Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 132, №3, 17-24 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 27.23

Р. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
(E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com)

О правиле множителей Лагранжа в задачах с ограничениями типа равенства, задаваемые квазидифференцируемыми функциями

Аннотация: В последные годы неуклонно растет интерес к исследованию экстремальных задач, параметры которых не удовлетворяют стандартным предположениям гладкости. Это обьясняется как теоретическими потребностями, так и важными практическими приложениями в экономоке, технике, физике и других науках. Негладкие обьекты естественно возникают в ряде разделов системного анализа, нелийнейной механики и процессов управления.

В теории экстремальных задач основной интерес представляет поведение функций в окрестности точек, где достигается локальный экстремум. Локальные поведения негладких функций описывается субградиентами, которые являются аналогами производной дифференцируемых функций.

Используя понятия субдифференциала и субградиента Ф. Кларком доказано правило множителей Лагража в задачах математического программирования с ограничениями типа равенств и неравенств, задаваемых локально липшицевыми функциями. Однако существуют подклассы локально липшицевых функций, простейшие примеры которых показывают, что полученные Ф. Кларком необходимые условия экстремума довольно грубы и не позволяют отбросит заведомо неоптималные точки. Такой подкласс негладких функций является подпространство квазидифференцируемых функций. В настоящей статье используя вариационный принцип Экланда получено правило множителей Лагранжа в терминах квазидифференциалов. На примерах показано, что это условие более сильнее, чем необходимое условие Ф. Кларка.

Ключевые слова: Квазидиффернцируемая функция, квзидифференциал, субдифференциал, непрерывное многозначное отображение.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-132-3-17-24

Введение. Исследования по необходимым условиям экстремума в последние годы были связаны в основном с более детальным изучением задач, в которых участвуют негладкие функции. При этом на первый план выдвигается учет негладких ограничений типа равенства. Ф. Кларком в [1] доказано правило множителей Лагранжа в задачах математического программирования с ограничениями типа равенств, задаваемых локально липшицевыми функциями.

Однако существуют подклассы локально липшицевых функций, простейшие примеры которых показывают, что полученные Ф. Кларком необходимые условия экстремума довольно грубы и не позволяют отбросить заведомо неоптимальные точки.

Такие негладкие функции рассматриваются и в настоящей статье. Они составляют некий подкласс в пространстве квазидифференцируемых функций.

Необходимые определения и обозначения. Везде в дальнейшем $(x,y)-$ скалярное произведение векторов x и y, принадлежащих R^n, $B_\delta(x)-$ шар радиуса δ с центром в точке x.

Напомним определение квазидифференцируемой функции из [2]. Будем говорить, что функция $f(x)$ квазидифференцируема в точке x, если она дифференцируема в точке x по любому направлению $h \in R^n$ и если существуют выпуклые компакты $\underline{D}f(x) \subseteq R^n$ и

$\overline{D}f(x) \subseteq R^n$ такие, что

$$f'(x,h) \equiv \lim_{\lambda>0,\lambda\to 0} \frac{f(x+\lambda h)-f(x)}{\lambda} = \max_{v\in \underline{D}f(x)}(v,h) + \min_{w\in \overline{D}f(x)}(w,h).$$

В дальнейшем, для доказательства основной теоремы настояшей статьи, нам потребуются следующие известные результаты и определения.

Верно следующее утверждение (см. [3], стр. 214, теорема 5.1): для того чтобы квазидифференцируемая на R^n функция $f(x)$ достигла в точке x^* своего наименьшего на R^n значения, необходимо, чтобы

$$-\overline{D}f(x^*) \subseteq \underline{D}f(x^*), \tag{1}$$

где $-\overline{D}f(x^*) \equiv \{-a : a \in \overline{D}f(x^*)\}$.

Пару множеств

$$Df(x) = [\underline{D}f(x), \overline{D}f(x),]$$

называют квазидифференциалом функции f в точке x.

