Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 131, №2, 42-50 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.19**

Р. Муталип, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: mutalipriza@yahoo.com, altyngul.82@mail.ru)

Нечетные автоморфизмы сплетенных свободных ассоциативных алгебр от двух порождающих

Аннотация: Доказано, что эндоморфизм φ сплетенной свободной ассоциативной алгебры от двух порождающих x_1, x_2 над произвольным полем k с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ заданный правилом $\varphi(x_1) = x_1$, $\varphi(x_2) = \alpha x_2 + \beta x_1^m$, где $\alpha, \beta \in k$, m – нечетное число, является нечетным автоморфизмом. Также доказано, что линейный эндоморфизм ψ этой алгебры является автоморфизмом тогда и только тогда, когда ψ аффинный. Установлено, что группа всех автоморфизмов двупорожденной сплетенной свободной ассоциативной алгебры над произвольным полем k с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ совпадает с группой нечетных автоморфизмов этой алгебры.

Ключевые слова: Свободная ассоциативная алгебра, сплетение, автоморфизм.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-131-2-42-50

1. Введение

Хорошо известно [1–4], что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x_1, x_2]$ и свободной ассоциативной алгебры $k\langle x_1, x_2\rangle$ от двух переменных над произвольным полем k являются ручными. Более того [1,4], группы автоморфизмов алгебр $k[x_1, x_2]$ и $k\langle x_1, x_2\rangle$ изоморфны, т.е.

$$\mathrm{Aut}_k k[x_1, x_2] \cong \mathrm{Aut}_k k\left\langle x_1, x_2\right\rangle.$$

Известно также, что автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр Пуассона над полями нулевой характеристики [5] и автоморфизмы двупорожденных свободных правосимметричных алгебр над произвольными полями [6] являются ручными. П. Кон [7] доказал, что автоморфизмы свободных алгебр Ли конечного ранга являются ручными. Аналог этой теоремы верен для свободных алгебр любого однородного шрайерового многообразия алгебр [8]. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр [9], коммутативных и антикоммутативных алгебр [10], алгебр Ли [11, 12] и супералгебр Ли [13, 14].

Сплетенным пространством V называется линейное пространство V над произвольным полем k с фиксированным линейным отображением $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ (в общем случае не обязательно обратимым), которое удовлетворяет *соотношению сплетения*

$$(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \tau)(\tau \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau).$$

Это фиксированное линейное отображение τ будем называть сплетением пространства V. Если $x_1, x_2, \cdots, x_n$ является базисом линейного пространства V, то для произвольных параметров $q_{is} \in k$, $1 \le i, s \le n$, линейное отображение τ определяемое как

$$\tau : x_i \otimes x_s \mapsto q_{is} \cdot x_s \otimes x_i$$

является сплетением и называется *диагональным сплетением.* Для удобства, это диагональное сплетение τ будем обозначать через кортеж $(q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{(n-1)n}, q_{nn})$. Сплетение $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ называется *инволютивным*, если $\tau^2 = \mathrm{id}$.

Пусть V и V' – сплетенные пространства со сплетениями τ и τ', соответственно. Линейное отображение $\varphi : V \to V'$ называется гомоморфизмом сплетенных пространств, если

$$\tau(\varphi \otimes \varphi = (\varphi \otimes \varphi)\tau'.$$

Пусть V – линейное пространство со сплетением $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ и $X = \{x_i | i \in I\}$ – некоторый фиксированный линейный базис пространства V. Пусть X^* – множество всех ассоциативных слов в алфавите X. Очевидно, что X^* формирует линейный базис свободной ассоциативной алгебры $k\langle X\rangle$ порожденной множеством X. Алгебра $k\langle X\rangle$ изоморфна тензорной алгебре

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$$

линейного пространства V с конкатенативным произведением $(u \otimes' v)\mathbf{m'} = u \otimes v$, т.е. произведение $\mathbf{m'}$ собирает пару тензоров в один тензор. Известно [15], что сплетение τ имеет единственное расширение τ' на свободную алгебру $k\langle X\rangle$ такое, что $k\langle X\rangle$ является сплетенной алгеброй. Более того, существует каноническая сплетенная структура алгебры Хопфа на $T(V)$ и эта алгебра Хопфа играет важную роль в квантовой теории Ли [15]. Свободную ассоциативную алгебру можно рассматривать как обобщение алгебры квантовых многочленов. Группа автоморфизмов алгебры квантовых многочленов описана Дж. Алевым и М. Чамари [16]. Сплетенные алгебры и коалгебры также тесно связаны с уравнениями Янга-Бакстера [17].

Пусть $A_\tau = \langle k\left\langle X\right\rangle, \tau\rangle$ – сплетенная свободная ассоциативная алгебра порожденная множеством X над произвольным полем k со сплетением τ. Напомним, что автоморфизм алгебры A_τ – это одновременно автоморфизм свободной ассоциативной алгебры $k\left\langle X\right\rangle$ и автоморфизм сплетенного пространства $k\left\langle X\right\rangle$ со сплетением τ.

