Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 133, №4, 40-53 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

IRSTI: **27.01**

А. А. Кореновский

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, Украина
(E-mail: anakor@paco.net)

РАСЧЕТЫ К ОДНОЙ ИЛЛЮСТРАЦИИ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА [1]

Аннотация: На сторонах прямоугольного равнобедренного треугольника построены внешние по отношению к этому треугольнику квадраты. Задача состоит в построении такой прямой на плоскости, которая делит состоящую из этих трех квадратов фигуру на две равновеликие (т.е. равной площади) фигуры. Подсчитаны некоторые параметры, определяемые этой прямой, в частности, площади частей исходных квадратов в полуплоскостях. Соответствующие результаты иллюстрируются различными чертежами, таблицами и графиками.

Ключевые слова: теорема Пифагора, интерпретация теоремы Пифагора, деление фигуры, равновеликие фигуры.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-133-4-40-53

Введение

В данной статье приводится решение одной задачи элементарной математики. Поводом послужила распространенная в Интернете анимация [1], иллюстрирующая теорему Пифагора (см. Рис. 1). Материал статьи может оказаться интересным для школьников, а также для учителей математики, которые руководят самостоятельной работой учеников или проводят исследования с целью повышения своего квалификационного уровня.

Постановка задачи: Рассматривается прямоугольный равнобедренный треугольник, длина гипотенузы которого равна 1. Каждая сторона этого треугольника является стороной внешнего по отношению к треугольнику квадрата. Предположим, что эти квадраты являются плоскими сосудами, соединенными между собой с помощью вершин треугольника. В системе этих сосудов содержится 1 л жидкости.

Вопрос: *сколько жидкости содержится в каждом из сосудов, если гипотенуза треугольника наклонена под заданным углом* α *относительно линии горизонта* ?

Частичное решение такой задачи в случае треугольника со сторонами 3, 4 и 5 приведено в дипломной работе [2], а в случае произвольного прямоугольного треугольника – в работе [3].

[1]Я очень благодарен Нурлану Темиргалиеву и Карлыгаш Нуртазиной за интерес к работе и предоставленную ссылку в Интернете.

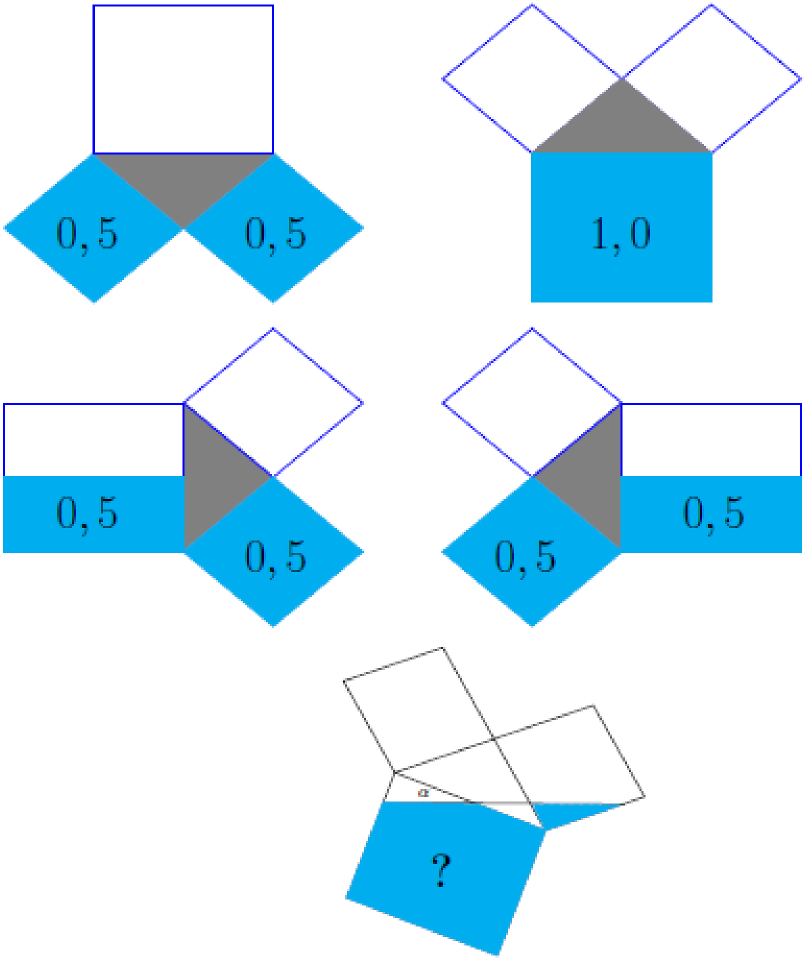

Рисунок 1 – Постановка задачи.

1. Малые углы поворота

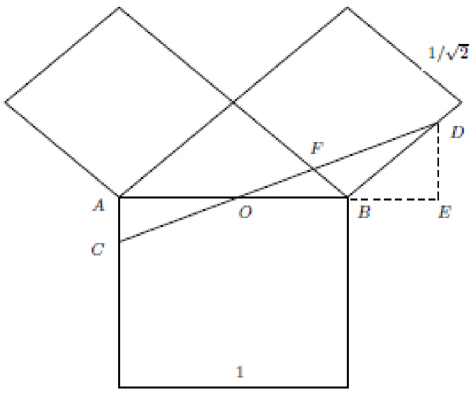

Рисунок 2 – Малые углы поворота (§1).

Обозначим $\angle AOC = \angle DOE = \alpha,\ \angle ODB = \beta,\ |AC| = y,\ |BD| = x$.

