Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 132, №3, 31-69 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru)

Научный, научно-методический и организационный отчет «Институт теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева в 2019 году (Часть II)»

Аннотация: Статья выполнена в контексте вечно современного, и никак не меньше, в ключевой проблеме "*Понимания математики*" признания Харди "*Прочитав её* ("Курс математического анализа" Жордана - Н.Т.) *я впервые понял, что такое математика*". Стало быть, посвящена вопросу "*Насколько и в каком соотношении для понимания математики важны научная среда и базовые учебники?*", хотя случай Харди опровергает, во всяком случае не делает безусловным, вроде очевидное "*Квалифицированная среда восполняет упущения учебника*".

Этот исторический пример в пользу учебника показывает, что в математически раскаленном Кембридже человек со способностями на высшей грани мыслительных возможностей человечества *англичанин* Харди *понял математику* из учебника математического анализа *француза* Жордана, – это одна сторона.

С другой стороны, механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (МГУ) времен расцвета Московской математической школы, из которой с *пониманием математики* выходили все, кто в нём 5 лет был студентом и 3 года аспирантом с защитой. Это – младшие курсы с жёсткой мощной фундаментальной математической подготовкой без обязательного для всех единого учебника, но с выдающимися профессорами и еще, как пояснил профессор МГУ Тарас Павлович Лукашенко автору данной статьи, были сотни три семинаров (уникальное явление в СССР), где, как говорят, с младых ногтей студентов вводили в математику.

В Казахстане выпускники МГУ первой волны – легендарные Садуакас Бокаев и Аскар Закарьевич Закарин, послевоенные Кабдуш Жумагазиевич Наурызбаев, Марат Рахимбердиев, Жанбек Аубакиров, ныне здравствующие Людмила Алексеева, Нурлан Аманов, Нурлан Рахметов, Аскар Жаркенов, Сауле Танкаева, Нургуль Аманова.

Казахская позиция в Математике и Компьютерных науках через ИТМиНВ выражена в §0-2 данной статьи. Далее в этом ключе излагаются подробности реализации Программы А - Авторских основ базовой математической подготовки как казахского аналога общей подготовки в PhD докторантуре США от ИТМиНВ. Учебник "Математикалық анализ" выполнен с позиций самодостаточности в обеспечении *понимания математики* без расчёта на квалифицированную среду. В §7 Предисловии автор знакомит читателя со всем выработанным в *понимании математики* во времена многолетних общений со многими, в первую очередь выдающимися, математиками собственными наблюдениями в особой среде Московской математики и личными выводами в процессе собственных научных исследований и прочтения математической литературы всех уровней.

Теория меры Лебега – отдельная тема исключительной значимости в развитии математики XX века и на все будущие времена, математическое понимание которой автор этих строк получил по индивидуальной программе от Научного руководителя Петра Лаврентьевича Ульянова с поддержкой аспирантского собрата Димитрия Печерского. Теория вероятностей – это специфическая дисциплина, по которой изложены некоторые моменты, с точки зрения автора требующие более отчетливого изложения.

Ключевые слова: Математикалық анализ; Теория меры Лебега; Теория вероятностей; понимание математики; фундаментальная математическая подготовка; математическая зрелость; квалифицированная научная среда; системный подход в структуре учебника

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-132-31-69

§5. ТЕОРИЯ МЕРЫ

5.1. ПЕРСОНАЛЬНЫЙ ПУТЬ В ТЕОРИИ «МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА». Сразу же сообщим, что Теорию меры и интеграла Лебега автор изучал по индивидуальной аспирантской программе, составленной лично для него его Научным руководителем П.Л.Ульяновым:

1^0. Изучаются главы I-IX книги И.П. Натансона (без решения задач),

2^0. Изучаются главы I-IV книги С. Сакса «Теория интеграла»,

3^0. Изучаются главы I-VI книги П. Халмоша «Теория меры»,

4^0. Решаются все задачи из глав I-IX книги И.П. Натансона.

Были еще отдельные параграфы книги Н.А. Фролова «Теория функций действительного переменного».

Пользуясь случаем, уделим несколько строк технике работы П.Л Ульянова с одним из своих учеников, что само по себе может быть полезным в учебном процессе.

У Петра Лаврентьевича Ульянова было много аспирантов в МГУ имени М.В. Ломоносова, которые после семинаров в среду и в пятницу к нему выстраивались в очередь на консультации. Но по Математическому институту им. В.А. Стеклова АН СССР у него я был один. Из трех лет аспирантуры первые полтора года Петру Лаврентьевичу я сдавал экзамены и зачеты в общем количестве 6, что было предусмотрительно компенсировано дополнительной полугодовой аспирантурой для окончивших республиканские вузы, – как на Конференции в Ереване, посвященной 90-летию со дня рождения Александра АндрониковичаТалаляна документально показал Б.С.Кашин, это было традиционной практикойСтекловскогоинститута.Эту свою специальную базовую математическую подготовку под прямым руководством выдающегося математика (в чем в процессе своего научного продвижения постоянно с наращением убеждаюсь) я воспринимаю как счастливый дар судьбы,что оказало решающее влияние на всю мою научную жизнь (среди которых привлечение меня С.М. Ворониным к разработке темы «Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа», что Сергей Михайлович объяснил «Хорошо знаешь Меру и интеграл Лебега»).

Для встречи с Петром Лаврентьевичем я должен был заранее с ним договариваться – это на семинарах и лекциях на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова, и в предстоящий четверг, в *Присутственный день* всех сотрудников Стекловского института, с одиннадцати часов сидеть на скамейке возле Отдела теории функций на третьем этаже и ждать, пока Петр Лаврентьевич освободится, – за это время можно было воочию увидеть весь цвет советской математики, зарубежных знаменитостей тоже.

Обычно он освобождался к концу дня, но мне уделял много времени, я ему по темам проработанный материал сдавал, после чего часто он сам комментировал эти темы, – на всю жизнь в памяти сохранил его одухотворенное лицо с выразительными очень черными глазами, – все же в его крови наверно есть и ордынское.

Здесь также должен отметить особую роль Димитрия Печерского, ученика Д.Е. Меньшова, с которым одновременно протекал аспирантский период и жили в одной комнатев Общежитии аспирантов АН СССР на улице Дмитрия Ульянова 5 и который говорил «*Нурлан, хочешь задачу*», – их он много знал, и которые я сначала не то что решать, даже и не понимал, затем фактически решал, что называется «с лету».

Быть может не будет лишним, если поделюсь со своими впечатлениями о книгах, которые я изучал по заданию Петра Лаврентьевича.

Теории меры и интеграла Лебега посвящена и, наверное, так будет еще долго, обширная литература, среди которых, на наш взгляд, к числу основных надлежит отнести «Теорию функций вещественной переменной» Исидора Павловича Натансона (1906-1964 гг.) (по-видимому, среди бесчисленного количества учебников по Математическому анализу такую же роль играет трехтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления» Г.М.Фихтенгольца (1888-1959гг.)).

В связи с чем, отметим, что в связке интеграл Римана – мера Жордана по многим соображениям целесообразно меру Жордана строить как интеграл Римана от характеристической функции ограниченного множества в n-мерном Евклидовом пространстве (что было исполнено в учебнике автора статьи «Математикалық анализ»). В то время как в *Теории меры и интеграла Лебега* все наоборот – мера Лебега играет ключевую самостоятельную роль в математике.

Начнем с книги И.П. Натансона. Там, как мне кажется, в достаточном объеме изучается теория множеств, и конкретно – числовых множеств. Здесь для меня как-то не совсем понятно, почему Исидор Павлович называет их «точечными», поскольку слово *точка* появляется в процессе интерпретации множества всех действительных чисел через координатную прямую, на которой каждому действительному числу ставится в соответствие ровно одна геометрическая точка. Начальное изучение меры Лебега по книге Натансона не очень удобно тем, что нельзя понять, куда и зачем движемся по обширному подробному тексту. Нельзя понять из-за того, что не дается определение **Меры**, –задача заключается в измерении *протяженности* произвольного числового множества, в целом составляющей специальную математическую дисциплину «Теория меры». Здесь исходным будет решение задачи измерения длин: выбирается (произвольный) отрезок, принимаемый за единичный, с процедурой деления на равные части, приводящий к устрашающему открытию существования несоизмеримых отрезков в школе Евклида, в результате чего на координатной прямой *назначается мера промежутка,* равная его длине – положительной разности координат концов. Дальше, волею Анри Лебега, прокладывается маршрут: последовательно определяются *Мера интервала*, затем, по уже установленной структуре открытого множества как объединения не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов определяется мера открытого множества. Затем, через меру открытого множества, почему-то для каждого ограниченного множества определяются и изучаются его верхняя и нижняя меры, после чего измеримыми объявляются те и только те множества, у которых численные значения внутренней и внешней мер совпадают. Так последовательно проходится путь, в котором совершенно непонятно зачем все это нужно. На наш, уже *поздний, взгляд* при любом изложении меры Лебега (об этом скажем на примере множества действительных чисел) должны быть соблюдены следующие два правила. Во-первых, надо дать определение меры, во-вторых, сразу же сообщить, пусть даже без возможности доказательства, что на сегменте $[0,1]$ не может быть меры, определенной на всех ее подмножествах и такой, что мера интервала равна его длине. Другими словами, что нет такой меры, которая измеряла бы *протяженность* всякого числового ограниченного множества и потому «*измеряемые множества специальным образом отбираются из всех возможных ограниченных множеств*», а именно через введение внешних и внутренних мер, что мгновенно сделает понятным всю конструкцию из книги И.П.Натансона. Конечно, в книге есть отдельный параграф, в котором мелким шрифтом обо всем этом изложено, но вряд ли в приведенной продвинутой форме оно в этом листе текста будет с пониманием осмыслено. В остальном, конечно, книга И.П.Натансона великолепна.

Теперь перейдем к книге С.Сакса «Теория интеграла». Вступительная часть от переводчика начинается трагическими и, одновременно, возвышенно героическими словами «*Убитый в варшавском гестапо в ноябре 1942 года Станислав Сакс принадлежал к числу наиболее выдающихся польских математиков*». Изложение – предельно абстрактное, что после девяти глав И.П. Натансона в принципе понять можно, хотя и нельзя сказать, что это совсем просто. Идут мотивы, приводящие к изучению специального вида функций, аргументом которых являются множества, да еще заданные на специального вида множествах, элементами которых являются другие множества, которые, в свою очередь, подлежат измерению. Тогда вся теория носит название «Теория меры». После изучения действительнозначных функций множеств вводится определение **Меры**. Дальше по главам идет конкретизация. Если в первой главе на структуру множеств никаких условий не накладывалось, то последовательно они уточняются, понятно, с одновременным обогащением теории. Вторая глава посвящена множествам из метрических пространств, и, далее, множества из многомерных евклидовых пространств. Вот такая общая схема, это С.Сакс.

Завершим обзор книги С.Сакса выдержками «*Из предисловия к первому изданию*», в которых показан тяжкий путь восприятия нового:

Современная теория действительных функций отделялась от классического анализа во второй половине 19-го столетия как результат исследований, вначале не систематических, относившихся к обоснованию дифференциального исчисления или связанных с обнаружением функций, свойства которых казались странными и неожиданными.
Примером недоверия, с которым относились к новой области исследований, может служить позиция А.Пуанкаре, писавшего: «Раньше, когда изобретали новую функцию, то имели в виду какую-либо практическую цель, теперь их изобретают, не извлекая из них никакой пользы, а только для того, чтобы обнаружить недостатки в рассуждениях наших отцов».
Эта точка зрения никоим образом не была исключительной. Ш. Эрмит в письме к Т.Стилтьесу выразился еще резче: «Я с ужасом и отвращением отворачиваюсь от этой разрастающейся язвы функций, не имеющих производной». Исследования, имеющие дело с неаналитическими функциями и функциями, нарушающими те законы, которые предполагались всеобщими, эти исследования рассматривались почти как распространение хаоса и анархии там, где предшествующие поколения искали порядка и гармонии.
Тем не менее, эти исследования открыли пути приложения теории множеств к анализу. При этом, как сказал А.Лебег в своей вступительной лекции в CollegedeFrance, «огромный авторитет Камилла Жордана оказал новой школе неоценимую поддержку, с лихвой компенсировавшую немногие нападки, которые ей пришлось переносить».

И, в завершение, замечательный вывод С.Сакса «*Мы научились ценить в доказательствах не только талантливость вычислений, но также и общность, которая при кажущейся абстрактности часто дает нам возможность глубже понять сущность задачи*».

После И.П. Натансона и С. Сакса, как и предупреждал меня П.Л.Ульянов, книга П.Халмоша «Теория меры» – это легкая прогулка с современной терминологией, более детализированная в терминах классификации множеств. И, наконец, решение задач из глав I-IXИ.П.Натансона, все они практически решены в книге П. Халмоша «Теория меры» и отчасти в книге С.Сакса «Теория интеграла».

И вот, много лет спустя, когда вышла книга М.И.Дьяченко и П.Л.Ульянова «Мера и интеграл», я был в какой-то степени разочарован – там ничего от услышанного в аспирантские годы от Петра Лаврентьевича с высшим эмоциональным сопровождением, о чем я выше писал, не было. На мой вопрос Петр Лаврентьевич как-то уклончиво ответил, что на механико-математическом факультете МГУ так принято. В связи с чем отмечу, что в основном курсе А.Н.Колмогорова и С.В. Фомина «*Элементы теории функций и функционального анализа*» вызывает легкое-нелегкое, но недоумение, что сначала дается Функциональный анализ и только потом Теория меры. Понятно, что реализация общих структур функционального анализа возможна только на интеграле Лебега в силу его полноты, и вся эта Теория меры изучается после. Проблемы возникают в реализациях сразу же, например, нельзя доказать единственность регулярной обобщенной функции с точностью до почти всюду, что в обсуждаемом учебнике вызывает неопределенность, когда пишется «*Пусть f – фиксированная функция на прямой, интегрируемая на каждом конечном интервале*» без указания,*в каком смысле* интегрируемая, тогда как известный к тому моменту интеграл Римана не достаточен, нужный интеграл Лебега – по тексту впереди. Конечно, вряд ли это негативным образом отражается на понимании основ в высокопрофессиональной математической среде. Но, скажем так, на окраинах создается ложное восприятие, что Функциональный анализ как более общая структура заменяет Математический анализ с нормой в виде абсолютной величины, что на самом деле, как в казахском чае, где сначала молоко – затем заварка, не перестановочно, некоммутативно.

Среди многих и разных книг по Мере и интегралу Лебега отметим Теорию вероятностей Мишеля Лоэва, в которой Теория меры и интеграла Лебега изложена в наиболее приемлемой для автора этих строк форме (быть может, здесь есть и психологическое воздействие воспоминания Сергея Воронина «*Юрий Матиясевич в 9-ом классе Интерната листал последние страницы Лоэва*»).

Должен сказать, что к Мере и интегралу Лебега автор пришел в процессе многотрудных бесполезных блужданий в студенческие годы, в аспирантуре Математического института имени В.А.Стеклова все было выправлено. В результате, возникло убеждение, что аппарат Меры и интеграла Лебега, в особенности с самостоятельной мерой Лебега должен излагаться, по крайней мере, с жестко поставленной целью в абстрактной ситуации, когда, не отвлекаясь на детали, создается усвоение структуры ведущих идей и техники реализации этих идей: на 14 страницах мера Лебега напрямую полностью построена, – это в п.2.

Здесь зададимся вопросом, – обычно мера Лебега строится как продолжение с полукольца на содержащее егоминимальное σ-кольцо, насколько здесь важно полукольцо. Стандартная схема: есть какое-то множество, на котором по каким-то потребностям задается предмера, через которую строится внешняя мера и по ней определяются измеримые множества. Тогда в этой конструкции, которой следуем, возникает вопрос: «Какие минимальные требования нужно наложить на множество, на котором задается предмера, по которой через внешнюю меру эти множества были бы измеримы?». По общей теории ответ положительный, если это полукольцо, а можно ли эти условия ослабить. Например, понятно, что если в одномерном случае меру Лебега определить по Предмере, определенной только на промежутках со значениями, равными длине промежутка, то все обратится в классическую меру Лебега. Предмере здесь посвящен п.3.

В определении классов гладких функций, в первую очередь пространств Соболева, надо от производной однозначно вернуться к исходной функции, в связи с чем возникают абсолютно непрерывные функции и это отдельная теори, с переходом в теорему Радона-Никодима.

5.2. ФРАГМЕНТЫ МЕТОДОЛОГИИ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «ЛЕБЕГОВА ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ МЕРЫ ПО ВНЕШНЕЙ МЕРЕ»

5.2.1. Мера. Общий вид мер на конечных и счетных множествах. Задание мер на конечных и счетных множествах

5.2.1.1. Мера как неотрицательная σ-аддитивная функция множеств. Теперь, когда проделана вся подготовительная работа, мы в состоянии дать следующее центральное в рассматриваемом круге вопросов

Определение (меры). Пусть дано непустое множество Ω и пусть $\sigma\mathcal{A}$ есть σ-алгебра с единицей Ω, составленная из подмножеств Ω. Неотрицательная σ-аддитивная функция множеств μ, определенная на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}$ называется *мерой.*

Тройку $(\Omega, \sigma\mathcal{A}, \mu)$ называют *пространством с мерой.*

Пару $(\Omega, \sigma\mathcal{A})$ называют *измеримым пространством*, а каждое множество E из $\sigma\mathcal{A}$–$\sigma\mathcal{A}$ *-измеримым множеством.* Тем самым, как это специально отмечено Паулем Халмошом, определение измеримости множества – чисто теоретикомножественное, и от теории меры совершенно не зависит, и, потому, множества *декретом* объявляются измеримыми, но, понятно, в преддверии будущей меры.

Процедуру построения меры также называют *мероввелением.*

5.2.1.2 Полное описание мер на конечных и счетных множествах. Начнем с множеств конечных.

Общий вид мер на конечных множествах $\Omega = \{x_1; \ldots; x_n\}$. Тогда множество $F = F(\Omega) \equiv \sigma\mathcal{A}(\Omega)$ составленное из всех подмножеств Ω, включая и пустое множество $\emptyset$, как уже знаем, состоит 2^n элементов, и, при этом, есть алгебра, поскольку, при всяческих комбинациях операций объединения, пересечения и разности над подмножествами Ω, результатом будет опять-таки подмножество Ω.