Данная работа посвящена описанию группы автоморфизмов двупорожденной сплетенной свободной ассоциативной алгебры с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1,-1,-1,-1)$.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся необходимые определения и факты о свободных сплетенных ассоциативных алгебрах. В разделе 3 доказывается, что группа всех автоморфизмов сплетенной свободной ассоциативной алгебры от двух порождающих над произвольным полем k с инволютивным диагональным сплетением $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ совпадает с группой нечетных автоморфизмов этой алгебры.

2. Сплетенные алгебры

Сплетенный моноид B_n [18] является ассоциативным моноидом порожденным сплетениями $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ с учетом соотношений

$$s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1},\ s_i s_j = s_j s_i,\ 1 \le k < n-1,\ |i-j| > 1. \tag{1}$$

Если вместо моноида рассматривать группу с множеством порождающих $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ и множеством определяющих соотношений (1), то придем к известным группам кос Артина.

Пусть k – произвольное поле. Линейное пространство V над полем k называется *сплетенным пространством*, если существует фиксированное линейное отображение $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ (в общем случае не обязательно обратимое), которое удовлетворяет *соотношению сплетения*

$$(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \tau)(\tau \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \tau). \tag{2}$$

Если $x_1, x_2, \cdots, x_n$ является базисом линейного пространства V, то для произвольных параметров $q_{is} \in k$, $1 \le i, s \le n$, линейное отображение τ определяемое как

$$\tau : x_i \otimes x_s \mapsto q_{is} \cdot x_s \otimes x_i \tag{3}$$

является сплетением и называется *диагональным сплетением.* Пусть V – линейное пространство со сплетением $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$. Рассмотрим линейные отображения

$$\tau_i = \mathrm{id}^{\otimes(i-1)} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}^{\otimes(n-i-1)} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}, \quad 1 \leq i < n.$$

Согласно (2) отображения τ_i удовлетворяют всем определяющим соотношениям (1) сплетенного моноида, т.е.

$$\tau_i\tau_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1}, \quad 1 \leq i < n-1; \quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \quad |i-j| > 1. \tag{4}$$

Положим $[k;k] = 1$ и

$$[m;k] = \tau_{k-1}\tau_{k-2}\cdots\tau_{m+1}\tau_m, \quad [k;m] = \tau_m\tau_{m+1}\cdots\tau_{k-2}\tau_{k-1}, \quad m < k. \tag{5}$$

Рассмотрим отображение $\nu_r^{k,n} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$, $k \leq r < n$ определяемое как суперпозиция τ_i:

$$\nu_r^{k,n} = [k;r+1][k+1;r+2]\cdots[k+n-r-1;n]. \tag{6}$$

В [15] доказано, что

$$\nu_r^{k,n} = [n;r][n-1;r-1]\cdots[n-r+k;k]. \tag{7}$$

Сплетение $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ называется *инволютивным*, если $\tau^2 = \mathrm{id}$. Известным примером инволютивного сплетения является *обычный флип* θ определяемый как $\theta(x \otimes y) = y \otimes x$ для всех $x, y \in V$. Пусть V и V' – сплетенные пространства со сплетениями τ и τ', соответственно. Линейное отображение $\varphi : V \to V'$ называется *гомоморфизмом сплетенных пространств*, если

$$\tau(\varphi \otimes \varphi) = (\varphi \otimes \varphi)\tau'. \tag{8}$$

Алгебра R с умножением $\mathbf{m} : R \otimes R \to R$ называется *сплетенной алгеброй*, если R является сплетенным пространством и

$$(\mathbf{m} \otimes \mathrm{id})\tau = \tau_2\tau_1(\mathrm{id} \otimes \mathbf{m}), \quad (\mathrm{id} \otimes \mathbf{m})\tau = \tau_1\tau_2(\mathbf{m} \otimes \mathrm{id}). \tag{9}$$

Как и выше, в этих формулах используется так называемая "экспоненциальная запись" для действий операторов, т.е. операторы в суперпозиции действуют слева направо.

Гомоморфизмом сплетенных алгебр называется линейное отображение, которое одновременно является гомоморфизмом алгебр и гомоморфизмом сплетенных пространств.

Пусть V – линейное пространство со сплетением $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$. Зафиксируем некоторый линейный базис $X = \{x_i | i \in I\}$ пространства V. Пусть X^* – множество всех ассоциативных слов в алфавите X. Очевидно, что X^* формирует линейный базис свободной ассоциативной алгебры $k\langle X\rangle$ порожденной множеством X. Алгебра $k\langle X\rangle$ изоморфна тензорной алгебре

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$$

линейного пространства V с конкатенативным произведением $(u \otimes' v)\mathbf{m}' = u \otimes v$, т.е. произведение $\mathbf{m}'$ собирает пару тензоров в один тензор. По определению $V^{\otimes 0} = k \cdot 1$, где 1 – пустое слова в X^*, т.е. $1 \otimes v = v \otimes 1 = v$.

