Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2020, том 130, №1, 59-72 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.23.23**

Ю. А. Фарков

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Москва, Россия
(E-mail: farkov-ya@ranepa.ru)

Система Крестенсона-Леви и ступенчатые масштабирующие функции

Аннотация: С помощью системы Крестенсона-Леви и модифицированного условия Коэна построены ступенчатые масштабирующие функции, порождающие кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Обсуждаются аналогии с конструкциями ортогональных всплесков и фреймов Парсеваля на группах Виленкина.

Ключевые слова: функции Уолша, ортогональные всплески, масштабирующие ступенчатые функции, кратномасштабный анализ, фреймы Парсеваля, группы Виленкина, система Крестенсона-Леви.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2020-130-1-59-72

Большинство результатов о всплесках на группах Виленкина относится к группе G_p, определяемой по фиксированному целому $p \geq 2$ (см. монографию [1] и библиографию в [2, 3]). Элементами группы G_p являются последовательности $x = (x_j)$, где $x_j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ для $j \in \mathbb{Z}$ и только конечное число членов x_j с отрицательными индексами могут быть отличными от нуля. Обозначим через θ нулевую последовательность. Если $x \neq \theta$, то существует единственное число $k = k(x)$ такое, что $x_k \neq 0$ и $x_j = 0$ для всех $j < k$. Групповая операция $\dot{+}$ на G_p определяется как покоординатное сложение по модулю p:

$$(z_j) = (x_j) \dot{+} (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \,(\mathrm{mod}\, p) \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{Z},$$

а топология вводится с помощью системы окрестностей нуля:

$$U_l = \{(x_j) \in G_p : \ x_j = 0 \quad \text{для всех } j \leq l\}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

При $p = 2$ группа G_p изоморфна локально компактной канторовой группе $\mathcal{C}$, а подгруппа U_0 изоморфна компактной канторовой группе $\mathcal{C}_0$, т.е. топологическому декартовому произведению счетного множества циклических групп второго порядка с дискретной топологией. Хорошо известно, что классические функции Уолша можно интерпретировать как характеры группы $\mathcal{C}_0$.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Отображение $\lambda : G_p \to \mathbb{R}_+$, заданное равенством

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j}, \qquad x = (x_j) \in G_p,$$

позволяет записывать многие результаты о всплесках на группе G_p наглядно. При этом мере Хаара на группе G_p соответствует мера Лебега на полупрямой $\mathbb{R}_+$, преобразованию Фурье функций из $L^2(G_p)$ соответствует обобщенное преобразование Фурье-Уолша функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$, а обобщенным функциям Уолша, образующим ортонормированный базис в $L^2(U_0)$, соответствуют определенные ниже функции Крестенсона-Леви.

Обозначим через $\langle s \rangle_p$ остаток при делении целого числа s на p, а через $[x]$ и $\{x\}$ целую и дробную части числа x соответственно. Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ положим

$$x_j = \langle\, [p^j x]\, \rangle_p\,, \quad x_{-j} = \langle\, [p^{1-j} x]\, \rangle_p\,, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Эти числа являются цифрами разложения числа x по основанию p:

$$x = [x] + \{x\} = \textstyle\sum_{j<0} x_j p^{-j-1} + \sum_{j>0} x_j p^{-j}\,.$$

Видно, что существует номер $k = k(x)$ такой, что $x_{-j} = 0$ для всех $j > k$. Равенство $z = x \oplus y$ означает, что
$$z = \sum_{j<0} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j-1} + \sum_{j>0} \langle x_j + y_j \rangle_p p^{-j}$$
и, соответственно, $z = x \ominus y$, если $z \oplus y = x$.

Пусть $\varepsilon_p = \exp(2\pi i/p)$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\chi(x,y) = \varepsilon_p^{t(x,y)}, \quad \text{где} \quad t(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x_j\, y_{-j} + x_{-j}\, y_j).$$

Обобщенное преобразование Фурье-Уолша функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ определяется по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \overline{\chi(x,\omega)}\, dx,$$

и стандартным образом переносится на $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Определим на интервале $[0,1)$ функцию
$$w_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/p), \\ \varepsilon_p^l, & x \in [lp^{-1}, (l+1)p^{-1}),\, l \in \{1, \ldots, p-1\}, \end{cases}$$
и продолжим ее на полупрямую $\mathbb{R}_+$ с периодом 1. *Система Крестенсона-Леви* $\{w_l : l \in \mathbb{Z}_+\}$, совпадающая [5, § 1.5] при $p = 2$ с классической системой Уолша, определяется по формуле

$$w_0(x) \equiv 1, \qquad w_l(x) = \prod_{j=1}^{k} (w_1(p^{j-1}x))^{\nu_j}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где ν_j – цифры p-ичного разложения числа l:

$$l = \sum_{j=1}^{k} \nu_j p^{j-1}, \quad \nu_j \in \{0, 1 \ldots, p-1\}, \quad \nu_k \neq 0, \quad k = k(l).$$

Хорошо известно, что система $\{w_l : l \in \mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2[0,1]$. Исторические сведения о функциях Крестенсона-Леви можно найти в книгах [4, 5] (см. также [6] и недавние статьи [7, 8]). В настоящей статье с помощью системы Крестенсона-Леви излагаются основные методы построения ступенчатых масштабирующих функций с компактными носителями на полупрямой $\mathbb{R}_+$, аналогичные соответствующим методам для группы Виленкина G_p. Основное внимание уделяется масштабирующим функциям, порождающим кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