Покажем, и в этом будет состоять полное описание меровведения на конечном множестве Ω, что для того чтобы определить меру на $\Omega = \{x_1; \ldots; x_n\}$ необходимо и достаточно задать значения p_k меры μ на всех одноэлементных множествах $\{x_k\}$ из $F(\Omega)$:

$$\mu(\{x_k\}) = p_k (k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Тогда для меры $\mu(E)$ всякого множества E из $F(\Omega)$, или, что в данном случае равносильно вложению $E \subset \Omega$, имеет место равенство, оно же и есть общий вид меры на конечном множестве,

$$\mu(E) = \sum_{x_k \in E} p_k = \sum_{k=1}^{n} p_k \chi_E(x_k), \tag{2}$$

где, как обычно, $\chi_E(x)$ есть характеристическая функция множества E.

Действительно, пусть на системе множеств $F = F(\Omega)$ задана мера μ. Тогда, если для одноэлементного множества $E_k = \{x_k\}$, понятно из $F = F(\Omega)$, числа p_k определим по равенствам (1), то в силу аддитивности меры, для всякого множества $E \in F(\Omega), E = \{x_{k_1}, ..., x_{k_m}\}$ имеем

$$\mu(E) = \mu(E_{k_1}) + ... + \mu(E_{k_m}) = p_{k_1} + ... + p_{k_m} = \sum_{x_k \in E} p_k = \sum_{j=1}^{m} p_{k_j} \chi_E(x_{k_j}),$$

т.е. (1) выполнено.

Обратно, задание посредством равенств (1) функции множеств μ сначала на одноэлементных множествах $E_k = \{x_k\} (k = 1, \ldots, n)$, где $p_1, \ldots, p_n$ – произвольный набор неотрицательных чисел, затем распространение через равенство (2), той же функции множеств μ на всем $F(\Omega)$, полностью определяет меру μ на конечном множестве Ω. Покажем, что функция множеств μ на самом деле есть мера. Во-первых, для всякого $E \in F(\Omega)$ соответствующее число $\mu(E)$ неотрицательна как конечная сумма неотрицательных чисел. Во-вторых, функция множеств μ аддитивна: если

$E = E^{(1)} \bigcup ... \bigcup E^{(m)}$, где $E^{(j)} \in F(\Omega), E^{(j)} \bigcap E^{(i)} = \emptyset (i, j = 1, \ldots, m, i \neq j)$, то

$$\mu(E) = \sum_{x_k \in E} p_k = \sum_{j=1}^{m} \sum_{x_k \in E^{(j)}} p_k = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(E^{(j)}\right),$$

что доказывает аддитивность функции множеств μ.В итоге, μ есть мера, определенная на $F(\Omega)$. Заметим, поскольку множество Ω состоит из конечного числа элементов, здесь нет счетных подмножеств.

Тем самым проблема описания меры на всяком конечном множестве полностью решена.

Общий вид мер на счетных множествах $\Omega = \{x_1; \ldots; x_n; \ldots\}$. Те же рассуждения, что и в случае конечного множества, приводят к тому, что множество $F(\Omega)$, составленное из всех подмножеств множества Ω есть σ-алгебра, поскольку всякие операции объединения, пересечения и вычитания над подмножествами одного множества Ω, взятые в любой комбинации в счетном числе также приводят к подмножествам множества Ω.

Всякий элемент E σ-алгебры $F(\Omega)$, равно как и всякое подмножество множества $\{x_1; \ldots; x_n; \ldots\} = \Omega$, задается равенством $E = \{x_{n_1}; ...; x_{n_m}; ....\}$, где $n_1 < \cdots < n_m < \ldots$ конечная или счетная последовательность целых положительных чисел. Покажем, что равенство

$$\mu(E) = \sum_{x_{n_m} \in E} \mu(\{x_{n_m}\}) = \sum_{n \geq 1} \mu(\{x_n\}) \chi_E(x_n) = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}), \qquad (3)$$

выписанное с учетом свойства числовых рядов с неотрицательными числами, заключающегося в том, что всяческие перестановки и группировки членов не изменят ни его сходимости, ни его суммы конечной или бесконечной, есть общее представление меры на σ-алгебре $F(\Omega)$.

Действительно, для всякой наперед заданной последовательности неотрицательных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ определим функцию множеств μ на $F(\Omega)$, полагая для одноэлементных множеств $\{x_n\}$ значения $\mu(\{x_n\})$ равными неотрицательным числам p_n, а для множества $E = \{x_{n_1}; ...; x_{n_m}; ....\}$, как сумму

$$\mu(E) = p_{n_1} + p_{n_2} + ... + p_{n_m} + ... = \sum_{x_n \in E} p_n = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}). \qquad (4)$$

Из записей (3) и (4) следует, что функция множеств (4) имеет вид (3). И, потому, остается показать, что (4) есть мера на $F(\Omega)$.

На самом деле, функция множеств (4) будет мерой, поскольку, во-первых, $\mu(E)$ как сумма числового ряда с неотрицательными членами, неотрицательна для всякого $E \subset \Omega$, во-вторых, для всякой попарно непересекающейся последовательности $E^{(1)}, \ldots, E^{(k)}, \ldots$ подмножеств Ω имеет место равенство

$$\mu(\bigcup_k \left(E^{(k)}\right) \overset{(4)}{\Longrightarrow} \sum_{x_n \in \bigcup_k \left(E^{(k)}\right)} p_n = \sum_k \sum_{x_n \in E^{(k)}} p_n \overset{(4)}{\Longrightarrow} \sum_k \mu\left(E^{(k)}\right),$$

т.е. μ - аддитивная функция множеств.

Обратно, если на F(Ω) задана мера μ, то в силу σ - аддитивности меры для $E = \{x_{n_1}, ..., x_{n_m}, ...\} = \bigcup_m \{x_{n_m}\}$, получим

$$\mu(E) \overset{\text{аддитивность}}{=} \sum_m \mu(\{x_{n_m}\}) = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}),$$

т.е. выполняется равенство (3).

Таким образом, для всякого не более чем счетного множества Ω мера μ на σ - алгебре $F(\Omega)$ (алгебре в случае конечного Ω) всевозможных подмножеств множества Ω, полностью определяется заданием $\mu(\{x_n\}) = p_n \geq 0$ на всех одноэлементных множествах $\{x_n\}$ из $F(\Omega)$, и, тогда для всякого $E \in F(\Omega)$, или, что то же самое, $E \subset \Omega$

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} \mu(\{x\}) = \sum_{x_n \in E} p_n.$$

В итоге, в случае не более чем счетного множества Ω пространство с мерой имеет вид

$$\left(\Omega;\ F = \{E : E \subset \Omega\};\ \mu(E) = \sum_{x \in E} \mu(\{x\})\right).$$

5.2.2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МЕРОВВЕДЕНИЯ

5.2.2.1. Об одной существенной особенности построения мер на несчетных бесконечных множествах. В предыдущем пункте было дано полное решение задачи построения меры, или, как ещё говорят, мероввведения, на конечном и счетном множествах Ω.

Теперь обратимся к случаю несчетных множеств Ω. Ближайшей нашей задачей будет мероввведение на числовых промежутках, конкретно, на сегменте $[a, b]$ и на всем числовом пространстве $R^1 \equiv (-\infty, +\infty)$.

Итак, пусть для определенности $\Omega = [a, b]$, где a, b, $a < b$ -заданные числа.

Все последующие построения меры μ на Ω будут определяться тем фактом, что, в отличие от случая не более чем счетного множества Ω, в данном несчетном случае Ω на σ- алгебре $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ всех подмножеств Ω *задача построения меры неразрешима.*

В более подробном изложении имеется в виду следующее:

За меру интервала ***(*** α, β ***) примем его длину*** $\beta - \alpha$ ***.*** Тогда нельзя определить на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}([a,b]) = \{E$: $E \subset [a,b] \subset (-\infty, +\infty)\}$ всех множеств сегмента $[a,b]$ такую неотрицательную σ - аддитивную функцию множеств $\mu(E)$ такую, что для всякого интервала $E = (\alpha, \beta)$ выполнено равенство $\mu((\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$ (это будет доказано ниже).

5.2.2.2. Внешняя мера. Выведем некоторые следствия из определения меры. Итак, пусть дано множество Ω, σ-алгебра $\sigma\mathcal{A}$ подмножеств Ω с единицей Ω и мера μ на $\sigma\mathcal{A}$ - это неотрицательная, σ-аддитивная функция множеств над $\sigma\mathcal{A}$. Тогда

1^0 $\mu(\emptyset) = 0$, поскольку для всякого $E \in \sigma\mathcal{A}$ такого, что $\mu(E) < +\infty$, имеем $E \bigcap \emptyset = \emptyset$, так, что $E = E \bigcup \emptyset = E + \emptyset$, $\mu(E) = \mu(E + \emptyset) = \mu(E) + \mu(\emptyset)$, откуда $\mu(\emptyset) = 0$.

2^0 Мера μ не убывает на $\sigma\mathcal{A}$ в том смысле, что если $A \subset B, A \in \sigma\mathcal{A}, B \in \sigma\mathcal{A}$, то $\mu(A) \leq \mu(B)$, поскольку, в силу аддитивностиинеотрицательности меры, имеем $A \bigcap (B \setminus A) = \emptyset$, $\mu(B) = \mu(A + (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

Теперь перейдем к свойству аддитивности. Как и всякое равенство, определение σ-аддитивности функции множеств Φ

$$\Phi\left(\sum_k E_k\right) = \sum_k \Phi(E_k), \quad E_k \cap E_n = \emptyset,\ k \neq n,$$

равносильно выполнению двух неравенств

$$\Phi\left(\sum_k E_k\right) \leq \sum_k \Phi(E_k), \tag{5}$$

и

$$\Phi\left(\sum_k E_k\right) \geq \sum_k \Phi(E_k), \tag{6}$$

первое из которых называют *полуаддитивностью* функции множеств Φ: аддитивность – это одновременное выполнение (5) и (6), полуаддитивность – только (5), – так уж повелось!

Определение (*внешней меры*). Пусть дано множество Ω. Функцию множеств Φ, определенную на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ *всех* подмножеств Ω с единицей Ω, и такую, что

1. $\Phi(\emptyset) = 0$,
2. Φ – не убывает на $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$: если $A \subset B \subset \Omega$, то $\Phi(A) \leq \Phi(B)$,
3. Φ – полуаддитивна на $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$,т.е. для всякой конечной или бесконечной последовательности $\{E_k\}$ попарно не пересекающихся подмножеств Ω выполнено неравенство

$$\Phi\left(\sum_k E_k\right) \leq \sum_k \Phi(E_k),$$

называют *внешней мерой.*

Функция множеств Φ неотрицательна: из $\emptyset \subset E \subset \Omega$ и свойств 1-2 следует $0 = \Phi(\emptyset) \leq \Phi(E)$.

Следуя сложившейся традиции, внешнюю меру Φ будем обозначать через μ^*.

Проведем сравнение меры μ и внешней меры μ^*.

Пусть дана и σ-алгебра $\sigma\mathcal{A}$ с единицей Ω, на которой определена мера μ.

Тогда

Мера μ на Ω	Внешняя мера μ^* на Ω
$\mu : \sigma\mathcal{A} \mapsto [0, +\infty]$	$\mu^* : \sigma\mathcal{A}(\Omega) \mapsto [0, +\infty]$
1^0. $\mu(\emptyset) = 0$	1^0. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2^0. $\mu(A) \le \mu(B)$, если $A \subset B$, $A \in \sigma A$, $B \in \sigma A$	2^0. $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$, если $A \subset B \subset \Omega$
Для всякой конечной или бесконечной последовательности $\{E_k\}$ попарно не пересекающихся подмножеств Ω выполнено	
3^0. $\mu\left(\sum\limits_k E_k\right) = \sum\limits_k \mu(E_k)$	3^0. $\mu^*\left(\sum\limits_k E_k\right) \le \sum\limits_k \mu^*(E_k)$

Как это видно из сравнения свойств меры μ и внешней меры μ^*, разница состоит в том, что если мера μ определена на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}$ подмножеств Ω, быть может, не совпадающей с σ-алгеброй $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ всех подмножеств Ω, то внешняя мера μ^* определена на только $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ – множестве *всех* подмножеств Ω.

Далее, если мера μ определена на более узкой системе множеств – на σ-алгебре с единицей Ω , но σ-аддитивна, то, наоборот, внешняя мера μ^* определена на σ-алгебре всех подмножеств Ω, но удовлетворяет более слабому условию – условию полуаддитивности (5).

Условие 3^0 полуаддитивности на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ всех подмножества Ω функции множеств μ^* эквивалентно следующему условию:

3^0 *a.* Для всякой последовательности (не обязательно попарно непересекающиеся) $\{A_k\}$ подмножеств Ω выполнено неравенство

$$\mu^*\left(\bigcup_k A_k\right) \le \sum_k \mu^*(A_k).$$

Действительно, из условий 2^0 и 3^0 имеем

$$\mu^*\left(\bigcup_k A_k\right) = \mu^*\left(A_1 + A_2 \setminus A_1 + A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) + \dots + A_k \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) + \dots\right) \overbrace{\le}^{3^0}$$

$$\overbrace{\le}^{3^0} \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2 \setminus A_1) + \mu^*(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) + \dots + \mu^*(A_k(A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1})) + \ldots$$

$$= \sum_k \mu^*(A_k \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1})) \overbrace{\le}^{2^0} \sum_k \mu^*(A_k).$$

Итак, из условий монотонности 2^0 и полуаддитовности 3^0 следует 3^0 *a.* Обратно, из условия 3^0 *a* следует 3^0 как частный случай.

Тем самым, для μ^* комплекс условий 1^0, 2^0, 3^0 равнообъемен с комплексом условий 1^0, 2^0, 3^0a.

Всюду ниже определение внешней меры μ^* будем понимать в форме 1^0, 2^0, 3^0a:

Определение (внешней меры). Пусть дано непустое множество Ω. Функция множеств μ^*, определенная на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω, называется *внешней мерой*, если

1^0. $\mu^*(\emptyset) = 0$,

2^0. μ^* - неубывающая функция множеств: из $A \subset B \subset \Omega$ следует $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$,

3^0. μ^* - полуаддитивна: для всякой (конечной или бесконечной) последовательности множеств $\{A_k\}$ из Ω справедливо неравенство $\mu^*(\bigcup\limits_k A_k) \le \sum\limits_k \mu^*(A_k)$.

5.2.2.3. Лебеговская процедура построения меры по заданной внешней мере. Пусть дано непустое множество Ω и пусть на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ всех подмножеств Ω определена внешняя мера μ^*. Тогда, *и в этом состоит Лебеговская процедура построения меры μ по заданной внешней мере μ^**, однозначно определяется σ-алгебра

$\sigma\mathcal{A}$ подмножеств Ω с единицей Ω такая, что *сужение* μ на нее внешней меры μ^* есть мера.

Отсюда следует фундаментального значения вывод: задача построения меры сводится к задаче построения внешней меры. Как при заданном непустом множестве Ω на нем построить внешнюю меру μ^* – это в каждом конкретном случае отдельный вопрос (чему будет посвящен следующий пункт 3).

5.2.2.4. μ^*-измеримые множества – эквивалентные определения. Пусть дано множество Ω и внешняя мера μ^* на нем. Пусть $E \subset \Omega$, тогда для дополнения $E^c \equiv C_\Omega E = \Omega \setminus E$ множества E до Ω имеем $E \cap E^c = \emptyset, E + E^c = \Omega$, и, потому, для всякого множества $D \subset \Omega$ выполнено равенство

$$D = \Omega D = ED + E^c D.$$

Далее, так как функция множеств μ^* полуаддитивна, для данного множества E и всякого множества $D \subset \Omega$ имеет место неравенство

$$\mu^*(D) = \mu^*(ED + E^c D) \leq \mu^*(ED) + \mu^*(E^c D). \tag{7}$$

Поскольку нашей целью является построение меры –*аддитивной* функции множеств, то выделим случай превращения в *равенство* выписанного неравенства (7) и примем следующее

Определение (μ^*- измеримости по Каратеодори). Пусть дано множество $E \subset \Omega$. Если для всякого множества $D \subset \Omega$ выполнено равенство

$$\mu(D) = \mu^*(DE) + \mu^*(DE^c), E^c := C_\Omega E = \Omega \backslash E, \tag{8}$$

то множество E называют μ^*- *измеримым множеством.*

Другими словами, подмножество E множества Ω называют μ^*- измеримым, если E аддитивно *расщепляет* всякое подмножество D множества Ω в том смысле, что разбивая D на непересекающиеся множества ED и $E^c D = D(\Omega \backslash E)$, по внешним мерам μ^* этих частей $\mu^*(ED)$ и $\mu^*(E^c D)$ множества D получим внешнюю меру целого $\mu^*(D)$ (см. Рис.1).

Ввиду неравенства (7) определение μ^*- измеримости множества E – а это равенство (8), равносильно выполнению неравенства

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(ED) + \mu^*(E^c D). \tag{9}$$

Далее, неравенство (9) всегда справедливо при $\mu^*(D) = +\infty$, поэтому в определении (8) достаточно рассматривать лишь множества D с $\mu^*(D) < +\infty$.

Таким образом, приходим к эквивалентному определению μ^*-измеримости множества Е с техническими преимуществами, заключающимися в том, что неравенство всегда доказывается легче равенства:

Рис.1

Определение (второе (техническое) определение μ^*- измеримости). Пусть дано множество Ω и на нем внешняя мера μ^*. Подмножество E множества Ω – это множество $E \subset \Omega$, называется μ^*- измеримым, если для всякого множества $D \subset \Omega$ с конечной внешней мерой $\mu^*(D) < \infty$ имеет место неравенство (9)

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(ED) + \mu^*(E^c D).$$

5.2.2.5. Лебегова процедура построения меры по внешней мере. Справедлива

Основная теорема А. *Пусть дано непустое множество Ω и на нем внешняя мера μ^*. Множество $\mathcal{A}$, составленное из всех μ^*-измеримых множеств E, является σ–алгеброй с единицей Ω , а внешняя мера μ^*, рассматриваемая как функция множеств только на этой σ–алгебре, является мерой $\mu = \mu^*$ на ней.*

Тройка $(\Omega, \sigma\mathcal{A}, \mu)$ называется *Пространством с мерой.*

Всеобщность Лебеговой процедуры: поскольку на множество Ω никаких условий не наложено, то построение меры носит всеобщий характер, – уже в n-мерном Евклидовом пространстве R^n это от главных естественных параллелепипедов до всяческих кривых, многообразий, и, вообще, чего угодно.

Доказательство. Сначала установим утверждение теоремы относительно конечного числа операций – и операций над множествами, и определенной на них функции множеств.