Соответствующие тензорам из $V^{\otimes m}$ слова множества X^* будем считать словами длины m. Длину слова $v \in X^*$ будем обозначать через $\mathrm{d}(v)$. Для любого $x_i \in X$ положим $\mathrm{mdeg}(x_i) = \varepsilon_i$. где $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ – стандартный базис в Z_+^n. Если $v = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s} \in X^*$, то положим $\mathrm{mdeg}(v) = \mathrm{mdeg}(x_{i_1}) + \mathrm{mdeg}(x_{i_2}) + \cdots + \mathrm{mdeg}(x_{i_s})$. Вектор $\mathrm{mdeg}(v)$ назавем *мультистепенью слова* v.

Хорошо известно [15], что сплетение τ имеет единственное расширение τ' на свободную ассоциативную алгебру $k\langle X\rangle$ такое, что $k\langle X\rangle$ является сплетенной алгеброй. Для любого $0 \leq r \leq n$ через θ_r обозначим линейное отображение

$$\theta_r : V^{\otimes n} \to V^{\otimes r} \otimes' V^{\otimes(n-r)}$$

определяемое как

$$(z_1z_2\cdots z_n)\,\theta_r = z_1z_2\cdots z_r \otimes' z_{r+1}\cdots z_n, \quad z_i \in X.$$

Сплетение τ' определено в [15] следующим образом

$$(u \otimes' v)\tau' = (u \otimes v)\nu_r^{1,n}\,\theta_{n-r}, \quad u \in V^{\otimes r},\ v \in V^{\otimes(n-r)} \tag{10}$$

(Если $r=0$ или $r=n$, то это определение означает, что $(1\otimes' v)\tau' = v\otimes' 1$ или $(u\otimes' 1)\tau' = 1\otimes' u$, соответственно).

Пусть τ - диагональное сплетение вида (2), следующая лемма дает необходимые формулы для вычислений с τ'.

Лемма 1. *Пусть V – сплетенное пространство над полем k с базисом $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ и диагональным сплетением τ вида (3). Пусть $u, v \in X^*$, $\mathrm{mdeg}(u) = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$, $\mathrm{mdeg}(v) = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$. Тогда*

$$(u \otimes' v)\tau' = \prod_{i,j} q_{ij}^{s_i t_j}(v \otimes u). \tag{11}$$

Proof. Пусть $t = t_1 + \cdots + t_n$, $s = s_1 + \cdots + s_n$, тогда $\mathrm{d}(u) = s$, $\mathrm{d}(v) = t$. Проведем индукцию по t. Если $t = 0$, то $v = 1$ и $(u \otimes' 1)\tau' = 1 \otimes u$. Пусть $v = v'x_h$, тогда $\mathrm{mdeg}(v') = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$, где $(l_1, l_2, \cdots, l_n) = (t_1, t_2, \cdots, t_{h-1}, t_h - 1, t_{h+1}, \cdots, t_n)$. Согласно (10) и (6) имеем

$$(u \otimes' v)\tau' = (u \otimes' v'x_h)\tau' = (u \otimes' v'x_h)\nu_s^{1,s+t}\theta_t =$$

$$= (u \otimes' v' \otimes x_h)(\tau_s\tau_{s-1}\cdots\tau_1)(\tau_{s+1}\tau_s\cdots\tau_2)\cdots(\tau_{s+t-2}\tau_{s+t-3}\cdots\tau_{t-1})(\tau_{s+t-1}\tau_{s+t-2}\cdots\tau_t)\theta_t.$$

По предположению индукции

$$(u \otimes' v)\tau' = (u \otimes' v' \otimes x_h)\tau' = \prod_{i,j} q_{ij}^{s_i l_j}(v' \otimes u \otimes x_h)(\tau_{s+t-1}\tau_{s+t-2}\cdots\tau_t)\theta_t =$$

$$= \prod_{i,j} q_{ij}^{s_i l_j} q_{ih}^{s_i}(v \otimes u) = \prod_{i,j} q_{ij}^{s_i t_j}(v \otimes u). \quad \square$$

$\square$

3. Нечетные автоморфизмы

Пусть $k\langle X\rangle = k\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра с конечным множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ над произвольным полем k. Через $\varphi = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ обозначим автоморфизм алгебры $k\langle X\rangle$ такой, что $\varphi(x_1) = f_1, \varphi(x_2) = f_2, \cdots, \varphi(x_n) = f_n$. Через $\mathrm{Aut}_k k\langle X\rangle$ обозначим множество всех автоморфизмов алгебры $k\langle X\rangle$. Автоморфизм вида

$$(x_1, \cdots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \cdots, x_n),$$

где $0 \neq \alpha \in k,\ f \in k\langle X \setminus \{x_i\}\rangle$, называется *элементарным.* Очевидно, что имеет место следующая градуировка

$$k\langle X\rangle = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus \cdots,$$