Напомним, что умножение на вещенственное число λ квазидифференциала $Df(x)$ определяется следующим образом:

$$\lambda Df(x) = \begin{cases} [\lambda\underline{D}f(x), \lambda\overline{D}f(x)],\ \lambda \geq 0, \\ [\lambda\overline{D}f(x), \lambda\underline{D}f(x)],\ \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Следующий результат непосредственно следует из леммы 2.6 (лемма о квазидифференцируемости суперпозиции) [3](стр. 197).

Пусть $P(y) = P(y_1, y_2, ..., y_m)$ дифференцируемая функция в точке $y^0 = (y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$, а $y_i = f_i(x)$, $i \in [1:m]-$ квазидифференцируемые функции в x^0, причем $y_i^0 = f_i(x^0)$, $i \in [1:m]$. Тогда сложная функция $Q(x) = P(f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ квазидифференцируема в точке x^0 и ее квазидифференциал в этой точке вычисляется следующей формулой:

$$DQ(x^0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P(y^0)}{\partial y_i} Df_i(x^0). \tag{2}$$

Множество

$$\partial f(x) \equiv \{v \in R^n : f(y) - f(x) \geq (v, y-x)\ \forall y \in R^n\}$$

называется субдифференциалом функции f в точке x.

Приведем простейшие примеры квазидифференцируемых функций.

Пусть $f(x)-$ выпуклая функция, определенная на R^n. По теореме 5.2 [3](гл. 5, стр. 55) она дифференцируема в точке x по любому направлению h, причем

$$f'(x,h) = \max_{v\in\partial f(x)}(v,h).$$

Значит, выпуклая функция f квазидифференцируема в любой точке $x \in R^n$ и ее квазидифференциал имеет следующий вид:

$$Df(x) = [\partial f(x), \{0\}].$$

Пусть теперь функция f представима в виде разности двух выпуклых функций, т.е.

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x). \tag{3}$$

Тогда

$$f'(x,h) = f_1'(x,h) - f_2'(x,h) = \max_{v\in\partial f_1(x)}(v,h) - \max_{u\in\partial f_2(x)}(u,h) =$$

$$= \max_{v\in\partial f_1(x)}(v,h) + \min_{w\in -\partial f_2(x)}(w,h),$$

т. е. f квазидифференцируема и

$$\underline{D}f(x) = \partial f_1(x),\ \overline{D}f(x) = -\partial f_2(x).$$

Многозначное отображение a называется непрерывным по множеству E в точке $x_0 \in E$, если $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такое, что

$$a(x) \subseteq a(x_0) + \epsilon B_1(0),\ a(x_0) \subseteq a(x) + \epsilon B_1(0),\ \forall x \in E \bigcap B_\delta(x_0).$$

Множество E называется регулярным в точке $x^* \in E$, если функция расстояния $d_E(x) \equiv \inf_{y\in E} \parallel x - y \parallel$ квазидифференцируема в некоторой окрестности V этой точки, причем $\overline{D}d_E(x) = \{0\},\ x \in V$, а квазидифференциал $\underline{D}d_E(x)$ полунепрерывен сверху в x^*.

Рассмотрим задачу

$$\min_x\{f_0(x) : f_i(x) = 0,\ i \in I\}, \tag{4}$$

где $I-$ конечное множество индексов, а $f_i(x),\ i \in \{0\}\bigcup I$ представимы в виде (3).

Используя вариационный принцип Экланда, в следующей теореме устанавливается правило множителей Лагранжа в задаче (4) в терминах квазидифференциалов. Это условие принципиально отличается от необходимых условий Ф. Кларка и А. Иоффе (см. [1, 4]).

Основной результат статьи. Верна следующая теорема.

Теорема(основная). *Пусть x^* является решением задачи (4). Допустим также, что отображения*

$$\underline{D}f_i(x),\ \overline{D}f_i(x),\ i \in \{0\}\bigcup I$$

являются непрерывными в точке x^* по некоторому замкнутому множеству E, которое регулярно в x^*.