Лемма. *Множество всех μ *-измеримых множеств образует алгебру $\sigma\mathcal{A}$ с единицей Ω, а внешняя мера μ *, рассматриваемая как функция множеств μ на этой алгебре, конечно-аддитивна на ней.*

Доказательство. Сначала докажем, что множество $\sigma\mathcal{A}$, составленное из всех μ *-измеримых множеств, образует алгебрумножеств. В силу определения алгебры в контексте μ *-измеримости система $\sigma\mathcal{A}$ есть алгебра множеств с единицей Ω, если

$1^0 \Omega \in \mathcal{A}$, т.е. само множество $\Omega\mu$ *-измеримо,

2^0 Если $E \in \sigma\mathcal{A}$, то $C_\Omega E \equiv E^c \in \sigma\mathcal{A}$, т.е. из μ *-измеримости множества следует μ *-измеримость его дополнения,

3^0 Если $E_1 \in \sigma\mathcal{A}, E_2 \in \sigma\mathcal{A}$, то $E_1 \cup E_2 \in \sigma\mathcal{A}$, т.е. объединение двух μ^* -измеримых множеств также μ^* -измеримо.

Докажем выполнение каждого из этих свойств для системы множеств $\sigma\mathcal{A}$ всех μ *-измеримых множеств.

Доказательство 1^0. Множество $\Omega\mu$ *-измеримо. Действительно, поскольку по определению внешней меры $\mu*(\emptyset) = 0$, то при $E = \Omega$ для всякого $D \subset \Omega$ имеем

$$E \cap D = \Omega \cap D = D, E^c \cap D = \Omega^c \cap D = \emptyset \cap D = \emptyset,$$

откуда

$$\mu^*(\Omega \cap D) + \mu^*(\Omega^c \cap D) = \mu^*(D) + \mu^*(\emptyset \cap D) = \mu^*(D) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(D),$$

что означает μ *-измеримость множества Ω.

Доказательство 2^0. Если E μ *-измеримо, то его дополнение $E^c = C_\Omega E = \Omega \backslash E$ также μ *-измеримо, ибо для всякого $D \subset \Omega$, в силу μ *-измеримости и выполнения равенства $= (E^c)^c$, имеем

$$\mu^*(D) = \mu^*(E^c D) + \mu^*(ED) = \mu^*(E^c D) + \mu^*((E^c)^c D),$$

откуда

$$\mu^*(D) = \mu^*(E^c D) + \mu^*((E^c)^c D),$$

т.е. множество E^c μ *-измеримо.

Доказательство 3^0. Если $E_1\mu$ *-измеримо и E_2 μ *-измеримо, то их пересечение $E_1 \cap E_2 \equiv E_1 \cdot E_2$ также μ *-измеримо. Действительно, для всякого $D \subset \Omega$ в силу μ *-измеримости E_1 имеем

$$\mu^*(D) = \mu^*(E_1 D) + \mu^*(E_1^c D). \tag{10}$$

Далее, определение μ *–измеримости множества E_2 записывается и в виде

$$\mu^*(B) = \mu^*(E_2 \cdot B) + \mu^*(E_2 \cdot B), \tag{11}$$

где B – произвольное подмножество Ω. Откуда, полагая в (11) $B = E_1 \cdot D$, затем $B = E_1 \cdot D$, получаем для обеих частей равенства (11) сначала

$$\mu^*(E_1 \cdot D) = \mu^*(E_2(E_1 D)) + \mu^*(E_2(E_1 D)), \tag{12}$$

затем

$$\mu^*(E_1 \cdot D) = \mu^*(E_2(E_1 D)) + \mu^*(E_2(E_1 D)). \tag{13}$$

Стало быть, переписывая (10) согласно (12) и (13), после чего пользуясь транзитивностью и коммутативностью операции пересечения $A(BD) = (AB)D = (BA)D$ с выделением множества D, получим

$$\mu^*(D) \overset{(10)}{=} \mu^*(E_1 D) + \mu^*(E_1^c D) \overset{(12),(13)}{=}$$

$$= \mu^*((E_1E_2)D) + \mu^*((E_1E_2^c)D) + \mu^*((E_1^cE_2)D) + \mu^*((E_1^cE_2^c)D). \tag{14}$$

Но

$$(E_1E_2)^c = E_1^c \cup E_2^c = E_1 \cdot E_2^c \cup E_1^c \cdot E_2 \cup E_1^c \cdot E_2^c,$$

и, потому, в силу полуаддитивности и монотонности внешней меры μ^*, имеем

$$\mu^*((E_1E_2)^c D) \leq \mu^*((E_1E_2^c)D) + \mu^*((E_1^cE_2)D) + \mu^*((E_1^cE_2^c)D). \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует

$$\mu^*(D) \overset{(14)}{=} \mu^*((E_1E_2)D) + \mu^*((E_1E_2^c)D) + \mu^*((E_1^cE_2)D) + \mu^*((E_1^cE_2^c)D) \overset{(15)}{\geq}$$

$$\geq \mu^*((E_1E_2)D) + \mu^*((E_1E_2)^c D),$$

что, в силу произвольности $D \subset \Omega$, означает μ^*-измеримость в смысле (9) пересечения $E_1 \Delta E_2 \equiv E_1 \cap E_2$ μ^*-измеримых множеств E_1 и E_2.

Для доказательства свойства 3^0 сначала докажем, в данном случае вспомогательное, вместе с тем имеющее самостоятельное значение свойство замкнутости множества $\sigma\mathcal{A}$ относительно операции пересечения:

Теперь свойство 3^0 замкнутости системы множеств $\sigma\mathcal{A}$ относительно операции объединения будет следовать из доказанных замкнутости относительно операции дополнения и пересечения, поскольку имеет место теоретико-множественное равенство $E_1 \cup E_2 = (E_1^c \cdot E_2^c)^c$. На самом деле, E_1^c и E_2^c μ^*-измеримы как дополнения к μ^*-измеримым множествам $E_1 E_2$, далее, множество $E_1^c \cdot E_2^c$ μ^*-измеримо как пересечение μ^*-измеримых множеств, и, наконец, множество $E_1 \cup E_2 \mu^*$-измеримо как дополнение к μ^*-измеримому множеству $E_1^c \cdot E_2^c$. Тем самым, свойство 3^0 также доказано.

Таким образом, выполнены свойства $1^0 - 3^0$, и поэтому система $\sigma\mathcal{A}$ всех μ^*- измеримых множеств образует алгебру множеств.

Для доказательства леммы осталась убедиться в конечной аддитивности функции множеств μ^* на $\sigma\mathcal{A}$.

Итак, пусть $E_1 \in \sigma\mathcal{A}$, $E_2 \in \sigma\mathcal{A}$ и $E_1 \bigcap E_2 = \emptyset$. Тогда в силу μ^*-измеримости множеств $(E_1 + E_2)$ и E_1 из алгебры $\sigma\mathcal{A}$, теоретико- множественных равенств из списка тождеств

$$E_1 + E_2 = \Omega(E_1 + E_2) = (E_1 + E_1^c)(E_1 + E_2) = E_1(E_1 + E_2) + E_1^c(E_1 + E_2),$$

$$E_1(E_1 + E_2) \cap E_1^c(E_1 + E_2) = \emptyset, \tag{16}$$

очевидных равенств

$$E_1 \cdot E_1 = E_1, E_1 \cdot E_2 = \emptyset, \quad E_1 \cdot E_1 = \emptyset$$

и

$$E_1^c E_2 = E_2 \backslash E_1 \cdot E_2, \tag{17}$$

последовательно получаем: полагая $D = E_1 + E_2$, поскольку $E_1 \mu^*$-измерима, то из (16) имеем

$$\mu^*(D) = \mu^*(E_1 + E_2) \overset{(16)}{=} \mu^*(E_1(E_1 + E_2)) + \mu^*(E_1^c(E_1 + E_2)),$$

далее,

$$\mu^*(E_1 + E_2) \overset{(17)}{=} \mu^*(E_1 \cdot E_1 + {}_1 \cdot E_2) + \mu^*(E_1 \cdot E_1^c + E_2 \backslash (E_1 \cdot E_2)) =$$

$$= \mu^* \left(E_1 + \emptyset\right) + \mu^* \left(\emptyset + \left(E_2 \backslash \emptyset\right)\right) = \mu^* \left(E_1\right) + \mu^* \left(E_2\right),$$

т.е.

$$\mu^* \left(E_1 + E_2\right) = \mu^* \left(E_1\right) + \mu^* \left(E_2\right).$$

Отсюда, для конечной последовательности попарно непересекающихся μ^*-измеримых множеств $E_1, ..., E_n$ имеем

$$\mu^* \left(E_1 + E_2 + ... + E_n\right) = \mu^*((E_1) + (E_2 + \ldots + E_n)) = \mu^* \left(E_1\right) + \mu^* \left(E_2 + \cdots + E_n\right) =$$
$$= \mu^* \left(E_1\right) + \mu^* \left(E_2\right) + \mu^* \left(E_3 + \cdots + E_n\right) = \cdots = \mu^* \left(E_1\right) + \mu^* \left(E_2\right) + \cdots + \mu^* \left(E_n\right),$$

т.е. функция множеств μ^* конечно -аддитивна на алгебре $\sigma\mathcal{A}$. Лемма полностью доказана.

Теперь завершим доказательство Основной теоремы А: осталось установить, что алгебра множеств $\sigma\mathcal{A}$ замкнуто относительно счетных объединений, т.е. есть σ-алгебра, и что функция множеств μ^* σ-аддитивна на ней.

Сначала покажем, что алгебра множеств $\sigma\mathcal{A}$ есть σ-алгебра. Для этого, согласно определению, необходимо установить, что для всякой последовательности попарно не пересекающихся множеств $E_1, \ldots, E_k, \ldots$ из алгебры $\sigma\mathcal{A}$ множество $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ также принадлежит $\sigma\mathcal{A}$. Действительно, пусть дана последовательность множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что каждое множество E_k μ^*-измеримо и при всех $k_1 \neq k_2$ множества E_{k_1} и E_{k_2} не пересекаются.

Положим $T_n := \sum_{k=1}^{n} E_k$ (n=1,2,...), тогда множество T_n μ^*-измеримо как конечное объединение μ^*-измеримых множеств.Для всякого множества $D \subset \Omega$, стало быть, и для $T_n \cdot D$ при всяком $n (n = 1, 2, \ldots)$, в силу μ^*-измеримости E_1, имеем

$$\mu^* \left(T_n D\right) = \mu^* \left(E_1 (T_n D)\right) + \mu^* \left(E_1^c (T_n D)\right) = \mu^* \left((E_1 T_n) D\right) + \mu^* \left((E_1^c T_n) D\right).$$

Отсюда, поскольку $E_{-1} T_n = E_1$ и $\mathrm{E}_1^{\mathrm{c}} \cdot T_n = \sum_{k=2}^{n} E_k$, получим

$$\mu^* \left(\left(\sum_{k=1}^{n} E_k \right) D \right) = \mu^* \left(T_n D\right) = \mu^* \left(E_1 D\right) + \mu^* \left(\left(\sum_{k=2}^{n} E_k \right) D \right).$$

Итак,

$$\mu^* \left(\left(\sum_{k=1}^{n} E_k \right) D \right) = \mu^* \left(E_1 D\right) + \mu^* \left(\left(\sum_{k=2}^{n} E_k \right) D \right). \tag{18}$$

Применяя (18) к $\left(\sum_{n=2}^{k} E_n\right) D$ получим

$$\mu^* \left(\left(\sum_{k=2}^{n} E_k \right) D \right) = \mu^* \left(E_2 D\right) + \mu^* \left(\left(\sum_{k=3}^{n} E_k \right) D \right),$$

откуда для всех $m = 2, \ldots, n-1$

$$\mu^* \left(\left(\sum_{k=m}^{n} E_k \right) D \right) = \mu^* \left(E_m D\right) + \mu^* \left(\left(\sum_{k=m+1}^{n} E_k \right) D \right). \tag{19}$$

Тогда, из (18) и (19) при $m = 2$ следует

$$\mu^* \left(\left(\sum_{k=1}^{n} E_k \right) D \right) = \mu^* \left(E_1 D\right) + \mu^* \left(E_2 D\right) + \mu^* \left(\left(\sum_{k=3}^{n} E_k \right) D \right).$$

Далее, последовательно продолжая, получим

$$\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{n}E_k\right)D\right)=\mu^*\left(E_1D\right)+\mu^*\left(E_2D\right)+\mu^*\left(\left(\sum_{k=3}^{n}E_k\right)D\right)=...=\mu^*\left(E_1D\right)+...+\mu^*\left(E_nD\right). \tag{20}$$

Стало быть, по определению μ^*-измеримости множества T_n, отсюда получаем

$$\mu^*\left(D\right)=\mu^*\left(T_nD\right)+\mu^*\left(T_n^cD\right)\overset{(20)}{=}\sum_{k=1}^{n}\mu^*(E_kD)+\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{n}E_k\right)^c D\right). \tag{21}$$

Для всякого $n=1,2,\dots$ имеет место включение

$$\sum_{k=1}^{n}E_k\subset\sum_{k=1}^{\infty}E_k,$$

и, потому

$$\left(\sum_{k=1}^{n}E_k\right)^c=\Omega\backslash\sum_{k=1}^{n}E_k\supset\Omega\backslash\sum_{k=1}^{\infty}E_k=\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c,$$

так что в силу неубывания внешней меры μ^*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c\subset\left(\sum_{k=1}^{n}E_k\right)^c,\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{n}E_k\right)^c D\right)\geq\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c D\right).$$

Отсюда и изравенства (21) для всякого $n=1,2,\dots$ имеем

$$\mu^*\left(D\right)\geq\sum_{k=1}^{n}\mu^*(E_kD)+\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c D\right).$$

Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$ получим

$$\mu^*\left(D\right)\geq\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_kD)+\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c D\right). \tag{22}$$

Из неравенства (22), полуаддитивности внешней меры μ^* и определения (9) μ^*-измеримости следует μ^*-измеримость множества $E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$. Именно, применяя полуаддитивность внешней меры μ^* и, в заключительной части, неравенство (22), получим

$$\mu^*(D)=\mu^*(\Omega\cdot D)=\mu^*\left(\left[\sum_{k=1}^{\infty}E_k+\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c\right]D\right)=\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_kD\right)+\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c D\right)\leq$$

$$\leq\mu^*\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_kD\right)+\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c D\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_kD)+\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c D\right)\overset{(22)}{\leq}\mu^*(D), \tag{23}$$

откуда

$$\mu^*\left(D\right)=\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)D\right)+\mu^*\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_k\right)^c D\right)=\mu^*\left(ED\right)+\mu^*\left(E^cD\right),$$

т.е. множество $E\equiv\sum_{n=1}^{\infty}E_n$ - μ^* измеримо. Таким образом, объединение E μ^* измеримых попарно непересекающихся μ^* измеримых множеств E_k (k=1,2,...) также μ^* измеримо, т.е. алгебра $\sigma\mathcal{A}$ на самом деле образует σ-алгебру.

Вместе с тем, из (23) также получаем равенство

$$\mu^*\left(D\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_kD)+\mu^*\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c D\right).$$

Отсюда, так как при $D=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$ имеет место равенства $E_kD=E_k$ и $(\sum_{k=1}^{\infty}E_k)^cD=\emptyset$, $\mu^*(\emptyset)=0$, получим

$$\mu^*\left(\sum_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_k),$$

т.е. установлена σ-аддитивность функции множеств μ^* на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}$.

В итоге, доказана измеримость всякого счетного объединения попарно не пересекающихся μ^*-измеримых множеств и показана σ-аддитивность на σ-алгебре σA функции множеств μ^*.

Теперь, обозначая через μ сужение внешней меры μ^* на σ-алгебру σA, получаем меру μ на σ-алгебре σA. Основная теорема А полностью доказана.

5.3. ПРЕДМЕРА КАК РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАРАНЕЕ ТРЕБУЕМОГО В БУДУЩЕЙ МЕРЕ. Начнем с краткого экскурса в ранее изложенное.

5.3.1. Теория меры в блиц-режиме. Было дано центральное

Определение (меры). Пусть дано множество Ω и пусть $\sigma\mathcal{A}(\Omega)\equiv\sigma\mathcal{A}$ есть σ-алгебра с единицей Ω, состоящая только из подмножеств Ω, т.е. множество множеств, включая Ω замкнутое относительно любых не более чем счетных комбинаций операций объединения, пересечения, разности и дополнений над подмножествами Ω. Неотрицательная σ-аддитивная функция множеств μ, определенная на σ-алгебре σA называется *мерой.*

Множество Ω, на котором производится построение меры (также говорят «меровведение») по мощности может быть конечным, счетным и несчетным.

В первых двух случаях *задача меровведения* имеет полное и окончательное решение.

Конечное множество $\Omega\equiv\{x_1;...;x_n\}$**:** множество $\mathcal{A}$=$\mathcal{A}(\Omega)$, составленное из *всех* подмножеств Ω, включая и пустое множество $\emptyset$, состоит $2n$ элементов и образует алгебру, ибо при всяческих комбинациях операций объединения, пересечения, разности и дополнений над подмножествами Ω результатом будет опять-таки подмножество Ω.

Для того чтобы определить меру μ на конечном множестве $\Omega=\{x_1;\ldots;x_n\}$ необходимо и достаточно задать значения p_k меры μ на всех одноэлементных множествах x_k из $\mathcal{A}(\Omega)$. Тогда для меры $\mu(E)$ всякого множества E из $A(\Omega)$ имеет место равенство

$$\mu(E)=\sum_{x_k\in E}p_k=\sum_{k=1}^{n}p_k\chi_E(x_k),$$

где, как обычно, $\chi_E(x)$ есть характеристическая функция множества E, равная 1 или 0 в зависимости от того x принадлежит или не принадлежит множеству E.

Счетное множество $\Omega=\{x_1;...;x_n;...\}$**:** множество $\mathrm{F}(\Omega)$, множество мощности континуума, составленное из всех подмножеств множества Ω есть σ-алгебра, поскольку всякие операции объединения, пересечения и вычитания над подмножествами одного множества Ω, взятые в любой комбинации также приводят к не более чем счетным подмножествам множества Ω.

Всякий элемент E σ-алгебры $F(\Omega)\equiv\sigma\mathcal{A}(\Omega)$, равно как и всякое подмножество множества $\{x_1;\ldots;x_n;\ldots\}=\Omega$, задается равенством $E=\{x_{n_1};...;x_{n_m};....\}$, где $n_1<\cdots<n_m<\ldots$ конечная или счетная последовательность целых положительных чисел, поэтому если $p_n\equiv\mu(\{x_n\})$ есть мера μ одноэлементного множества $\{x_n\}$, то равенство

$$\mu(E)=\sum_{x_{n_m}\in E}\mu(\{x_{n_m}\})=\sum_{x\in E}\mu(\{x\})=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x_n\})\,\chi_E(x_n),$$

выписанное с учетом свойства числовых рядов с неотрицательными числами, заключающегося в том, что всяческие перестановки и группировки членов не изменят ни его сходимость, ни его суммы конечной или бесконечной, есть общее представление меры на σ-алгебре $F(\Omega)\equiv\sigma\mathcal{A}(\Omega)$.

