Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетiнiң хабаршысы. Математика. Компьютерлiк ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 132, №3, 8-16 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

А.К. Керимбеков [1] , С.Б. Доулбекова [2]

Кыргызско-Российский Славянский университет имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина, Бишкек, Кыргызстан
(E-mail: akl7@rambler.ru [1] , doulbekova25@mail.ru [2])

О разрешимости задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов при появлении особых управлений

Аннотация: В статье исследованы случаи появления особых управлений при нелинейной оптимизации колебательных процессов, когда функция внешнего воздействия нелинейно зависит от параметра управления. Критерием качества управляемого процесса является минимизация интегрального функционала, т.е. в конечный момент времени квадратичное отклонение управляемого процесса от заданного желаемого состояния был минимальным. Исследование проводился с использованием обобщенного решения краевой задачи, который более или менее полно адекватно описывает реально происходящий процесс. Согласно общеизвестной методике теории оптимального управления вычислено приращение функционала и выписана функция Понтрягина, которая исследуется на максимум в области допустимых значений функции управления. Выписаны условия оптимальности управления в виде равенства и дифференциального неравенства, которые должны выполняться одновременно. Исследован случай, когда принцип максимума вырождается.

Установлено, что искомое управление удовлетворяет бесконечномерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода, разрешимость которой исследована операторными методами. Доказано, что операторное уравнение имеет бесконечно много решений и разработан алгоритм их построения. Далее функционал минимизируется на множестве решений операторного уравнения. Эта задача имеет хотя бы одно решение, которое является искомым особым оптимальным управлением.

Ключевые слова: интегральное тождество, обобщенное решение, функционал, система интегральных уравнений Фредгольма первого рода, особые управления.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-132-3-8-16

Введение. При программном управлении системами с распределенными параметрами управление, подозрительное на оптимальность, определяется из условий оптимальности, которые являются следствием принципа максимума. В приложениях встречаются задачи управления, для которых принцип максимума вырождается [1, с. 25-29]. В этом случае управление, найденное тем или иным способом, называется особым управлением. Как отмечено в работе [1, с. 19] исследованием особых оптимальных управлений занимались зарубежные и российские ученые. Достаточно хорошо исследованы управляемые процессы, описываемые системами с сосредоточенными параметрами. Разработаны конструктивные методы исследований и в настоящее время это направление развивается, привлекая новых исследователей. Иначе обстоит дело при исследовании управляемых процессов, описываемых системами с распределенными параметрами. В этом направлении проведены очень мало исследований и не достаточно разработаны конструктивные методы исследований особых управлений. В данной статье для управляемых колебательных процессов, описываемых уравнениями в частных производных второго порядка исследован случай появления особого управления и разработан алгоритм построения особого оптимального управления.

Постановка задачи нелинейной оптимизации. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J\left[u\left(t,x\right)\right]=\int\limits_0^1\left[V\left(T,\ x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int\limits_0^T\int\limits_0^1 p\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]dxdt,\quad \beta>0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}=V_{xx}+f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right],\quad 0<x<1,\quad 0<t<T, \tag{2}$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$V_x(t,0)=0,\quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\quad 0<t<T, \tag{4}$$

где $V(t,x)$ - функция состояния управляемого процесса, функция управления $u(t,x)$ является элементом гильбертово пространства $H(Q)$ квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве $Q=(0,1)\times(0,T)$; $\xi\left(x\right)\in H(0,1)$, $\psi_2\left(x\right)\in H(0,1)$ заданные функции, а функция начального состояния $\psi_1\left(x\right)$ является элементом соболево пространства первого порядка $H_1(0,1)$, т.е. $\psi_1\left(x\right)\in H_1(0,1)$; постоянная $\alpha>0$; T- фиксированный момент времени, заданные функции $f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]\in H(Q)$ и $p\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]\in H(Q)$ нелинейны относительно функции управления $u(t,x)$ и имеют непрерывные производные $f_u\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]$ и $p_u\left[t,x,u\left(t,x\right)\right],\forall\ (t,x)\in Q$. Эта задача нелинейна относительно управления и условно называется задачей нелинейной оптимизации.