При $\alpha \gtrsim 0$ имеем $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$. Обозначим $t = \operatorname{tg}\alpha$. Тогда $|AO| = \frac{y}{t}$, $|OB| = 1 - \frac{y}{t}$, $|BE| = |DE| = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Из прямоугольного треугольника $\triangle ODE$ находим

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{1-\frac{y}{t}+\frac{x}{\sqrt{2}}}=t \iff \tag{1}$$

$$\iff x\cdot\frac{1-t}{t}=\sqrt{2}\left(1-\frac{y}{t}\right). \tag{2}$$

Выразим $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-t}{1+t}$. Из условия равенства площадей прямоугольных треугольников $\triangle AOC$ и $\triangle FDB$ имеем:

$$\frac{y^2}{t}=x^2\cdot\frac{1-t}{1+t} \iff \tag{3}$$

$$\iff x\cdot\frac{1-t}{t}=\frac{y}{t}\cdot\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}. \tag{4}$$

Из (2) и (4) получаем

$$\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{y}{t}\right)=\frac{y}{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{t}} \iff y=\frac{\sqrt{2}\cdot t}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}. \tag{5}$$

В итоге получили

$$S_{\triangle DFB}=S_{\triangle AOC}=\frac{y^2}{2t}=\frac{1}{2t}\left(\frac{\sqrt{2}\cdot t}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}\right)^2=\frac{t}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}\right)^2}=$$

$$=\frac{t^2}{2t+1-t^2+2\sqrt{2t\,(1-t^2)}},\quad 0\le t\le t_0.$$

2. Второй критический случай

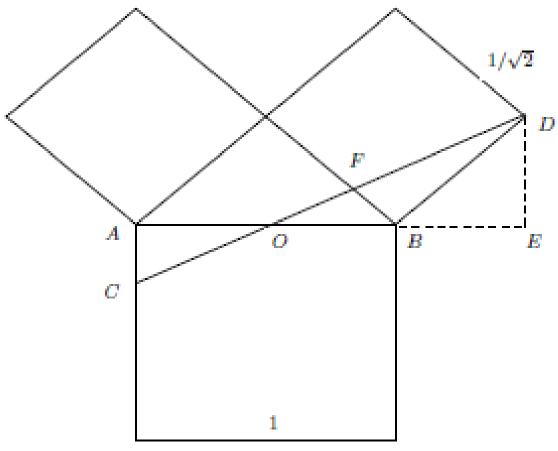

Рисунок 3 – Второй критический случай (§2).

Для нахождения t_0 подставим (5) в (2) и получим

$$x=\frac{t}{1-t}\cdot\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}\right)=\frac{t}{1-t}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}.$$

Из геометрических соображений имеем $x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. Имеем

$$x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{1}{2} \ge \frac{t}{1-t} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}} \iff$$

$$\iff \sqrt{2}\cdot\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t} \ge \sqrt{1+t}\cdot(3t-1). \tag{6}$$

В предельном случае $|BD| = x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ требуется найти корни уравнения

$$2t(1-t) = (t+1)\left(9t^2-6t+1\right) \iff 9t^3+5t^2-7t+1=0. \tag{7}$$

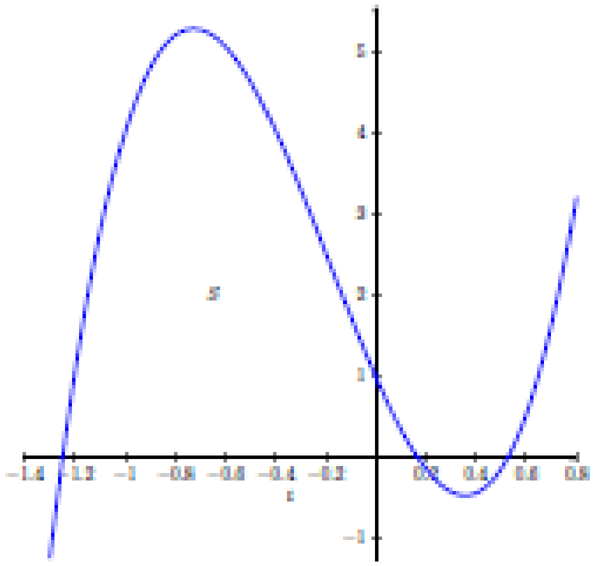

Рисунок 4 – График кубической параболы в левой части равенства (7).

Корни этого уравнения (7) можно найти с использованием формул Кардано. Приближенные значения корней равны -1.249, 0.170, 0.524, и лишь последний из них $t_0 \approx 0,524$ удовлетворяет условию $t_0 > \frac{1}{3}$ (при таком t_0 неравенство (6) обращается в равенство). При этом $y \approx 0,286$, $\frac{y}{t} \approx 0,546$, $S \approx 0,078$.

3. Первый критический случай

В предыдущем разделе 2 было получено, что $\frac{y}{t_0} \approx 0,546 > \frac{1}{2}$. Поэтому естественным является следующий вопрос: *при каком значении* $t = t_0' \in (0, t_0)$ *значение* $\frac{y}{t} = \frac{1}{2}$ *?* При этом значении t_0' точка O делит отрезок AB пополам. Для нахождения t_0' требуется решить уравнение

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t^2+2t-1=0 \Leftarrow t = \sqrt{2}-1 \approx 0,414.$$

Таким образом, $t_0' = \sqrt{2}-1$, а соответствующие значения $y = \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0,207$, $S = \frac{\sqrt{2}-1}{8} \approx 0,052$.

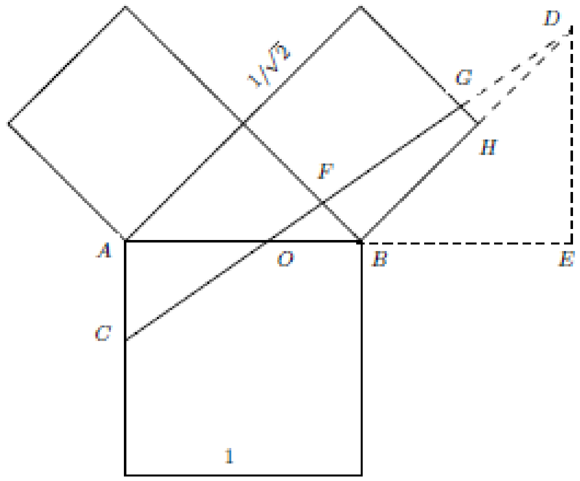

Рисунок 5 – Второй посткритический случай (§4).