Существенная особенность построения мер на несчетных бесконечных множествах *состоит в невозможности построения мер на σ-алгебре всех числовых* *множеств:* если за меру μ интервала $(\alpha,\ \beta)$ принять его длину $\beta-\alpha$, то для $\Omega=(-\infty,+\infty)\equiv R^1$ нельзя определить на σ-алгебре $\sigma' A\left(R^1\right)=\{\ :\ \subset(-\infty,+\infty)\}$ всех числовых множеств такую неотрицательную σ - аддитивную функцию множеств $\mu(E)$ такую, что для всякого интервала $E=(\alpha,\beta)$ выполнено равенство $\mu((\alpha,\beta))=\beta-\alpha$.

Как оказалось, и это открытие, во многом изменившее математику XX века, было сделано Анри Лебегом в 1902 году, если исходя из свойств меры μ, заменяя лишь счетную аддитивностьпеременой знака $=$ на $\leq$ на счетную полуаддитивность, определить функцию множеств Φ, заданную на всех подмножествах Ω, то всегда можно выделить (не совпадающую с σ-алгеброй $F(\Omega)$ всех подмножеств Ω*,* именно отсюда потребность во внешней мере) σ-алгебру подмножеств Ω такую, что сужение Φ на нее будет мерой.

Определения меры μ и внешней меры $\mu*$ в сравнении следующие:

Пусть дана σ-алгебра $\sigma\mathcal{A}$ с единицей Ω, на которой определена мера μ (следуя сложившейся традиции, внешнюю меру Φ будем обозначать через μ^*), тогда

$\mu:\ \sigma A\mapsto[0,+\infty]$	$\mu^*: F(\Omega)\equiv\sigma\mathcal{A}(\Omega)\mapsto[0,+\infty]$
1^0. $\mu(\emptyset)=0$	1^0. $\mu^*(\emptyset)=0$
2^0. $\mu(A)\leq\mu(B)$,если $A\subset B,\ A\in\sigma A,\ B\in\sigma A$	2^0. $\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$, если $A\subset B\subset\Omega$
3^0. $\mu\left(\sum_k E_k\right)=\sum_k\mu(E_k)$, если $E_k\in\sigma A,(k=1,2,...)$, $E_{k_1}\cap E_{k_2}=\emptyset\ (k_1\neq k_2)$.	3^0. $\mu\left(\sum_k E_k\right)\leq\sum_k\mu(E_k)$, если $E_k\subset\Omega\,(k=1,2,...)$.

Как это видно из сравнения свойств меры μ и внешней меры μ^*, разница состоит в том, что если мера μ определена на σ-алгебре $\sigma\mathcal{A}$ подмножеств Ω, быть может, не совпадающей с σ-алгеброй $F(\Omega)\equiv\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ всех подмножеств Ω, то внешняя мера μ^* определена только на $F(\Omega)$.

Всякая внешняя мера μ^* на Ω порождает (индуцирует) σ-алгебру подмножеств Ω и μ меру на ней как сужение $\mu^*=\mu$ на нее. Опора всей ключевой схемы меровведения есть

Основная теорема А. Пусть дано непустое множество Ω произвольной природы. Пусть на σ-алгебре $F(\Omega)\equiv\sigma\mathcal{A}(\Omega)$ всех подмножеств Е множества Ω задана внешняя мера μ^* - функция множеств $\Phi\equiv\mu^*$. Тогда все μ^*- *измеримые множества* $\mathrm{E}\subset\Omega$, по определению такие, что для всякого подмножества D исходного множества Ω выполнено равенство

$$\mu^*(D)=\mu^*(DE)+\mu^*(D(\Omega\backslash E)),$$

образуют σ *-алгебру* подмножеств Ω, сужение μ на которую

$$\mu()=\mu^*(E)$$

есть мера.

Дальше события разворачиваются следующим путем.

5.3.2. Мотивы к конкретизации внешней меры μ^* и способ ее реализации через Предмеру. Дано непустое (несчетное) множество Ω, требуется на ней определить меру μ. Разумеется не какую-нибудь одну (что достаточно в контрпримерах, когда, например, для установления взаимоотношения между непрерывностью и дифференцируемостью, достаточно указать всего одну непрерывную на отрезке функцию, в каждой точке которой не имеющую конечную производную) меру, но и с наперед заданными свойствами, с той или иной мотивацией.

Именно, все желаемые свойства будущей меры μ закладываются через *Предмеру* – функцию множеств m, определенную на некотором множестве M, составленного из подмножеств Ω, порождающую внешнюю меру

$$\Phi(E)=\mu^*_{(\Omega,M,m)}(E)=\inf_{E\subset\bigcup_k E_k,\ E_k\in M}\sum_k m(E_k),$$

которая согласно Основной теореме А, в свою очередь определяет σ -*алгебру* подмножеств Ω, сужение $\mu\ (E\ ) = \mu\ *\ (\ E)$ на которую и есть искомая мера μ, со связью с исходным m в виде $m\,(E) = \mu\,(E) = \mu^*\,(E)$ для всех $E \in M$.

5.3.3. ***«Мера*** μ**,** ***определенная*** $\sigma\mathcal{A}$**,** ***удовлетворяет ожидаемому через Предмеру m.***

1^0. Для всякого $E \in M$ выполнено включение $E \in \sigma\mathcal{A}$, т.е. $M \subset \sigma\mathcal{A}$ (стало быть и ***Предмеру m»*** означает: минимальная σ-алгебра $\sigma\mathcal{A}\,(M)$, содержащая M содержится в $\sigma\mathcal{A}$),

2^0. Для всякого $E \in M$ выполнено равенство $\mu(E) = m(E)$, т.е. сужение μ на M есть m.

Тем самым, приходим к заключительной стадии всей выстраемой конструкции:

5.3.4. При каких условиях на множество M **и на функцию множеств – Предмеру** m **на ней выполнены утверждения** $1^0 - 2^0$? Анализ имеющихся доказательств теорем на эту тему показывает, что эти условия такие:

Пусть дано непустое множество Ω. Если

1. M замкнуто относительно конечных объединений:

$$E_k \in M\,(k = 1, ..., n) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} \in M,$$

2. M замкнуто относительно дополнений: $E \in M \Rightarrow \Omega \backslash E =: E^c \in M$,

3. Предмера m счетно-аддитивна на M: если $E_k \in M\,(k = 0, 1, ...)$ и $E_0 = \sum_{k \geq 1} E_k\,(E_{k_1} \bigcap E_{k_2} = \emptyset$ при $k_1 \neq k_2, k_1 \geq 1, k_2 \geq 1)$, то $m\,(E_0) = \sum_{k \geq 1} m\,(E_k)$, то выполнены $1^0 - 2^0$.

5.3.5.Следствия из 1-3. Из 1-3 следует замкнутость M относительно операции разности $E_1, E_2 \in M \Rightarrow E_1 \backslash E_2 \in M$: $E_1 \backslash E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c$ и операции пересечения $E_1, E_2 \in M \Rightarrow E_1 \bigcap E_2 \in M$:

$$E_1 \cap E_2 = (E_1 \cup E_2)\,((E_1 \backslash E_2) \cup (E_2 \backslash E_1)).$$

Конечно-аддитивная Предмера m на пустом множестве $\emptyset$ обращается в нуль - $m\,(\emptyset) = 0$: $m\,(E) = m\,(E + \emptyset) = m\,(E) + m\,(\emptyset) \Rightarrow m\,(\emptyset) = 0$.

Монотонность Предмеры m на $M <=> E_1 \in M, E_2 \in M$, $E_1 \subset E_2 \Rightarrow m\,(E_1) \leq m\,(E_2)$: $E_1 \cap (E_2 \backslash E_1) = \emptyset$, $E_2 = E_1 + (E_2 \backslash E_1) \Rightarrow m\,(E_2) = m\,(E_1) + m\,(E_2 \backslash E_2) \geq m\,(E_2) \geq m\,(E_1)$.

Конечная аддитивность Предмеры m содержится в свойстве 3:

$$E_1, E_2 \in M, E_1 \bigcap E_2 = \emptyset \Rightarrow E_0 := E_1 + E_2, m\,(E_1 + E_2) = m\,(E_1) + m\,(E_2)\,.$$

5.3.6. Список пар (M, m)**, удовлетворяющих условиям 1-3.** Начнем с установившихся в Теории меры.

Пример 1. *Предмера (конечно-аддитивная) на полукольце.* Предмера (конечно-аддитивная) на кольце, наименьше содержащем данное полукольцо. Система множеств M называется *полукольцом*, если она содержит пустое множество $\emptyset$, замкнута по отношению к образованию пересечений и обладает тем свойством, что из принадлежности к M множеств E и $E_1 \subset E$ вытекает возможность представления E в виде $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, где E_k – попарно непересекающиеся множества из M, первое из которых есть заданное множество E_1.

Предмера $m(E)$ на полукольце M есть, по определению, функция множеств $m(E)$ такая, что

- Множество определения функции $m(E)$ есть полукольцо множеств M,

- $m(E)$ аддитивна, т.е. для любого конечного разложения

$$E = E_1 + \cdots + E_n$$

множества $E \in M$ на множества $E_k \in M (k = 1, \ldots, n)$ выполнено равенство

$$m\,(E) = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Замечание 1. Из разложения $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ вытекает, что $m(\emptyset) = 2m(\emptyset)$, откуда $m(\emptyset) = 0$.

Замечание 2. Согласно Основной теореме А, предмера (конечно-аддитивная) на полукольце, это то же самое, что ипредмера (конечно-аддитивная) на кольце, наименьше содержащем данное полукольцо.

Пример 2. *Предмера (в виде меры) на алгебре.* Непустой класс М множеств называется *кольцом* в том случае, когда он обладает следующим свойством:

$$E_1 \in M \text{и} E_2 \in M,$$

то

$$E_1 \cup E_2 \in M E_1 \backslash E_2 \in M$$

.

Предмера m задается как мера на M, стало быть, σ- аддитивна.

Замечание. Согласно Основной теореме А, предмера (в виде меры) на алгебре однозначно продолжаема до меры на наименьше содержащем кольце (и далее, до σ-кольца).

Теперь продолжим ***Теорию меры*** в конкретной естественной исторически изначальной постановке – от длины отрезка до «протяженности» числовых множеств, от площади прямоугольника до площади плоских множеств, с распространением на все размерности.

Эти задачи решает Мера Жордана, которая не счетно-аддитивна, и потому не есть мера в принятом здесь определении. Поэтому счетные операции с Мерой Жордана невозможны. И в этом потребность в счетной аддитивности меры.

Применение в этой проблеме уже выстроеннойЛебеговой конструкции, замкнутой относительно счетных действий, предполагает, что Предмера m должна быть в одномерном и многомерном случаях задана по формулам определения длин отрезков и площадей прямоугольников, объемов многомерных параллелепипедов, с последовательным переходом от этого одномерного случая к многомерному.

Начнем с примера Предмеры, применению которой будет посвящена отдельная Глава – построение меры Лебега на множестве всех действительных чисел (в соответствии с геометрической интерпретацией называемой также **числовой прямой**).

Пример 3. $s = 1 : \{a, b\}$, $m\,(\{a, b\}) = b - a$. Пусть $\Omega \equiv [A, B]$ - ограниченный числовой отрезок. Через S обозначим наименьшую алгебру, содержащую всевозможные ограниченные промежутки $\{a, b\}$ в составе $(a, b)\,, (a, b]\,, [a, b)$ и $[a, b]$, где $A \le a \le b \le B$, причем в случае $a = b$ полагаем $(a, b) \equiv (a, a) = \emptyset$, поскольку нет действительных чисел таких, что $a < x < a$.

На исходной части $\mathcal{A}([A, B])$, состоящей из промежутков, определим функцию множеств m, полагая $m\,(a, b) = m\,(a, b] = m\,[a, b) = m\,[a, b] = b - a$, тем самым, принимая в качестве значения m промежутка его длину.

Геометрически ясно, что дополнение к промежутку, объединение, разность и пересечение двух промежутков есть промежуток или объединение не более двух непересекающихся промежутков. Поэтому алгебра S состоит из объединения конечного числа попарно не пересекающихся промежутков с предмерой m в виде суммы длин составляющих промежутков.

Пример 4. $s \ge 2 : \{a, b\} = \{a_1, b_1\} \times ... \times \{a_s, b_s\}$, $m\,(\{a, b\}) = \prod_{j=1}^{s} (b_j - a_j)$. Многомерный s $(s \ge 2)$-мерный случай полностью повторяет одномерный.

Пример 5. $s = 1$: Пусть задана *функция распределения* $g(t)$, т.е.неубывающая, непрерывная слева функция на $(-\infty, \infty)$. Предмера m всех возможных промежутков определяется по равенствам:

$$m_g\left(a,b\right)=g\left(b\right)-g\left(a+0\right),$$

$$m_g\left[a,b\right]=g\left(b+0\right)-g\left(a\right),$$

$$m_g\left(\,a,b\right]=g\left(b+0\right)-g\left(a+0\right),$$

$$m_g\left[\,a,b\right)=g\left(b\right)-g\left(a\right).$$

С полным повторением случая $g\left(t\right)=t$, с сохранением аддитивности: $(a,b)\cup[b,b]=(\,a,b]$,

$$m_g\left(a,b\right)+m_g\left[b,b\right]=g\left(b\right)-g\left(a+0\right)+g\left(b+0\right)-g\left(b\right)=g\left(b+0\right)-g\left(a+0\right)=m_g\left(\,a,b\right],$$

определяется Предмера на M, состоящем из конечных объединений попарно непересекающихся числовых промежутков, с итоговым построением Меры Лебега-Стилтьеса.

Пример 6. $s\geq 2$, пусть $g_j\left(t\right)\quad(j=1,\ldots,s)$ – некоторая неубывающая слева функция на прямой. Положим $\{a,b\}=\{a_1,b_1\}\times...\times\{a_s,b_s\}\,,m\left(\{a,b\}\right)=\prod_{j=1}^{s}g_j\left\{a_j,b_j\right\}.$

В процессе Лебеговского мероведения получится многомерная Мера Лебега – Стилтьеса. В заключение приведем ссылку на использованную литературу [1-7].

§ 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6.1 Теория вероятностей –наука (Раздел математики) с особой спецификой, как это было сказано Марком Кацем «*Теория вероятностей - это теория меры, но с душой*». Да еще, согласно David Mumford [8], с революционной исторической перспективой: «*Я верю в то, что стохастические методы полностью преобразуют чистую и прикладную математику в начале третьего тысячелетия. В будущем вероятность и статистика будут рассматриваться как естественные инструменты для работы как в математическом, так и в научном моделировании. Интеллектуальный мир в целом придёт ко взгляду на логику как на красивую элегантную идеализацию, но будет рассматривать статистику как стандартный способ, с помощью которого мы рассуждаем и мыслим*».

С его же пояснениями:

«На протяжении более чем двух тысячелетий умами западных интеллектуалов правила логика Аристотеля. Все строгие теории, все научно обоснованные модели, вплоть до моделей самого процесса мышления, тем или иным образом втискивались в прокрустово ложе логики. Но, начавшись с таких-то тёмных сторон жизни вроде стратегий выигрыша в азартных играх или, ещё веселей, подсчётов трупов в средневековом Лондоне, теория вероятностей и статистический подход мало-помалу стали представляться лучшими основами для научных моделей, особенно таких, как процесс мышления, и существенными составляющими теоретической математики, включая даже и сами основания математики. Нам представляется, что грядущее море перемен затронет в следующем тысячелетии практически всю математику».

По-видимому, уже в первых строках изложения надо сразу же определиться с чем будем иметь дело, как это сделано А.Н. Ширяевым [9, стр. 9]:

Предметом теории вероятностей является математический анализ случайных явлений, т.е. таких эмпирических феноменов, которые – при заданном комплексе условий – могут быть охарактеризованы тем, что Для них отсутствует детерминистическая регулярность (наблюдения над ними не всегда приводят к одним и тем же исходам) и в то же самое время Они обладают некоторой статистической регулярностью (проявляющейся в статистической устойчивости частот).

Поясним сказанное на классическом примере «честного» подбрасывания «правильной» монеты. Ясно, что заранее невозможно с определенностью предсказать исход каждого *подбрасывания. Результаты отдельных экспериментов носят крайне нерегулярный характер (то «герб», то «решетка») и кажется, что это лишает нас возможности познать какие-либо закономерности, связанные с этими экспериментами. Однако, если провести большое число «независимых» подбрасываний, то можно заметить, что для «правильной» монеты будет наблюдаться вполне определенная статистическая регулярность, проявляющаяся в том, что частота выпадания «герба» будет «близка» к* $1/2$.

Затем, конечно, надо для себя зафиксировать общую идею методологии изучения [9, стр. 10]

«Призванная изучать количественные характеристики «случайности», теория вероятностей, как и всякая точная наука, стала таковой лишь тогда, когда было четко сформулировано понятие вероятностной модели, когда была создана ее аксиоматика».

Изучению Теории вероятностей обязательно должны предшествовать Теория меры и интеграла Лебега, что и будем предполагать.

Теория вероятностей по А.Н.Колмогорову есть пространство с мерой $(\Omega, \sigma\mathcal{A}, \mu)$, но с нормированной мерой $\mu(\Omega) = 1$ и специфическими названиями

1. $\Omega = \{\omega\}$ – пространство элементарных событий (выборочное пространство), стало быть, каждый элемент ω из Ω носит название элементарного события,
2. $\sigma\mathcal{A}$ – σ-алгебра событий, стало быть, каждое множество из $\sigma\mathcal{A}$ носит название события,
3. $\mu \equiv \mathrm{P}$ – вероятностная мера, коротко, вероятность, стало быть, вероятность – специализированное название меры.

Если обратиться к интуитивному обоснованию этой версии Теории вероятностей на основе Теории меры Лебега, то, согласно В.Феллеру [10, стр.17]:

«*Математическая теория вероятностей приобретает практическую ценность и наглядный смысл в связи с такими действительными или мыслимыми опытами и явлениями, как, например, однократное бросание монеты. ...Пока описание всех этих явлений довольно неопределенно, и, чтобы придать теории точный смысл, мы должны условиться о том, что мы понимаем под возможными исходами рассматриваемого опыта или наблюдения*»,

из чего вынесем, что производится (активный) *опыт* (также называемый *статистический эксперимент*) или (пассивное) *наблюдение*, а «*возможный исход*» и есть «*элементарное событие*», в полной совокупности составляющих «*Пространство элементарных событий*».