Тогда существуют числа $\lambda_0 \geq 0, \lambda_i,\ i \in \bigcup I$, не все равные одновременно нулю, такие, что

$$-\overline{D}L(x^*, \lambda) \subseteq \underline{D}L(x^*, \lambda) + N_E(x^*), \tag{5}$$

где

$$L(x, \lambda) = \sum_{i\in\{0\}\bigcup I} \lambda_i f_i(x),\ \ N_E(x^*) = \bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda\underline{D}d_E(x^*).$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ рассмотрим функцию

$$F(x) = \sqrt{\max[(f_0(x) - f_0(x^*) + \varepsilon, 0)]^2 + \sum_{i\in I} f_i^2(x)}$$

на множестве $M = B_r(x^*) \bigcap E$, где $B_r(x^*)-$ такая окрестность точки x^*, где функция F липшицева с некоторой константой $K > 0$.

Имеем $F(x^*) = \varepsilon$, и $F(x) \geq 0$ для всякого $x \in M$. Следовательно,

$$F(x) \leq F(x^*) + \varepsilon,\ \forall x \in M.$$

Поэтому по теореме 7.5.1 [5](вариационный принцип Экланда) найдется точка $u \in M \bigcap(\sqrt{\varepsilon}B_1(x^*))$ такая, что

$$F(x) + \sqrt{\varepsilon} \parallel x - u \parallel \geq F(x)\ \ \forall x \in M.$$

Отсюда следует, что u доставляет минимум на M функции

$$G(x) = F(x) + \sqrt{\varepsilon} \parallel x - u \parallel.$$

Поскольку G является липшицевой на множестве M с константой $K + 1$, то, согласно предложению 2.4.3 [5](стр. 211), точка u доставляет минимум функции $Q(x) = G(x) + (K + 1)d_E(x)$ на $B_r(x^*)$. Поэтому, в соответсвии с необходимым условием экстремума (1)

$$-\overline{D}G(u) \subseteq \underline{D}G(u). \tag{6}$$

Теперь, используя формулу (2), вычислим квазидифференциал функции Q в точке u. В нашем случае имеем

$$P(y_1, y_2, ..., y_m) = \sqrt{y_1^2 + ..., +y_m^2},$$

стало быть

$$DF(u) = \sum_{i\in\{0\}\bigcup I} v_i Df_i(u),$$

$$\text{где } v_0 = \frac{\max(f_0(u) - f_0(x^*) + \epsilon, 0)}{F(u)},\ v_i = \frac{f_i(u)}{F(u)},\ i \in I, \tag{7}$$

Теперь включение (6) имеет следующий вид:

$$\overline{d}F(u) \subseteq \underline{d}F(u) + \sqrt{\varepsilon}B_1(0) + (K+1)\underline{D}d_E(u), \tag{8}$$

Выберем некоторую последовательность чисел $\epsilon_k \downarrow 0$. Тогда соответствующая последовательность $\overline{u_k}$ сходится к x^*. Не нарушая общности, мы можем прдположить, что последовательности $\{v_i(\overline{u_k})\}_{k=1}^{\infty},\ i \in \{0\}\bigcup I$ сходятся, поскольку

$$\sum_{i\in\{0\}\bigcup I} v_i^2(\overline{u_k}) = 1.$$

Пусть $v_i(\overline{u_k}) \to \lambda_i,\ i \in \{0\}\bigcup I.$ Положим

$$I^+ = \{i : \lambda_i > 0\},\ I^- = \{i : \lambda_i < 0\}.$$

Подставим последовательности $\overline{u_k}$ и ϵ_k в (8). Для достаточно больших k оно принимает следующий вид:

$$-(\sum_{i\in I^+} v_i(\overline{u_k})\overline{D}f_i(\overline{u_k}) + \sum_{i\in I^-} v_i(\overline{u_k})\underline{D}f_i(\overline{u_k})) \subseteq \sum_{i\in I^+} v_i(\overline{h_k})\underline{D}f_i(\overline{u_k}) +$$

$$+\sum_{i\in I^-} v_i(\overline{u_k})\overline{D}f_i(\overline{u_k}) + \sqrt{\epsilon_k}B_1(0) + (K+1)\underline{D}d_E(\overline{u_k}).$$

