Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 131, №2, 28-34 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.31**

М. Илолов [1] , Х.С. Кучакшоев [2]

[1] *Центр инновационного развития науки и новых технологий Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан*
[2] *Университет Центральной Азии, Хорог, Таджикистан*
(E-mail: [1] ilolov.mamadsho@gmail.com, kholiknazar.kuchakshoev@ucentralasia.org)

Абстрактные дробные интегро-дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями

Аннотация: Настоящая работа посвящена вопросам теории существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных решений интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка с импульсными воздействиями в банаховом пространстве. Полученные здесь абстрактные утверждения находят применения при анализе разрешимости начально-краевых задач для дробных дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и систем таких уравнений. Такие задачи являются объектом возрастающего интереса исследователей в связи с широким спектром возможных приложений в физике, механике, химии, биологии, медицине и других областях науки и технологий. Наиболее важными с точки зрения практического применения являются многомерные уравнения с импульсными воздействиями описывающие различные процессы с моментальными изменениями состояний системы в сложных нелинейных фрактальных средах.

Ключевые слова: производная Капуто, импульсное воздействие, дробные дифференциальные уравнения, дробные интегро-дифференциальные уравнения, слабое решение.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-131-2-28-34

Введение. За последние десятилетия теория дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями становится объектом возрастающего интереса исследователей в связи с широким спектром возможных применений в физике, химии, биологии, медицине и многих других областях. Наиболее важными с точки зрения приложений являются импульсные уравнения с дробными порядками производных, которые описывают процессы с моментальными изменениями состояний системы в сложных нелинейных фрактальных средах.

Данное направление исследований и некоторые его итоги изложены в монографиях [1-4]. Настоящая статья является развитием публикаций [5-7] и посвящена интегро-дифференциальным полулинейным уравнениям с дробным порядком производной и с импульсными воздействиями в банаховом пространстве.

Необходимые определения и обозначения. Пусть $\mathbb{R}$ - действительная ось, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, X - банахово пространство с нормой $||\cdot||$. Далее, пусть $J=[0,b]\subset\mathbb{R}_+$ и $C(J,X)$ банахово пространство всех непрерывных функций f из J в X с нормой $||f||_C=\sup\limits_{t\in J}||f(t)||$. Пусть $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=b$. Введем пространство кусочно-непрерывных функций $PC(J,X)=\{f:J\to X|f\in C((t_i,t_{i+1}],X), i=0,\cdots,m+1,$ существуют $f(t_i^-)$ и $f(t_i^+), i=0,\cdots,m+1$ и $f(t_i^-)=f(t_i)\}$ оснащенное PC- нормой Чебышева

$$||f||_\infty=\sup_{t\in J}||f(t)||.$$

Здесь $u(t_i^+)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}u(t_i+\varepsilon)$, $u(t_i^-)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}u(t_i-\varepsilon)$ представляют лево и правосторонние пределы при $t=t_i$ соответственно.

Рассмотрим в X задачу Коши для дробного импульсного интегро-дифференциального уравнения

$$\left\{\begin{array}{r} {}^cD_t^{\alpha}u(t) = Au(t) + F(t, u(t), (Ku)(t)), \alpha \in (0,1), t \in J, t \neq t_k, \\ u(0) = u_0, \\ \Delta u(t_k) \equiv u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k(u(t_k)), k = 1, \cdots m, \end{array}\right. \qquad (1)$$

где ${}^cD_t^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$ - дробная производная в смысле Капуто [4], A - инфинитиземальный генератор C_0 - полугруппы линейных ограниченных операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}, F : J \times X \times X \to X$ - заданная измеримая функция, функции $I_k : X \to X, k = 1, \cdots, m$ отображают ограниченные множества в себя, оператор K определяется равенством

$$(Ku)(t) = \int_0^t k(t,s)u(s)ds,$$

$k \in C(D, R^+)$ - множество всех положительных непрерывных на $D = \{(t,s) \in R^2, 0 \leq s \leq t < T\}$ функций и $k^+ = \sup\lim_t \int_0^t k(t,s)ds < \infty, u_0 \in X.$