здесь $A_0 = k, A_1 = kx_1 + kx_2 + \cdots + kx_n, \ldots, A_n$ является линейной оболочкой слов длины n. Автоморфизм $\varphi = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ называется *нечетным автоморфизмом*, если $f_1, f_2, \cdots, f_n \in A_1 \oplus A_3 \oplus A_5 \oplus \cdots$. Группу всех нечетных автоморфизмов обозначим через $(\mathrm{Aut}_k A_\tau)_{odd}$. Элемент $f \in k\langle X\rangle$ можно представить в следующем виде $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + f_n$, где $f_i \in A_i$, $f_n \neq 0$, тогда f_n назовем *старшей однородной частью* f и обозначим через $\overline{f}$. Степенью элемента f будем считать степень его старшей однородной части $\overline{f}$, т.е. $\deg f = \deg f_n = n$. Через $\varphi = (f_1, f_2)$ обозначим автоморфизм алгебры A такой, что $\varphi(x_i) = f_i,\ i \in \{1, 2\}$. Для автоморфизма $\varphi = (f_1, f_2)$ число

$$\deg\varphi = \deg f_1 + \deg f_2$$

назовем степенью φ. Преобразование двойки (f_1, f_2), которое заменяет только один элемент f_i на элемент вида $\alpha f_i + g$, где $0 \neq \alpha \in k,\ g \in k\,\langle f_j | j \neq i\rangle$ назовем *элементарным.*

Запись $\varphi \to \psi$ означает, что двойка ψ получается из φ с помошью одного элементарного преобразования. Автоморфизм φ назовем *элементарно сократимым*, если существует автоморфизм такой, что $\varphi \to \psi$ и $\deg \psi < \deg \varphi$.

Зафиксируем двумерное векторное пространство V над полем k с линейным базисом x_1, x_2 и инволютивным диагональным сплетением $\tau = (q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22})$. $A = k\langle x_1, x_2\rangle = T(V)$ является свободной ассоциативной алгеброй на пространстве V. Тогда A становится сплетенной ассоциативной алгеброй со сплетением τ' определенным в разделе 2. В дальнейшем это расширение будем обозначать также через τ, а сплетенную алгебру через $A_\tau = \langle A, \tau\rangle$.

Лемма 2. *Пусть* $A = k\langle x_1, x_2\rangle = T(V)$ *– свободная ассоциативная алгебра на двумерном пространстве* $V = kx_1 + kx_2$ *и* $\varphi = (f_1, f_2)$ *– автоморфизм алгебры* A *такой, что* $\deg \varphi = \deg f_1 + \deg f_2 \geq 3$. *Тогда*

$$\bar{f_1} = \alpha(ax_1 + bx_2)^r, \quad \bar{f_2} = \beta(ax_1 + bx_2)^s, \tag{12}$$

где $r + s \geq 3, \quad r \mid s$ *или* $s \mid r, \quad \alpha, \beta \in k^*, \, a, \, b \in k$ *и* $a, \, b$ *одновременно не равны нулю.*

Proof. Пусть $\deg f_1 = r$ и $\deg f_2 = s$, где deg – обычная функция степени на $A = k\langle x_1, x_2\rangle$. Без потери общности, мы можем предположить, что $r \leq s$. Проведем индукцию по $n = r + s$. Пусть $n = r + s = 3$, так как $r \leq s$, то $\deg f_1 = 1, \deg f_2 = 2$. Пусть $\bar{f_1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

Известно, что автоморфизмы свободной ассоциативной алгебры от двух порождающих являются ручными [1,4], тогда любой автоморфизм этой алгебры с помощью элементарных сокращений можно привести к линейному автоморфизму. Учитывая это, существует преобразование $(f_1, f_2) \to (f_1, \beta f_2 - g(f_1))$, где $\beta \neq 0, \, g(f_1) \in k\langle f_1\rangle$, такое, что $\deg(\beta f_2 - g(f_1)) = 1$. Так как $\deg(f_2) = 2$, то $\overline{g(f_1)} = \gamma f_1^2$. Отсюда имеем

$$\beta \bar{f_2} - \gamma \bar{f_1^2} = \beta \bar{f_2} - \gamma\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right)^2 = 0.$$

Отсюда $\beta \bar{f_2} = \gamma \bar{f_1^2}$.

Докажем справедливость утверждения леммы для $n = r + s$. Как и выше, существует преобразование $(f_1, f_2) \to (f_1, \beta f_2 - g(f_1)), \, \beta \neq 0, \, g(f_1) \in k\langle f_1\rangle$, такое, что $\deg(\beta f_2 - g(f_1)) < s$. По предположению индукции $\overline{f_1} = \alpha\left(ax_1 + bx_2\right)^r$, тогда $g = \gamma_{s/r} f_1^{s/r} + \gamma_{s/r-1} f_1^{s/r-1} + \cdots + \gamma_0, \, \gamma_{s/r} \neq 0, \, \gamma_i \in k$ и $r|s$. Далее

$$\beta \overline{f_2} - \overline{g(f_1)} = \beta \bar{f_2} - \gamma_{s/r}\alpha^r (ax_1 + bx_2)^s = 0.$$