При построении ортогональных всплесков с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$, определяемых с помощью функций Крестенсона-Леви, центральную роль играют масштабирующие уравнения вида

$$\varphi(x) = p \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \varphi(px \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Функции φ, удовлетворяющие уравнениям вида (1), называют *масштабирующими* (или *уточняющими*) функциями. *Маской* масштабирующего уравнения (1) (или его решения φ) называют полином

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \overline{w_k(\omega)}. \tag{2}$$

Применяя преобразование Фурье-Уолша, можем записать уравнение (1) в виде

$$\widehat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/p) \widehat{\varphi}(\omega/p), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Коэффициенты уравнения (1) восстанавливаются по значениям маски

$$b_l := m_0(l/p^n), \qquad l \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}, \tag{4}$$

с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона по формуле

$$a_k = \frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} b_l w_l(k/p^n), \qquad k \in \{0, 1, \dots, p^n - 1\}. \tag{5}$$

Числовые промежутки

$$I_l^{(n)} = [lp^{-n}, (l+1)p^{-n}), \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

называются p*-ичными интервалами ранга* n. Топология на $\mathbb{R}_+$, определяемая этими интервалами, называется W*-топологией* (при $p = 2$ – *диадической топологией*; см., например, [4, с.11]). Класс функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$, имеющих в W-топологии компактные носители на $\mathbb{R}_+$, обозначается через $L^2_c(\mathbb{R}_+)$. Для произвольной функции $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ через $supp\, \varphi$ обозначается носитель функции φ в W-топологии. Следующие два предложения доказаны в [9] (см. также [10] для случая $p = 2$).

Предложение 1. *Если функция* $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и* $\widehat{\varphi}(0) = 1$, *то*

$$supp\, \varphi \subset [0, p^{n-1}) \quad \text{и} \quad \widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega) \quad \text{для всех} \quad \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Предложение 2. *Пусть функция* $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и* $\widehat{\varphi}(0) = 1$. *Если система* $\{\varphi(\cdot \ominus k) \,:\, k \in \mathbb{Z}_+\}$ *ортонормирована в* $L^2(\mathbb{R}_+)$, *то*

$$m_0(0) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{p-1} |m_0(\omega + k/p)|^2 = 1 \quad \text{для всех} \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Поскольку маска $m_0(\omega)$ является 1-периодической функцией и принимает постоянные значения на p-ичных интервалах ранга n, условие (6) с использованием обозначения (4) записывается в виде

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{p-1} |b_{s+kp^{n-1}}|^2 = 1 \quad \text{для всех} \quad s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}. \tag{7}$$

Отметим, что при построении фреймов Парсеваля вместо (7) применяется [2,13,14] условие

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{p-1} |b_{s+kp^{n-1}}|^2 \le 1 \quad \text{для всех} \quad s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}. \tag{8}$$

Для любой функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ положим

$$\varphi_{j,k}(x) = p^{j/2}\varphi(p^j x \ominus k), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что функция φ порождает кратномасштабшый анализ (КМА) в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \,:\, k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, подпространства

$$V_j := \overline{\mathrm{span}}_{L^2(\mathbb{R}_+)}\{\varphi_{j,k} \,:\, k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

обладают свойствами

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R}_+).$$

Отметим, что каждая функция $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$, имеющая носитель на интервале $[0, p^{n-1})$ и порождающая КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяет уравнению вида (1). Действительно, из условий $V_0 \subset V_1$ и $\varphi \in V_0$ следует, что функция φ разлагается в ряд Фурье по системе $\{\varphi_{1,k} \,:\, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Поэтому имеет место разложение

$$\varphi(x) = p \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k \varphi(px \ominus k)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}|a_k|^2<\infty$. Предположим, что $supp\varphi\subset[0,p^{n-1})$ и разобъем правую часть предыдущего разложения на две суммы:

$$\varphi(x)=S_1(x)+S_2(x)=p\sum_{k=0}^{p^n-1}a_k\varphi(px\ominus k)+p\sum_{k=p^n}^{\infty}a_k\varphi(px\ominus k).$$

Если $x\geq p^{n-1}$ и $k<p^n$, то $px\ominus k\geq p^n$ и, значит, $\varphi(x)=S_1(x)=0$. Если же $x<p^{n-1}$, то $S_2(x)=0$ (так как $px\ominus k\geq p^n$ для всех $k\geq p^n$). Таким образом, для данной функции φ верно равенство (1).

Множество $E\subset\mathbb{R}_+$ называется *конгруэнтным* $[0,1)$ *по модулю* $\mathbb{Z}_+$, если мера Лебега множества E равна 1 и для каждого $x\in[0,1)$ существует $k\in\mathbb{Z}_+$ такое, что $x\oplus k\in E$.

Теорема 1 [9]. *Пусть функция* $\varphi\in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *является решением уравнения* (1) *и маска* m_0 *этого уравнения удовлетворяет условию* (7). *Предположим, что существует множество* $E\subset\mathbb{R}_+$, *конгруэнтное* $[0,1)$ *по модулю* $\mathbb{Z}_+$, *состоящее из конечного числа* p*-ичных интервалов, содержащее интервал* $[0,p^{-n})$ *и такое, что выполнено условие*

$$\inf_{j\in\mathbb{N}}\inf_{\omega\in E}|m_0(p^{-j}\omega)|>0. \tag{9}$$

Тогда функция φ *порождает КМА в* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Неравенство (9) выражает модифицированное условие Коэна, которое при построении всплесков и масштабирующих функций на группах Кантора и Виленкина использовалось в [11] и [12] соответственно. При условиях теоремы 1 по функции φ и указанным в формуле (4) значениям маски m_0 можно построить ортогональные всплески $\psi_1,\dots,\psi_{p-1}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (о численных методах реализации соответствующего алгоритма см. в [13] - [16]).