Примем

Определение 1. *Функция $u \in PC(J,X)$ называется PC слабым решением задачи (1), если она удовлетворяет следующему интегрально-сумматорному уравнению*

$$u(t) = T(t)x_0 + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)) +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)} Z(t-s) f(s, x(s), (Kx)(s))ds, t \in J.$$

Здесь

$$T(t) = \int_0^{\infty} \xi_{\alpha}(\theta)S(t^{\alpha}\theta)d\theta, \xi_{\alpha}(\theta) = \frac{1}{\alpha}\theta^{-1-1/\alpha}\omega_{\alpha}(\theta^{-1/\alpha}) \geq 0,$$

$$\omega_{\alpha}(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-2}\theta^{-\alpha n-1}\frac{\Gamma(n\theta+1)}{n!}sin(n\pi\theta), \theta \in (0,\infty),$$

$\Gamma(z)$ *- гамма функция Эйлера,* ξ_{α} *- функция плотности вероятности на* $(0,\infty)$ *такая, что*

$$\xi_{\alpha}(\theta) \geq 0, \theta \in (0,\infty), \int_0^{\infty} \xi_{\alpha}(\theta)d\theta = 1$$

и

$$Z(t) = \alpha\int_0^{\infty} \theta\xi_{\alpha}(\theta)S(t^{\alpha}\theta)d\theta.$$

Лемма 1. *Семейство операторов $\{T(t)\}_{t\geq 0}, \{Z(t)\}_{t\geq 0}$ обладает следующими свойствами.*

1) для любого $t \geq 0, T(t)$ и $Z(t)$ являются линейными ограниченными операторами, т.е. для любого $x \in X$ существует постоянная $M \geq 0$ такая, что

$$||T(t)x|| \leq M||x||, ||Z(t)x|| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}||x||;$$

2) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, и $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ *сильно непрерывны;* 3) *для каждого $t > 0, T(t)$ и $Z(t)$ являются компактными операторами при условии компактности $S(t)$.*

Лемма 2. *Пусть $u \in PC(J,R)$ удовлетворяет неравенство*

$$||u(t)|| \leq c_1(t) + c_2\int_0^t (t-s)^{\beta+1}||u(s)||ds + \sum_{0<t_k<t}\theta_k|u(t_k^-)|,$$

где $c_1(t)$ *неотрицательная непрерывная и неубывающая функция на* J *и* $c_1 \geq 0, \theta_k \geq 0$ *постоянные. Тогда*

$$||u(t)|| \leq c_1(t)(1+\theta E_\beta(c_2\Gamma(\beta)t^\beta)^k E_\beta(c_2\Gamma(\beta)t^\beta), t \in (t_k, t_{k+1}] \tag{2}$$

где $\theta = \max\limits_k \theta_k, E_\beta$ *- функция Миттаг-Леффлера.* Далее, пусть выполнены следующие предположения: (H1) Функция $F : J \times X \times X \to X$ локально липшиц - непрерывна относительно u, v, т.е. для любого $p > 0$ существуют постоянные $L_1(p)$ и $L_2(p)$ такие, что

$$||F(t, u_1, v_1) - F(t, u_2, v_2)|| \leq L_1(p)||u_1 - u_2|| + L_2(p)||v_1 - v_2||;$$

(H2) Существует постоянная C такая, что

$$||F(t, u, v)|| \leq C(1 + ||u|| + ||v||), u, v \in X;$$

(H3) Для функций $I_k : X \to X, k = 1, \cdots, m$ существуют постоянные $h_k > 0$ такие, что

$$||I_k(u) - I_k(v)|| \leq h_k||u - v||, u, v \in X.$$

Основной результат составляет следующая

Теорема 1. *Предположим, что условия (H1),(H2) и (H3) выполнены. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Для каждого $u_0 \in X$ *задача (1) имеет единственное* PC *- слабое решение* $u(t)$ *.*

2. Существует постоянная $C_1 > 0$ *такая, что для начальных условий* u_0, v_0 *из* X *соответствующие слабые решения* $u(t), v(t)$ *задачи (1) с* $u_0, u(0) = u_0, v_0, v(0) = v_0$ *удовлетворяют оценке*

$$||u - v||_{PC(J,K)} \leq C_1||u_0 - v_0||.$$

Для доказательства теоремы рассмотрим полулинейное интегро-дифференциальное уравнение с дробным порядком производной

$$^cD_t^\alpha u(t) = Au(t) + F(t, u(t), (Ku)(t)), 0 < \alpha < 1, t \in J \tag{3}$$