Отсюда $\overline{f_2} = \mu\left(ax_1 + bx_2\right)^s, \, \mu \in k^*$. □ □

Лемма 3. *Пусть* V *– сплетенное пространство над полем* k *с базисом* $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *и инволютивным диагональным сплетением* $\tau = (-1, -1, -1, -1)$. *Пусть также* $u, \, v \in X^*, \, r = \mathrm{d}(u), \, t = \mathrm{d}(v)$. *Тогда*

$$(u \otimes v)\tau = (-1)^{rt}(v \otimes u).$$

Proof. Справедливость утверждения леммы непосредственно следует из леммы 1. □ □

Лемма 4. *Пусть* $A_\tau = \langle k\langle x_1, \, x_2\rangle, \tau\rangle$ *– сплетенная свободная ассоциативная алгебра от двух порождающих* x_1, x_2 *над произвольным полем* k *с инволютивным диагональным сплетением* $\tau = (-1, -1, -1, -1)$. *Тогда эндоморфизм* $\varphi : A_\tau \to A_\tau$ *заданный правилом*

$$\varphi(x_1) = x_1, \, \varphi(x_2) = \alpha x_2 + \beta x_1^m,$$

где m *– нечетное число, является нечетным автоморфизмом алгебры* A_τ.

Proof. Очевидно, что отображение φ является автоморфизмом свободной ассоциативной алгебры $k\langle x_1, x_2\rangle$. Для доказательства утверждения леммы необходимо показать, что τ является также автоморфизмом сплетенного пространства A_τ, т.е. выполняется условие

$$\tau(\varphi \otimes \varphi) = (\varphi \otimes \varphi)\tau.$$

Проведем индукцию по $\mathrm{d}(u)+\mathrm{d}(v)$. Очевидно, что утверждение леммы справедливо при $\mathrm{d}(u)+\mathrm{d}(v)=0$.

Пусть $u=u'x_i$. По лемме 3 имеем

$$((u\otimes v)\tau)(\varphi\otimes\varphi)=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}(v\otimes u)(\varphi\otimes\varphi)=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u). \tag{13}$$

Если $x_i=x_1,$ тогда по условию леммы $\varphi(x_1)=x_1$ и

$$((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=(\varphi(u')\varphi(x_1)\otimes\varphi(v))\tau=(\varphi(u')\otimes x_1\otimes\varphi(v))\tau=((\varphi(u')\otimes((x_1)\otimes\varphi(v))\tau)\tau_1,$$

где $(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_i)\tau_1=(\varphi(u')\otimes\varphi(v))\tau\otimes x_i$. По лемме 3 и предположению индукции имеем

$$\begin{aligned}((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=(-1)^{\mathrm{d}(v)}\left(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_1\right)\tau_1=\\ =(-1)^{\mathrm{d}(v)}(-1)^{\mathrm{d}(u')\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')\varphi(x_1)=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u).\end{aligned} \tag{14}$$

Если $x_i=x_2,$ тогда по условию леммы $\varphi(x_2)=\alpha x_2+\beta x_1^m$ и

$$\begin{gathered}((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=\left(\varphi(u')\otimes\varphi(x_2)\otimes\varphi(v)\right)\tau=\left(\varphi(u')\otimes(\alpha x_2+\beta x_1^m)\otimes\varphi(v)\right)\tau=\\ =\alpha(\varphi(u')\otimes x_2\otimes\varphi(v))\tau+\beta(\varphi(u')\otimes x_1^m\otimes\varphi(v))\tau=\\ =\alpha\left(\varphi(u')\otimes(x_2\otimes\varphi(v))\tau\right)\tau_1+\beta\left(\varphi(u')\otimes(x_1^m\otimes\varphi(v))\tau\right)\tau_2,\end{gathered}$$

где $(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_1^m)\tau_2=(\varphi(u')\otimes\varphi(v))\tau\otimes x_1^m$. По лемме 3 и предположению индукции имеем

$$\begin{gathered}((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=\alpha(-1)^{\mathrm{d}(v)}(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_2)\tau_1+\beta(-1)^{m\mathrm{d}(v)}(\varphi(u')\otimes\varphi(v)\otimes x_1^m)\tau_2\\ =\alpha(-1)^{\mathrm{d}(v)}(-1)^{\mathrm{d}(u')\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')x_2+\beta(-1)^{m\mathrm{d}(v)}(-1)^{\mathrm{d}(u')\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')x_1^m\\ =\alpha(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')x_2+\beta(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)+\mathrm{d}(v)(m-1)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')x_1^m.\end{gathered}$$

Так как m – нечетное число, то не сложно заметить, что четности чисел $\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)+\mathrm{d}(v)(m-1)$ и $\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)$ совпадает. Тогда из последнего равенства следует, что

$$((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u')(\alpha x_2+\beta x_1^m)=(-1)^{\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(v)}\varphi(v)\otimes\varphi(u). \tag{15}$$

Из (13) – (15) получим $((u\otimes v)\tau)(\varphi\otimes\varphi)=((u\otimes v)(\varphi\otimes\varphi))\tau$. Следовательно, φ является нечетным автоморфизмом алгебры A_τ. □ ▯

Лемма 5. *Пусть* $A_\tau=\langle k\langle x_1,\,x_2\rangle\,,\tau\rangle$ *– сплетенная свободная ассоциативная алгебра от двух порождающих* x_1,x_2 *над произвольным полем* k *с инволютивным диагональным сплетением* $\tau=(-1,-1,-1,-1)$. *Эндоморфизм* $\varphi=(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3,\ \beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3)$ *алгебры* A_τ *является автоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\alpha_3=\beta_3=0$.