4. Второй посткритический случай

Как и в предыдущем случае, пусть $\angle AOC = \angle DOE = \alpha$, $\angle ODB = \beta$, $|AC| = y$, $|BD| = x$. При $\operatorname{arctg} t_0 \le \alpha < \frac{\pi}{4}$ снова имеем $\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$, и для $t = \operatorname{tg}\alpha$ имеем $|AO| = \frac{y}{t}$, $|OB| = 1 - \frac{y}{t}$, $|BE| = |DE| = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Как и в предыдущем случае, в прямоугольном треугольнике $\triangle ODE$ видим, что равенства (1) и (2) остаются в силе, т. е.

$$x \cdot \frac{1-t}{t} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{y}{t}\right). \tag{8}$$

Площадь трапеции $BFGH$ находим как разность площадей треугольников $\triangle FDB$ и $\triangle GDH$, а условие равенства площадей треугольника $\triangle AOC$ и трапеции $BFGH$ принимает такой вид:

$$\frac{y^2}{t} = x^2 \cdot \frac{1-t}{1+t} - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1-t}{1+t}. \iff \frac{y^2}{t} \cdot \frac{1+t}{1-t} = \sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{y^2}{t} \cdot \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

Комбинируя (8) и (9), находим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{y^2}{t} \cdot \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1-t}{t} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{y}{t}\right) \iff$$

$$\iff y^2 \cdot \frac{1+t}{t} + 2y + \frac{1-5t}{2} = 0. \tag{10}$$

Вычислим дискриминант

$$D = \frac{2}{t}\left(5t^2 + 6t - 1\right).$$

Учитывая, что $y > 0$, из уравнения (10) находим

$$y = \frac{\sqrt{\frac{2}{t}\left(5t^2 + 6t - 1\right)} - 2}{2 \cdot \frac{1+t}{t}} = \frac{\sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1} - t}{1+t}. \tag{11}$$

При этом

$$S = \frac{y^2}{2t} = \frac{1}{2t} \cdot \frac{\frac{t}{2}\left(5t^2 + 6t - 1\right) + t^2 - 2t\sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}}{(1+t)^2} = \frac{\frac{5}{4}t^2 + 2t - \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}}{(1+t)^2}.$$

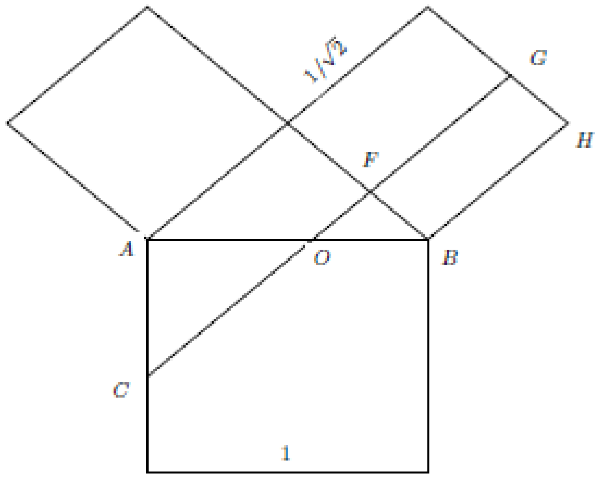

Рисунок 6 – Третий критический случай $\alpha = \frac{\pi}{4}$ **(§5).**

5. Третий критический случай $\alpha = \frac{\pi}{4}$

В предельном случае $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $t = \operatorname{tg}\alpha = 1$ имеем $|AC| = |AO| = y$, $|OB| = 1 - y$, $|FB| = \frac{1-y}{\sqrt{2}}$, а условие равенства площадей треугольника $\triangle AOC$ и прямоугольника $BFGH$ принимает такой вид

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-y}{\sqrt{2}} \iff y^2 + y - 1 = 0 \implies y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618.$$

Интересно отметить, что в этом случае отрезок AO осуществляет "золотое сечение" отрезка AB.

Заметим также, что при $t = 1$ равенство (11) принимает вид $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, т. е. при $t = 1$ $\left(\alpha = \frac{\pi}{4}\right)$ равенство (11) остается в силе. При этом $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$,

$$S = \frac{y^2}{2} = \frac{1}{8}\left(6 - 2\sqrt{5}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \approx 0,191.$$

6. Угол поворота $\alpha \gtrsim \frac{\pi}{4}$

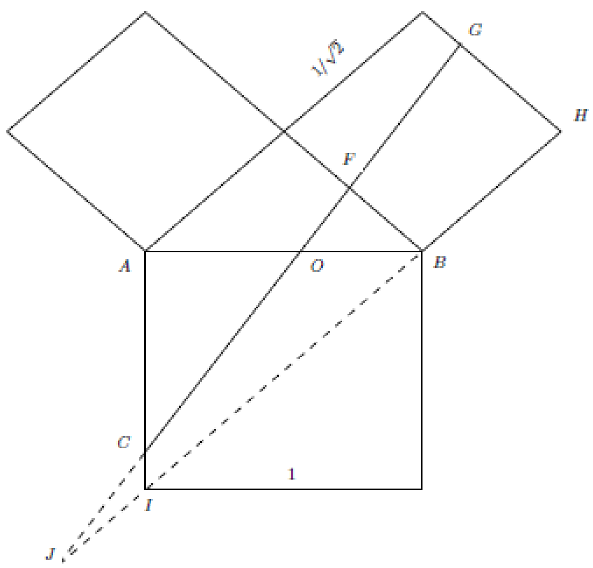

Рисунок 7 – Угол поворота $\alpha \gtrsim \frac{\pi}{4}$ **(§6).**

Рассмотрим теперь случай $\angle AOC = \angle FOB = \alpha \gtrsim \frac{\pi}{4}$. Из треугольника $\triangle OBF$ находим $\angle OFB = \gamma = \frac{3\pi}{4} - \alpha$, а из прямоугольного треугольника $\triangle BFJ$ находим $\angle BJF = \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma = \alpha - \frac{\pi}{4}$. Как и выше, обозначаем $t = \operatorname{tg}\alpha$, тогда $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t-1}{t+1}$. Далее, обозначим $|AC| = y$, $|BJ| = x$. Тогда $|AO| = \frac{y}{t}$, $|OB| = 1 - \frac{y}{t}$, $|BF| = x \cdot \operatorname{tg}\beta$. В треугольнике $\triangle BFO$ по теореме синусов получим

$$\frac{1-\frac{y}{t}}{\sin\gamma} = \frac{x\cdot\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha} \iff \frac{1-\frac{y}{t}}{x\cdot\frac{t-1}{t+1}} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\alpha}. \tag{12}$$

Так как

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{t+1}{t},$$

то из (12) следует

$$\frac{1-\frac{y}{t}}{x\cdot\frac{t-1}{t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{t+1}{t} \iff x = \sqrt{2}\cdot\frac{t-y}{t-1}. \tag{13}$$

Площадь трапеции $BFGH$ найдем как разность площадей прямоугольных треугольников $\triangle HJG$ и $\triangle BJF$. Тогда условие равенства площадей треугольника $\triangle AOC$ и трапеции $BFGH$ принимает такой вид

$$\frac{y^2}{t} = \left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\operatorname{tg}\beta - x^2\operatorname{tg}\beta \iff \frac{y^2}{t} = \frac{t-1}{t+1}\left(\sqrt{2}\cdot x+\frac{1}{2}\right). \tag{14}$$