Уже по личным впечатлениям в качестве *наблюдения* назовем соотношение новорожденных по их полу, а *опыта* –Парадокс де Мере илиодно- и двукратное бросание монеты.

В связи с составляющими множество Ω *элементарными событиями* и образующими $\sigma\mathcal{A}$, – σ-алгебру подмножеств Ω, –*событиями* обратим внимание на один главный, на наш взгляд, момент. Большинство известных нам учебников по Теории вероятностей почему-то не отвечают, а если отвечают, то без должной детализацииcентрального для понимания всей Теории вероятностей вопроса: Произвели опыт или наблюдение, спрашивается, что означает «*В результате чего данное событие произошло или не произошло?*».

Для иллюстрации самой формы освещения реализации данного события или наоборот приведем два примера.

Ввиду чрезвычайной важности поставленного вопроса, позволим себе обширное цитирование [11, стр. 24], где на него имеется прямой ответ (с нашими комментариями): «*Мы никогда не будем говорить о вероятностях вне связи с каким-нибудь пространством элементарных событий (или физически – вне связи с некоторым мыслимым опытом). Мы отправляемся от понятия пространство элементарных событий и его точек; впредь они будут рассматриваться как данные. Они являются первоначальными и неопределяемыми понятиями теории, так же как понятия «точка» и «прямая» остаются неопределяемыми при аксиоматическом построении евклидовой геометрии.*

Природа элементарных событий не интересует нашу теорию. Пространство элементарных событий служит моделью идеализированного опыта в том смысле, что, по определению, любой мыслимый исход опыта полностью описывается одним и только одним элементарным событием. О каком-либо событии Аимеет смысл говорить лишь в том случае, если для любого исхода опыта известно,произошло или не произошло событие А. Совокупность точек, представляющих все те исходы, при которых событие А происходит **[еще одно определение события?–Н.Т.]**, *полностью описывает это событие. Обратно, произвольное заданное множество А, содержащее одну или более точек нашего пространства можно рассматривать* **[*«можно рассматривать»* –поэтому пока не будет определением–Н.Т.]** *как событие; оно происходит или не происходит в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит множеству А точка, представляющая исход опыта*[**здесь уже точное определение!–Н.Т.**]. *Поэтому мы определяем слово событие как термин, означающий некоторое множество элементарных событий***[не произвольное, а из $\sigma\mathcal{A}$-алгебры–Н.Т.].***Мы будем говорить, что событие А состоит из определенных точек, а именно точек, представляющих те исходы идеализированного опыта, при которых происходит событие А».*

Все-же, ключевая фраза «*Событие Апроисходит или не происходит в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит множеству А точка, представляющая исход опыта*» как-то затеряна в обширном тексте.

Приведем еще одну выдержку на обсуждаемую тему [11, стр.10]:

«Пусть $A \subset \Omega$ – любое подмножество выборочного пространства Ω для некоторого статистического эксперимента. Проведение эксперимента сводится к наблюдению элементарного исхода ω, который является элементом Ω. Если $\omega \in A$, то говорим, что событие А произошло. Если $\omega \notin A$, то говорим, что событие не произошло, или, что эквивалентно, произошло событие $\Omega \backslash A$ (дополнение события А)».

В ней А сначала «любое подмножество», затем «событие», которое «произошло».

В аксиоматизированной по А.Н.Колмогорову теории вероятностей *событие* декларируется как элемент σ-алгебры в вероятностном пространстве $(\Omega, \sigma\mathcal{A},\ A)$.

В связи с чем приведем практическое обоснование необходимости введения математического объекта «событие»: *«С практической точки зрения не каждое событие может представлять интерес. Скажем, в примере 1.5 «Будем наблюдать за температурой воздуха в определенном месте. Элементарные исходы суть действительные числа. Поэтому выборочное пространство – это действительная прямая» можно рассмотреть событие «измеренная температура есть иррациональное число». Такое событие не имеет никакого практического смысла. Напротив, событие типа «измеренная температура принадлежит интервалу $[a, b]$» имеет определенную ценность. Мы резюмируем сказанное следующим образом: существует система $\mathcal{A}$ подмножеств выборочного пространства, элементам которой соответствуют события, имеющие «практическую ценность». Предположим, что такая система $\mathcal{A}$ установлена. Мы просто скажем, что $\mathcal{A}$ – это система всех событий, связанных со статистическим экспериментом, выборочное пространство которого есть Ω. Под событием будем понимать элемент системы $\mathcal{A}$».*

Так или иначе, но проблема должна быть подробно обозначена «Есть вероятностное пространство $(\Omega, \sigma\mathcal{A},\ P\ )$, дано событие А из $\sigma\mathcal{A}$. Произведен опыт или наблюдение, исход ω которого известен». Что в этих условиях означает «Событие A произошло» и «Событие A не произошло»? Разумеется, с подробными обсуждениями и комментариями, что и сделано в [12-13].

Уже на уровне конечного числа исходов, обычно называемого **Элементарная теория вероятностей**, в полном объеме используется Теория меры на множестве с конечным числом элементов.

После того как специфика особой науки Теории вероятностей передана в случае конечного числа исходов, при усвоенной дисциплине Мера и интеграл Лебега, все в основах изложенное в случае конечного числа исходов переписывается на бесконечный случай.

Для понимания сути Теории вероятностей, причем независимо от понимания или непонимания теории Вероятностного пространства, на наш взгляд, полезно использовать Вспомогательную модель *«Киоск»,*что здесь вынесено во Фрагменты.

Парадокс де Мере как, наверное, наилучшая иллюстрация статистического обоснования Теории вероятностей, тоже вошел во Фрагменты из авторского учебника [12] «Теория вероятностей».

6.2. Фрагменты авторского учебника Теории вероятностей

6.2.1. Вспомогательная модель. Представим себе торговый киоск, в котором имеются разные товары, каждый в единственном экземпляре и со своей ценой, на общую сумму в 1 единицу (за единицу можно принять любые суммы: 1317321 тенге и др.). Цены на товары, в отличие от них самих, могут совпадать. Составим пакет из каких-либо товаров – от пустого пакета до содержимого всего киоска. Тогда цена пакета будет равна сумме цен товаров пакета.

В этом заключается то, что будем называть «Вспомогательная модель «Киоск»».

Приведем примеры экспериментов и их исходов.

Каждый исход (результат опыта или наблюдения) соответствует товару во вспомогательной модели «Киоск», со всеми вытекающими отсюда последствиями:товар, цена товара, пакет, цена пакета.

Приведем примеры экспериментов и их исходов.

Пример 1. Однократное подбрасывание монеты.

Подбросим монету, или, как говорят в теории вероятностей, произведемопыт или *статистический эксперимент.* Монета упадет гербом или решеткой. Об этом будем говорить, исходами эксперимента являются $\omega_1 = \Gamma$ (выпадение герба) или $\omega_2 = \mathrm{P}$ (выпадение решетки).

Этим исчерпываются все исходы: какой-либо третий случай, в том числе и «стоит на ребре» - исключаем. В модели «Киоск» всевозможные (т.е. "других нет") исходы данного эксперимента образуют товары – Г и Р, а весь «Киоск» будет состоять из Г и Р- двуэлементного множества {Г; Р}.

Пример 2. Двукратное подбрасывание монеты. Всевозможные результаты подбрасывания образуют «товары»: ГР - при первом подбрасывании выпал «герб», при втором – «решетка»; ГГ – при каждом из двух подбрасываний выпал «герб»; РГ и РР – при первом подбрасывании в обоих случаях выпала «решетка», а при втором – «герб» и «решетка» соответственно.Весь«Киоск» состоит из «товаров»{ГР;ГГ; РГ; РР}.

6.2.2. Вероятностная модель. Изучая математику, всегда полезно помнить, что это *систематизированная* наука, и потому выражается в точных определениях. Именно, если в примере с *Киоском* обычные названия заменим на специальные математические термины (принятые в Теории вероятностей):

1. товар –элементарное событие ω ,
2. киоск – множество Ω , составленное из всех элементарных событий. Коротко: *пространство элементарных событий* $\Omega = \{ \omega_1 ,..., \omega_N \}$,
3. цена товара – вероятность $P(\omega)$ элементарного события ω , Р – вероятность как числовая функция со значениями из отрезка $[0,1]$, определенная на множестве Ω ,
4. пакет, составленный из каких-то товаров – событие $= \{\omega_{i_1}; \omega_{i_2}; \ldots \omega_{i_k}\}$, состоящее из соответствующих товарам пакета элементарных событий,
5. цена пакета – вероятность события $P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \ldots P(\omega_{i_k})$ (численно равна сумме вероятностей тех элементарных событий, из которых составлено событие),
6. множество, составленное из всех возможных пакетов – σ -алгебра событий,

то получим необходимую теоретическую базу для понимания теории вероятностей – *вероятностную модель.*

6.2.3. Вспомогательная и Вероятностная модели экспериментов. Тем самым, имеем две *модели*:

Вспомогательная модель «Киоск» и, *то же самое в вероятностных терминах,*

Вероятностная модель. Эти две модели применим к примерам 1 и 2: однократное и двукратное подбрасывание монеты со сторонами Г - «герб» и Ч - «число». Опыт заключается в бросании игральной кости с цифрами от единицы до шести, нанесенными на грани кубика и расположенными таким образом, чтобы их сумма на противоположных гранях была равна семи: 1-6, 2-5, 3-4.

6.2.4. Однократное и двукратное бросание монеты

Вспомогательная модель «Киоск» однократного бросания монеты

Пример 1. Всевозможные результаты бросания монеты образуют товары Г и Ч и киоск {Г;Ч}.

Цены на товары (устанавливают произвольно): цена товара Г равна неотрицательному числу p, цена товара Р равна неотрицательному числу q. Цена всех товаров, всего киоска, равна $p+q$=1.

Пакеты: пустой Ш, состоит из одного Г, из одного Р, из Г и Р – весь киоск. И, как следствие, цены пакетов: пустого равна 0, из одного Г равна p, из одного Р равна q, из Г и Р, содержимое всего киоска, равна $p+q$=1.

То же в вероятностных терминах:

Вероятностная модель однократного бросания монеты:

1. Всевозможные элементарные события ω_1 =Г и ω_2 =Ч образуют пространство элементарных событий $\Omega =\{ \omega_1 ; \omega_2 \}$.
2. Всевозможные события: $A_0 =$ Ш, $A_1 =\{ \omega_1 \}$, $A_2 = \omega_2$, $A_3 = \omega_1 ;\ \omega_2 = \ \Omega$.
3. Вероятности: вероятности элементарных событий $P(\omega_1)=P$(Г)$=p$ и $P(\omega_2)=P$(Ч)$=q$, и, как следствие, вероятности событий $P(A_0)\ =P$(Ш) $=0$, $P(A_1) = p$, $P(A_2) =q$, $P(A_3) =p+q= 1$.

Вспомогательная модель «Киоск» двукратного бросания монеты

Пример 2. Весь «киоск» состоит из 4 «товаров»: ГЧ, ГГ, ЧГ, ЧЧ с ценами – неотрицательными числами – p_1 , p_2 , p_3 , p_4 соответственно, причем $p_1+p_2+p_3+p_4 = 1$.

Перечислим пакеты и их цены:

пустой Ш – 0,

с одним товаром: {ГЧ} – p_1 , {ГГ} – p_2 , {ЧГ} – p_3 , {ЧЧ} – p_4,

с двумя товарами: {ГЧ, ГГ} – $p_1 + p_2$,{ГЧ, ЧГ} – $p_1 + p_3$, {ГГ, ЧГ} – $p_2 + p_3$, {ГЧ, ЧЧ} – $p_1 + p_4$,{ГГ, ЧЧ} – $p_2 + p_4$, {ЧГ, ЧЧ} – $p_3 + p_4$;

с тремя товарами: {ГЧ, ГГ,ЧГ} – $p_1 + p_2 + p_3$,{ГЧ, ГГ, ЧЧ} – $p_1 + p_2 + p_4$,

{ГЧ, ЧГ,ЧЧ} – $p_1 + p_3 + p_4$, {ГГ, ЧГ,ЧЧ} – $p_2 + p_3 + p_4$,

и, наконец, с четырьмя товарами –

весь «киоск» {ГЧ, ГГ, ЧГ, ЧЧ} – $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

То же в вероятностных терминах

Вероятностная модель двукратного бросания монеты:

1. **Пространство элементарных событий** Ω – множество, составленное из всевозможных элементарных событий.

Всевозможные **элементарные события** ω_1 =ГЧ, ω_2 =ГГ, ω_3 =ЧГ, ω_4 =ЧЧ образуют пространство элементарных событий $\Omega =\{ \omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4 \}$. Вероятности элементарных событий:$P(\omega_1)={}_1$, $(\omega_2 = {}_2$, $(\omega_3) = p_3$, $P(\omega\, 4)=p4$.

1. Всевозможные **события** (подмножества пространства элементарных событий): $A_0 = \{Ш\}$, $A_1 = \{\omega_1\}, A_2 = \{\omega_2\}$, $A_3 = \{\omega_3\}$, $A_4 = \{\omega_4\}$, $A_5 = \{\omega_1; \omega_2\}$,

$A_6 = \{\omega_1; \omega_3\}, A_7 = \{\omega_1; \omega_4\}, A_8 = \{\omega_2; \omega_3\}, A_9 = \{\omega_2; \omega_4\}, A_{10} = \{\omega_3; \omega_4\}, A_{11} = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3\}, A_{12} = \{\omega_1; \omega_3; \omega_4\}, A_{13} = \{\omega_1; \omega_2; \omega_4\}, A_{14} = \{\omega_2; \omega_3; \omega_4\}, A_{15} = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4\} = \Omega$

1. Вероятности событий (числовые функции, аргументом которых являются события): $P(A_0) = 0, P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, P(A_3) = p_3, P(A_4) = p_4, P(A_5) = p_1+p_2, P(A_6) = p_1 + p_3, P(A_7) = p_1 + p_4, P(A_8) = p_2 + p_3, P(A_9) = p_2 + p_4, P(A_{10}) = p_3 + p_4, P(A_{11}) = p_1+p_2+p_3, P(A_{12}) = p_1+p_2+p_4, P(A_{13}) = p_1+p_2+p_4, P(A_{14}) = p_2+p_3+p_4, P(A_{15}) = P(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.

2. Вероятности событий (числовые функции, аргументом которых являются события): $P(A_0) = 0, P(A_1) = {}_1, P(A_2) = p_2, P(A_3) = p_3, (A_4) = p_4, P(A_5) = p_1 + p_2, P(A_6) = p_1 + p_3, P(A_7) = p_1 + p_4, (A_8) = p_2 + p_3, P(A_9) = p_2 + p_4, P(A_{10}) = p_3 + p_4, P(A_{11}) = p_1+p_2+p_3, P(A_{12}) = p_1+p_2+p_4, P(A_{13}) = p_1+p_2+p_4, P(A_{14}) = p_2+p_3+p_4, P(A_15) = P(\Omega) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.

6.2.5. Общая схема построения конечной вероятностной модели – вероятностного пространства. Подведем первые итоги. При надлежащем осмыслении подробно разобранных, а в случае необходимости и дополнительных примеров (например, полностью описать вспомогательную и вероятностную модели *трехкратного* подбрасывания монеты), целесообразно, минуя «вспомогательную модель» перейти непосредственно к «вероятностной модели».

Это важно по многим причинам. Одной из них является выделение основных сведений, из которых можно получить все остальные – своего рода уменьшение до возможного объема необходимой информации.

В нашей простейшей начальной схеме, равно как и в обширной теории вероятностей, всевозможные результаты испытаний (так называют опыт и наблюдение в совокупности) в принципе известны, но неизвестно, какой из них при данном испытании реализуется.

Вероятностная задача возникает тогда, когда результат испытания, подчиняясь воле случая, заранее неизвестен.

Общая схема построения конечной вероятностной модели при заданном эксперименте:

1. Выписываем всевозможные исходы – элементарные события ω - осуществления испытания: $\Omega = \{ \omega_1 ,\dots, \omega_N \}$ - множество элементарных событий.

В литературе элементарные события также называют *случаями.*

1. Каждому элементарному событию ω_i $(i = 1,\dots,N)$ приписывается неотрицательное число p_i - его вероятность: $P(\omega_i) = p_i$, но с условием $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$.
2. Событием A называется произвольное множество, составленное из элементарных событий – элементов Ω: из 0 элементов, из 1 элемента, из 2 элементов, …, из Nэлементов.

Таким образом, событие состоит из элементарных событий.

Элементарное событие, принадлежащее событию (множеству – подмножеству Ω) А, также называют *случаем, благоприятствующим событию* А.

Элементарное событие, не принадлежащее событию(множеству – подмножеству Ω) А, также называют случаем, *не благоприятствующим событию* А.

1. Вероятностью $P(A)$ событияA называется сумма вероятностей всех составляющих ее элементарных событий: если $A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}\}$, то $P(A) = p_{i_1} + ... + p_{i_k}$.

В нашей вероятностной модели выделим три составляющие: пространство элементарных событий Ω; множество $\sigma\mathcal{A}$, составленное из всевозможных событий A и вероятность P – числовую функцию на P со значениями из отрезка [0,1].

Эта тройка (Ω, $\sigma\mathcal{A}$, P) и называется *вероятностным пространством.*

Конечно, в случае конечного множества Ω множество $\sigma\mathcal{A}$ тоже будет конечным, однако ради единства обозначений по всей Теории вероятностей сохраним это обозначение.

6.2.6. Произвели статистический эксперимент или наблюдение, известен исход. Произошло ли (заранее фиксированное) событие? Зафиксировано какое-либо событие, произвели испытание, известен его исход. Что означает «В результате испытания данное событие произошло» и что означает «В результате испытания данное событие не произошло»?

Ответ такой: если данный исход как элементарное событие есть элемент данного события, то говорят, что произошло *все событие*, причем, разумеется, другие элементарные события из данного события на этот раз произойти не могут.

В этом суть теории вероятностей: результатом одной реализации эксперимента или наблюдения является один конкретный исход - одно элементарное событие, опять же при испытании знаем все возможные исходы, но не знаем, какой из них произойдет. Событие состоит из какого-то количества элементарных событий, каждое элементарное событие есть шанс произойти событию, вычисление вероятности события и есть исчисление этих шансов.