Предложение 3. *Если коэффициенты уравнения* (1) *выбраны так, чтобы выполнялись условия* (6) *и* $m_0(\omega)\neq 0$ *для всех* $\omega\in[0,1/p)$, *то система* $\{\varphi(\cdot\ominus k)\ :\ k\in\mathbb{Z}_+\}$ *ортонормирована в* $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Действительно, легко видеть, что при условиях предложения 3 условие (9) выполняется для $E=[0,1)$.

Обозначим через $\Im_n^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ множество всех функций $f\ :\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$, принимающих постоянные значения на p-ичных интервалах ранга m и равных нулю на промежутке $[p^n,+\infty)$. Согласно [5, § 6.2] для любых $m,n\in\mathbb{Z}_+$ имеем

$$f\in\Im_n^{(m)}(\mathbb{R}_+)\iff\widehat{f}\in\Im_m^{(n)}(\mathbb{R}_+). \tag{10}$$

Для построения ступенчатых масштабирующих функций, удовлетворяющих уравнению (1), полезны следующие два предложения.

Предложение 4. *Если функция* $\varphi\in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (1), $\widehat{\varphi}(0)=1$ *и* $\widehat{\varphi}(\omega)=0$ *для всех* $\omega\geq p^m$, *то функция* φ *принадлежит классу* $\Im_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ *и для любого* $\omega\in\mathbb{R}_+$ *верно равенство*

$$\widehat{\varphi}(\omega)\ =\ \prod_{j=1}^{\infty}m_0(p^{-j}\omega). \tag{11}$$

Предложение 5. *Если функция* $\varphi\in\Im_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *и* $\widehat{\varphi}(0)=1$, *то для маски* m_0 *уравнения* (1) *выполнены равенства*

$$\prod_{j=1}^{m+n}m_0(p^{-j}\omega)=0\quad\textit{для всех}\quad\omega\in[p^m,p^{m+1}). \tag{12}$$

Обратно, если для маски m_0 *уравнения* (1) *выполнены условия* (6) *и* (12), *то формула* (11) *задаёт функцию* $\varphi\in\Im_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$, *удовлетворяющую уравнению* (1).

Предложения 4 и 5 выводятся из свойства (10), предложения 1 и формулы

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\widehat{\varphi}(p^{-m-n}\omega)\prod_{j=1}^{m+n}m_0(p^{-j}\omega),\quad \omega\in\mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Для того чтобы система целых сдвигов функции $\varphi\in\mathfrak{S}_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ была ортонормированной, достаточно (см. теорему 1) выбрать значения соответствующей маски m_0 так, чтобы выполнялись условия (6) и (9), причем множество E в условии (9) должно быть конгруэнтно интервалу $[0,1)$ по модулю $\mathbb{Z}_+$. Отсюда с учетом предложения 5 замечаем, что при построении масштабирующей функции $\varphi\in\mathfrak{S}_{n-1}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ с помощью формулы (11) в качестве маски m_0 может быть выбран произвольный полином вида (2), для которого выполнены условия (7), (9) и (12) (сравните с рис. 6.1 в [17, с.254], иллюстрирующим результат работы типа "разрежь и склей" при построении ортогональных всплесков на прямой $\mathbb{R}$). При этом вместо проверки условия (12) достаточно убедиться, что $\widehat{\varphi}(\omega)=0$ для всех $\omega\ge p^m$.

Пример 1. Для $p=2$, $n=3$ значения маски m_0 в условии (7) выберем такими, что

$$b_0=1,\quad |b_1|=|b_3|=1,\quad b_2=0,\quad b_4=b_5=0,\quad |b_6|=1,\quad b_7=0.$$

В этом случае модуль маски m_0 на интервале $[0,1)$ совпадает с характеристической функцией множества

$$\widetilde{E}=\bigcup_{k=0}^{3}I_k,\quad I_0=[0,1/8),\ I_1=[1/8,1/4),\ I_2=[3/8,1/2),\ I_3=[3/4,7/8),$$

а условие (9) выполнено на множестве $E=2\widetilde{E}$. Учитывая предложение 3, расширим множество значений маски m_0, заменив равенства $b_2=0$ и $|b_6|=1$ условием $|b_2|^2+|b_6|^2=1$. Тогда из формулы (11) получим

$$\widehat{\varphi}(\omega)=\mathbf{1}_{[0,1/4)}(\omega)+b_1\mathbf{1}_{[1/4,1/2)}(\omega)+b_1b_2\mathbf{1}_{[1/2,3/4)}(\omega)+b_1b_3\mathbf{1}_{[3/4,1)}(\omega)+b_1b_3b_6\mathbf{1}_{[3/2,7/4)}(\omega)$$

и, следовательно,

$$\varphi(x)=(1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1+b_1w_1(x/4)+b_1b_2w_2(x/4)+b_1b_3w_3(x/4)+b_1b_3b_6w_6(x/4)).$$

Видно, что $supp\varphi\subset[0,4)$ и $\widehat{\varphi}(\omega)=0$ для всех $\omega\ge 2$. Отсюда с учетом (10) получаем, что $\varphi\in\mathfrak{S}_2^{(1)}(\mathbb{R}_+)$. Отметим также, что функция Хаара $\varphi=\mathbf{1}_{[0,1)}$ отвечает значениям $b_0=b_1=b_2=b_3=1$ (в силу (6) тогда $m_0(\omega)=1$ для $\omega\in[0,1/2)$ и $m_0(\omega)=0$ для $\omega\in[1/2,0)$).