Подставив (13) в (14), получим

$$\frac{y^2}{t} = \frac{t-1}{t+1}\left(2\cdot\frac{t-y}{t-1}+\frac{1}{2}\right) \iff y^2\cdot\frac{t+1}{t}+2\cdot y+\frac{1-5t}{2} = 0. \tag{15}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (10) и, таким образом, его положительное решение выражено равенством (11), т. е.

$$y = \frac{\sqrt{\frac{t}{2}}\cdot\sqrt{5t^2+6t-1}-t}{1+t}.$$

При этом, как и выше,

$$S = \frac{y^2}{2t} = \frac{\frac{5}{4}t^2+2t-\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{t}{2}}\cdot\sqrt{5t^2+6t-1}}{(1+t)^2}.$$

Далее естественно возникает следующий вопрос: *с ростом* t $(= \operatorname{tg}\alpha)$ *какая из двух ситуаций наступит раньше*

$$1)\ |AC| = 1\ (y=1,\ t=t_1,\ \beta=\beta_1) \quad \textit{или} \quad 2)\ |GH| = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ?$$

7. Шестой критический случай

Покажем, что раньше наступит отмеченная в конце предыдущего раздела ситуация 1).

В предельном случае $y = 1$ $\left(x = \sqrt{2}\right)$ равенство (15) принимает вид

$$\frac{t+1}{t}+2+\frac{1-5t}{2} = 0 \iff 5t^2-7t-2 = 0.$$

Положительное решение этого уравнения $t_1 = \frac{7+\sqrt{89}}{10} \approx 1,643$. При этом значении t_1 имеем

$$\frac{|GH|}{|HJ|} = \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{t_1-1}{t_1+1} = \frac{\frac{7+\sqrt{89}}{10}-1}{\frac{7+\sqrt{89}}{10}+1} = \frac{\sqrt{89}-3}{\sqrt{89}+17} < \frac{1}{3}.$$

Это означает, что ограничения рассмотренного в предыдущем разделе случая следующие

$$1 < t \le t_1 = \frac{7+\sqrt{89}}{10} \iff \frac{\pi}{4} < \alpha \le \operatorname{arctg}\frac{7+\sqrt{89}}{10}.$$

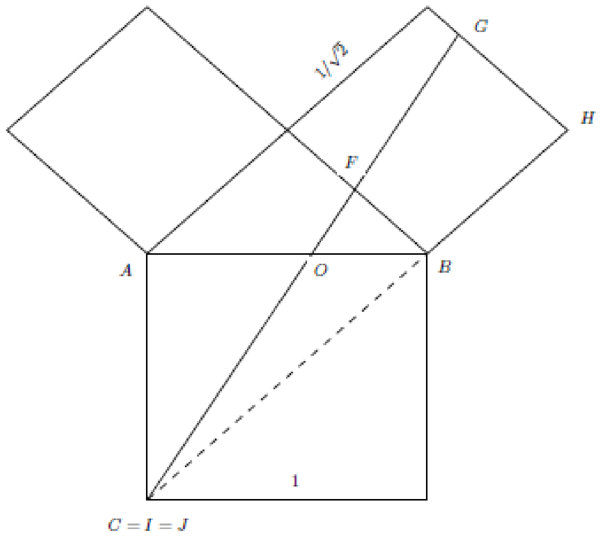

Рисунок 8 – Шестой критический случай (§7).

При $t = t_1$ имеем $y = 1$, $\frac{y}{t_1} = \frac{10}{7+\sqrt{89}} \approx 0,608$, $S = \frac{1}{2t_1} = \frac{5}{7+\sqrt{89}} \approx 0,304$, а при $t \gtrsim t_1 = \frac{7+\sqrt{89}}{10}$ наступает ситуация, которая рассматривается в следующем разделе.

8. Пятый критический случай

Вернемся к случаю, рассмотренному в разделе 6, и изучим такой вопрос: *при каком значении* $t = t_1' \in (1, t_1)$ *обе части правого маленького квадрата будут иметь одинаковые площади ?* Ответом на этот вопрос является решение уравнения $S = \frac{1}{4}$, т. е.

$$\frac{\frac{5}{4}t^2 + 2t - \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{t}{2}} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1}}{(1+t)^2} = \frac{1}{4}.$$

Элементарные преобразования приводят это уравнение к такому

$$4t^4 + 2t^3 - 7t^2 - 4t + 1 = 0,$$

а его численное решение $t_1' \in (1, t_1)$ равно $t_1' \approx 1,309$. При этом, поскольку $S = \frac{y^2}{2t_1'} = \frac{1}{4}$, то

$$y\left(t_1'\right) = \sqrt{\frac{t_1'}{2}} \approx 0,809, \quad \frac{y\left(t_1'\right)}{t_1'} = \frac{1}{\sqrt{2t_1'}} \approx 0,618.$$

9. Четвертый критический случай

Снова вернемся к случаю, рассмотренному в разделе 6, и изучим еще и такой вопрос: *при каком значении* $t = t_1'' \in (t_0, t_1)$ *значение* $\frac{y}{t}$ *максимальное ?* Иначе говоря, какую максимальную длину может иметь отрезок AO ?

Этот вопрос сводится к нахождению максимума функции

$$\frac{y}{t} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2t}} \cdot \sqrt{5t^2 + 6t - 1} - 1}{1+t}.$$

Численный анализ показывает, что эта функция достигает своего максимального значения $\frac{y}{t} \approx 0,620$ в точке $t_1'' \approx 1,141$. При этом $y \approx 0,707$, $S \approx 0,219$.

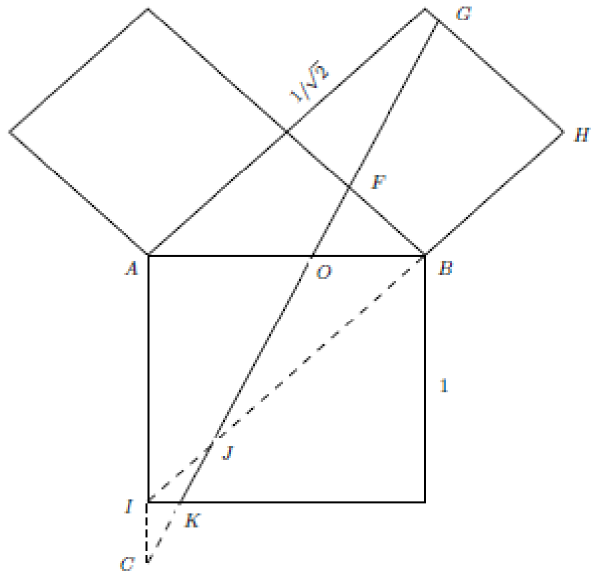

Рисунок 9 – Шестой посткритический случай (§10).