Proof. Очевидно, что φ является автоморфизмом свободной ассоциативной алгебры $k\langle x_1,x_2\rangle$. По определению φ будет является автоморфизмом алгебры A_τ, если выполняется условие

$$\tau(\varphi\otimes\varphi)=(\varphi\otimes\varphi)\tau.$$

Последние условие эквивалентно равенству

$$((x_i\otimes x_j)\tau)(\varphi\otimes\varphi)=((x_i\otimes x_j)(\varphi\otimes\varphi))\tau,\ \text{для всех}\ 1\le i,j\le 2.$$

То есть,

$$-\varphi(x_j)\otimes\varphi(x_i)=(\varphi(x_i)\otimes\varphi(x_j))\tau,\ \text{для всех}\ 1\le i,j\le 2.$$

Не сложно заметить, что последние равенство выполняет тогда и только тогда, когда $\alpha_3=\beta_3=0.$ □ ▯

Теорема 1. *Пусть* $A_\tau=\langle k\langle x_1,\,x_2\rangle\,,\tau\rangle$ *– сплетенная свободная ассоциативная алгебра от двух порождающих* x_1,x_2 *над произвольным полем* k *с инволютивным диагональным сплетением* $\tau=(-1,-1,-1,-1)$. *Тогда*

$$\mathrm{Aut}_kA_\tau=(\mathrm{Aut}_kA_\tau)_{odd}.$$

Proof. Пусть $\varphi = (f_1, f_2)$ – любой автоморфизм алгебры A_τ и $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$ – старшие однородные части f_1 и f_2, соответственно. Если $\deg\varphi = 2$, то очевидно, что $\varphi \in (\mathrm{Aut}_k A_\tau)_{odd}$. Пусть $\deg\varphi = \deg f_1 + \deg f_2 \geq 3$, тогда согласно лемме 2

$$\begin{aligned} \overline{f_1} &= \alpha_1(ax_1 + bx_2)^{s_1}, \\ \overline{f_2} &= \alpha_2(ax_1 + bx_2)^{s_2}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $s_1 + s_2 \geq 3$, $s_1 \mid s_2$, или $s_2 \mid s_1$, α_1, $\alpha_2 \in k^*$, a, $b \in k$ и a, b одновременно не равны нулю. Так как φ является автоморфизмом A_τ, тогда из условие $\tau(\varphi\otimes\varphi) = (\varphi\otimes\varphi)\tau$ следует, что

$$\overline{((x_i \otimes x_j)\tau)(\varphi\otimes\varphi)} = \overline{((x_i\otimes x_j)(\varphi\otimes\varphi))\tau},\ 1 \leq i, j \leq 2.$$

Отсюда

$$\overline{-\varphi(x_j)\otimes\varphi(x_i)} = \overline{(\varphi(x_i)\otimes\varphi(x_j))\tau}.$$

С учетом (16) имеем

$$-\alpha_i\alpha_j(ax_1+bx_2)^{s_j}\otimes(ax_1+bx_2)^{s_i} = \alpha_i\alpha_j(ax_1+bx_2)^{s_i}\otimes(ax_1+bx_2)^{s_j}\tau,\ 1\leq i,j\leq 2.$$

Когда $i = 1$, $j = 2$ получим

$$-\alpha_1\alpha_2(ax_1+bx_2)^{s_2}\otimes(ax_1+bx_2)^{s_1} = \alpha_1\alpha_2(ax_1+bx_2)^{s_1}\otimes(ax_1+bx_2)^{s_2}\tau.$$

Выберем термы $x_1^{s_2}\otimes x_1^{s_1}$, $x_2^{s_2}\otimes x_2^{s_1}$, $x_1^{s_2}\otimes x_2^{s_1}$, $x_2^{s_2}\otimes x_1^{s_1}$ и сравним коэффициенты при них

$$\begin{aligned} &(-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_1+s_2} = (-1-(-1)^{s_1s_2})b^{s_1+s_2} \\ &= (-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_2}b^{s_1} = (-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_1}b^{s_2} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично для $i = 1$, $j = 1$ имеем

$$\begin{aligned} &(-1-(-1)^{s_1^2})a^{2s_1} = (-1-(-1)^{s_1^2})b^{2s_1} \\ &= (-1-(-1)^{s_1^2})a^{s_1}b^{s_1} = (-1-(-1)^{s_1^2})a^{s_1}b^{s_1} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично для $i = 2$, $j = 1$ имеем

$$\begin{aligned} &(-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_1+s_2} = (-1-(-1)^{s_1s_2})b^{s_2+s_1} \\ &= (-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_2}b^{s_1}. = (-1-(-1)^{s_1s_2})a^{s_1}b^{s_2} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Аналогично для $i = 2$, $j = 2$ имеем

$$\begin{aligned} &(-1-(-1)^{s_2^2})a^{2s_2} = (-1-(-1)^{s_2^2})b^{2s_2} \\ &= (-1-(-1)^{s_2^2})a^{s_2}b^{s_2} = (-1-(-1)^{s_2^2})a^{s_2}b^{s_2} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Не сложно заметить, что для любых a и b условия (17) – (20) выполняются только в том случае, когда s_1^2, s_1s_2, s_2^2 – нечетные числа. Отсюда s_1 и s_2 – нечетные числа. Как было указано выше $s_1 \mid s_2$ или $s_2 \mid s_1$.