Обобщенное решение краевой задачи. При исследовании прикладных задач управления широко используется понятие обобщённого решения краевой задачи [2].

Определение. Функция $V(t,x)$, имеющая обобщенные производные $V_t(t,x)$ и $V_x(t,x)$ называется обобщенным решением краевой задачи (2) –(4) , если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1\left[V_t(t,x)\Phi(t,x)\right]\Big|_{t_1}^{t_2}dx=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left[V_t(t,x)\Phi_t(t,x)-V_x(t,x)\Phi_x(t,x)+f\left[t,x,u(t,x)\right]\Phi(t,x)\right]dxdt-$$

$$-\alpha\int_{t_1}^{t_2}\Phi\left(t,1\right)V\left(t,1\right)dt \tag{5}$$

при любых моментов времени t_1 и t_2 $(t_1<t<t_2)$ и $\forall\ \Phi(t,x)\in H_1(Q)$ и начальным условиям в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1\left[V(t,x)-\psi_1(x)\right]\Phi_0(x)dx=0,$$

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1\left[V_t(t,x)-\psi_2(x)\right]\Phi_1(x)dx=0 \tag{6}$$

выполняются для любых функций $\Phi_0(x),\Phi_1(x)\in H(0,1)$.

Обобщенное решение краевой задачи (2) – (4) ищем в виде

$$V\left(t,x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n\left(t\right)z_n\left(x\right),V_n\left(t\right)=\int_0^1V\left(t,x\right)z_n\left(x\right)dx, \tag{7}$$

где $z_n(x)$ определяется как решение краевой задачи

$$z_n''+\lambda_n^2z_n=0,\ z_n'(0)=0,\quad z_n'(1)+\alpha z_n(1)=0 \tag{8}$$

и образует в пространстве $H(0,1)$ ортонормированную систему собственных функций

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x, n = 1,2,3,\ldots,$$

а соответствующие им собственные значения λ_n краевой задачи (8) определяются как решение трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda = \alpha$ и удовлетворяют условиям

$$\lambda_n \le \lambda_{n+1},\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty,\ (n-1)\,\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}\,(2n-1)\,, n = 1,2,3,\ldots. \tag{9}$$

Согласно соотношениям (5) и (6) коэффициент Фурье $V_n\,(t)$ в разложении (7) находим по формуле

$$V_n(t) = \psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau) f_n\,(\tau,u)\,d\tau, \tag{10}$$

где ψ_{1n} , ψ_{2n} , $f_n\,(t,u)$ - коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1\,(x)\,,\,\psi_2\,(x)$ и $f\,[t,x,u\,(t,x)]\,.$

Непосредственным вычислением можно показать, что формальное решение

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau) f_n(\tau,u)d\tau\right] z_n(x) \tag{11}$$

в условиях рассматриваемой задачи является элементом пространства $H(Q)$ и имеет производные $V_t(t,x) \in H(Q)$ и $V_x(t,x) \in H(Q)$. Поэтому функцию (11) будем рассматривать как обобщенное решение краевой задачи (2) –(4) .

Согласно (11) , заметим, что между элементами пространства состояний $\{V(t,x)\}$ и пространства управлений $\{u(t,x)\} \equiv H(Q)$ взаимно-однозначное соответствие имеет место лишь в случае, когда функция $f\,[t,x,u\,(t,x)]$ является монотонной по функциональной переменной $u(t,x)$.

Условия оптимальности. Пусть $\Delta V(t,x)$ приращение функции $V(t,x)$, соответствующее допустимому приращению $\Delta u(t,x)$ управления $u(t,x)$. Вычислим приращение функционала (1) .

$$\Delta J\,[u(t,x)] = J\,[u(t,x)+\Delta u(t,x)] - J\,[u(t,x)] =$$

$$= -\int_0^T\int_0^1 \Delta\Pi\,[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t,x)]\,dxdt + \int_0^1 \Delta V^2(T,x)dx,$$