и с начальным условием

$$u(0) = u_0 \tag{4}$$

на пространстве $C(J, X)$ с весовой нормой

$$||u||_r = \max_{t \in J} ||u(t)||e^{-rt},$$

где r определяется ниже. Определим отображение $P : C(J, X) \to C(J, X)$ равенством

$$(Px)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Z(t-s) F(s, u(s), (Ku)(s)) ds.$$

Используя лемму 1 и предположение (H1) получим

$$||(Pu)(t)|| \leq ||T(t)u_0|| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||Z(t-s)|| \cdot ||F(s, u(s), (Ku)(s)))|| ds \leq$$

$$\leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)} b^\alpha + \frac{MC}{\Gamma(\alpha)} (||u||_r + ||Ku||_r) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{rs} ds \leq$$

$$\leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)} b^\alpha + \frac{MC(1+||K||)||u||_r}{\Gamma(\alpha)} r^{-\alpha} e^{rt} \gamma(\alpha, rt) \leq$$

$$\leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)} b^\alpha + MCe^{rt}(1 + ||K||)||u||_r,$$

где $\gamma(\alpha, t) = \int\limits_0^t z^{\alpha-1} e^{-z} dz$ - нижняя неполная гамма - функция (см. [8], стр. 954).

Заметим, что с помощью замены $r(t-s)=z$ можно перейти к равенству

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{rs} ds = r^{-\alpha} e^{rt} \gamma(\alpha, rt).$$

Таким образом, получаем

$$||Pu||_r \leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)} b^\alpha + MC(1+||K||)||u||_r.$$

Из приведенных здесь рассуждений следует, что любое слабое решение $u(t)$ уравнения (3) удовлетворяет оценке

$$||u(t)||_r \leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)} b^\alpha + \frac{MC(1+||K||)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||u(s)|| ds.$$

Далее из неравенства (2) следует, что

$$||u||_C \leq \tilde{\rho} = (||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)} b^\alpha) E_\alpha(\frac{MC(1+||K||)}{\Gamma(\alpha)} b^\alpha).$$

Следовательно, любое решение u уравнения (3) удовлетворяет оценке

$$||u||_C \leq \tilde{\rho}.$$

Пусть теперь $u_1, u_2 \in C(J,K)$ такие, что $||u_i|| \leq \tilde{\rho}, i=1,2$. Тогда из (H1) получим

$$||(Pu_1)(t) - (Pu_2)(t)|| \leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||Z(t-s)|| \times$$

$$\times ||F(s, u_1(s), (Ku_1))(s) - F(s, u_2(s), (Ku_2))(s)|| ds \leq$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} (L_1(\tilde{\rho}) + ||K|| L_2(\tilde{\rho})) ||x_1 - x_2||_r \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{rs} ds \leq$$

$$\leq M(L_1(\tilde{\rho} + ||K||) L_2(\tilde{\rho})) r^{-\alpha} ||x_1 - x_2||_r e^{rt}.$$

Вводя обозначения

$$r_0 = (2Mmax\{C, L_1(\tilde{\rho}) + ||K|| L_2(\tilde{\rho})\})^{1/\alpha},$$

получим

$$||P||_{r_0} \leq M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)} b^\alpha + \frac{1}{2} ||u||_{r_0} \cdot ||(Pu_1)(t) - (Pu_2)(t)||_{r_0} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} ||u_1 - u_2||_{r_0}$$

Взяв

$$\rho_0 = 2(M||u_0|| + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)} b^\alpha)$$

увидим, что P является сжимающим отображением на

$$\bar{B}_{r_0}(\rho_0) = \{u \in C(J,X), ||u||_{r_0} \leq \rho_0\}, \rho_0 \leq \tilde{\rho}.$$

Отсюда следует, что уравнение (3) имеет единственное решение удовлетворяющее также начальному условию (4). Теперь переходим к построению слабого решения для импульсной задачи (1). Для $t \in [0, t_1]$ из вышеизложенных результатов следует, что решение уравнения