Пример 2. Для $p=3$, $n=2$ выберем в (7) значения

$$b_0=1,\quad |b_1|=1,\quad b_2=b_3=b_4=0,\quad |b_5|=1,\quad b_6=b_7=b_8=0$$

и, соответственно, возьмем

$$\widetilde{E}=\bigcup_{k=0}^{2}I_k,\quad I_0=[0,1/9),\ I_1=[1/9,2/9),\ I_2=[5/9,2/3).$$

Как в примере 1 заменим равенства $b_2=0$ и $|b_5|=1$ условием $|b_2|^2+|b_5|^2=1$. Тогда условие (9) выполнено на множестве $E=3\widetilde{E}$ и с помощью формулы (11) получается ступенчатая масштабирующая функция

$$\varphi(x)=(1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1+b_1w_1(x/3)+b_2w_2(x/3)+b_1b_5w_5(x/3)),$$

порождающая КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Аналогично, если в (7) выбрать значения

$$b_0=1,\quad |b_1|^2+|b_7|^2=1,\quad |b_2|=1,\quad b_3=b_4=b_5=b_6=b_8=0,$$

то получится масштабирующая функция

$$\varphi(x)=(1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1+b_1w_1(x/3)+b_2w_2(x/3)+b_2b_7w_7(x/3)).$$

В случае $b_1 = 0$ условие (9) для соответствующей маски m_0 выполняется с множеством $E = [0, 1/3) \cup [2/3, 1) \cup [7/3, 8/3)$. Обе полученные в этом примере масштабирующие функции принадлежат классу $\Im_1^{(1)}(\mathbb{R}_+)$.

Пример 3. Пусть $n = 2$, $p \geq 3$ и модуль маски

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^2-1} a_k \overline{w_k(\omega)}, \quad \omega \in \mathbb{R}_+, \tag{14}$$

принимает всего два значения: 0 и 1, причем выполнено условие (6). Покажем, как выбрать значения

$$b_s = m_0(s/p^2), \quad s = 0, 1, \ldots, p^2 - 1, \tag{15}$$

так, чтобы функция φ, заданная равенством (11), имела ортонормированную систему целых сдвигов $\{\varphi(\cdot \ominus k) \ : \ k \in \mathbb{Z}_+\}$. Записывая индекс s в p-ичной системе, из (6) и (15) имеем

$$b_0 = 1, \quad \sum_{s_0=0}^{p-1} |b_{s_0+s_1 p}|^2 = 1, \quad s_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{16}$$

Выберем множество $E_l^{(0)} \subset \{1, 2, \ldots, p-1\}$, состоящее из l чисел, и положим $E_l^{(1)} = \{0, 1, \ldots, p-1\} \setminus E_l^{(0)}$ (так что $0 \in E_l^{(1)}$). Для $s \in \{1, \ldots, p-1\}$ положим

$$|b_s| = \begin{cases} 1, & s \in E_l^{(1)}, \\ 0, & s \in E_l^{(0)}. \end{cases} \tag{17}$$

Применяя (16) и (17), получим

$$b_{s_0+s_1 p} = 0 \quad \text{для всех} \quad s_0 \in E_l^{(1)}, \ s_1 \in \{1, \ldots, p-1\}. \tag{18}$$

Для фиксированного $j_0 \in E_l^{(1)}$, $j_0 \neq 0$, возьмем $j_1 \in E_l^{(0)}$ и положим

$$|b_{j_1+j_0 p}| = 1, \ b_{j_1+jp} = 0 \quad \text{для} \quad j \neq j_0, \ j \in \{1, \ldots, p-1\}.$$

Далее, выберем $j_2 \in E_l^{(0)}$, $j_2 \neq j_1$, и положим

$$|b_{j_2+j_1 p}| = 1, \ b_{j_2+jp} = 0 \quad \text{для} \quad j \neq j_1, \ j \in \{1, \ldots, p-1\}.$$

Продолжая этот процесс, на l-м шаге возьмем $j_l \in E_l^{(0)} \setminus \{j_1, \ldots, j_{l-1}\}$, и положим

$$|b_{j_l+j_{l-1} p}| = 1, \ b_{j_l+jp} = 0 \quad \text{для} \quad j \neq j_l, \ j \in \{1, \ldots, p-1\}.$$

Тем самым с учетом (17) и (18) определены все значения маски m_0 из формулы (15). А именно, для значений маски m_0 имеем

1) $b_0 = 1$,
2) $|b_s| = 1$ для всех $s \in E_l^{(1)} \setminus \{0\}$,
3) $|b_{j_1+j_0 p}| = |b_{j_2+j_1 p}| = \cdots = |b_{j_l+j_{l-1} p}| = 1$,
4) $b_s = 0$ в остальных случаях.

Видно, что модуль построенной маски m_0 равен 1 на p попарно непересекающихся p-ичных интервалах ранга 1 (поэтому для m_0 выполнено условие (9)). Таким образом, заданное по формуле (11) решение φ уравнения (1) принадлежит классу $\Im_1^{(l)}(\mathbb{R}_+)$ и имеет ортонормированную систему целых сдвигов в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Отметим, что в терминах группы Виленкина G_p пример 3 получается из [18, Теорема 4.6] (см. также [13, замечание 3.11]).

Обозначим через $\Im^{(m)}(\mathbb{R}_+)$ класс функций $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, принимающих постоянные значения на p-ичных интервалах ранга m. Положим $\Im(\mathbb{R}_+) := \cup_m \Im^{(m)}(\mathbb{R}_+)$. Следующее предложение для случая $p = 2$ доказано в [10].