где

$$\Delta\Pi\,[\,\cdot\,,u(t,x)] = \Pi\,[\,\cdot\,,\ u(t,x)+\Delta u(t,x)] - \Pi\,[\,\cdot\,,u(t,x)]$$

$$\Pi\,[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t,x)] = \omega(t,x) f\,[t,x,u(t,x)] - \beta p\,[t,x,u(t,x)]\,.$$

Согласно принципу максимума, на оптимальном управлении $u^0(t,x)$ соотношение

$$\Pi\left[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u^0(t,x)\right] = \sup\limits_{u\in D}\Pi\,[t,x,V(t,x),\omega(t,x),u(t,x)]$$

где D- множество допустимых значений управления, выполняется почти при всех $(t,x)\in Q$ [3, с. 342].

Условия оптимальности управления $u(t,x)$, как следствия принципа максимума для систем с распределенными параметрами, определяются соотношениями

$$\omega\,(t,x)\,f_u\,[t,x,u(t,x)] - \beta p_u\,[t,x,u(t,x)] = 0, \tag{12}$$

$$\omega\,(t,x)\,f_{uu}\,[t,x,u(t,x)] - \beta p_{uu}\,[t,x,u(t,x)] < 0, \tag{13}$$

где $\omega\,(t,x)$ определяется как обобщенное решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{gathered}\omega_{tt} = \omega_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,\\ \omega\,(T,0) = 0,\ \omega_t\,(T,x) = 2\,[V\,(T,x) - \xi(x)]\,, \quad 0 < x < 1,\\ \omega_x\,(t,0) = 0, \omega_x\,(t,1) + \alpha\omega\,(t,1) = 0, \quad 0 < t < T,\end{gathered} \tag{14}$$

и имеет вид

$$\omega(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left[V_n(T)-\xi_n\right]\sin\lambda_n(T-t). \tag{15}$$

Управление $u^0(t,x)$, на котором функционал (1) достигает минимального значения, может быть определен из условий оптимальности (12) - (13) , которые выполняются одновременно. При этом алгоритм построения управления $u^0(t,x)$ существенно зависит от поведения функций $f[t,x,u(t,x)]$ и $p[t,x,u(t,x)]$ в окрестности «точки» $u^0(t,x)$. В случае, когда $f_u\left[t,x,u^0(t,x)\right] \neq 0$ и $p_u\left[t,x,u^0(t,x)\right] \neq 0$ алгоритм построения оптимального управления $u^0(t,x)$ достаточно хорошо разработан [4-10]. В данной статье рассматривается случай, когда имеют места соотношения

$$f_u\left[t,x,u^0(t,x)\right] \neq 0 \; u \; p_u\left[t,x,u^0(t,x)\right] = 0. \tag{16}$$

В этом случае управление $u^0(t,x)$ попытаемся определить по следующим соотношениям

$$\omega(t,x) = 0, \tag{17}$$

$$p_{uu}\left[t,x,u(t,x)\right] > 0, \tag{18}$$

которые в силу (16) получены из условий оптимальности (12) и (13) .

Построение искомого управления. С учетом (15) равенство (17) перепишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left[V_n(T)-\xi_n\right]\sin\lambda_n(T-t) = 0,$$

откуда, в силу линейной независимости системы функций $\{\sin\lambda_n(T-t)\}$, получим систему равенств $V_n(T)-\xi_n = 0$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Согласно (10) , эти равенства имеют виды

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{z_n(x)}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t)f\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt = \xi_n - \psi_{1n}\cos\lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n T,$$

которые, введя обозначения

$$G(t,x) = \left\{G_1(t,x),...,G_n(t,x),...\right\}, G_n(t,x) = \frac{z_n(x)}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t), \quad n = 1,2,3,\ldots, \tag{19}$$

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n}\cos\lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n T, \quad n = 1,2,3,... \tag{20}$$

перепишем в операторной форме

$$G[u] = h, \tag{21}$$

где

$$G[u] = \int_0^T\int_0^1 G(t,x)f\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt, \tag{22}$$

$$h = \left\{h_1,...,h_n,...\right\}. \tag{23}$$

Теперь исследуем разрешимость уравнения (21) .