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Z(t-s) F(s, u(s), (Ku)(s)) ds$$

является слабым решением уравнения (1) на $[0, t_1]$. Скачок единственным образом определяется выражением

$$u(t,+0) = u(t,-0) + I, (u(t,-0) = u(t_1) + I(u(t_1))) = u_1.$$

Для $t \in (t_1, t_2)$ имеем

$$u(t) = T(t)u_0 + T(t-t_1)I_1(u(t_1)) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Z(t-s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds =$$

$$= T(t)u_0 + T(t-t_1)I_1(u(t_1)) + \int_0^{t_1} (t_1-s)Z(t_1-s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds +$$

$$+ \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} Z(t-s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds =$$

$$f_1(t) + \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} Z(t-s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds,$$

где

$$f_1(t) = T(t)u_0 + T(t-t_1)I_1(u(t_1)) + \int_0^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} Z(t-s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds$$

Данное уравнение разрешимо на $C([t_1, t_2], X)$. Из изложенных выше результатов следует, что u является слабым решением (1) на интервале (t_1, t_2). Повторяя процедуру на $t \in (t_2, t_3], (t_3, t_4], ...(t_m, b]$ получим единственное слабое решение (1) на J в виде

$$u(t) = T(t)u_0 + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)) +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Z(t-s)F(s, u(s), (Ku)(s))ds, t \in J.$$

Далее, применяя лемму 2 установим непрерывную зависимость решения от начальных данных. Заметим, что

$$||u(t) - v(t)|| \leq T(t)||u_0 - v_0|| + \sum_{i=1}^n ||T(t-t_i)|| \cdot ||I_i(u(t_i)) - I_i(v(t_i))|| +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||Z(t-s)|| \cdot ||F(s, u(s), (Ku)(s)) - F(s, v(s), (Kv)(s))||ds \leq$$

$$\leq M||u_0 - v_0|| + M\sum_{i=1}^n h_i||u(t_i - v(t_i))|| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} +$$

$$+ ||K||L_2(\rho) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ||u(s) - v(s)||ds.$$

Итак

$$||u(t) - v(t)|| \leq C_2||u_0 - v_0||, t \in J,$$

где

$$C_2 = M[1 + ME_\alpha(M(L_1(\rho) + ||K||L_2(\rho)b^\alpha]^m E_\alpha(M(L_1(\rho)) + ||K||L_2(\rho)).$$

Заключение. Полученные здесь абстрактные результаты находят свое применение при решении конкретных начально-краевых задач для нелинейных импульсных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка и систем таких уравнений.

Список литературы

1 Lakshimikantham V., Bainov D.D. and Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations. -Singapore: World Scientific, 1989. -273 p.

2 Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. and Chapovsky Y. Impulsive Differential Equations. -Singapore: World Scientific, 1995. -472pp.

3 Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Application of Fractional Calculus to Dynamic of Particles, Fields and Media. -New York: Springer, 2010. -507 p.

4 Feckan M, Wang J., Pospisil M. Fractional Order Equations and Inclusions. -Berlin: De Grayter, 2017. -361 p.

5 Самойленко А.М., Илолов М. К теории эволюционных уравнений с импульсными воздействиями// Докл. АН СССР. -1991. -Т. 316. -№ 4. -С. 822-824.

6 Самойленко А.М., Илолов М. К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсными воздействиями //Докл. АН СССР. -1991. -Т. 319. -№ 1. -С. 65-67.

7 Илолов М., Кучакшоев Х.С., Гулджонов Д.Н. О дробных линейных уравнениях Вольтерра в банаховых пространтсвах// Докл АН РТ. -2018. -Т. 61. -№ 2. -С. 113-121.

8 Градштейн И.С., Рыжык И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. -Москва: Наука, 1971. - 1100 стр.