Если же данный исход не есть элемент данного события, то говорят, что не произошло *все событие.*

Отметим два особых события: "*невозможное*" – которое никогда не происходит и "*достоверное*" – которое происходит всегда. Действительно, к числу событий отнесены "пустое множество", в котором нет ни одного элемента, – это событие $A = \emptyset$ и есть *невозможное*, поскольку всякое элементарное событие, в их числе и результат испытания, не может быть элементом пустого множества $\emptyset$. Событием, по определению, мы называли всякое подмножество Ω, в частности, само Ω. Событие $A = \Omega$ есть событие *достоверное,* поскольку происходит при каждом испытании: исход испытания есть элементарное событие, Ω состоит из всех возможных элементарных событий, поэтому любой исход влечет выполнения события Ω.

Пример. Эксперимент состоит в двукратном подбрасывании монеты. Всевозможные исходы $\omega_1 = \text{ГЧ}$, $\omega_2 = \text{ГГ}$, $\omega_3 = \text{ЧГ}$, $\omega_4 = \text{ЧЧ}$.

Событие $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3\}$ состоит из ω_1, ω_2 и ω_3, в словесном описании «При двух бросаниях монеты хотя бы один раз выпадает "герб"».

Производим эксперименты – подбрасываем монету два раза, учитывая при этом последовательность выпадений сторон монеты (разумеется, это можно воспроизвести на практике в аудитории).

Итак, произвели три испытания, каждый раз дважды подбрасывая монету. Допустим, что исходы испытаний следующие три

1. – первое испытание: $\omega_1 = $ ГГ, т. е. при первом подбрасывании выпал герб, при втором – также герб;
2. – второе испытание: $\omega_4 = $ ЧЧ, т. е. при первом подбрасывании выпало число, при втором – также число;
3. – третье испытание: $\omega_1 =$ГЧ, т. е. при первом подбрасывании выпал герб, при втором – число.

Тогда при первом испытании произошло событие A, поскольку элементарное событие $\omega_2 =$ГГ содержится в множестве A, состоящем из элементарных событий ω_1, ω_2 и ω_3.

Понятно, что при этом испытании другие элементарные события ω_1 и ω_3 из события A не есть исходы этого первого испытания (да и не могут произойти, поскольку каждое испытание имеет только один определенный исход). Однако ω_1 и ω_3 могут быть исходами других испытаний.

В нашем случае так и происходит.

Исход второго испытания $\omega\,4$ не содержится в A, поэтому событие A при этом испытании не происходит.

Напротив, исход третьего испытания ω_1 содержится в A, и потому происходит все событие A.

Таким образом, событие A происходит в первом и третьем испытаниях – в первом случае реализован шанс ω_2 реализации этого события, в третьем - шанс ω_1.

6.2.7. Парадокс де Мере. Опыт заключается в бросании игральной кости с цифрами от единицы до шести, нанесенными на грани кубика и расположенными таким образом, чтобы их сумма на противоположных гранях была равна семи: 1-6, 2-5, 3-4.

Де Мере заметил, что при 3-х бросаниях одной игральной кости 11 очков выпадает чаще, чем 12, – вот такая наблюдательность, ставшая вехой в развитии Теории вероятностей. Паскаль и Ферма независимо нашли объяснение этого наблюдения, - помимо суммы выпавших очков, надо еще следить за их порядком. Ферма писал Паскалю: «Я вижу, что истина всегда одинакова: и в Париже, и в Тулузе».

Де Мере полагал так: 11 очков может выпасть следующими 6-ю способами

$$(6\text{-}4\text{-}1),\ (6\text{-}3\text{-}2),\ (5\text{-}5\text{-}1),\ (5\text{-}4\text{-}2),\ (5\text{-}3\text{-}3),\ (4\text{-}4\text{-}3), \qquad (A)$$

12 очков опять же 6-ю способами

$$(6\text{-}5\text{-}1),\ (6\text{-}4\text{-}2),\ (6\text{-}3\text{-}3),\ (5\text{-}5\text{-}2),\ (5\text{-}4\text{-}3),\ (4\text{-}4\text{-}4), \qquad (B)$$

так что нет оснований для предпочтения 11-ти очков перед 12-ю.

Де Мере не учитывал порядок выпадения очков, например, кроме (6-4-1) существует еще 5 вариантов: (6-1-4), (4-6-1), (4-1-6), (1-6-4), (1-4-6).

Итак, учитывая по Ферма- Паскалю в (A) порядок в записях под каждой из них

$$\begin{matrix} (6\text{-}4\text{-}1), & (6\text{-}3\text{-}2), & (5\text{-}5\text{-}1), & (5\text{-}4\text{-}2), & (5\text{-}3\text{-}3), & (4\text{-}4\text{-}3), \\ 6 & 6 & 3 & 6 & 3 & 3 \end{matrix} \tag{A}$$

то же с (B)

$$\begin{matrix} (6\text{-}5\text{-}1), & (6\text{-}4\text{-}2), & (6\text{-}3\text{-}3), & (5\text{-}5\text{-}2), & (5\text{-}4\text{-}3), & (4\text{-}4\text{-}4), \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 6 & 1 \end{matrix} \tag{B}$$

получаем, что 11 очков выпадают 6+6+3+6+3+3=27 способами, 12 очков – 6+6+3+3+6+1=25 способами, что и объясняет поднятый де Мере вопрос.

Весьма замечательным здесь является то обстоятельство, что результаты наблюдений привели к построению правильной математической модели при троекратном бросании одной кости.

Именно, пространство Ω состоит из исходов $\omega=(a,\ b,\ c)$, где $a,\ b$ и c есть число очков при первом, втором и третьем бросаниях соответственно.

Равенство $\omega=(a,\ b,\ c) = (a_1,\ b_1,\ c_1) = \omega(1)$ означает $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$, а не $a+b+c=a_1+b_1+c_1$, как полагал де Мере.

Другими словами, два исхода считаются разными, если различаются выпавшими очками или же, при совпадении выпавших очков, порядком их выпадания.

Ввиду теоретической «геометрической правильности» и «однородности» игральной кости, ни один исход не предпочтителен перед любым другим исходом, поэтому все исходы *равновозможны,* т.е. вероятность р(ω) каждого исхода ω равна 1/N, где N - количество элементов в Ω .

Поскольку при каждом бросании реализуется один из шести возможных случаев, то в трех бросаниях согласно основной комбинаторной формуле будет N=63=216 различных исходов. И, наконец, пусть события A и B состоят в выпадении при трех бросаниях соответственно 11 и 12 очков: A=$\{\omega=(a,\ b,\ c)\in\Omega:\ a+b+c=11\}$ и B=$\{\omega=(a,b,c)\in\Omega:\ a+b+c=12\}$.

Тогда

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}\frac{1}{216}=\frac{\text{число элементов в } A}{\text{число элементов в } \Omega}=\frac{27}{216}$$

и

$$P(B)=\sum_{\omega\in B}\frac{1}{216}=\frac{\text{число элементов в } B}{\text{число элементов в } \Omega}=\frac{25}{216},$$

тем самым, вероятность выпадения 11 очков больше вероятности выпадения 12 очков, так что в длинной серии бросаний 11 очков выпадает чаще нежели 12 очков, что и заметил де Мере.

6.2.8. Статистика рождений (см. [14, стр. 42-43]). *«В книге «Опыт философии теории вероятностей» Лаплас рассказал об одном весьма примечательном эпизоде, происшедшим с ним при изучении закономерности рождения мальчиков и девочек. Обширные статистические материалы для Лондона, Петербурга, Берлина, всей Франции, давали почти точно совпадающие отношения числа рождений мальчиков к числу всех рождений. Все эти отношения колебались в течение десятилетий около одного и того же числа, приблизительно равного 22/43=0,511628. В то же время исследование аналогичных статистических материалов по Парижу за 40 лет (с 1745 по 1784 годы) приводило к иному числу* $\frac{25}{49}=\frac{25\cdot43}{49\cdot43}=\frac{1075}{2107}$*, тогда как* $\frac{22}{43}=\frac{22\cdot49}{43\cdot49}=\frac{1078}{2107}$*. Лапласа заинтересовало столь значительное различие, и он начал искать для него рациональное объяснение (* различие в $\frac{3}{2107}$ –вряд ли количество подкидышей в сравнении с числом жителей Парижа могло быть заметно больше, да еще в условиях приблизительности самого значения $\frac{22}{43}$, вряд ли можно назвать «столь значительное различие», что говорит о пользе «введения бесконечно малых в науку», но не в государственные дела, за что Наполеон отстранил Лапласа от должности Министра финансов –**Н.Т**.). *При детальном изучении архивных материалов оказалось, что в общее число рождений по Парижу включались также все подкидыши. Выяснилось далее, что окрестное население предпочитало подкидывать преимущественно младенцев одного пола. Само же явление социального порядка в то время было настолько распространенным, что существенно исказило истинную картину рождаемости в Париже. Когда Лаплас исключил из общего числа рождений всех подкидышей, то оказалось, что и для Парижа отношение числа рождений также устойчиво и также близко к числу 22/43, как это имеет место для других народов и для Франции в целом».*

Здесь мы имеем с совершенно другим и одинаково замечательным фактом, когда наблюдения (но не эксперименты) приводят к доказательству наличия статистической регулярности.

Более того, на основании статистических данных определяется *вероятность*, события, состоящего в «рождение мальчика», в то время как пространство элементарных событий Ω двухэлементно: $\omega_1 =$ «рождение девочки» и $\omega_2 =$ «рождение мальчика».

Все это составляет первый пример из *математической статистики,* когда вероятности определяются из известных статистических данных или же из постановок статистических экспериментов (что само по себе тоже не просто, представляет отдельную науку).

Заметим, что более поздние статистические данные также приводят к выводу «вероятность рождения мальчика равна 0,514», т.е. на тысячу рождений ребенка 514 приходится на мальчиков.

Вот данные по Швейцарии с 1871 по 1900 годы: n=2644757, среди них n1=1359671 мальчиков, частота рождения мальчика равна $\frac{n_1}{n} = \frac{1359671}{2644757} = 0.5141$.

Итак, вероятностная модель есть пространство (Ω , $\sigma\mathcal{A}$, P) рождения ребенка, где: $\omega_1 =$ «рождение девочки», $\omega_2 =$ «рождение мальчика».

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}\,, \sigma\mathcal{A} = \{\emptyset;\, \{\omega_1\}\,;;\{\omega_2\}\,;;\{\omega_1;\omega_2\}\}\,,$$

$$P : P\left(\omega_1\right) = p_1 = 0.486,\ \ P\left(\omega_2\right) = p_2 = 0.514.$$

Серия наблюдений в Лондоне, в Петербурге, в Берлине, всей Франции, Париже (после уточнения наблюдений Лапласа), Швейцарии показывает, что частота события $= \{\omega_2\}$ группируется около вероятности $P(A) = 0,514$.

Замечание. Ввиду абсолютной случайности самого процесса рождения ребенка возникает вопрос, как и кем все это управляется, уж не прав ли Воланд «Ежели бога нет, то спрашивается, кто же управляет жизнью человеческой?» в адском поучении Берлиоза с предсказанием подстроенной им же его скорой гибелью в романе М.Булгакова «Мастер и Маргарита».

§7 ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ, ПЕРЕРАБОТАННОМУ И ДОПОЛНЕННОМУ ИЗДАНИЮ НА КАЗАХСКОМ ЯЗЫКЕ УЧЕБНИКА "Нұрлан Темірғалиев "МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ""

Еще в начале XX века интеллектуальная казахская элита призывала свой народ, для которого даже начальное образование было не очень распространенным, к овладению математикой. Они не ограничивались голыми лозунгами, а всегда сами начинали их реализацию. В математике, даже не имея специального образования - гуманитарий Ахмет Байтурсунов создал до сих пор без изменений используемую адекватную "говорящую" казахскую математическую терминологию, инженер Каныш Сатпаев - 700 - страничный сборник школьных задач с решениями, опять же гуманитарий Елдес Омаров написал учебник геометрии под названием "Раскрой", опять же инженер Алимхан Ермеков - первый на казахском языке учебник по высшей математике с призывным названием "Курс Великой математики".

В продолжение всего этого, опираясь на "дух великих предшественников" данный "Учебник" создан с целью формирования всех возможностей, даже в отсутствие профессиональной среды, для массового достижения "математической зрелости" и включения в международный научный процесс.

Автор

1. Математика как движущая сила возвышения нации в современном интелектуальном мире. Первыми казахскими профессиональными математиками, Советской властью и возведенными к вершинам специальности, и ею же уничтоженными были - Ибатолла Акбергенов (1907-1938) и Садвакас Бокаев (родился в 1907 году, арестован в 1937 году, погиб в тюрьме в 1942 году).

Для лишения какого-либо народа образования и невозможной без качественного образования науки, достаточно лишить этот народ математического анализа, все остальное рухнет само собой.

Видимо именно поэтому были ликвидированы два первых специалиста по математическому анализу в Казахстане (в числе репрессированной высшей пробы казахской интеллигенции, хотя, в те жестокие времена математиков особо не ограничивали).

Ещё одним подтверждением особой социальной значимости математического анализа является ещё одна возвышенно-трагическая судьба: из-за ухищренных административных преследований преждевременная смерть настигла Рақыма Усубакунова, - автора первого на киргизском языке двухтомного учебника по математическому анализу объемом в тысячу страниц, "ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЖАНА ИНТЕГРАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨР", с призывом "Посвящаю молодому поколению, мечтающему стать математиками в будущем".

У других центрально-азиатских народов такие преследования математиков не наблюдались.

Каждое время предъявляет свои требования к вводному курсу в математику, особенно острые в доВейерштрассовскую эпоху: в 1826 году Нильс Хенрик Абель (1802-1829, норвежский ученый) писал "*Коши сумашедший и с ним невозможно поддерживать хорошие отношения, хотя в настоящее время он является единственным человеком, который знает, как нужно излагать математику. То, что он делает, великолепно, но очень путано... .*".

Впрочем, Вейерштрассовский Математический анализ остается и поныне базовым для получения математического образования, и что, скорей всего, сохранится в обозримом будущем.

2. Блиц-история математического анализа. Каждый человек начинает знакомство с математическим анализом с ответа на вопрос "*Сколько тебе лет?*". Затем наступает очередь таблиц сложения и умножения чисел. Помимо геометрии, программа средней школы является "*облегченным*" математическим анализом. Все это находит продолжение в высшей школе.

Такая преамбула порождает вопрос "*Что такое математический анализ?*". Данный учебник может восприниматься как первичный ответ на этот глубоко научный вопрос.

Ниже, на протяжении всего этого Предисловия слово "Учебник" означает учебник Нурлана Темиргалиева "Математикалық анализ" (1979-1997), вместе с настоящим вторым изданием этого учебника. Слово же учебник без кавычек употребляется в обычном значении.

Математический анализ, истоки которого теряются во тьме веков и тысячелетий, является величайшим достижением человеческой мысли всех времен. Математический анализ был создан студентом Кембриджского Тринити-колледжа Исаком Ньютоном в 1665-1667 годы в родовом поместье - Вулсторп, где он укрывался от эпидемии чумы.

Лейбниц, в 1672-1673 годы, будучи в тесном контакте с Христианом Гюйгенсом (1629-1695, голландский ученый), под влиянием работ Рене Декарта (1596-1650, французский ученый) и Блеза Паскаля (1623-1662, французский ученый) развивает свой геометрический подход к математическому анализу, отличному от кинематического подхода Ньютона.

Точно говоря, дифференциальное и интегральное исчисления возникли на базе "**Анализ бесконечно малых**" английского математика Исаака Ньютона (1643-1727) и

"**Дифференциальное и интегральное исчисления**" немецкого математика Готфрид Лейбница (1646-1716).

Как правило, первичное ощущение решения задачи в науке - только начальный этап, а завершающий - это формирование полностью обоснованного решения, доведенного до никем не оспоримого уровня и понятного широкой научной общественности.

Именно такая ситуация сложилась с математическим анализом.

Анализ в интерпретации Лейбница впервые опубликован в шестистраничной (обратите внимание - всего лишь 6 страниц!) статье "*Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, и простой способ их вычисления*" в 1684 году в математическом журнале Acta Eruditorum. Тогда как в этой его статье впервые изложены основные принципы "Дифференциального исчисления", то в другой статье 1686 года то же в отношении "Интегрального исчисления".

В 1687 году Ньютон опубликовал фундаментальный труд "Математические начала натуральной философии (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)". В нем, пользуясь, по сути равнозначным "Дифференциальному исчислению" Лейбница, собственного изобретения математическим аппаратом, названным им методом флюкций, создал единую стройную систему земной и небесной механики, основу всей классической физики.

Начиная с этого периода для математической науки началась новая эра.

Математический аппарат Ньютона и Лейбница - производная, интеграл и ряд применяются для решения задач естествознания, геометрии и внутренних проблем математики, неподдавшихся усилям выдающихся предшественников, и чаще всего с оглушительным успехом. Здесь следует выделить два направления исследования.

Во-первых, выражаясь современной терминологией, были выработаны новый язык и методы построения математических моделей природных явлений, изучение которых проводились посредством новых исследовательских инструментариев.

При этом сами внутренние фундаментальные математические задачи находились в таком же успешном разрешении.

Во-вторых, изучаются собственно сам новый математический аппарат, а именно, исследуются условия законности операций над производной, интегралом и рядом, поскольку процесс применения каждого из которых сопровождается риском потери их действенности.

По первому направлению среди всех выдающихся исследователей выделяется мощная фигура Леонарда Эйлера (1707-1783, немецкий ученый), а по второму - Огюстен Луи Коши (1789-1857, французский ученый).

Х. Абель в 1826 году так описал состояние математического анализа того времени: *"Я приложу все усилия, чтобы внести ясность в ту ужасающую невразумительность, которая сейчас царит в Анализе. В нем настолько отсутствует какой-либо план или система, что поистине удивительно, как много людей им занимаются. И что еще хуже - в нем абсолютно отсутствует строгость доказательств, в которых обеспечивалась бы законность каждого из применяемых подходов".*

Математический анализ того времени был основан на учебнике Коши "Курс Анализа" 1821 года. Глубина и сложность математического анализа таковы, что даже считающийся математически безупречным Коши просчитался в основах: Абель в 1826 году построил контрпример *"В работе господина Коши можно найти следующую теорему: "Если члены ряда* $u_o + u_1 + u_2 + \dots$ *– непрерывные функции,* $\dots$ *то сумма* s *ряда - тоже непрерывная функция* x *". Однако мне кажется, что существуют исключения из этой теоремы. Например, ряд*

$$sinx - \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x + \dots$$

разрывен при каждом значении $(2m+1)\pi$ величины $x, \dots$ ".