Лемма 1. Оператор $G[u]$ отображает пространство $H(Q)$ в пространство $\ell_2 = \left\{(a_1,...,a_n,...)\,|\sum\limits_{n-1}^{\infty}a_n^2 < \infty\right\}$.

Доказательство. Пусть $u(t,x) \in H(Q)$ произвольный элемент пространства $H(Q)$. В силу монотонности функций $f[t,x,u(t,x)]$ отображение $u(t,x) \to f[t,x,u(t,x)]$ однозначное и по условию $f[t,x,u(t,x)] \in H(Q)$. Поскольку $G[u]$ вектор вида

$$G[u] = \left\{\int_0^T\int_0^1 G_1(t,x)f\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt, ..., \int_0^T\int_0^1 G_n(t,x)f\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt, ...,\right\}$$

то, непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\|G[u]\|_{\ell_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^T\int_0^1 G_n(t,x)f[t,x,u(t,x)]\,dxdt\right)^2\leq$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\int_0^1 G_n^2(t,x)dxdt\cdot\int_0^T\int_0^1 f^2[t,x,u(t,x)]\,dxdt\leq$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\int_0^1\frac{z_n^2(x)}{\lambda_n^2}\sin^2\lambda_n(T-t)dxdt\,\|f[t,x,u(t,x)]\|_{H(Q)}^2\leq$$
$$\leq T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\|f[t,x,u(t,x)]\|_{H(Q)}^2\leq T\|f[t,x,u(t,x)]\|_{H(Q)}^2\left(\frac{1}{\lambda_n^2}+\frac{1}{6}\right)<\infty,$$

которое получено с учетом свойств функции $z_n(x)$ и неравенства (9) . Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. Вектор h является элементом пространства ℓ_2 .

Доказательство. Согласно (20) и (23) , непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\|h\|_{\ell_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}h_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\xi_n-\psi_{1n}\cos\lambda_nT-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_nT\right]^2\leq$$
$$\leq 3\sum_{n=1}^{\infty}\left[\xi_n^2+\psi_{1n}^2+\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\right]\leq 3\left\{\|\xi(x)\|_{H(0,1)}^2+\|\psi_1(x)\|_{H(0,1)}^2+\frac{1}{\lambda_1^2}\|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2\right\}<\infty$$

из которого следует утверждение леммы.

На основе доказанных лемм, операторное уравнение (21) будем рассматривать в пространстве ℓ_2 . Оно представляет с собой систему нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно $u(t,x)$ и систему линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно $f[t,x,u(t,x)]$. Сначала определим $f[t,x,u(t,x)]$. Ее ищем в виде

$$f[t,x,u(t,x)]=G^*(t,x)\alpha+\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,x)\,\alpha_n+\gamma, \tag{24}$$

где $\alpha=\{\alpha_1,...,\alpha_n,...\}$ неизвестный вектор, γ - произвольная постоянная, символ $*$ - знак транспонирования. (24) подставив в (21) имеем соотношение

$$\int_0^T\int_0^1 G(t,x)\left[G^*(t,x)\alpha+\gamma\right]dxdt=h,$$

которое перепишем в операторной форме

$$M[\alpha]=M\cdot\alpha=q(\gamma), \tag{25}$$

где

$$M=\int_0^T\int_0^1 G(t,x)G^*(t,x)dxdt,\ q(\gamma)=h-\int_0^T\int_0^1 G(t,x)dxdt\cdot\gamma. \tag{26}$$

Лемма 3. Оператор $M[\alpha]$, отображает пространство ℓ_2 в себя.

Доказательство. Пусть $\alpha\in\ell_2$ произвольный вектор. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\|M[\alpha]\|_{\ell_2}^2=\|M\cdot\alpha\|_{\ell_2}^2=\left\|\int_0^T\int_0^1 G_n(t,x)\,G_n^*(t,x)\,dxdt\cdot\alpha\right\|_{\ell_2}^2\leq$$
$$\leq\left(\int_0^T\int_0^1\|G_n(t,x)\|_{\ell_2}\|G_n(t,x)\|_{\ell_2}\|\alpha\|_{\ell_2}dxdt\right)^2\leq\left(\int_0^T\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}G_n^2(t,x)\,dxdt\right)^2\|\alpha\|_{\ell_2}^2\leq$$
$$\leq\left(\int_0^T\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n^2(x)}{\lambda_n^2}\sin^2\lambda_n(T-t)\,dxdt\right)^2\|\alpha\|_{\ell_2}^2\leq 4T^2\|\alpha\|_{\ell_2}^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)^2<\infty$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 4. Вектор $q(\gamma)$ является элементом пространства ℓ_2 .