Теперь переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, с учетом непрерывности по множеству E многозначных отображений $\underline{D}f_i(x)$, $\overline{D}f_i(x)$ и полунепрерывности сверху отображения $\underline{D}d_E(x)$ в x^*, получим утверждение теоремы.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$f_0(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \to \min,$$

$$f_1(x_1, x_2) = \max\{|\ x_1\ |, |\ x_2\ |\} - \max\{0, x_1 + \frac{1}{2}x_2\} + \frac{1}{2} = 0.$$

Покажем, что в точке $x^* = (1; 1)$ выполняется необходимое условие (5). Заметим, что если $x \in E \equiv \{x = (x_1; x_2)/x_1 - x_2 = 0\}$, то

$$\underline{D}f_1(x) = conv\{(1; 0), (0; 1)\},\ \overline{D}f_1(x) = \{(-1; -\frac{1}{2})\},$$

где $conv\{(1; 0), (0; 1) -$ выпуклая оболочка точек $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Следовательно, многозначные отображения $\underline{D}f_1(x)$ и $\overline{D}f_1(x)$ непрерывны по множеству E в точке x^*. Очевидно также, что $N_E(x^*) = \{u^*/u^* = (\alpha; -\alpha),\ \alpha \in R\}$.

Проверим выполнение необходимого условия минимума (5):

$$-\overline{D}(\lambda_0 f_0(x^*) + \lambda_1 f_1(x^*)) \subseteq \underline{D}(\lambda_0 f_0(x^*) + \lambda_1 f_1(x^*)) + N_E(x^*). \tag{9}$$

Рассмотрим случаи:

1) Если $\lambda_0 = 0$, то из (9) следует, что $\lambda_1 = 0$, что невозможно.

2) Пусть $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$. Тогда из (9) следует, что

$$0 \in \lambda_0 f_0'(x^*) + \lambda_1\overline{D}f_1(x^*) + \lambda_1\underline{D}f_1(x^*) + N_E(x^*).$$

Это означает, что уравнение

$$\Rightarrow \lambda_0(0; 2) + \lambda_1(-1; -\frac{1}{2}) + \lambda_1(\beta, ; 1 - \beta) + (\alpha; -\alpha) = 0$$

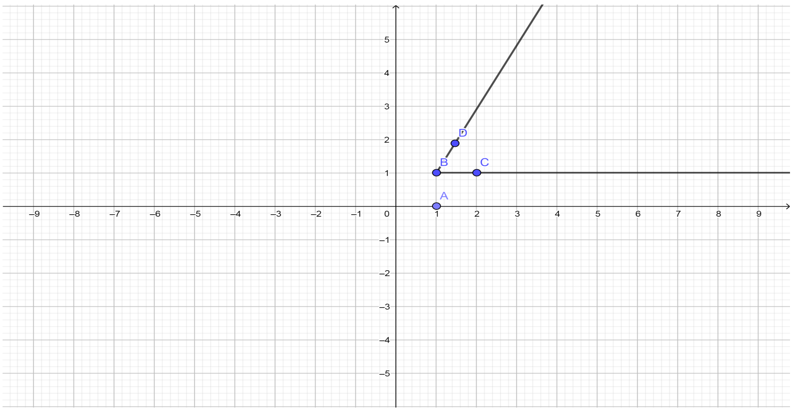
имеет решение при некоторых $\beta \in [0, 1]$, $\alpha \in R$. Это имеет место, если выберем $\lambda_1 = 4\lambda_0$.

Теперь покажем, что точка $x^* = (1;1)$ является решением задачи. Для этого сначало найдем пересечение множества $M \equiv \{(x_1, x_2) \in R^2 / f_1(x_1, x_2) = 0\}$ с первой четвертью. Чтобы найти это пересечение, заметим, что если $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 > x_2$, то

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Если $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \leq x_2$, то

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - 1.$$



Легко увидеть также, что персечение множества M с остальными четвертями пусто. Теперь геомерически можно представить множество M. На рисунке 1 изображено множество M: это угол DBC.