Предложение 6. *Пусть $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ – решение масштабирующего уравнения* (1) *такое, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$. Функция φ не принадлежит классу $\Im(\mathbb{R}_+)$ в том и только в* *том случае, когда существует набор чисел* $\{d_k\}_{k=1}^l$, $l \le p^{n-1}+n-1$, $d_k \in \{0,1,\dots,p-1\}$ *такой, что*

(i) $d_1 = \dots = d_{n-1} = 0,\ d_n \ne 0$;

(ii) *существует целое число* j *такое, что* $n-1 \le j \le l-1$ *и* $d_{j-s} = d_{l-s}$ *для* $s = 0,\dots,n-2$;

(iii) $m_0(\omega^{(0)})m_0(\omega^{(1)})\dots m_0(\omega^{(l-n)}) \ne 0$, *где* m_0 *– маска масштабирующего уравнения* (1), *а значения* $\omega^{(k)}$ *вычисляются по формуле*

$$\omega^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\nu+k} p^{-\nu}, \quad k = 0,1,\dots,l-n.$$

В этом предложении условие (ii) означает, что для данного j в последовательности $\{d_k\}_{k=1}^l$ последние $n-1$ чисел совпадают с числами d_{j-n+2} , d_{j-n+3} , ... , d_{j-1} , d_j , т.е.

$$d_{l-n+2} = d_{j-n+2},\ d_{l-n+3} = d_{j-n+3},\ \dots,\ d_{l-1} = d_{j-1},\ d_l = d_j.$$

В частности, при $j = n-1$ последовательность $\{d_k\}_{k=1}^l$ будет начинаться и оканчиваться $n-1$ нулями, а при $j = l-1$ последние $n-1$ чисел последовательности $\{d_k\}_{k=1}^l$ совпадают с d_{l-n+1} . Для небольших p и n с помощью предложения 6 могут быть получены ступенчатые масштабирующие функции, указанные в [10, § 6] и [19, Приложение Б]. Известно [2, теорема 2.2], что при условии (8) эти масштабирующие функции порождают фреймы Парсеваля для $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Пример 4. В случае $p = 2$, $n = 3$ при условии $m_0(0) = 1$ уравнению (1) удовлетворяют следующие ступенчатые функции:

1) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)$, если $b_1 = 0$,

2) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)\,(1 + b_1w_1(x/4))$, если $b_1 \ne 0,\ b_2 = b_3 = 0$,

3) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)\,(1 + b_1w_1(x/4) + b_1b_2w_2(x/4))$, если $b_1b_2 \ne 0$, $b_3 = b_4 = b_5 = 0$,

4) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)\,(1 + b_1w_1(x/4) + b_1b_3w_3(x/4))$, если $b_1b_3 \ne 0$, $b_2 = b_6 = b_7 = 0$,

5) $\varphi(x) = (1/4)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b_1w_1(x/4) + b_1b_2w_2(x/4) + b_1b_3w_3(x/4) + b_1b_3b_6w_6(x/4))$, если $b_1b_2b_3b_6 \ne 0,\ b_4 = b_5 = b_7 = 0$ (сравните с примером 1).

Наряду с условием Коэна при построении ортогональных всплесков на вещественной прямой $\mathbb{R}$ применяются блокирующие множества и соответствующие им бинарные деревья (см. [20, § 3.2], [21]). Для маски вида (2) при $p = 2$ понятие блокирующего множества было введено в [10], а для масок на группе G_p это понятие использовалось, например, в [9, 15].

Для маски m_0 масштабирующего уравнения (1) блокирующее множество определяется следующим образом. Для произвольного $M \subset [0,1)$ положим

$$T_pM = \bigcup_{l=0}^{p-1} \Big\{ l/p + \omega/p \mid \omega \in M \Big\}.$$

Множество M называется *блокирующим для маски* m_0 , если оно представимо в виде объединения p -ичных интервалов ранга $n-1$, не содержит интервала $[0, p^{-n+1})$ и удовлетворяет условию

$$T_pM \setminus M \subset \mathrm{Z}(m_0),$$

где $\mathrm{Z}(m_0) := \{\, \omega \in [0,1) \mid m_0(\omega) = 0 \,\}$. Видно, что каждая маска может иметь только конечное число блокирующих множеств. Блокирующие множества для масок из примеров 1 и 2 указаны в [10, пример 3] и [13, пример 3.8] (некоторые другие примеры имеются в [19, 22]).

Теорема 2 [9]. *Пусть функция* $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *является решением уравнения* (1) *и маска* m_0 *этого уравнения удовлетворяет условию* (6). *Тогда функция* φ *порождает КМА в том и только в том случае, когда маска* m_0 *не имеет блокирующих множеств.*

В работах [23]- [25] для построения масштабирующих функций на группе G_p примененялись (N,m)-элементарные множества и N-валидные деревья. Сформулируем определения этих понятий для полупрямой $\mathbb{R}_+$ и проиллюстрируем на примерах выполнимость для соответствующих масок модифицированного условия Коэна.