Доказательство. Сначала покажем, что имеет место неравенство

$$\left\|\int_0^T\int_0^1 G\left(t,x\right)dxdt\right\|_{\ell_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^T\int_0^1 G_n\left(t,x\right)dxdt\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^T\int_0^1\frac{z_n(x)}{\lambda_n}\sin\lambda_n\left(T-t\right)dxdt\right)^2\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\int_0^1\frac{z_n^2(x)}{\lambda_n^2}dxdt\cdot\int_0^T\int_0^1\sin^2\lambda_n\left(T-t\right)dxdt\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}T^2\leq T^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)<\infty.$$

Тогда учитывая, что $h\in\ell_2$ убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

Лемма 5. Оператор $M\left[\alpha\right]$ является положительно – определенным.

Доказательство. Пусть $\alpha\in\ell_2$ произвольный вектор. Для скалярного произведения имеет место неравенство

$$\left\langle\alpha,M\left[\alpha\right]\right\rangle_{\ell_2}=\alpha^*M\alpha=\alpha^*\int_0^T\int_0^1 G(t,x)G^*(t,x)dxdt\cdot\alpha=\int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(t,x\right)\alpha_n\right)^2dxdt\geq 0.$$

При этом знак равенство возможно лишь при $\alpha_n=0,n=1,2,3,\ldots$.

В самом деле, из условия равенства имеем соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}G_n\left(t,x\right)\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n(x)}{\lambda_n}\alpha_n\sin\lambda_n\left(T-t\right)=0,$$

которое, в силу линейной независимости системы функций $\{\sin\lambda_n\left(T-t\right)\}$ имеет место лишь при $\alpha_n=0,n=1,2,3,\ldots$.

Теорема. Операторное уравнение (25) в пространстве ℓ_2 имеет единственное решение.

Доказательство. В силу положительной определенности оператора $M\left[\alpha\right]$, существует обратный ограниченный оператор N такое, что [11, с. 155]

$$\left\|Nq\left(\gamma\right)\right\|_{\ell_2}\leq N_0\left\|q\left(\gamma\right)\right\|_{\ell_2},\quad N_0>0. \tag{27}$$

Следовательно, неизвестный вектор α однозначно определяется по формуле

$$\alpha=N\left[q(\gamma)\right]. \tag{28}$$

Далее, найденное α подставляя в (24) находим, что

$$f\left[t,x,u(t,x)\right]=G^*(t,x)N\left[q(\gamma)\right]+\gamma. \tag{29}$$

Эта функция является решением линейного (относительно $f\left[t,x,u(t,x)\right]$) интегрального уравнения Фредгольма первого рода (21) при любом значении произвольной постоянной γ , т.е. уравнение (21) имеет бесконечно много решений.

Теперь определим функцию $u(t,x)$. Поскольку функция $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ является монотонной по функциональной переменной $u(t,x)$, то согласно условию

$$f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0,\forall\left(t,x\right)\in Q, \tag{30}$$

из тождества (29) функция $u(t,x)$ определяется однозначно, т.е. существует функция $\varphi\left(\cdot\right)$ такая, что

$$u(t,x)=\varphi\left(G^*(t,x)N\left[q(\gamma)\right]+\gamma\right)\equiv u(t,x,\gamma). \tag{31}$$

Найденная функция (31) является решением нелинейного (относительно $u(t,x)$) интегрального уравнения Фредгольма первого рода (21) .