Следовательно, проекция точки $A(1;0)$ на множество M - это точка $B(1;1)$, которая является решением нашей задачи.

Для доказательства регулярности некоторых множеств нам потребуется следующий результат.

Теорема [6]. *Пусть $E-$ некоторое подмножество из R^n а $H-$ аппроксимирующий конус к множеству E в точке $x^* \in E$, т. е*

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \in E}} \frac{d_H(x - x^*)}{\| x - x^* \|} = 0, \tag{10}$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in H}} \frac{d_E(x^* + h)}{\| h \|} = 0. \tag{11}$$

Тогда функция расстояния $\delta(\cdot) = d_E(\cdot)$ имеет производную по любому направлению и справедливо равенство

$$\delta'(x^*, \cdot) = d_H(\cdot).$$

Приведем некоторые примеры регулярных множеств.

Пример 2. Выпуклое множество E является регулярным в любой точке $x^* \in E$. Этот факт непосредственно следует из того, что функция расстояния $d_E(\cdot)$ является выпуклой функцией. Следовательно, она имеет производную по направлению и ее субдифферениал полунепрерывен сверху.

Пример 3. Пусть

$$E = \{x \in R^n / f_i(x) = 0, i = 1, 2, ..., m\}.$$

Предположим, что функции являются f_i, $i = 1, 2, ..., m$ гладкими и в точке $x^* \in E$ их градиенты линейно независимы. Покажем, что множество E регулярно в точке x^*. Положим

$$H = \{h \in R^n / (f_i'(x^*), h) = 0, \ i = 1, 2, ..., m\}.$$

Докажем, что это подпространство H является аппроксимирующим конусом к множеству E.

Сначало докажем равенство (10). Пусть $x_k \to x^*, x_k \in E$. Положим $\overline{h_k} = x_k - x^*$. Тогда

$$0 = f_i(x_k) = f_i(x^* + \overline{h_k}) = f_i(x^*) + (f_i'(x^*), \overline{h_k}) + o_i(\| \overline{h_k} \|),\ i = 1,2,...,m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f_i'(x^*), \overline{h_k}) + o_i(\| \overline{h_k} \|) = 0,\ i = 1,2,...,m.$$

Пусть $\Pi_H(\overline{h_k})-$ проекция точки $\overline{h_k}$ на H. Ясно, что

$$\overline{h_k} - \Pi_H(\overline{h_k}) \in H^{\perp} = \{h \in R^n / h = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j'(x^*),\ \alpha_j \in R,\ j = 1,2,...,m\}. \tag{12}$$

Так как $\Pi_H(\overline{h_k}) \in H,$ то $(f_j'(x^*), \Pi_H(\overline{h_k})) = 0,\ i = 1,2,...,m.$ Поэтому

$$(f_i'(x_0), \overline{h_k} - \Pi_H(\overline{h_k})) + o_i(\| \overline{h_k} \|) = 0,\ i = 1,2,...,m.$$

Отсюда, учитывая (12), получаем следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных переменных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$:

$$\begin{cases} (f_1'(x^*), f_1'(x^*))\alpha_1 + ... + (f_1'(x^*), f_m'(x^*))\alpha_m = -o_1(\| \overline{h_k} \|) \\ (f_2'(x^*), f_1'(x^*))\alpha_1 + ... + (f_2'(x^*), f_m'(x^*))\alpha_m = -o_2(\| \overline{h_k} \|) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (f_m'(x^*), f_1'(x^*))\alpha_1 + ... + (f_m'(x^*), f_m'(x^*))\alpha_m = -o_m(\| \overline{h_k} \|) \end{cases}$$

Поскольку, по предположению, система векторов $\{f_i'(x^*),\ \ i = 1,2,...,m\}$ линейно независима, то по правиле Крамера неизветненые переменные $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ определяются однозначно, и нетрудно заметить, что $\alpha_i = o(\| \overline{h_k} \|$ при всех $i = 1,2,...,m$. Отсюда и из (12) следует, что

$$\overline{h_k} - \Pi_H(\overline{h_k}) = o(\overline{h_k}),$$

что и доказывает равенство (10).