Определение 1. Пусть $N,m\in\mathbb{N}$. Множество E называется (N,m)-*элементарным множеством*, если существуют числа ζ_j, $j=0,1,\dots,p^N-1$, такие, что

$$E=\bigcup_{j=0}^{p^N-1}\Delta^{(N)}(\zeta_j),\quad \Delta^{(N)}(\zeta_j)\cap\Delta^{(N)}(\zeta_{j'})=\emptyset \quad \text{для}\quad j\neq j',$$

где $\Delta^{(N)}(\zeta_j):=[\zeta_j/p^N,(\zeta_j+1)/p^N)$, $\zeta_0=0$, и для $\eta_j=[\zeta_j]$, $\xi_j=\{\zeta_j\}$ выполнены условия:

1) $\eta_j\in\{0,1,\dots,p^m-1\}$;
2) $\xi_j\in\{0,1/p^N,\dots,(p^N-1)/p^N\}$, $\xi_j\neq\xi_{j'}$ для $j\neq j'$;
3) $E\cap[p^{-N+l},p^{-N+l+1})\neq\emptyset$ для $l=0,1,\dots,m+N-1$.

Заметим, что из условия 2) следует равенство

$$\bigcup_{j=0}^{p^N-1}[\xi_j,\xi_j+p^{-N})=[0,1).$$

Кроме того, очевидно, всякое (N,m)-элементарное множество E имеет единичную меру Лебега и содержится в интервале $[0,p^m)$.

Определение 2. *Периодическим продолжением* $(N,1)$-элементарного множества $\widetilde{E}$ называется множество

$$P(\widetilde{E}):=\bigcup_{s=1}^{\infty}\bigcup_{l=0}^{p^s-1}(\widetilde{E}+l\cdot p). \tag{19}$$

Отметим, что $P(\widetilde{E})\supset\widetilde{E}\supset[0,p^{-N})$.

Пример 5. В случае $N=1$, $p=3$ множество $\widetilde{E}$ в определении 2 имеет вид

$$\widetilde{E}=[0,1/3)\cup[\zeta_1/3,(\zeta_1+1)/3)\cup[\zeta_2/3,(\zeta_2+1)/3),$$

где числа ζ_1 и ζ_2 представимы в виде

$$\zeta_j=\eta_j+\xi_j,\quad \eta_j\in\{0,1,2\},\quad \xi_j\in\{1/3,2/3\},\quad j\in\{1,2\},\quad \xi_1\neq\xi_2.$$

Числа ζ_1 и ζ_2 выбираются так, чтобы пересечение множества $\widetilde{E}$ с каждым из интервалов $[1/3,1)$ и $[1,3)$ было не пустым. В частности, при $\eta_1=0$, $\xi_1=1/3$, $\eta_2=2$, $\xi_2=2/3$, получаем $(1,1)$-элементарное множество

$$\widetilde{E}=[0,1/3)\cup[1/3,2/3)\cup[8/3,3).$$

Периодическое продолжение этого множества:

$$P(\widetilde{E})=\bigcup_{s=1}^{\infty}F_s(\widetilde{E}),$$

где

$$F_1(\widetilde{E})=\widetilde{E}\cup(\widetilde{E}+3)\cup(\widetilde{E}+6),$$
$$F_2(\widetilde{E})=F_1(\widetilde{E})\cup(\widetilde{E}+9)\cup(\widetilde{E}+12)\cup(\widetilde{E}+15)\cup(\widetilde{E}+18)\cup(\widetilde{E}+21)\cup(\widetilde{E}+24),$$

и, вообще,

$$F_s(\widetilde{E})=F_{s-1}(\widetilde{E})\cup\left(\bigcup_{k=3^{s-1}-1}^{3^s-1}(\widetilde{E}+3k)\right)\quad \text{для}\quad s\geq 2.$$

Определение 3. Будем говорить, что задано N-*валидное дерево* T, если T ориентировано от листьев к корню и удовлетворяет условиям:

1) каждая вершина дерева T имеет значение из множества $\{0, 1, \ldots, p-1\}$;

2) корень и все вершины дерева T до $(N-1)$-го уровня включительно имеют значение 0;

3) любой путь длины $N-1$ встречается в T и притом только один раз.

Отметим, что N-валидные деревья в случае $p = 2$ аналогичны бинарным деревьям, применявшимся в [21]. Каждому N-валидному дереву T сопоставим множество индексов $I(T)$ по правилу:

$$s \in I(T) \iff s = 0 \quad \text{или} \quad s = \sum_{k=0}^{N} s_k p^k, \ s_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\},$$

при условии, что путь $s_0 \to s_1 \to \cdots \to s_N$ встречается хотя бы один раз в каком-нибудь из путей дерева T.

Предложение 7 [23]. *Для любого N-валидного дерева T множество*

$$\widetilde{E}_T := \bigcup_{s \in I(T)} [sp^{-N}, (s+1)p^{-N}) \tag{20}$$

является $(N+1, 1)$-элементарным.

Пример 6. Пусть $N = 2$, $p = 3$, а дерево T выбрано как на рис. 1 в [23], но с противоположной ориентацией. Дерево T имеет следующие пути, начинающиеся в листьях и оканчивающиеся в корне:

$$P_1: \ 0 \to 1 \to 2 \to 0 \to 0, \quad P_2: \ 1 \to 1 \to 0 \to 2 \to 0 \to 0,$$

$$P_3: \ 2 \to 1 \to 0 \to 2 \to 0 \to 0, \quad P_4: \ 2 \to 2 \to 0 \to 0.$$

Множество индексов

$$I(T) = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 19, 21\}$$

находится из условия

$$s \in I(T) \setminus \{0\} \iff s = s_0 + 3s_1 + 9s_2,$$

где $s_0 \to s_1 \to s_2$ встречается хотя бы один раз в каком-нибудь из путей P_1, P_2, P_3, P_4. Из формулы (20) для данного дерева T получается множество

$$\widetilde{E}_T = [0, 1/9) \cup [2/9, 1/3) \cup [4/9, 1) \cup [19/9, 20/9) \cup [7/3, 22/9).$$