Заметим, что при управлениях $u(t,x,\gamma)$ имеет место равенство $V\left(T,x\right)-\xi(x)=0$ и функционал (1) примет вид

$$J\left[u\left(t,x,\gamma\right)\right]=\beta\int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u\left(t,x,\gamma\right)\right]dxdt.$$

Произвольная постоянная γ может быть найдена как решение задачи

$$S(\gamma)=J\left[u\left(t,x,\gamma\right)\right]\to min, \tag{32}$$

т.е. из условий $S'(\gamma)=0,\quad S''(\gamma)>0$. В зависимости свойств функции $\varphi(\cdot)$ задача (32) может иметь одно или несколько решений. По найденным значениям γ, подставляя их в (31) получим управления $u_i^0(t,x),\ i=1,2,3,...k$, где k - количество решений задачи (32).

Отметим, что управления $u_i^0(t,x)$ являются решениями задачи нелинейной оптимизации лишь тогда, когда они удовлетворяют условиям

$$p_u\left[t,x,u_i^0(t,x)\right]=0, p_{uu}\left[t,x,u_i^0(t,x)\right]>0.$$

Заключение. В задачах нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами функции внешнего воздействия $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ и минимизируемого функционала $p\left[t,x,u(t,x)\right]$ нелинейны по функциональной переменной $u(t,x)$. В этом случае принцип максимума следует применять учитывая те или иные свойства этих функций, которые существенно влияет на разрешимость задачи управления. Например, в случае, когда функции $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ и $p\left[t,x,u(t,x)\right]$ монотонны по функциональной переменной $u(t,x)$, то $f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0$, $p_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0$ и согласно принципу максимума оптимальное управление определяется как единственное решение нелинейного интегрального уравнения Фредгольма специфического вида, которое нелинейные по $u(t,x)$ выражения содержит как под интегралом, так и вне интеграла [4-10].

Если же задачу нелинейной оптимизации решить при ограничениях на управления вида $f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0$ и $p_u\left[t,x,u(t,x)\right]=0$, то, как показывают результаты данного исследования, принцип максимума вырождается и искомое управление определяется как решение бесконечномерной системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которая имеет бесконечно много решений. Таким образом, появляется новая задача отбора оптимального управления (или оптимальных управлений) из этого семейства решений.

Из приведенных случаев нетрудно заметить, задачи нелинейной оптимизации очень чувствительны к изменениям свойств параметров задачи.

Отметим, что результаты данного исследования могут быть полезными при решении прикладных задач и разработке новых методов качественного исследования и конструктивных методов решения нелинейных задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Список литературы

1 Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. –М.: Наука, 1973. –256 с.

2 Плотников В. И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – №4. – С. 743–755.

3 Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. –М.: Наука, 1978.- 500 с.

4 Kerimbekov A. On the Solvability of a Nonlinear Optimal Control Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations // Current Trends in Analysis and Its Applications (Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakyw 2013), A series of trends in mathematics. Switzerland: -Springer International Publishing. –2015. –Vol. XVI. –P. 803-811.

5 Kerimbekov K.A., Abdyldaeva E.F.. Optimal Distributed Control for the Processes of Oscillation Described by Fredgolm Integro-differential Equations // Eurasian Mathematical Journal. –2015. –Vol.6, №2. –P. 18-40.

6 Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F., Nametkulova R., Kadirimbetova A. On the Solvability of a Nonlinear Optimization Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations with External and Boundary Controls // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal. –2016. –Vol.10, №1. –P. 215-223.

7 Керимбеков А., Абдылдаева Э.Ф. О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро – дифференциальными уравнениями // Журнал «Труды института математики и механики УрО РАН». –2016. –Т.22, №2. –С. 163-176.

8 Kerimbekov A., Abdyldaeva E.F. The Optimal Vector Control for the Elastic Oscillation Described by Fredholm Integral- Differential Equations // Analysis and Partial Differential Equations: Perspectives from Developing Countries. Imperial College London, UK. –2016. –P. 14-30.

9 Kerimbekov A., Abdyldaeva E.F. Approximate solution of boundary value problem for hyperbolic equation with Fredholm integral operator. //Proceedings of the 6th International Conference on control and optimization with industrial applications. Volume II, 11-13 July, 2018 Baku, Azerbaijan. –2018. –P. 23-26.