Споры созданию математического анализа были поставлены на высоту оценки уровня нации, - обратим внимание на высказывания тех лет.

Иоган Бернулли (1667-1748, швейцарский ученый) в 1735 году писал: *"Какое презрение к не англичанам! Мы открыли эти методы безо всякой помощи от англичан"*.

Карл Вейерштрасс (1815-1897, немецкий математик) в 1874 году *"Мы, немцы, идя на поводу Якоби, вместо этого употребляем круглое для обозначаения частной производной"*.

Исаак Ньютон 20 апреля 1714 года выступил с претензией *"В то время как господин Лейбниц пишет символ $\int$ перед ординатой кривой для того, чтобы обозначить сумму ординат или площадь [под] кривой, я несколькими годами ранее обозначил ту же величину, написав ординату в квадратике... . Таким образом, мои символы... были самыми первыми в своем роде"*.

Однако следует избежать ложного представления о том, что исследования проводились только в направлении математического анализа. Свидетельством того, что исследования проводились не только в рамках "*Непрерывной математики*", но и "*Дискретной математики*", явились количественные эксперименты Пьера Ферма (1601-1665, французский ученый), согласно которым предполагалось, что каждое простое число вида $p = 4k + 1(k = 1, 2, \ldots)$ является суммой квадратов двух целых чисел (например, $17 = 4 \cdot 4 + 1 = 4^2 + 1$). Это утверждение в 1747 году доказал Л. Эйлер.

Таким образом, по прошествии эпохи Ньютона-Лейбница в течение свыше двух веков высшие умы человечества осуществляли попытки логического обоснования математического анализа. Здесь, что называется последнюю точку поставил Карл Вейерштрасс, ушедший из жизни в 1897 году.

3. Связь "Учебника" с историческим развитием математического анализа и его место в этом процессе. Во всяком историческом периоде каждая научно развитая страна создает учебники по математическому анализу на родном языке, с переводом на международные языки (ранее на латинском, французском, немецком, а в последнее время - преимущественно на английском). Перевод учебника на другие языки создает предпосылки узнавания страны, а сам текст вносит определенный вклад в развитие научного языка первичной страны.

В истории математического анализа список таких популярных учебников начинается следующим образом:

1. Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь (о нем писали современники *"...совершенно чужд суетной славе, которую так жадно ищет большинство ученых..."*). Analyze des infiniment petits (Анализ бесконечно малых, 1696), из предисловия: *"Применение предлагаемого учения огромно ... в этой работе видим, что оно приводит к раскрытию многообразных свойств мира..."*.

2. Леонард Эйлер. Introductio in analysin infinitorum (Введение в Анализ бесконечно малых), 1748; Institutiones calculi differentialis (Дифференциальное исчисление), 1755; Institutiones calculi integralis (Интегральное исчисление), 1768-1770.

3. Огюстен Луи Коши. Analyse Alg?brique (Курс Анализа), 1821.

Можно сказать, что математический анализ - это своего рода симфония, которую каждый оркестр исполняет по-своему в зависимости от личного восприятия дирижера. Данный "Учебник" также можно считать одним из вариантов такого исполнения.

Существуют сотни и тысячи учебников, многие из которых имеют собственное прочтение Математического анализа, которые иногда восхищают неожиданной выигрышной методикой, некоторые же удивляют красотой изложения.

Однако, весь предыдущий опыт невозможно собрать в одном учебнике, так как любой учебник имеет свое строение, который можно назвать как *"Принцип сохранения сложности"*, - поэтому *"выигрыш"* в одной тематике неизбежно приводит к *"проигрышу"* в другой.

Данный "Учебник" содержит множество авторских методических разработок, которые ранее не встречались в имеющихся учебниках. Вопрос применения методик других учебников решается в ключе *"Если они органически вписываются в наш методологический маршрут"*, то применяются в том же оригинально виде.

Теперь о сложности излагаемого материала. Исследовательский опыт автора в международной Математике и Компьютерных науках по различным научным темам привел к пониманию высокой степени сложности для восприятия всякой математической мысли, уж не говоря об их дальнейшем продвижении. Поэтому для предупреждения от часто произносимого *"Если даже этого не понимаете, что делаете в математике"*, данный "Учебник", по мере возможности, выполнен в ключе подробного в деталях и глубине изложения.

4. Общие принципы написания учебника. Первая сложность - это составление общего плана и методологии учебника: как говорил Р. Браунинг *"Чуть добавишь - какой простор открывается, чуть уменьшишь - какие миры исчезают!"*.

Вторая сложность - как писал Клод Гельвеций *"В произведении все должно быть связано как морские волны. Переход от одной мысли к другой должен быть таким же, как и переход каждой волны в другую"*, то есть мысли, в связке естественно следуя одна за другой, должны образовывать единый поток.

Липман Берс пишет: *"... книгу по математике следует читать медленно и по возможности - с карандашом в руках. Необходимо проверять все вычисления и восполнять рассуждения, опущенные в тексте книги. Это потребует определенных усилий, но лучшего способа научиться математике я не знаю"*.

Однако, согласно нашей установке, весь багаж знаний, сотнями и тысячами лет накопленный немалыми трудностями и страданиями в истории человечества, нельзя взвалить на читателя, говоря *"Здесь кратко изложены ведущие идеи, а дальше сам домысливай"*. Тогда как освоивший "Учебник" получит максимальные возможности на пути к собственным открытиям.

Раскроем эту мысль точнее. Наличие фундаментальных и значимых задач с методическими разработками их решения позволяет после овладения базовыми знаниями (мы предлагаем: "Учебник", "Мера и интеграл Лебега" и "Теория вероятностей"), сразу же перейти к собственно научным изысканиям, минуя научно-популярные издания для вовлечения в разные науки.

5. Учебник должен быть понятным и отражающим красоту предмета. Большинство известных учебников, даже если не оговорено, придерживается принципа: *"Деятельность по домысливанию в процессе обучения сама по себе влечет качественное понимание и освоение"*. У нас по-другому: каждое утверждение "Учебника" максимально взвешенно обеспечивается обоснованием во всей полноте, глубине и достоверности. Например, в считающемся хорошим одном школьном учебнике формулируется утверждение "*Если абсолютная величина действительного числа а меньше любого положительного числа ε, то а равно нулю*", и изложение на его основе продолжается, как будто речь идет о само собой разумеющемся. Действительно, если чуть подумать, то можно осознать, что утверждение верно. Всякое такое осознание накапливает подобные сырые "понимания", что в конце концов приводит к тому, что исчезает возможность во всей полноте понять поставленный вопрос, ответить на него, и даже понять свое непонимание. В результате математическое сознание превращается в нечто аморфное - непонятно, знаешь или не знаешь, как в трудные времена было сказано "И сытости нет, и голодной смерти нет - только одни бесконечные страдания".

Для понимания сути обсуждаемого надо разделить два подхода к обоснованию высказанного утверждения: первое - это "твердое убеждение в том, что так и должно быть", второе - полное в деталях доказательство. В случае обсуждаемой леммы, первое - это процитированный выше фрагмент школьного учебника, второе - доказательство утверждения из пункта 1 (§3, II-глава) "$\forall\epsilon > 0 : |a| < \epsilon \Rightarrow a = 0$", основанное на одной из аксиом действительных чисел.

Липман Берс о красоте учебника писал так: *"Математический анализ не только полезен и богат приложениями, но и красив. Разумеется, способность к эстетической оценке математических результатов предполагает известный уровень научной культуры, достигаемый лишь в результате длительной работы; однако в* *конечном счете успех или неудача учебника математики измеряется в первую очередь тем, насколько способен этот учебник донести до читателя красоту своего предмета".*

Студентам, поступающим с хорошей подготовкой в школе, могут и не понравиться очень подробные разъяснения, даже были случаи, когда студенты анонимно писали *"Вы нас считаете идиотами?".* Разумеется, таких студентов можно считать *"математически зрелыми"* (в советские времена документ о среднем образовании так и назывался "Аттестат зрелости", а целью данного "Учебника" является возможность умножения таких ситуаций.

6. Учебник должен быть удобным для чтения также с точки зрения оформления. В свою научную монографию, посвященную вычислительной математике, изданную в 1950 году, Л.В. Канторович (1912-1986, советский математик) в полном объеме включил результаты диссертации своего ученика И.А. Акбергенова и статью *"И.А. Акбергенов. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма и об определении его собственных значений".* Математический сборник, 42:6 (1935), 679-697", первую полномасштабную научную статью автора из числа казахов, именно с этой статьи начинается казахская профессиональная математика. И все это несмотря на то, что Ибатулла Акбергенов, первый казахский ученый-математик, был расстрелян в 1938 году, реабилитирован в 1957 году.

Вспоминая о научном и гражданском подвиге Лауреата Нобелевской премии по экономике, выдающегося математика Л.В. Канторовича в поддержке казахской математики, сделаем полезный технический вывод из названной книги. Как правило, одно утверждение не повторяется на других страницах книги. Однако, в монографии, повторимся ввиду особой значимости, где идет ссылка на И.А. Акбергенова, для удобства читателя повторно даются утверждения в нужных местах с соответствующими выводами.

Чему следуем в данном "Учебнике".

7. Принцип употребления слов и словосочетаний в "Учебнике" с обязательными их пояснениями. Легко заметить, что авторы математических учебников в процессе многолетнего обучения ставшие для них самих естественными и привычными слова, даже начиная с начальной школы, применяют как изначально понятные. К таковым относятся такие много употребляемые слова, как величина и формула. Как нам представляется, в этом одна из основных причин того, что вызывает затруднения в усвоении всякого учебника.

В данном "Учебнике" в качестве вступления в Математический анализ предлагается глава *"Логическое строение математики и словарь терминов с обсуждениями. Культура математического доказательства на примере измерения длин отрезков и на основе аксиоматики действительных чисел с геометрическими и алгебраическими следствиями".* Здесь, с учетом выше сказанного, подробно и развернуто поясняются значимые смысловые слова и словосочетания в математике. И такая позиция сохраняется на уровне каждой темы на протяжении всего "Учебника".

8. Если в высокопрофессиональной математической среде издержки обучения математическому анализу компенсируются самим окружением, в научно "пассивном" учебном заведении учебник по математическому анализу должен предвидеть сложные для усвоения темы и посвятить им подробные пояснения во всей глубине содержания и широте воздействия на всю науку. В качестве сложных для самостоятельного восприятия тем отметим: во-первых, *Критерий Коши сходимости числовой последовательности*, формулировка которой обманчиво проста, а смысл находится в темной глубине; во-вторых, Неявная функция с запутывающим названием, что невнятно и даже ошибочно обьясняется в учебниках даже именитых авторов, в третьих - *Метод математической индукции* с устоявшимся мутным изложением. И так можно продолжить, как говорят, до бесконечности, и все это, и многое другое, как нам представляется, адекватно изложено в "Учебнике".

В связи с чем имеется еще одно назначение "Учебника" - целенаправленная подготовка преподавателя, способного во всех деталях и во всей глубине понять *Математический анализ* и дать исчерпывающий ответ на любой вопрос студентов.

Действующие учебники по математическому анализу, как правило, пишутся крупными учеными престижных высших учебных заведений и, осознанно или неосознанно, но учитывается высокий уровень окружающей среды, что отражается на недостаточных подробностях в изложении.

В высокой научной среде, поскольку математический анализ является основой образования и науки, то систематически звучит во всех математических сообщениях и обсуждениях, что способствует пониманию математического анализа во всей его глубине и полноте.

Студенты престижных университетов, отобранные посредством очень трудных экзаменов с высокими требованиями, не нуждаются в подробном изложении, и лекторов достаточны краткие пояснения (хотя вряд ли это массово целесообразно).

Однако, при отсутствии обширных научных исследований применение таких кратко излагаемых учебников может не привести к ожидаемому результату. Именно это обстоятельство предупреждает данный "Учебник" и по возможности ставит и отвечает на многие глубинные вопросы, с которыми автор сталкивался в процессе исследовательской работе в Математике и Компьютерных науках. Более того, "Учебник" содержит и такие вопросы, постановки которых в чем-то непредсказуемы.

9. Пути освоения математического анализа в огромном мире учебников. Вывод из вышесказанного: при усвоении математического анализа необходимо выбрать один базовый учебник, сначала основательно изучить его от начала до конца, и только потом обзорно пролистать другие учебники, с пониманием особенностей раскрытия тех или иных тем.

10. Не пугаться большого объема "Учебника". Теперь поделимся информацией быть может полезной при усвоении "Учебника". Следуя казахской поговорке *"Есть один путь, хоть и длинный, но близкий, есть еще один путь - короткий, но дальний"*, не следует остерегаться многостраничного текста "Учебника". И это все по той причине, что если детальные объяснения заменяют фразы типа *"дальше сам поймешь"*, *"легко доказать"* или "очевидно", для глубокого усвоения темы с последующими продолжительными размышлениями, то более эффективным будет подробное описание, с раскрытием всех тонкостей определений и доказательств в ней. Даже развернутое описание смысла темы с предложением *"дальше понимай сам"* может оказаться недостаточным для полного усвоения, оставляя в тени много очень важного. Даже слово обучающегося "понял" может оказаться ложной из-за неверно понятого.

Как об этом было сказано выше, созданное в вековых поисках наполненных как громкими победами, так и драматическими поражениями - это Ньютон и Лейбниц (если посмотреть еще глубже, то Архимед и дальше), ушедший из жизни в 1897 году Вейерштрасс может оказаться недоступным к самостоятельному домысливанию.

Даже правильно произнесенные слова могут не привести к глубокому пониманию и свободному применению. Так, Коши в своем знаменитом учебнике *"Курс Анализа"* в 1821 году написал на первый взгляд кажущееся вполне работающим определение *"$\ldots f(x)$ назовем непрерывной функцией, если ... численное значение разности $f(x+\alpha)-f(x)$ неограниченно убывает с α... "*. Тем самым, Коши сформулировал определение непрерывной функции, используя не достаточно раскрытые требования, чтобы *неограниченно малые* изменения приводили к *неограниченно малым* изменениям . И только в 1874 году Вейерштрасс был окончательно полным и точным, введя доступное всякому читателю без всяких домысливаний определение непрерывности на языке $\epsilon-\delta$.

В процессе обучения математике в сознании читателя возникает рой мыслей и представлений, и в какой-то момент может показаться все ясным и понятным. Вместе с тем, надо обратить в привычку проверку всех возникающих мыслей научного содержания по строгим меркам математического анализа. Невозможно освоить математику в "*поверхностном*" режиме. По преданию Птолемей обратился к Евклиду *"Я царь, у меня много обязанностей, мне нужен краткий способ усвоения геометрии"*, на что был получен ответ "В науке нет царских путей". Так и читатель должен напряженно сосредоточить все свое внимание на полное последовательное усвоение "Учебника".

После усвоения математического анализа на уровне подсознания (далее легко осваиваются алгебра и геометрия, вместе с математическим анализом составляющие основу математического образования), в дальнейшем открываются пути развития Образования-Науки, а также пути своего совершенствования.

В этой связи поучителен такой случай: известный математик Евгений Никишин говорил, что состоявшую всего из нескольких страниц статью Филдсовского Лауреата Чарльза Фефермана разбирал в течение недели.

Так вот, если одинакового уровня высшие математики кратко написанную одним статью, другой восстанавливает в течение недели, как можно добытые на протяжении веков высшими умами человечества знания кратко излагать для восстановления массовым читателям. Поэтому "Учебник" написан во всех подробностях, чтобы читатель вошел в прекрасный мир неизвестного, чтобы, подобно Джорджу Байрону в "Прощание с Ньюстедским аббатством", вославить и своих предков, и себя тоже.

11. Данный "Учебник" начинает обеспечение "Математической зрелости" с Первой главы "Логическая структура математики и Глоссарий терминов с обсуждениями. Культура математического доказательства на основе геометрико-алгебраического построения чисел и извлечения всех их свойств из Полной системы аксиом действительных чисел". Содержание, вынесенное в название Первой главы, есть призыв усвоить его в полном объеме. С целью воспитания культуры математического доказательства предлагаются профессиональный математический словарь и принципы символьного обозначения с обсуждениями, подробно разясняются, что есть теорема, множество, определение, функция, число, формула и т.п.

Особое место отводится систематическому доказательству свойств чисел в формате следствий из аксиом действительных чисел. Здесь привычное неравенство $0 < 1$ формулируется и доказывается в виде теоремы, то же - с выученным школьным правилом *"На нуль делить нельзя"*", - это и многое таковое составляют воспитание "*математической культуры*". Также приводится доказательство, в школьной математике принимаемой без каких-либо обсуждений (если чуть призадуматься, то можно увидеть, что никаких предпосылок к ней не видится), правила выполнения действия умножения обыкновенных дробей: при умножении обыкновенных дробей произведение числителей является числителем, а произведение знаменателей - знаменателем их произведения, с геометрической интерпретацией установленного правила.

Итак, подытожим сказанное: логически оправданно в школьной математике применяемые в виде аксиом понятия и утверждения в "Учебнике" доказываются, тем самым, *"железом и кровью"* прививая мысль, что в математике все доказывается, при этом используя только аксиомы действительных чисел и уже выведенные из них следствия.

Все сказанное можно продемонстрировать на примере очень сложной и ответственной школьной темы "Координатная прямая", в которой абстрактные (отвлеченные) объекты математического анализа - это действительные числа, допускают визуальную геометрическую интерпретацию. Именно, связывая эту тему с практической задачей измерения длин, в процессе её решения последовательно, вместе с соответствующим геометрическим смыслом, определяются рациональные и иррациональные (не рациональные, не соизмеримые с единичным отрезком, открытие которых изумило мир древних, что, есть такое мнение, остановило греков в развитии техники вычислений), что составляет увлекательное чтение, не менее притягательное, чем классическая музыка и романы. Тем не менее, есть учебник Математического анализа Эдмунда Ландау, полностью отказавшегося от геометрических иллюстраций, что косвенно свидетельствует о том, что геометрические интерпретации носят лишь вспомогательный характер.

Измерение длин (расстояний) приводит к положительным целым, рациональным и иррацинальным числам. Использование математики зачастую происходит посредством уравнений. При этом, самое простейшее из них, - это алгебраическое уравнение первой степени, но при условии обязательной разрешимости, заставляет наряду с уже построенными положительными числами, вводить в математический обиход и отрицательные числа.

Не говоря о внутренних проблемах математики, задача корректного определения степени числа и существования логарифма числа, постоянно используемых всюду в естествознании, доказательства их свойств, в "Учебнике" используются для обучения как правильно вести доказательство на языке определений.