Отличные от нуля значения маски

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{26} a_k \overline{w_k(\omega)}$$

в условии (7) выберем такими, что $b_0 = 1$, $|b_2| = |b_4| = |b_5| = |b_6| = |b_7| = |b_8| = |b_{19}| = |b_{21}| = 1$. Отметим, что если все эти значения равны 1, то маска m_0 на интервале $[0, 1)$ совпадет с характеристической функциией множества $\widetilde{E}_T/3$. Кроме того, $m_0(\omega) = 1$ для всех $\omega \in [0, 1/27)$ и в силу предложения 4 формула

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{3} m_0(3^{-j}\omega), \quad \omega \in [0, 3),$$

задаёт масштабирующую функцию $\varphi \in \Im_2^{(1)}(\mathbb{R}_+)$. Для этой функции с помощью [15, формула (16)] получается разложение

$$\varphi(x) = \frac{1}{9}\mathbf{1}_{[0,1)}(y)(1 + b_2 w_2(y) + b_2 b_6 w_6(y) + b_2 b_7 w_7(y) + b_2 b_8 w_8(y)$$

$$+ b_2 b_6 b_{19} w_{19}(y) + b_2 b_7 b_{21} w_{21}(y) + b_2 b_4 b_6 b_{19} w_{58}(y) + b_2 b_5 b_6 b_{19} w_{59}(y)),$$

где $y = x/9$, $x \in [0,9)$. По построению, функция φ отлична от нуля на множестве $\widetilde{E}_T$ и обращается в нуль на $\mathbb{R}_+ \setminus \widetilde{E}_T$. Более того, модифицированное условие Коэна

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} \inf_{\omega\in E} |m_0(3^{-j}\omega)| > 0$$

выполнено для $E = \widetilde{E}_T$. Значит, по теореме 1 система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \ : \ k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Определение 4. Говорят, что множество E *порождено* N *-валидным деревом* T , если

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} p^k P(\widetilde{E}_T/p),$$

где множество $\widetilde{E}_T$ задано по формуле (20).

Предложение 8 [23]. *Пусть множество* E *порождено* N *-валидным деревом* T *с высотой* H *. Тогда множество* E *представимо в виде*

$$E = \bigcap_{k=1}^{H-N+1} p^k P(\widetilde{E}_T/p)$$

и является (N,m) *-элементарным множеством с* $m = H - 2N + 1$ *.*

Следующая теорема представляет собой переформулировку теоремы 4.1 статьи [23].

Теорема 3. *Пусть модуль маски* m_0 *масштабирующего уравнения* (1) *принимает только два значения:* 0 *или* 1, *причем* $m_0(0) = 1$ *. Предположим, что решение* φ *уравнения* (1), *заданное по формуле*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

таково, что $\widehat{\varphi} \in \Im_m^{(N)}(\mathbb{R}_+)$ *и* $|\widehat{\varphi}| = \mathbf{1}_E$, *где* $N = n - 1$ *и* E *является* (N,m) *-элементарным множеством. Тогда существует* N *-валидное дерево* T *с высотой* $H = m + 2N - 1$, *порождающее множество* E *.*

При условиях предложения 8 имеем $E \subset [0, p^m)$ и

$$\mathbf{1}_E(\omega) = \prod_{k=1}^{m+N} \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/p)}(p^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{21}$$

С другой стороны, согласно (13) верно равенство

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(p^{-m-N}\omega) \prod_{j=1}^{m+N} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{22}$$

Отметим, что формула (22) совпадает с (21), если $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_E$ и $m_0(\omega) = \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/p)}(\omega)$ для $\omega \in \widetilde{E}_T/p$ (отметим, что $p^{-m-N}E \subset [0, p^{-N}) \subset E$).

Пример 7. Пусть $N = 2$, $p = 3$, а дерево T и множество $\widetilde{E}_T$ как в примере 6. Тогда $H = 5$ и по предложению 8 множество

$$E = \bigcap_{k=1}^{4} 3^k P(\widetilde{E}_T/3), \quad E \subset [0,9),$$

является $(2,2)$ -элементарным. Полагая $\widetilde{E}_0 = \widetilde{E}_T/3$, как в примере 5 определим множества

$$F_1(\widetilde{E}_0) = \widetilde{E}_0 \cup (\widetilde{E}_0 + 3) \cup (\widetilde{E}_0 + 6)$$

и

$$F_s(\widetilde{E}_0) = F_{s-1}(\widetilde{E}_0) \cup \left(\bigcup_{k=3^{s-1}-1}^{3^s-1} (\widetilde{E}_0 + 3k) \right) \quad \text{для} \quad s \geq 2.$$

Тогда

$$P(\widetilde{E}_T/3) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s(\widetilde{E}_0).$$

Таким образом, если функция φ определена условием $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_E$, то согласно (21) и (22) имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{4} \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/3)}(3^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и с помощью теоремы 1 проверяется, что система $\{\varphi(\cdot \ominus k) \ : \ k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Произвольное N-валидное дерево T может быть записано в *векторной форме* $\widetilde{T}$ таким образом, что выполнены условия:

1) вершинами дерева $\widetilde{T}$ являются N-мерные векторы $\boldsymbol{s} = (s_N, s_{N-1}, \ldots, s_1)$ с компонентами $s_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $i \in 1, 2. \ldots, N$;

2) дерево $\widetilde{T}$ ориентировано от листьев к корню, причем корнем дерева $\widetilde{T}$ является N-мерный нулевой вектор;

3) для любой дуги $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{t}$ дерева $\widetilde{T}$ выполнено условие *суффикс – префикс*: первые $N-1$ компонент вектора $\boldsymbol{t}$ совпадают с последними $N-1$ компонентами вектора $\boldsymbol{s}$.