Проверим теперь равенство (11). Согласно примеру 1.3 [7],(стр. 197) H является шатром к множеству E в точке x^*. Это означает, что существует отображение $r(h) = o(h)$, определенное в некоторой окрестности нуля U, такое, что

$$x^* + h + r(h) \in E\ \ \forall h \in H \bigcap U.$$

Отсюда

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in H}} \frac{d_E(x^* + h)}{\| h \|} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in H}} \frac{d_E(x^* + h) - d_E(x^* + h + r(h))}{\| h \|} \le$$
$$\le \frac{\| r(h) \|}{\| h \|} = 0.$$

Теперь, согласно теореме 2 [6] функция $\delta(\cdot) = d_E(\cdot)$ имеет производную по направлению h и справедливо равенство

$$\delta'(x^*, \cdot) = d_H(\cdot).$$

С другой стороны, известно [7] (теорема 2.9, стр.220), что

$$d_H(h) = \max_{x^* \in H^{\perp} \cap B_1(0)} (x^*, h).$$

Отсюда следует

$$\underline{D} d_E(x) = B_1(0) \bigcap \{y^* \in R^n /\ y^* = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i'(x), \alpha_i \in R,\ i = 1,2,...,m\}.$$

Значит, отображение $\underline{D} d_E(\cdot)$ полунепрерывно сверху в x^*, т.е. множество E регулярно в точке x^*.

Заключение. Таким образом, в статье рассмотрена задача математического программирования с негладкими ограничениями типа равенства, задаваемые квазидифференцируемыми функциями. Получено необходимое условие экстремума в терминах квазидифференциалов. Приведены несколько примеров, показывающие, что полученное условие более сильнее, чем необходимое условие Ф. Кларка.

Список литературы

1 Clarke F.H. A new approah to Lagrange multipliers//Math. Oper. Res. -1976. -№1. -P. 165-174.

2 Демьянов В. Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. -Москва: Наука. -1990. -432 стр.

3 Демьянов В. Ф, Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. -Москва: Наука. -1981. -384 стр.

4 Ioffe A. D. A Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferentials for nonsmooth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional costraints//Mathematical Programming. -1993. -№58. -P. 137-145.

5 Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. -Москва: Мир. -1988. -280 стр.

6 Chapiro A. On differentiability of metric projections in R^n , 1: Boundary case, proceedings of the American mathematical society.– Vol. 99.– №1.– 1987.– pp. 123-128.

7 Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. -Москва: Наука. -1980. -310 стр.

Р.А. Хачатрян

Ереван мемлекетті университеті, Ереван, Армения

Квазидифференциалданатын функциялармен берілген теңдік типті шектеулері бар есептердегі Лагранж көбейткіштері ережесі туралы

Аннотация: Параметрлері стандартты тегістік болжамдарына сәйкес келмейтін экстремалды мәселелерді зерттеуге соңғы жылдары қызығушылық тұрақты түрде артып келеді. Бұл теориялық қажеттіліктермен қоса экономика, технология, физика және басқа да ғылымдардағы маңызды практикалық қолданыстармен түсіндіріледі. Тегіс емес объектілер жүйелік талдау, сызықтық емес механика және басқару процестерінің бірқатар тарауларында табиғи түрде пайда болады.

Экстремалды мәселелер теориясында локалды экстремум нүктесі маңайындағы функцияның құбылысы қызығушылық тудырады. Тегіс емес функциялардың локалды қасиеттері дифференциалданатын функциялардың туындысының аналогы болып табылатын субградиенттермен сипатталады.