10. Шестой посткритический случай

Как и в случае $2c)$, обозначаем $\angle AOC = \angle FOB = \alpha$, $\angle BJF = \beta$, $\angle OFB = \gamma$, $t = \operatorname{tg}\alpha$, $|AC| = y$, $|BJ| = x$. Тогда $\operatorname{tg}\beta = \frac{t-1}{t+1}$, равенство (12) остается в силе, и, таким образом, в силу (13),

$$x = \sqrt{2}\cdot\frac{t-y}{t-1}. \tag{16}$$

Площадь трапеции $AOKI$ найдем как разность площадей прямоугольных треугольников $\triangle AOC$ $\triangle IKC$, а площадь трапеции $BFGH$ найдем как разность площадей прямоугольных треугольников $\triangle HJG$ и $\triangle BJF$. Тогда условие равенства площадей трапеций $AOKI$ и $BFGH$ принимает следующий вид

$$\frac{y^2}{t} - \frac{(y-1)^2}{t} = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}\beta - x^2\cdot\operatorname{tg}\beta \iff \frac{2y-1}{t} = \frac{t-1}{t+1}\left(\sqrt{2}\cdot x + \frac{1}{2}\right). \tag{17}$$

Подставим (16) в (17) и получим

$$\frac{1}{t}\cdot(2y-1) = \frac{t-1}{t+1}\left(2\cdot\frac{t-y}{t-1} + \frac{1}{2}\right) \iff y = \frac{5t^2+t+2}{4\cdot(2t+1)}. \tag{18}$$

При этом

$$\frac{y}{t} = \frac{5t^2+t+2}{4t\cdot(2t+1)}, \quad S = \frac{2y-1}{2t} = \frac{1}{2t}\left(\frac{5t^2+t+2}{4t+2} - 1\right) = \frac{5t-3}{4(2t+1)}.$$

Условия на параметры для этого случая

$$|GH| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\operatorname{tg}\beta \le \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{t-1}{t+1} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\iff \sqrt{2}\cdot x + 1 \le \frac{t+1}{t-1} \iff \sqrt{2}\cdot x \le \frac{2}{t-1} \iff x \le \frac{\sqrt{2}}{t-1}.$$

Подставим (16) и получим

$$\frac{\sqrt{2}}{t-1}\cdot(t-y) \le \frac{\sqrt{2}}{t-1} \iff t \le y+1. \tag{19}$$

Подставим (18) и получим

$$t \le \frac{5t^2+t+2}{4\cdot(2t+1)} + 1 \iff t-1 \le \frac{5t^2+t+2}{8t+4} \iff$$

$$\iff 8t^2+4t-8t-4 \le 5t^2+t+2 \iff 3t^2-5t-6 \le 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена $D=25+72=97$ и тогда получаем $t \le t_2 = \frac{5+\sqrt{97}}{6} \approx 2,475$.

11. Седьмой критический случай

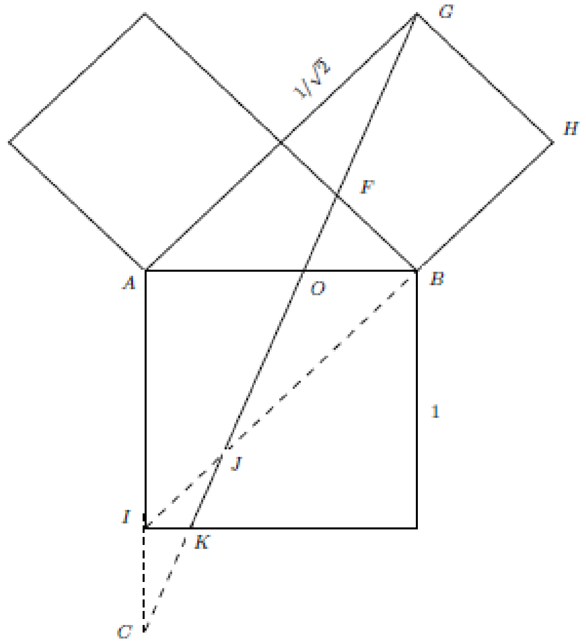

Рисунок 10 – Седьмой критический случай (§11).

При $t=t_2$ из (19) имеем

$$y = t_2 - 1 = \frac{5+\sqrt{97}}{6} - 1 = \frac{\sqrt{97}-1}{6} \approx 1,475.$$

При этом

$$\frac{y}{t_2} = \frac{17-\sqrt{97}}{12} \approx 0,596; \quad S = 2y - 12t_2 = \frac{\sqrt{97}-4}{\sqrt{97}+5} \approx 0,394.$$

12. Угол поворота $\alpha \lesssim \frac{\pi}{2}$

Пусть $\alpha \gtrsim \operatorname{arctg} t_2$ $(t > t_2)$. Как и в случае $3a)$, обозначаем $\angle AOC = \angle FOB = \alpha$, $\angle BJF = \beta$, $t = \operatorname{tg}\alpha$, $|AC| = y$, $|BJ| = x$. Тогда равенство (12) (а значит и (13) и (16)) остаются в силе и, таким образом,

$$x = \sqrt{2} \cdot \frac{t-y}{t-1}. \tag{20}$$

Площадь S_{AOKI} трапеции $AOKI$ найдем как разность площадей прямоугольных треугольников $\triangle AOC$ и $\triangle IKC$, т. е. $2 \cdot S_{AOKI} = \frac{y^2}{t} - \frac{(y-1)^2}{t}$. Площадь пятиугольника $BFGLH$ найдем как разность площадей квадрата $BMLH$ и прямоугольного треугольника $\triangle FMG$. Имеем $|FB| = x \cdot \operatorname{tg}\beta$, $|MF| = \frac{1}{\sqrt{2}} - x \cdot \operatorname{tg}\beta$, $\angle MGF = \beta$, $2S_{\triangle FMG} = |MF|^2 \cdot \operatorname{tg}\beta$, $S_{BMLH} = \frac{1}{2}$. Итак, условие равенства площадей трапеции $AOKI$ и пятиугольника $BFGLH$ принимает следующий вид

$$\frac{y^2}{t} - \frac{(y-1)^2}{t} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x \cdot \frac{t-1}{t+1}\right)^2 \cdot \frac{t+1}{t-1}\right) \iff$$

$$\iff y^2 \cdot \frac{2}{(t-1)(t+1)} + y \cdot \left[\frac{2}{t} + \frac{2}{t-1} - \frac{4t}{(t-1)(t+1)}\right] +$$