10 Kerimbekov A. On a Class of Solutions of the Nonlinear Integral Fredholm Equation //Trends in Mathematics Research Perspectives (Analysis, Probability, Applications, and Computation. Proceedings of the 11 th ISAAC Congress, Vaxjo (Sweden) 2017). Switzerland, Birkhauser. –2019. –P. 191-197.

11 Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. –М.: Наука, 1965. –520 с.

А.К. Керімбеков, С.Б. Доулбекова

Ресей Федерациясының бірінші Президенті Б.Н. Ельцин атындағы Қырғыз-Ресей славян университеті, Бішкек, Қырғызстан.

Ерекше басқару пайда болған жағдайда тербелмелі процестерді сызықтық емес оңтайландыру есебінің шешімділігі туралы

Аннотация: Мақалада сыртқы әсер ету функциясы басқару параметріне сызықтық емес тәуелді болғанда тербелмелі процестердің сызықтық емес оңтайландыру барысында ерекше басқарудың пайда болу жағдайлары зерттеледі. Басқарылатын процес сапасының критерийі ретінде интегралдық функционалды минимизациялау, яғни ақырлы уақыт мезетінде бақыланатын процестің берілген қалаған күйден квадраттық ауытқуы минималды болуы қарастырылады. Зерттеу шекаралық есептің жалпыланған шешімі арқылы жүзеге асырылды, бұл нақты процесті азды-көпті барабар сипаттайды. Оптималды басқару теориясының белгілі әдіснамасына сәйкес функционалдың өсімшесі есептеліп, Понтрягин функциясы алынып, ол басқару функциясының мәндері рұқсат етілген облысында максимумға зерттеледі. Басқарудың оңтайлылық шарттары теңдік және дифференциалдық теңсіздік түрінде жазылған, олар бір уақытта орындалуы қажет. Максимум принципі өзгешеленген жағдайы зертелді.

Ізделінді басқару шексіз өлшемді бірінші текті Фредгольм сызықтық интегралдық теңдеулерінің жүйесін қанағаттандыратыны анықталды. Шешімділігі операторлық әдістермен зерттеледі. Операторлық теңдеудің шексіз көп шешімдері бар екендігі дәлелденді және оларды құрудың алгоритмі берілді. Әрі қарай, функционал операторлық теңдеудің шешімдері жиынында минимизацияланады. Бұл есептің кем дегенде бір шешімі бар және ол ізделінді ерекше оңтайлы басқару болып табылады.

Түйін сөздер: интегралдық тепе-теңдік, жалпыланған шешім, функционал, бірінші текті Фредгольм интегралдық теңдеулер жүйесі, ерекше басқарулар.

A. K. Kerimbekov, S. B. Doulbekova

Kyrgyz-Russian Slavic University named after the first President of the Russian Federation B.N.Yeltsin, Bishkek, Kyrgyzstan

About the solvability of the problem of nonlinear optimization of oscillatory processes with the appearance of special controls

Abstract: The article deals with the cases when special controls appear in nonlinear optimization of oscillatory processes, when the function of external influence depends non-linearly on the control parameter. Quality-managed process is to minimize the integral of the functional, that is, in the final moment of time square deviation of a controlled process from a given desired state was minimal. The study was conducted using a generalized solution of the boundary value problem, which more or less adequately describes the actual process. According to the well-known method of optimal control theory, the increment of the functional is calculated and the Pontryagin function is written out, which is studied for the maximum in the range of acceptable values of the control function. The optimal control conditions are written out in the form of equality and differential inequality, which must be fulfilled simultaneously. The case when the maximum principle degenerates is studied.

It is established that the desired control satisfies an infinite-dimensional system of linear integral Fredholm equations of the first kind, the solvability of which is studied by operator methods. It is proved that the operator equation has infinitely many solutions and an algorithm for their construction is developed. Then the functional is minimized on the set of solutions of the operator equation. This problem has at least one solution that is the desired special optimal control.

Keywords: integral identity, generalized solution, functional, system of Fredholm integral equations of the first kind, special controls.

