік жүктемесінің әсерінен құбыр мен жер бетінің кернеулі күйін көрсетеді.

Түйін сөздер: Серпімді жартылай кеңістік, дыбыс жылдамдығына дейінгі жағдайда көлік жүктемесі, көп қабатты цилиндр пішінді қабық, кернеулі-деформацияланған күй.

L.A. Alexeyeva, V.N. Ukrainets

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Almaty, Kazakhstan

Toraighyrov University, Pavlodar, Kazakhstan

Model of the dynamics of a tunnel and a shallow underground pipeline under the action of traffic loads

Abstract: A mathematical model has been developed for the effect of transport loads on a tunnel reinforced with a multilayer shell and an underground multilayer pipeline at their shallow location. As a design scheme for these underground structures, an elastic cylindrical multilayer shell located in an elastic half-space (massif) is considered. The displacement of the layers of the shell and the elastic half-space is described by the Lamé equations in a moving coordinate system. An analytical solution is obtained for the problem of determining the components of the stress-strain state of a rock mass and a

shell at arbitrary loading speeds in the subsonic case, when the transport load moves at a speed lower than the propagation velocities of longitudinal and transverse waves in the rock and shell. The results of computer experiments are presented, which illustrate the stress-strain state of the pipeline and the earth's surface under moving axisymmetric traffic loads.

Keywords: Elastic half-space, subsonic transport load, multilayer cylindrical shell, stress-strain state.

References

- 1 Pozhuev V.I. Dejstvie podvizhnoj nagruzki na cilindricheskuju obolochku v uprugoj srede [The action of a moving load on a cylindrical shell in an elastic medium]. Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij [Construction mechanics and calculation of structures], 1, 44-48 (1978).
- 2 L'vovskij V.M., Onishhenko V.I., Pozhuev V.I. Ustanovivshiesja kolebanija cilindricheskoj obolochki v uprugoj srede pod dejstviem podvizhnoj nagruzki [Steady-state vibrations of a cylindrical shell in an elastic medium under the action of a moving load]. Sb.: Voprosy prochnosti i plastichnosti [Problems of strength and plasticity] (Dnepropetrovsk, 1974. P. 98-110).
- 3 Girmis S.R. O raschjote zaglublennogo tunnelja s tonkostennoj obdelkoj pri dejstvii stacionarnoj podvizhnoj nagruzki [On the calculation of a buried tunnel with a thin-walled lining under the action of a stationary moving load]. Nauka i tehnika Kazahstana [Science and technology of Kazakhstan], Pavlodar, 3, 78-85 (2006).
- 4 Girmis S.R. Reakcija uprugogo prostranstva na begushhuju v obolochke nagruzku [Reaction of elastic space to a load running in a shell]. Vestnik Karagandinskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija Fizika [Bulletin of the Karaganda State University. Physics series], Karaganda, 2, 65-70 (2008).
- 5 Girmis S.R. Vlijanie geometricheskikh parametrov obdelki na naprjazhjonno-deformirovanoe sostojanie zaglublennogo tunnelja [The influence of the geometric parameters of the lining on the stress-strain state of the buried tunnel]. Vestnik Burjatskogo universiteta [Bulletin of the Buryat University], Ulan-Ude, 3, 132-139 (2009).
- 6 Erzhanov Zh.S., Ajtaliev Sh.M., Alekseeva L.A. Dinamika tonnelej i podzemnyh truboprovodov [Dynamics of tunnels and underground pipelines] (Alma-Ata, Nauka, 1989. 240p.)
- 7 Ukrainec V.N. Dinamika tonnelej i truboprovodov melkogo zalozhenija pod vozdejstviem podvizhnyh nagruzok [Dynamics of shallow tunnels and pipelines under the influence of moving loads] (Pavlodar, Izdatel'stvo Pavlodarskogo gosudarstvennogo universiteta, 2006. 123p.)
- 8 Ukrainets V.N. Cojoint effect of mobile normal and torque loads on tunnel with circular support. Bulletin of the Tomsk Polytechnic University, 310 (1), 55-58 (2007).
- 9 Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads. International Applied Mechanics, 45(9), 75-85 (2009).
- 10 Ukrainec V.N. Dejstvie podvizhnoj nagruzki na tolstostennuju obolochku v uprugom poluprostranstve [The action of a movable load on a thick-walled shell in an elastic half-space]. Vestnik Pavlodarskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija fiziko-matematicheskaja [Bulletin of Pavlodar State University. Physics and mathematics series], Pavlodar, 4, 81-87 (2010).
- 11 Coskun İ. and Dolmaseven D. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space. Journal of Engineering. Hindawi Limited, 2017, 12 p. (2017). <https://doi.org/10.1155/2017/6145375>.
- 12 Yuan Z., Boström A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space. Journal of Sound and Vibration. Elsevier, 387, 177-193 (2017).
- 13 Zhou Sh. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems (Academic Press, 2019.276p.)
- 14 Coskun İ., Enginb H., Özmütülc A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity. Journal of Shock and Vibration. Hindawi Limited. 18, 827-838 (2011). <https://www.hindawi.com/journals/sv/2011/904936>.
- 15 Novackij V. Teorija uprugosti [Theory of elasticity] (Moscow, Mir, 1975, 872p.)
- 16 Bulychev N.S. Mehanika podzemnyh sooruzhenij v primerah i zadachah [Mechanics of underground structures in examples and problems] (Moscow, Nedra, 1989, 270p.)

Информация об авторах:

Алексеева Л.А. – доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина 125, Алматы, Казахстан.

Украинец В. Н. – автор для корреспонденции, доктор технических наук, профессор кафедры "Архитектура и дизайн", Торайгыров университет, ул. Ак. Чокина 139, г. Павлодар, Казахстан.

Alexeyeva L. A. – Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, 125 Pushkin Str., Almaty, Kazakhstan.

Ukrainets V. N. – corresponding author, Doctor of Technical Sciences, professor Department of "Architecture and Design", Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan.

Received 7.12.2020