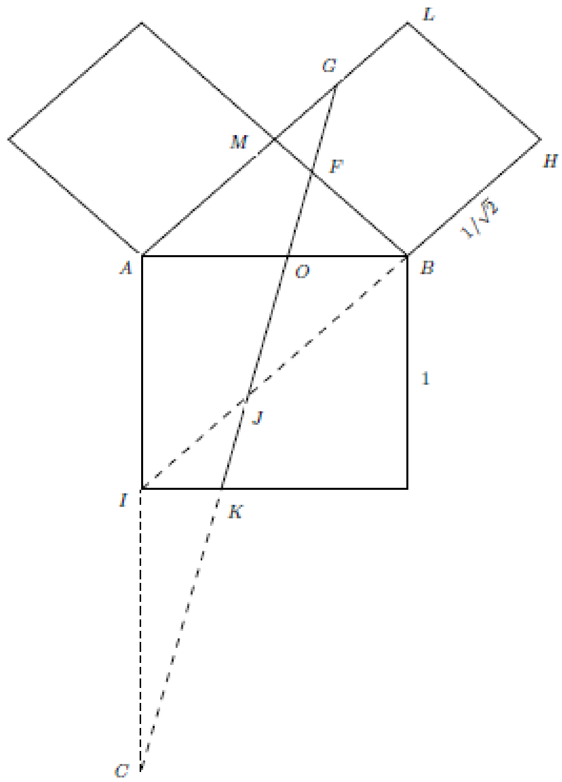

Рисунок 11 – Угол поворота $\alpha \lesssim \frac{\pi}{2}$ (§12).

$$+\left[-\frac{1}{t}-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{t-1}-\frac{2t}{t-1}+\frac{2t^2}{(t-1)(t+1)}\right]=0. \tag{21}$$

Упростим коэффициенты

$$\frac{2}{t}+\frac{2}{t-1}-\frac{4t}{(t-1)(t+1)}=\frac{2}{t(t+1)},$$

$$-\frac{1}{t}-1+\frac{\frac{1}{2}(t+1)}{t-1}-\frac{2t}{t-1}+\frac{2t^2}{(t-1)(t+1)}=\frac{-t^2-5t-2}{2t(t+1)}.$$

Итак, уравнение (21) принимает следующий вид

$$y^2\cdot\frac{2}{(t-1)(t+1)}+y\cdot\frac{2}{t(t+1)}-\frac{t^2+5t+2}{2t(t+1)}=0 \iff$$

$$\iff y^2\cdot\frac{2t}{t-1}+2y-\frac{t^2+5t+2}{2}=0. \tag{22}$$

Дискриминант квадратного трехчлена в левой части равен

$$D=4\cdot\frac{t+1}{t-1}\left(t^2+4t-1\right).$$

Таким образом, положительное решение уравнения (22) равно

$$y=\frac{2\cdot\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\cdot\sqrt{t^2+4t-1}-2}{\frac{4t}{t-1}}=\frac{\sqrt{\left(t^2-1\right)\left(t^2+4t-1\right)}+1-t}{2t}.$$

При этом

$$\frac{y}{t}=\frac{\sqrt{\left(t^2-1\right)\left(t^2+4t-1\right)}+1-t}{2t^2},$$

$$S=\frac{2y-1}{2t}=\frac{\sqrt{\left(t^2-1\right)\left(t^2+4t-1\right)}+1-2t}{2t^2}.$$

Итоги

Подытожим полученные результаты в виде таблиц и графиков. Через S обозначается площадь нижней части правого (нижнего) "маленького" квадрата.

Сводная таблица результатов.

§	t	$\lvert AC\rvert = y$	$\lvert AO\rvert = \frac{y}{t}$	S
–	0	0	–	0
1	$0 \le t \le t_0 \approx 0,524$ – корень уравнения $9t^3+5t^2-7t+1=0$	$\frac{\sqrt{2}\cdot t}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1-t^2}{t}}}$	$\frac{t^2}{2t+1-t^2+2\sqrt{2t(1-t^2)}}$
3	$t_0' \approx 0,414$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2} \approx 0,207$	$0,5$	$\frac{\sqrt{2}-1}{8} \approx 0,052$
2	$t_0 \approx 0,524$	$\approx 0,286$	$\approx 0,546$	$\approx 0,078$
4	$t_0 \le t \le 1$	$\frac{\sqrt{\frac{t}{2}}\cdot\sqrt{5t^2+6t-1}-t}{1+t}$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2t}}\cdot\sqrt{5t^2+6t-1}-1}{1+t}$	$\frac{\frac{5}{4}t^2+2t-\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{t}{2}}\cdot\sqrt{5t^2+6t-1}}{(1+t)^2}$
5	1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$	$\frac{3-\sqrt{5}}{4} \approx 0,191$
6	$1 \le t \le t_1 = \frac{7+\sqrt{89}}{10} \approx 1,643$	$\frac{\sqrt{\frac{t}{2}}\cdot\sqrt{5t^2+6t-1}-t}{1+t}$	$\frac{\sqrt{\frac{1}{2t}}\cdot\sqrt{5t^2+6t-1}-1}{1+t}$	$\frac{\frac{5}{4}t^2+2t-\frac{1}{4}-\sqrt{\frac{t}{2}}\cdot\sqrt{5t^2+6t-1}}{(1+t)^2}$
9	$t_1'' \approx 1,141$	$\approx 0,707$	$\approx 0,620$	$\approx 0,219$
8	$t_1' \approx 1,309$	$\approx 0,809$	$\approx 0,618$	$0,25$
7	t_1	1	$\frac{10}{7+\sqrt{89}} \approx 0,608$	$\frac{5}{7+\sqrt{89}} \approx 0,304$
10	$t_1 \le t \le t_2 = \frac{5+\sqrt{97}}{6} \approx 2,475$	$\frac{5t^2+t+2}{4\cdot(2t+1)}$	$\frac{5t^2+t+2}{4\cdot t(2t+1)}$	$\frac{5t-3}{4(2t+1)}$
11	t_2	$\frac{\sqrt{97}-1}{6} \approx 1,475$	$\frac{17-\sqrt{97}}{12} \approx 0,596$	$\frac{\sqrt{97}-4}{\sqrt{97}+5} \approx 0,394$
12	$t \ge t_2$	$\frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2+4t-1)}+1-t}{2t}$	$\frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2+4t-1)}+1-t}{2t^2}$	$\frac{\sqrt{(t^2-1)(t^2+4t-1)}+1-2t}{2t^2}$
–	$+\infty$	$+\infty$	$0,5$	$0,5$

Таблица критических состояний.