References

1 Gabasov R., Kirillova F.M. Osobye optimal'nye upravlenija [Special optimal controls] (Nauka, Moscow, 1973, 256 p.) [in Russian].

2 Plotnikov V. I. Jenergeticheskoe neravenstvo i svojstvo pereopredelennosti sistemy sobstvennyh funkcij [Energy inequality and the overdetermination property of a system of eigenfunctions], Izv. AN SSSR. Ser. matem. [Math. USSR-Izv.], №4, P. 743–755 (1968) [in Russian].

3 Egorov A.I. Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi processami [Optimal control of thermal and diffusion processes] (Nauka, Moscow, 1978, 500 p.) [in Russian].

4 Kerimbekov A. On the Solvability of a Nonlinear Optimal Control Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations, Current Trends in Analysis and Its Applications, Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakyw 2013, A series of trends in mathematics. Switzerland: -Springer International Publishing, 2015, Vol. XVI, P. 803-811.

5 Kerimbekov K.A., Abdyldaeva E.F.. Optimal Distributed Control for the Processes of Oscillation Described by Fredgolm Integro-differential Equations, EURASIAN MATHEMATICAL JOURNAL, Vol. 6, №2. P. 18-40 (2015).

6 Kerimbekov A., Abdyldaeva E. F., Nametkulova R., Kadirimbetova A. On the Solvability of a Nonlinear Optimization Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations with

External and Boundary Controls, Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal, Vol. 10, No. 1, P. 215-223 (2016).

7 Kerimbekov A., Abdyldaeva Je.F. O ravnyh otnoshenijah v zadache granichnogo vektornogo upravlenija uprugimi kolebanijami, opisyvaemymi fredgol'movymi integro – differencial'nymi uravnenijami [On equal ratios in the problem of boundary vector control of elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations], Zhurnal «Trudy instituta matematiki i mehaniki UrO RAN» [Journal «Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences»], Vol. 22, №2, P. 163-176 (2016) [in Russian].

8 Kerimbekov A., Abdyldaeva E.F. The Optimal Vector Control for the Elastic Oscillation Described by Fredholm Integral- Differential Equations, Analysis and Partial Differential Equations: Perspectives from Developing Countries. Imperial College London, UK, P. 14-30 (2016).

9 Kerimbekov A., Abdyldaeva E.F. Approximate solution of boundary value problem for hyperbolic equation with Fredholm integral operator, Proceedings of the 6^{th} International Conference on control and optimization with industrial applications. Vol. 2, 11-13 July, 2018, Baku, Azerbaijan, P. 23-26.

10 Kerimbekov A. On a Class of Solutions of the Nonlinear Integral Fredholm Equation, Trends in Mathematics Research Perspectives (Analysis, Probability, Applications, and Computation, Proceedings of the 11^{th} ISAAC Congress, Vaxjo (Sweden) 2017), Switzerland,Birkhauser, 2019, P. 191-197.

11 Ljusternik L.A., Sobolev V.I. Jelementy funkcional'nogo analiza [Elements of functional analysis], (Nauka, Moscow, 1965, 520 p.) [in Russian].

Сведения об авторах:

Керимбеков А. К. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры Прикладной математики и информатики Кыргызско-Российского Славянского университета имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина, ул. Киевская 44, Бишкек, Кыргызстан.

Доулбекова С.Б . – соискатель кафедры Прикладной математики и информатики Кыргызско-Российского Славянского университета имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина, ул. Киевская 44, Бишкек, Кыргызстан.

Kerimbekov A.K. – Doctor of Phys. -Math. Sciences, Professor of Department of Applied Mathematics and Informatics, Kyrgyz-Russian Slavic University named after the first President of the Russian Federation B.N.Yeltsin, st. Kievskaya 44, Bishkek, Kyrgyzstan

Doulbekova S.B. – applicant, Department of Applied Mathematics and Informatics, Kyrgyz-Russian Slavic University named after the first President of the Russian Federation B.N.Yeltsin, st. Kievskaya 44, Bishkek, Kyrgyzstan

Поступила в редакцию 07.09.2020