Если $s_2 \geq s_1$, тогда φ можно представить в виде следующей композиции

$$\varphi = \varphi_1 \circ \psi_1,$$

где $\varphi_1 = (f_1,\ f_2 - (\alpha_2/\alpha_1^{s_2/s_1})f_1^{s_2/s_1})$, $\psi_1 = (x_1,\ x_2 + (\alpha_2/\alpha_1^{s_2/s_1})x_1^{s_2/s_1})$.

Если $s_1 \geq s_2$, тогда φ можно представить в виде следующей композиции

$$\varphi = \varphi_1' \circ \psi_1',$$

где $\varphi_1' = (f_1 - (\alpha_1/\alpha_2^{s_1/s_2})f_2^{s_1/s_2},\ f_2)$, $\psi_1' = (x_1 + (\alpha_1/\alpha_2^{s_1/s_2})x_2^{s_1/s_2},\ x_2)$.

Через G^* обозначим группу автоморфизмов следующего вида

$$\begin{aligned} G^* = \{\varphi = (x_1,\ \alpha x_2 + \beta x_1^m) \\ \text{или}\ \varphi = (\alpha x_1 + \beta x_2^r, x_2),\ \text{где}\ \alpha,\ \beta\in k^*, m, r - \text{любые нечетные числа}\}. \end{aligned}$$

По лемме 4 ψ_1 и ψ'_1 – нечетные автоморфизмы алгебры A_τ. Следовательно, $\varphi_1, \varphi'_1 \in \mathrm{Aut}_k A_\tau$ и φ можно представить в виде

$$\varphi = \psi_m \circ \psi_{m-1} \circ \ldots \circ \psi_1,$$

где ψ_m – линейный автоморфизм, а $\psi_{m-1}, \ldots, \psi_1 \in G^*$. Отсюда следует, что φ является нечетным автоморфизмом алгебры A_τ. Следовательно, $\mathrm{Aut}_k A_\tau$ совпадает с $(\mathrm{Aut}_k A_\tau)_{odd}$.□
□

Подтверждение
Работа выполнена в рамках проекта AP 08052290 МОН РК.

Список литературы

1 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II // Trans. Amer. Math. Soc. –1971. – Vol. 160. – P. 393–401; –1972. –Vol. 171.– P. 309–315.
2 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. reine angew Math. – 1942. – Vol.184. –P. 161–174.
3 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables // Nieuw Archief voor Wisk. – 1953. – Vol. 1 № 3. – P. 33–41.
4 Makar-Limanov L.G. The automorphisms of the free algebra of two generators// Funktsional. Anal. i Prilozhen. –1970.,Vol. 4. № 3. –P. 107–108.
5 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra – 2009. – Vol. 322. № 9. – P. 3318 – 3330.
6 Kozybaev D., Makar-Limanov L. G., Umirbaev U. The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras // Asian-Eur. J. Math. –2008. – Vol. 1. № 2. –P. 243—254.
7 Cohn P.M. Free associative algebras // Bull. London Math. Soc. –1969. – Vol.1. –P. 1–39.
8 Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras // Trans. Amer. Math. Soc.– 1968. – Vol. 132. – P. 553-562.
9 Курош А.Г. Неассоциативные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб.– 1947. –Т. 20. С. 239–262.
10 Ширшов А.И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Матем. сб. –1954. – Т. 34. №1. – С. 81-88.
11 Ширшов А.И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Матем. сб. –1953. – Т. 33. №2. – С. 441-452.
12 Witt E. Die Unterringer der freien Lieschen Rings // Math. Z. –1956. – Vol. 64. – P. 195-216.
13 Михалев А.А. Подалгебры свободных цветных суперaлгебр Ли // Мат.заметки. –1985. – Т. 37. №5. – С. 653 -661.
14 Штерн А.С. Свободные суперaлгебры Ли // Сиб. мат. журн. –1986. – Т. 27. –С. 170-174.
15 Kharchenko V. Quantum Lie theory. A multilinear approach : Lecture Notes in Mathematics 2150. Springer, Cham, 2015. – xiii+302 p.
16 Alev J., Chamarie M. Dérivations et automorphismes de quelques algébres quantiques // Comm. Algebra – 1992. – Vol. 20. № 6. – P. 1787–1802.
17 Takeuchi M. Survey of braided Hopf algebras. In: New Trends in Hopf Algebra Theory // Contemp. Math. AMS. – 2000. Vol. 267. –P.301–324.
18 Umirbaev U., Kharchenko V. Free braided nonassociative Hopf algebras and Sabinin τ - algebras // Journal of Algebra – 2017. –Vol. 492. –P. 130-146.