§	t	α^o	$y = \lvert AC\rvert$	$\frac{y}{t} = \lvert AO\rvert$	S
-	0	0	0	-	0
§3	$t_0' \approx 0,414$	22,490	0,207	0,5	0,052
§2	$t_0 \approx 0,524$	27,655	0,286	0,546	0,078
§5	1	45	0,618	0,618	0,191
§9	$t_1'' \approx 1,141$	48,768	0,707	0,620	0,219
§8	$t_1' \approx 1,309$	52,622	0,809	0,618	0,25
§7	$t_1 \approx 1,643$	58,674	1	0,608	0,304
§11	$t_2 \approx 2,475$	67,999	1,475	0,596	0,394
-	$+\infty$	90	$+\infty$	0,5	0,5

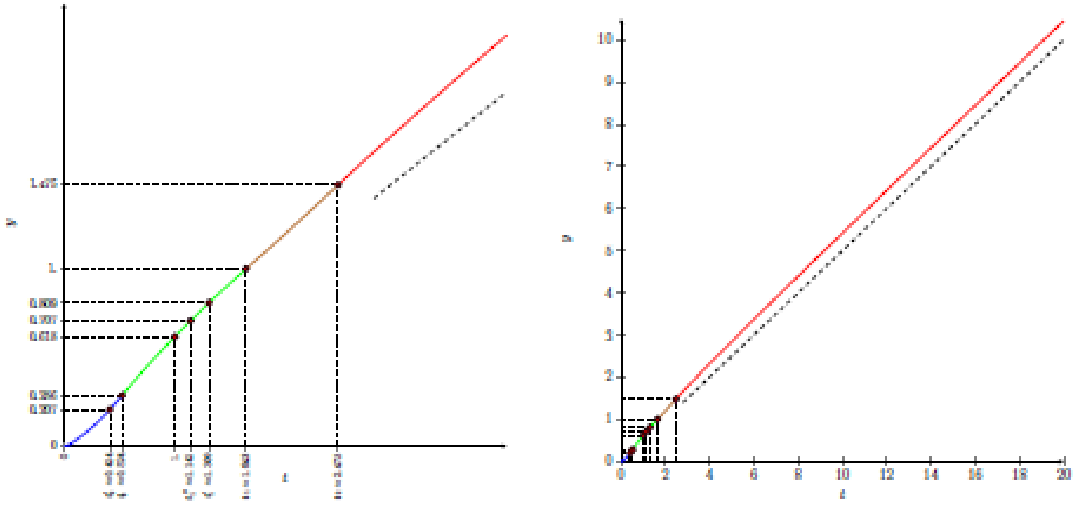

Рисунок 12 – График функции $y = y(t)$ **.**

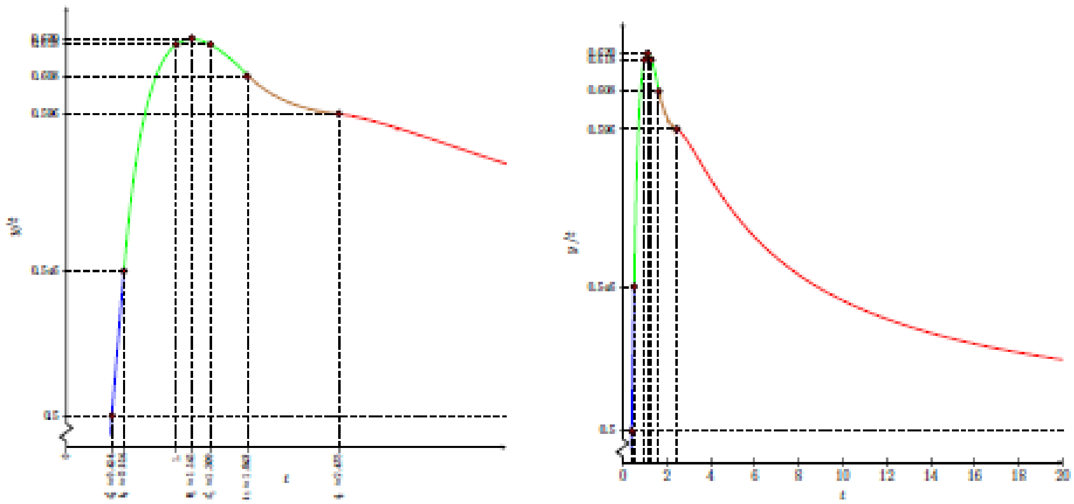

Рисунок 13 – График отклонения от центра гипотенузы $\frac{y(t)}{t}$ **.**

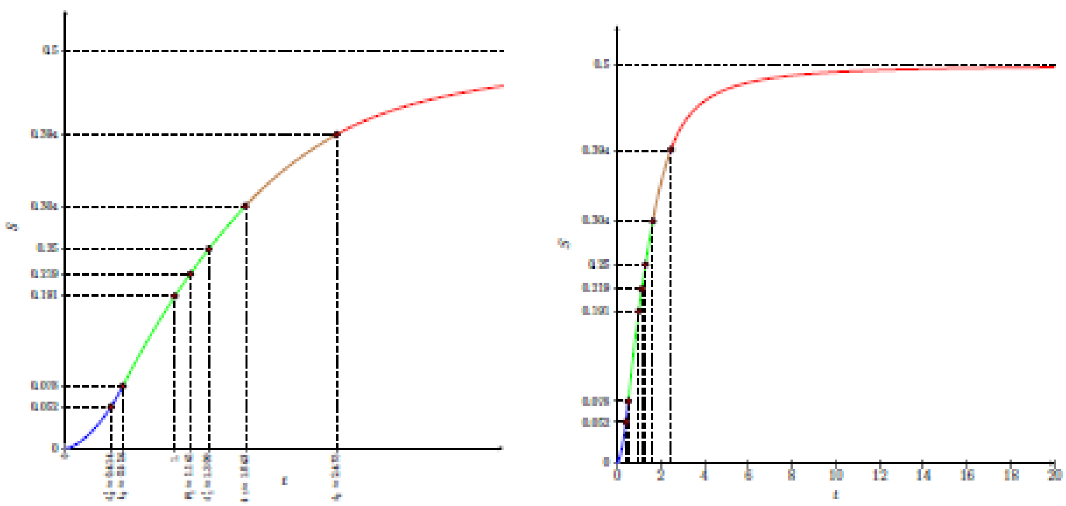

Рисунок 14 – График функции площади $S = S(t)$ **.**

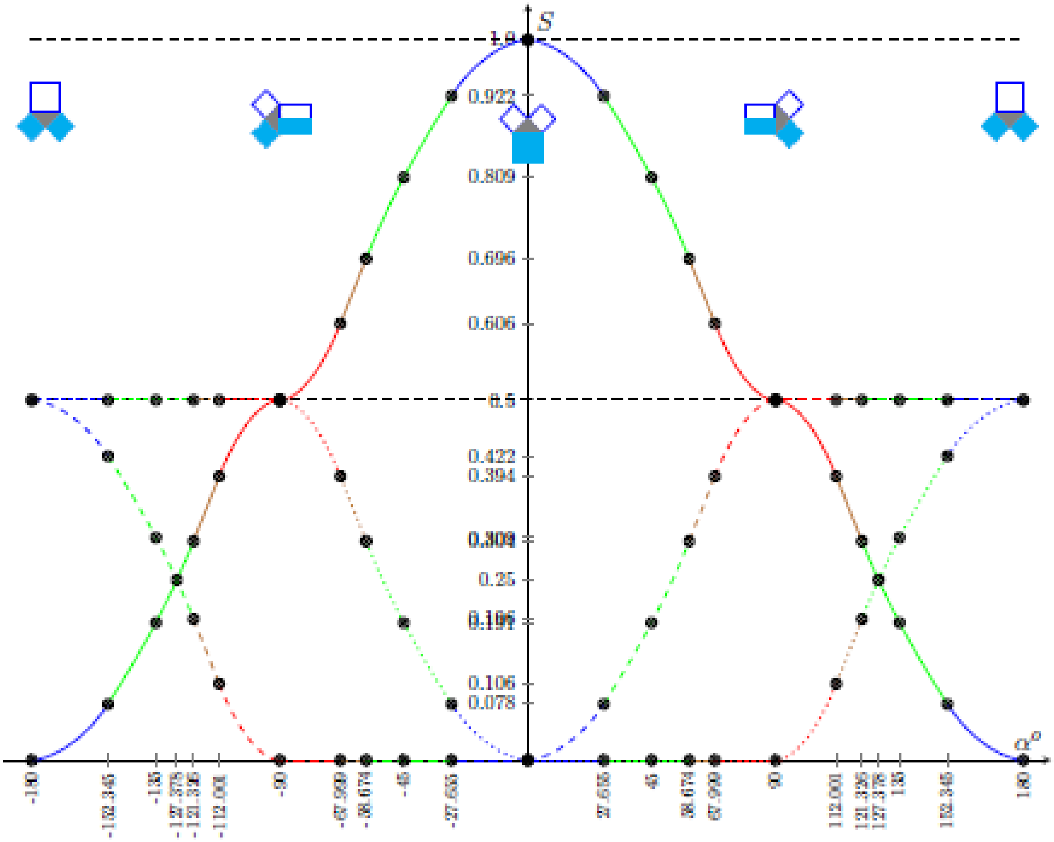

Рисунок 15 – График функций площади $S = S(\alpha)$ **.**

Список литературы

1 http://img1.liveinternet.ru/images/attach/c/0/119/903/119903615_math7.gif

2 Золотонос С. М. Про одну iнтерпретацiю теореми Пiфагора. Дипломна робота. Одеський нацiональний унiверситет iменi I.I. Мечникова, факультет математики, фiзики та iнформацiйних технологiй, кафедра математичного аналiзу. –Одеса, 2018. –30 с.

3 Новак Д. В. Про одну iнтерпретацiю теореми Пiфагора. II. Дипломна робота. Одеський нацiональний унiверситет iменi I. I. Мечникова, факультет математики, фiзики та iнформацiйних технологiй, кафедра математичного аналiзу. – Одеса, 2020. –35 с.

А. А. Кореновский

И.И. Мечников атындағы Одесса ұлттық университет, Одесса, Украина

Пифагор теоремасының бiр мысалы үшiн есептеулер

Аннотация: Тiк бұрышты тең бүйiрлi үшбұрыштың қабырғалары арқылы осы үшбұрышқа сырттай квадраттар салынған. Жазықтықта осы үш квадраттан тұратын фигураны екi бiрдей өлшемдi (яғни аудандары тең) фигураларға бөлетiн түзудi салу есебi қойылады. Осы түзумен анықталатын кейбiр параметрлер, атап айтқанда, бастапқы квадраттардың жарты жазықтықтардағы бөлiктерiнiң аудандары есептеледi. Сәйкес нәтижелер әртүрлi сызбалармен, кестелермен және графиктермен бейнеленген.