М. Илолов [1] , Х.С. Кучакшоев [2]

[1] *Тәжікстан Республикасы Ғылым академиясының ғылым мен ғылыми технологияларды инновациялық дамыту орталығы, Душанбе, Тәжікстан*

[2] *Орталық Азия университеті, Хорог, Тәжікстан*

Импульстік әсерлі абстрактілі бөлшек интегро-дифференциалдық теңдеулер

Аннотация: Мақала Банах кеңістігінде импульстік әсері бар бөлшек ретті интегро-дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің бар болуы, олардың жалғыздығы және бастапқы шарттардан үзіліссіз тәуелді болу мәселелерінің анализіне арналған. Мақалада алынған абстрактілі тұжырымдар бөлшек ретті дербес туындылы дифференциалдық, интегро-дифференциалдық теңдеулер мен теңдеулер жүйелері үшін бастапқы-шекаралық есептердің шешімділігін зерттеуде қолданылады. Физика, механика, химия, биология, медицина және ғылым мен технологияның басқа да салаларында кеңінен қолданысқа ие болуына байланысты мұндай есептерге зерттеушілердің қызығушылықтары артып келе жатқан нысан болып табылады. Күрделі сызықты емес фракталды ортада күйі лезде өзгермелі жүйелі әртүрлі процесстерді сипаттайтын импульсті әсері бар көпөлшемді теңдеулер практикалық колданысы тұрғысынан алып қарағанда негүрлым маңыздысы болып келеді.

Түйін сөздер: Капуто туындысы, импульсті әсер, бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер, бөлшек ретті интегро-дифференциалдық теңдеулер, әлсіз шешім.

M. Ilolov [1] , Kh.S. Kuchakshoev [2]

[1] *Center of Innovative Development of Science and New Technologies, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan*

[2] *University of Central Asia, Khorog, Tajikistan*

Abstract Fractional Integro-Differential Equations with Impulsive Actions

Abstract: This paper is dedicated to the problems of existence, uniqueness and continuous dependence of the solution of fractional integro-differential equations with impulsive actions on the initial conditions in Banach space. The obtained statements will find their applications in analysis of solution of initial-boundary value problems for fractional differential equations and systems of such equations. These types of problems are more attractive for researchers due to the broad applications in physics, mechanics, chemistry, biology, medicine, and other areas of science and technology. Multidimensional equations with impulsive actions, which describes a different process with immediate changes of state in complex nonlinear fractal mediums have more real life applications .

Keywords: Caputo derivative, impulse influence, fractional differential equations, fractional integro-differential equations, weak solution.

References

1 Lakshimikantham V., Bainov D.D. and Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations (World Scientific, Singapore, 1989, 273 p.).

2 Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. and Chapovsky Y. Impulsive Differential Equations (World Scientific, Singapore 1995, 472p.).

3 Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Application of Fractional Calculus to Dynamic of Particles (Fields and Media, Springer, New York, 2010, 507 p.).
4 Fekon M., Wang J., Pospisil M. Fractional Order Equations and Inclusions (De Grayter, Berlin 2017, 361 p.).
5 Samoilenko A.M., Ilolov M. K teorii evolyucionnyh uravnenij s impul'snymi vozdejstviyami [To the theory of impulsive evolution equations], Report. AS USSR. 1991. Vol. 316. No 4. P. 822-824.
6 Samoilenko A.M., Ilolov M. K teorii neodnorodnyh po vremeni evolyucionnyh uravnenij s impul'snymi vozdejstviyami [To the theory of non-homogeneous in time impulsive evolution equations], Report. AS USSR. 1991. Vol. 319. No 1. P. 65-67.
7 Ilolov M., Kuchakshoev Kh.S., Guljonov D.N. О дробных линейных уравнениях Вольтерра в банаховых пространтсвах [About fractional linear Volterra linear equation in Banach space], Report AS. RT. 2018. Vol. 61. No 2. P. 113-121.
8 Gradstein I.S, Ryjik I.M. Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij [Table of integrals, sums, series and products] (Nauka, Moscow, 1971).

Information about author:

Илолов М. - доктор физико-математических наук, профессор, Академик АН РТ, зав.отделом Центра инновационного развития науки и новых технологии Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан.

Кучакшоев Х. - кандидат физико-математичексих наук, Университет Центральной Азии, Хорог, Таджикистан.

Ilolov M. - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Head of Department at Center of Innovative Development of Science and New Technologies, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan.

Kuchakshoev Kh. - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Mathematics, University of Central Asia, Khorog, Tajikistan.

Поступила в редакцию 17.01.2020