Здесь также можно убедиться в том, что, как когда-то сказал С.М. Воронин *"Математический анализ это граммотно оформленная система неравенст"*.

Вообще в математике, в какой бы степени ни казались бы понятными, очевидными и само собой разумеющимися, доказательство в целом, или его часть, должно быть проведено полное во всех деталях доказательство, причем в процессе рассуждений позволительно пользоваться лишь аксиомами и доказанными на основе аксиом утверждениями.

Особо выигрышным моментом в обосновании известного из школьной программы является то обстоятельство, что доказываемые свойства в ранге постановок задач и вынесенные в формулировки теорем, постоянно применяются в математике и потому изначально понятны. Все это воспроизведено в Первой главе в необходимом объеме.

Повторимся еще раз, это - первая ступень в процессе достижения "математической зрелости". Затем, после полного усвоения Первой главы, как показывает опыт применения "Учебника", в дальнейшем все будет постигаться (относительно) легко, как в усвоении известного в математике, так и в получении новых знаний в науке.

12. Требования к доказательствам. Этот "Учебник" написан со следующих позиций: в отличие от научных изданий - будь то учебник или монография, цель "Математикалы? анализ" не в показе научных достижений, в другом. Назначением "Учебника" является ознакомление и овладение основными понятиями математики, обсуждение их во возможной глубине (например, раскрывается до десятка тонкостей определения предела), выявление их связей с другими понятиями. Одновременно на языке освоенных определений ставятся вопросы, составляющие данный предмет, и даются, оформленные в виде теорем, их решения посредством доказательств ответов на поставленные задачи. Весь процесс обучения, каждый момент изложения всякой темы должен вестись на фоне вовлечения в лоно математики во всей специфике ее особенностей, коротко называемое как "Понимание математики", среди которых "Что есть доказательство?", "Как правильно проводится доказательство?", "Роль определений в доказательстве", "Что есть "Постановка задачи"", "Что есть теорема и ее составные части - посылка (условие) и утверждение (заключение)" и все в таком содержании.

Все это в совокупности составляет цель математического образования как достижение "**математической зрелости**". Для обеспечения чего доказательства излагаются в полном объеме, по мере возможности, попутно выполняя задачу формирования широкого взгляда на тему и применения используемых методов и подходов в других случаях. Определения не доказываются, но при малейшей возможности должны быть указаны мотивы их принятия.

Всюду в "Учебнике" придерживается принцип "Теорема - это ответ на поставленную задачу". Поэтому, в каждом случае, даже если это не подчеркивается специально, нужно всегда знать, на какой вопрос и как отвечает теорема, и никогда не забывать об этом.

Сама история возникновения и развития математического анализа показывает, что каждая идея, каждое понятие в ней является очень сложным достижением, поэтому слова и фразы *"легко", "ясно", "очевидно", "само собой разумеющееся", "легко доказать", "понятно"*, которые используются вместо полной аргументации и объяснения, в этом "Учебнике" категорически не применяются, за исключением особых случаев, когда существует опасность бесполезного "*разжевывания*", требующая постоянной бдительности.

Наша позиция - в сфере образования слова "легко" и "трудно" надлежит употреблять в следующем смысле: знаешь - "легко", не знаешь - "трудно".

13. Читатель должен "Сомневаться во всем!" и принимать только точные и методологически безошибочные определения и доказательства. Бывает и так, что процесс обучения в лекторском исполнении складывается так, что постоянно переходят от одного учебника к другому, со своими иными, и даже неточными расплывчатыми, методологическими представлениями, что в итоге сводит обучающегося к состоянию "не понимает, что не понимает", и все это сырое-полусырое навечно укладывается в сознании.

До сих пор в сфере обучения математике существуют проблемы, сохраняющиеся во времени во всемирном масштабе, все еще ждущие своего решения. К примеру, дифференциалом функции $f(x) = x^2$ в точке $x = 5$ является линейная функция $l(x) = 10x$, что вряд ли с полным пониманием можно вывести из такого определения *"Дифференциалом называется главная линейная часть приращения функции"*. Аналогично, когда к вводящему в заблуждение названию "*неявная функция*", присоединяется неверное определение $F(x, f(x)) \equiv 0$, трудно ожидать адекватного усвоения.

Разве всего лишь одно высказывание "*Нет бесконечной суммы*" и вытекающее отсюда утверждение Коши 1821 года "*Ряд - это предел*" не делает всю теорию рядов понятной и яркой?

В данном "Учебнике" читатель найдет правильную формулировку "*Критерия Сильвестра*", успешно применяемого в математическом анализе. Многие подобные методические сложности широко освещены в данном "Учебнике".

Методика и методология возникают и совершенствуются в научных исследованиях, чему, в данном случае, быть может также способствовали результативный опыт автора в Математике и Компьютерных науках.

14. В "Учебнике" не предлагаются упражнения, поскольку сами доказательства в "Непрерывной математике" есть полнокровное решение задач математического анализа. Объем данного "Учебника" очень обширен, поскольку преследуется цель каждую тему во всей полноте раскрыть с позиций нахождения и выявления присущих только ей, и столь незаметных на первый взгляд тонкостей, которые ибо сокрыты от поверхностного восприятия своими глубинными свойствами, можно даже сказать внутренними секретами и тайнами. Каждая из этих тем относится к достижениям многовекового развития человечества. В процессе развития эти достижения переплетаясь служат источником новых открытий в бесконечном прогрессе. Вместе с тем, в математике основополагающих идей и понятий не так уж и много, поэтому в посвященном основам математики математическом анализе темы в разных вариациях в контексте расширений и углубений повторяются, что позволяет после усвоения начал на уровне подсознания дальнейшие продолжения "пробежать визуально". Тем самым, если же читатель во всей глубине освоит ведущий круг идей конкретной темы, то в дальнейшем он может позволить себе все, в развитии относящееся к этой теме, что будет постоянно встречаться, подробно изложенные многостраничные тексты лишь "пробежать глазами", и продвигаться вперед.

Кроме того, как и вообще в образовании и науке, так и в математике, внутренне полно и глубоко сформировавшуюся подсознательную мысль нелегко донести до понимания другого в точно подобранных убедительных словах. Такая проблема обычно решается при помощи правильных словосочетаний и предложений.

В связи с этим, поскольку в "Учебнике" очень подробно излагаются и обсуждаются основы математики, в оригинале особое внимание уделено дальнейшему развитию казахского научного языка, с их соответствующим литературным оформлением, к тому же, как правило, один и тот же математический объект поясняется с разных позиций.

Еще одно обстоятельство, на которое обращаем внимание, – несмотря на то, что в "Учебнике" приведено множество решений примеров-задач, раскрывающих глубинные свойства и внутренние связи, придерживаясь установки подробно все объяснять, самому читателю не предлагаются задачи в качестве упражнений. Ведь после изучения математического анализа вся математика (естественно, включая и собственно математический анализ как науку) – это логическое продолжение математического анализа, следовательно, и требующих решения его задач.

Структура "Учебника" обеспечивает возможность чтения лишь начала каждого параграфа с переходом к другим параграфам без потери возможности понимания дальнейшего. Углубляясь в текст самого параграфа можно получать дополнительные сведения. Именно такая структура данной книги делает "Учебник" многоцелевым: можно использовать для специальностей с различными требованиями к математике.

Словом, овладение в общем-то небольшим количеством базовых идей, в различных продолжениях, составляющих предмет математического анализа есть предпосылка и возможность в реальном времени обрести искомую *Математическую зрелость*. Собирательно говоря, как в казахской пословице: *"Үйрен, үйрен де жирен"*, что в весьма приблизительном переводе означает *"Не сиди вечно на одном и том же – овладел и иди дальше"*.

(*Продолжение следует*).

Список литературы

1 Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. -Москва: Наука, 1974. -480 с.
2 Сакс С. Теория интеграла. -Москва: ИЛ, 1949
3 Халмош П. Теория меры. -Москва: Изд-во «Факториал Пресс», 2003. -256 с.
4 Фролов Н.А. Теория функций действительного переменного. 2-е изд. -Москва: Учпедгиз, 1961. -172с.
5 Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. -Москва: Факториал, 1998. -160 с.
6 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -Москва: Наука, 1972. -496 с.
7 Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012.
8 DavidMumford На заре эры стохастичности. В сб. Математика: границы и перспективы. -Москва: ФАЗИС, -2005.
9 Ширяев А. Н. Вероятность. -Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, -1980.
10 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. -Москва: Изд-во «Мир», 1967.
11 Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. -Москва: Изд-во «Мир», 1983.
12 Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012,
13 Темірғалиев Н. Әубакір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X-XI кластар. -Алматы: "Жазушы", 2002, 382 бет. Темиргалиев Н. Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа для X-XI классов. Алматы: "Жазушы", 2002, 423 стр.
14 Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.

Н. Темірғалиев

Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты,

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты 2019 жылыу» ғылыми, ғылыми-әдістемелік және ұйымдастырушылық есебі (II бөлім)

Аннотация: Мақала әрдайым заманауи болып табылатын, және одан кем емес, Хардидің "*оны* (Жорданның "Математикалық анализ курсы" - Н.Т.) *оқығаннан кейін ғана мен математиканың не екенін бірінші рет түсіндім*" деген мойындауындағы өзекті мәселе "*Математиканы түсіну*" контекстінде жасалған. Хардидің мысалы "*Білікті орта оқулықтағы олқылықтардың орнын толтырады*" деген айқындықты теріске шығарып, жоқ дегенде әрқашан да орындала бермейтіндегін көрсетсе де *Математиканы түсіну үшін ғылыми орта мен негізгі оқулықтар қаншалықты және қандай деңгейдегі қатынаста маңызды?*" мәселесіне арналған.

Оқулықтың пайдасына жасалған бұл тарихи мысал математикалық ортасы жалындап тұрған Кембриджде қабілетті адамзаттың ақыл-ой мүмкіндіктерінің жоғарғы деңгейіндегі *ағылшын* Харди *математиканы француз* Жорданның Математикалық талдау оқулығынан *түсінді*, – бұл бір жағы.

Екінші жағынан, М.В.Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің механика-математика факультетінің (ММУ) Мәскеу математикалық мектебі гүлденіп тұрған кезеңінде 5 жыл студент және 3 жыл аспирант болып, артынан диссертация қорғап шыққан кез келген адам *Математиканы түсіне* алды. Бұл – барлық оқулықтар үшін міндетті емес, бірақ кіші курстарда кәсіби деңгейде мықты профессорлармен берілетін күшті іргелі математикалық дайындық пен маған ММУ профессоры Тарас Павлович Лукашенконың түсіндіруінше, студенттерді жастайынан математикаға енгізген жүздеген үш семинарлар КСРО-дағы ерекше құбылыс болды.

Қазақстандағы ММУ-дің бірінші толқын түлектері – аты аңызға айналған Сәдуақас Боқаев пен Асқар Закарьевич Закарин, соғыстан кейінгі Қабдеш Жұмағазыұлы Наурызбаев, Марат Рахымбердиев, Жанбек Әубәкіров, қазіргі таңда ортамызда жүрген Людмила Алексеева, Нұрлан Аманов, Нұрлан Рахметов, Асқар Жаркенов, Сәуле Танкаева, Нұргүл Аманова.

Математика және компьютерлік ғылымдар саласындағы ТМ және ҒЗИ арқылы қазақ ұстанымы осы мақаланың §§0-2 көрсетілген. Әрі қарай, осы негізде А (ТМжҒЗИ-нан АҚШ-тың PhD докторантурасында жалпы дайындықтың қазақ аналогы ретінде базалық математикалық дайындықтың авторлық негіздері) бағдарламасын іске асырудың егжей-тегжейлері келтірілген. "Математикақ анализ" оқулығы білікті ортаны қажет етпей *Математиканы түсінуді* өзін-өзі қамтамасыз ету тұрғысынан жасалған. "Кіріспеде" автор оқырманды *математиканы түсіну* барысында орын алған барлық жәйттәрмен толық таныстырады, оның ішінде, Мәскеу математикасының ерекше ортасында көптеген адамдармен, ең алдымен көрнекті математиктермен қарым-қатынас жасау кезіндегі жеке бақылаулармен, ғылыми зерттеулер және барлық деңгейдегі математикалық әдебиеттерді оқу барысындағы жеке қорытындыларымен таныстырады. Лебег өлшемі теориясы – автор осы жолдардың математикалық түсінігін аспиранттық дәуір бауырласы Димитрий Печерскийдің қолдауымен ғылыми жетекшісі Петр Лаврентьевич Ульяновтың жеке бағдарлама бойынша алған, XX ғасырдағы математиканың дамуындағы және болашақ кезеңдердегі ерекше маңыздылықты жеке тақырып. Ықтималдық теориясы - автордың көзқарасы бойынша нақтылауды қажет ететін кейбір тармақтар келтірілген арнайыланған пән.

Түйін сөздер: Математикалық анализ; Лебег өлшемі теориясы; Ықтималдықтар теориясы; математиканы түсіну; фундаменталды математикалық дайындық; математикалық жетілу; білікті ғылыми орта; оқулық құрылымындағы жүйелі тәсіл

N. Temirgaliyev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Scientific, scientific-methodological and organizational report “The Institute of theoretical mathematics and scientific computing (ITMSC) L.N.Gumilyov Eurasian National University in 2019 year (Part II)”

Abstract: The article is the written on the constantly actual problem of *understanding mathematic* which is even confessed by G.H. Hardy: "*I learnt for the first time as I read it* ("Course of Mathematical Analysis" by Jordan - N.T.). Therefore, it is devoted to the question "*To what extent and in what relation are the scientific environment and basic textbooks important for understanding mathematics?*". Although Hardy’s case refutes, in any case does not make it unconditional, it is obvious that "*A qualified environment makes up for the omissions of the textbook"*.

This historical example in favor of the textbook shows that in mathematically incandescent Cambridge, an *Englishman* with absolutely high mental abilities, Hardy *understood mathematics* from the *Frenchman* Jordan’s textbook on mathematical analysis.

On the other hand, during the heyday of the Moscow Mathematical School, all 5-year undergraduates and 3-year postgraduates were coming out from the Faculty of Mechanics and Mathematics of M.V.Lomonosov Moscow State University(MSU), with proper *understanding Mathematics.* They were juniors with a powerful basic mathematical training without a single mandatory textbook, but with outstanding professors and three hundred seminars (a unique phenomenon of the USSR) where learners were introduced to Mathematics in their very early age, as the professor of Moscow State University Taras Pavlovich Lukashenko said to author of this article.

In Kazakhstan the pioneer graduates from Moscow State University were the legendary Saduakas Bokaev and Askar Zakarevich Zakarin, post-war graduates were Kabdush Zhumagazievich Nauryzbaev, Marat Rakhimberdiev, Zhanbek Aubakirov, and now living Lyudmila Alekseeva, Nurlan Amanov, Nurlan Rakhmetov, Surgule Tanulkaev, Nurlan Zharkenov.

The Kazakh position of Mathematics and Computer Science through IThMandSC is expressed in §§0-2 of this article. Further, the details of the implementation of Program A (Author’s fundamentals of basic mathematical training as the Kazakh equivalent of general training in the PhD doctoral program of the USA from IThMandSC) are presented. The "Mathematical Analysis" book is made from the standpoint of self-sufficiency in providing the *understanding of mathematics* without relying on a qualified environment. In the "§ 7 Introduction" the author acquaints the reader with everything developed in the *understanding of mathematics* during the time of numerous conversations with many primarily outstanding mathematicians with their observations in the special mathematical environment of Moscow

and personal conclusions in the process of their scientific research and reading mathematical literature of all levels.

The theory of the Lebesgue measure is a separate topic of exceptional significance in the development of mathematics in 20th century and future, the mathematical understanding of which the author of these text received according to an individual program from Scientific Supervisor Pyotr Lavrentievich Ulyanov with the support of his fellow graduate student Dimitri Pechersky. According to the author, Probability theory is a specific discipline in which some points need more clarification.

Keywords: Mathematical analysis; Lebesgue measure theory; Probability theory; understanding of mathematics; fundamental mathematical training; mathematical maturity; qualified scientific environment; systematic approach in the structure of the textbook

References

1 Natanson I.P. Teoriya funkcij veshchestvennoj peremennoj [Functional alternative theory] (Nauka, Moscow, 1974, 480 p.).
2 Saks S. Teoriya integrala [Integral theory] (IL, Moscow, 1949).
3 Halmos P. Teoriya mery [Measure theory] (Publishing house "Factorial Press", Moscow, 2003, 256 p.).
4 Frolov N.A. Teoriya funkcij dejstvitel'nogo peremennogo. 2-e izd. [The theory of functions of a real variable. 2nd ed.] (Uchpedgiz, Moscow, 1961, 172 p.).
5 Dyachenko M.I., Ulyanov P.L. Mera i integral [Measure and integral]. (Factorial, Moscow, 1998, 160 p.).
6 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis](Nauka, Moscow, 1972, 496 p.).
7 Temirgaliyev N. Dejstvitel'nyj analiz: mera i integral. Elektronnoe izdanie [Real Analysis: Measure and Integral. Electronic edition]. IThMandSC. Astana, 2012.
8 David Mumford Na zare ery stohastichnosti. V sb. Matematika: granicy i perspektivy [At the dawn of the era of stochasticity. In Sat. Mathematics: boundaries and perspectives] (FASIS, Moscow, 2005).
9 Shiryaev A.N. Veroyatnost [Probability] (Science, Main edition of physical and mathematical literature, Moscow, 1980).
10 Feller V. Introduction to probability theory and its applications [Introduction to the theory of probability and its applications]. (Publishing house "Mir", Moscow, 1967).
11 Partasarati K. Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i teoriyu mery [Introduction to Probability and Measure Theory] (Izd-vo "Mir", Moskow, 1983).
12 Temirgaliev N. Teoriya veroyatnostej. Elektronnoe izdanie [Probability theory. Electronic edition]. IT-MandNV. Astana, 2012
13 Temirgaliyev N. , Aubakir B. , Bailov Y. , Potapov K. , SHerniyazov K. Algebra zhane analiz bastamalary [Algebra and the beginning of the analysis], X-XI classes, (Zhazushy, Almaty, 2002, 382 p.). Temirgaliyev N. , Aubakir B. , BailovY. , Potapov K. , SHerniyazov K. Algebra zhane analiz bastamalary [Algebra and the beginning of the analysis], X-XI classes, (Zhazushy, Almaty, 2002, 423 p.).
14 Gnedenko B.V. Kurs teorii veroyatnostej [Probability theory course] (Science, Main edition of physical and mathematical literature, Moscow, 1969).

Сведения об авторах:

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Temirgaliyev N. –Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 07.09.2020