Түйiн сөздер: Пифагор теоремасы, Пифагор теоремасына түсiнiктеме беру, фигураларды бөлу, тең өлшемдi фигуралар.

A.A. Korenovskyi

I.I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine

Calculations for one illustration of the Pythagorean Theorem

Abstract: On the sides of a right-angled isosceles triangle, squares external to this triangle are built. The task is to construct a straight line on a plane that divides a figure consisting of these three squares into two equal-sized (that is, equal area) figures. Some parameters determined by this line are calculated, in particular, the areas of parts of the original squares in half-planes. The corresponding results are illustrated by various drawings, tables and graphs.

Keywords: Pythagorean theorem, interpretation of the Pythagorean theorem, figure division, figures of equal size.

References

1 http://img1.liveinternet.ru/images/attach/c/0/119/903/119903615_math7.gif

2 Zolotonos S. M. Pro odnu interpretaciju teoremi Pifagora [On an interpretation of the Pythagorean theorem]. Graduate work. I.I. Mechnikov Odessa National University, Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Department of Mathematical Analysis (Odessa, 2018. –30 p.) [in Ukrainian]

3 Novak D. V. Pro odnu interpretaciju teoremi Pifagora. II [On an interpretation of the Pythagorean theorem. II.]. Graduate work. I.I. Mechnikov Odessa National University, Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies, Department of Mathematical Analysis (Odessa, 2020. –35 p.) [in Ukrainian]

Информация об авторе:

Кореновский А.А. – доктор физико-математических наук, профессор Кафедры математического анализа, Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, ул. Дворянская, 2, Одесса, Украина.

Korenovskyi A.A. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Analysis, I.I. Mechnikov Odessa National University, 2 Dvoryanskaya str., Odessa, Ukraine.

Received 01.12.2020