Р. Муталип, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Екі айнымалы өрілген еркін ассоциативті алгебралардың тақ автоморфизмдері

Аннотация: Кез келген k өрісіндегі екі айнымалы $\tau = (-1, -1, -1, -1)$ инволютивті диагоналды өрімі бар өрілген еркін ассоциативті алгебраның $\varphi(x_1) = x_1$, $\varphi(x_2) = \alpha x_2 + \beta x_1^m$ (α, $\beta \in k$, m – тақ сан) ережесімен берілген φ эндоморфизмі тақ автоморфизм болатыны дәлелденген. Сонымен қатар, осы алгебраның ψ сызықты эндоморфизмі ψ аффинді болған жағдайда және тек сонда ғана автоморфизм болатындығы ксетілген. Кез келген k өрісіндегі екі айнымалы $\tau = (-1, -1, -1, -1)$ инволютивті диагоналды өрімі бар өрілген еркін ассоциативті алгебраның барлық автоморфизмдер группасы осы алгебраның тақ автоморфизмдер группасымен сәйкес келетіндігі көрсетілді.

Түйін сөздер: Еркін ассоциативті алгебра, өрім, авторморфизм.

R. Mutalip, A.S. Naurazbekova

L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Odd automorphisms of two generated braided free associative algebras

Abstract: It is proved that an endomorphism φ of an braided free associative algebra in two generators over an arbitrary field k with an involutive diagonal braiding $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ given by the rule $\varphi(x_1) = x_1, \varphi(x_2) = \alpha x_2 + \beta x_1^m$, where $\alpha, \beta \in k$, m is an odd number, is an odd automorphism. It is also proved that the linear endomorphism ψ of this algebra is an automorphism if and only if ψ is affine. It is shown that the group of all automorphisms of braided free associative algebra in two variables over an arbitrary field k with an involutive diagonal braiding $\tau = (-1,-1,-1,-1)$ coincides with the group of odd automorphisms of this algebra.

Keywords: Free associative algebra, braiding, automorphism.

References

1 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II, Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 160. P. 393-401; 1972. Vol. 171. P. 309-315.

2 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene, J. reine angew Math. 1942. Vol.184. P. 161-174.

3 Van der Kulk W. On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wisk. 1953. Vol. 1. № 3. P. 33-41.

4 Makar-Limanov L.G. The automorphisms of the free algebra of two generators, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1970. Vol. 4. № 3. P. 107–108.

5 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, J. Algebra. 2009. Vol. 322. № 9. P. 3318-3330.

6 Kozybaev D., Makar-Limanov L. G., Umirbaev U. The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras, Asian-Eur. J. Math. 2008. Vol. 1. № 2. P. 243—254.

7 Cohn P.M. Free associative algebras, Bull. London Math. Soc. 1969. Vol.1. P. 1-39.

8 Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132. P. 553-562.

9 Kurosh A.G. Neassociativnye algebry i svobodnye proizvedeniya algebr[Non-associative free algebras and free products of algebras], Matem. sb. [Mathematical collection]. 1947. Vol. 20. P. 239-262.

10 Shirshov A.I. Podalgebry svobodnyh kommutativnyh i svobodnyh antikommutativnyh algebr [Subalgebras of free commutative and free anticommutative algebras], Matem. sb.[Mathematical collection]. 1954. Vol. 34. №1. P. 81-88.

11 Shirshov A.I. Podalgebry svobodnyh lievyh algebr[Subalgebras of free Lie algebras], Matem. sb.[Mathematical collection]. 1953. Vol. 33. №2. P. 441-452.

12 Witt E. Die Unterringer der freien Lieschen Rings, Math. Z. 1956. Vol. 64. P. 195-216.

13 Mihalev A.A. Podalgebry svobodnyh cvetnyh superalgebr Li [Subalgebras of free colored Lie superalgebras], [Math notes]. 1985. Vol. 37. №5. P. 653 -661.

14 Shtern A.S. Svobodnye superalgebry Li[Free Lie Superalgebras], [Siberian Mathematical Journal]. 1986. Vol. 27. P. 170-174.

15 Kharchenko V. Quantum Lie theory. A multilinear approach : Lecture Notes in Mathematics 2150. Springer, Cham, 2015. xiii+302 p.

16 Alev J., Chamarie M. Dérivations et automorphismes de quelques algébres quantiques, Comm. Algebra. 1992. Vol. 20. № 6. P. 1787-1802.

17 Takeuchi M. Survey of braided Hopf algebras. In: New Trends in Hopf Algebra Theory, Contemp. Math. AMS. 2000. Vol. 267. P.301-324.

18 Umirbaev U., Kharchenko V. Free braided nonassociative Hopf algebras and Sabinin τ - algebras, Journal of Algebra. 2017. Vol. 492. P. 130-146.

Сведения об авторах:

Муталип Р. – преподаватель кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Нур-Султан, Казахстан.

Науразбекова А.С. – PhD, и.о. доцента кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева 2, Нур-Султан, Казахстан.

Mutalip R. – Lecturer of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpaev str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – PhD, Assosiate Professor of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 2 Satpaev str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 06.05.2020