Ф.Кларк субдифференциал мен субградиент ұғымдарын қолдана отырып, локалды Липшиц функцияларымен берілген теңдік және теңсіздік типті шектеулері бар математикалық бағдарламалау есептерінде Лагранж көбейткіштер ережесін дәлелдеді. Алайда, локалды Липшиц функциялары үшін Ф.Кларк алған экстремумға қажетті шарттар айтарлықтай "алыстау" екендігін сипаттайтын және оптималды емес нүктелерді алып тастауға мүмкіндік бермейтіндігін көрсететін ішкі класстарының барлығы қарапайым мысалдардан алынады. Тегіс емес функциялардың осындай ішкі класы квазифференциалданатын функциялардың ішкі кеңістігі болып табылады. Мақалада Эклэндтің вариациялық принципін қолдана отырып, квазидифференциал терминдерінде Лагранж көбейткішінің ережесі алынды. Алынған ереженің Ф.Кларктың қажетті шартына қарағанда күшті екендігі мысалдармен көрсетілді.

Түйін сөздер: Квазидиффернциалданатын функция, квзидифференциал, субдифференциал, үзіліссіз көпмәнді бейнелеу.

R.A. Khachatryan

Yerevan State University, Yerevan, Armenia

One the Lagrange multipliers rule in problems with the equality type constraints, given by quasi-differentiable functions

Abstract: In recent years, there has been a steadily growing interest in the study of extremal problems with parameters that do not satisfy the standard smoothness assumptions. This is due to both theoretical needs and important practical applications in economics, technology, physics, and other sciences. Rough objects naturally arise in a several areas of systems analysis, nonlinear mechanics, and control processes.

In the theory of extremal problems, the main interest is the behavior of functions in the vicinity of points where a local extremum is attained. The local behavior of nonsmooth functions is described by subgradients, which are analogs of the derivative of differentiable functions.

Using the concepts of subdifferential and subgradient F. Clarke proved the Lagrange multiplier rule in mathematical programming problems with constraints of the type of equalities and inequalities defined by locally Lipschitz functions. However, there are subclasses of locally Lipschitz functions, the simplest examples of which show that the necessary conditions for an extremum obtained by F. Clarke are rather crude and do not allow one to discard obviously non-optimal points. Such a subclass of nonsmooth functions is the subspace of quasi-differentiable functions. In this article, using the Eckland variational principle, we obtain the Lagrange multiplier rule in terms of quasi-differentials. It is shown by examples that this condition is stronger than the necessary condition of F. Clarke.

Keywords: quasi-differentiable function, kuasi-differential, subdifferential, continuos multi-valued mapping.

References

1 Clarke F.H. A new approah to Lagrange multipliers, Math. Oper. Res. №1, 165-174(1997).

2 Demyanov V.F., Rubinov A.M. Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferencial'noe ischislenie [Foundations of nonsmooth analysis and quasi-differential calculus] (Nauka, Moscow, 1990, 432 p.).

3 Demyanov V. F, Vasilev L. V. Nedifferenciruemaya optimizaciya[Non-differentiable optimization](Nauka, Moscow, 1981, 384 p.).

4 Ioffe A. D. A Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferentials for nonsmooth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional costraints, Mathematical Programming, №58, 137-145(1993).
5 Klark F. Optimizaciya i negladkij analiz[Optimization and Nonsmooth Analysis] (Nauka, Mir, 1988, 280 p.).
6 Chapiro A. On differentiability of metric projections in R^n, 1: Boundary case, proceedings of the American mathematical society, 99(1), 123-128(1987).
7 Pshenichnyi B.N. Vypuklyj analiz i ekstremal'nye zadachi[Convex Analysis and Extremal Problems] (Nauka, Moscow, 1990, 310 p.).

Сведения об авторах:

Хачатрян Р.А. – Ереванский государственный университет, факультет информатики и прикладной математики, ул. Алека Манукяна 1, 00 25 Ереван, Армения.

Khachatryan R. – Department of Informatics and Applied Mathematics, Yerevan State University, A. Manukyan St. 1, 0025 Yerevan, Armenia.

Поступила в редакцию 03.06.2020