Высоты деревьев $\widetilde{T}$ и T связаны равенством $\widetilde{H} = H - N + 1$. Векторная форма применяется при $N \geq 2$; в случае $N = 1$ эти формы отождествляются: $\widetilde{T} = T$.

Вектору $\boldsymbol{t} = (t_N, t_{N-1}, \ldots, t_1)$ сопоставим число $t = t_1 + t_2 p + \cdots + t_N p^{N-1}$, $t \in \{0, 1, \ldots, p^N - 1\}$. Всем исходящим из вершины $\boldsymbol{s} = (s_N, s_{N-1}, \ldots, s_1)$ дерева $\widetilde{T}$ дугам $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{t}$ приписываются положительные веса λ_t, сумма которых равна 1. Аналогом сформулированной в [**?**] теоремы является следующее предложение.

Предложение 9. *Пусть числа* λ_t *определены для* N*-валидного дерева* $\widetilde{T}$ *как указано выше, причем* $N = n - 1$. *Предположим, что ненулевые значения маски* m_0 *выбраны так, что* $b_0 = 1$ *и* $|b_{t+kp^N}|^2 = \lambda_t$ *для* $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $t \in \{0, 1, \ldots, p^N - 1\}$. *Тогда решение* φ *уравнения* (1), *заданное по формуле*

$$\widehat{\varphi}(\omega) \ = \ \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

принадлежит классу $\mathfrak{I}_N^{(m)}(\mathbb{R}_+)$, *где* $m = \widetilde{H} - N$.

Отметим в заключение, что аналоги приведенных выше конструкций относятся к масштабирующим функциям, порождающим кратномасштабные анализы и соответствующие им ортогональные всплески с компактными носителями, ассоциированные с обобщенными функциями Уолша на группе Виленкина G_p. Для группы G_p необходимые и достаточные условия ортонормированности системы целых сдвигов масштабирующей функции, определяемой аналогично функции φ из предложения 9, доказаны в [25]. Ступенчатые ортогональные всплески в пространстве $L^2(G_p)$ (и аналогичные всплески в $L^2(\mathbb{R}_+)$) могут быть получены также итерационным методом построения всплесковых множеств (wavelet sets) (см. [26, Пример 5.4], [27]).

Список литературы

1 Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H. Construction of wavelets through Walsh functions / Industrial and Applied Mathematics. — Singapore: Springer, 2019. — 382 p.

2 Farkov Yu. A. Wavelet frames related to Walsh functions // Eur. J. Math. - 2019. - V. 5. - № 1. - P. 250-267.

3 Фарков Ю. А. Дискретные вейвлет-преобразования в анализе Уолша // Материалы международной конференции «International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17», Санкт-Петербургский политехнический университет, 24–28 июля 2017 г., Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 160, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 126–136.

4 Schipp F., Wade W. R., Simon, P. Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. New York: Adam Hilger, 1990.

5 Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. - 346 с.

6 Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh functions // Pacific. J. Math. - 1955. - V. 5. - № 1. - P. 17-32.

7 Беспалов М. С. Порождающий оператор для дискретных функций Крестенсона // Пробл. передачи информ.- 2015. - Т. 51. - № 1. - С. 42–53; Problems Inform. Transmission, - 2015. - V. 51. - № 1. - P. 37–48.

8 Щербаков В. И. Расходимость рядов Фурье по обобщенным системам Хаара в точках непрерывности функции // Изв. вузов. Матем. - 2016. - № 1. - С. 49–68; Russian Math. (Iz. VUZ) - 2016. - V. 60. - № 1. - P. 42–59.

9 Farkov Yu. A. On wavelets related to the Walsh series // J. Approx. Theory. - 2009. - V. 161. - № 1. - P. 259-279.

10 Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. - 2006. - Т. 197. - № 10. - С. 129-160.

11 Lang W. C., Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. - 1998. - V. 24.- P. 533-544.

12 Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. - 2005. - Т. 69. - № 3. - С. 193-220.

13 Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl., Special Issue (IWWFA-II, Delhi). - 2015. - V. 2. - P. 13-36.

14 Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. - 2015. - V. 5. - № 1. - Article ID 1550036, 19 p.

15 Фарков Ю. А. Ортогональные всплески в анализе Уолша// Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. К 80-летию В.А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ/ Под редакцией Т.П. Лукашенко и А.П. Солодова. М.: Издательство Московского университета, 2016. С. 62–75.

16 Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. - 2011. - V. 3. - № 3. - P. 181-195.

17 Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.- 464 с.

18 Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. - 2014. - V. 20.- P. 42-65.

19 Родионов Е. А. Разработка вейвлет-методов для выявления предвестниковых эффектов землетрясений: дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. – Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе (МГРИ-РГГРУ). – М., 2018. – 161 с.

20 Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006 (перевод: I. Ya. Novikov, V. Yu. Protassov, and M. A. Skopina. Wavelet Theory. Translations of Mathematical Monographs 239. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2011).

21 Protasov V. Yu. A complete solution characterizing smooth refinable functions // SIAM J. of Math. Anal. - 2000. - V. 31. - № 6. - P. 1332-1350.

22 Фарков Ю. А., Родионов Е. А. Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши // Матем. заметки. - 2009. - Т.86. - Вып. 3. - С. 429-444.

23 Lukomskii S. F., Berdnikov G. S., N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups. Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. - 2015. - V. 13. - № 5 - Article ID 1550037, 23 p.

24 Лукомский С. Ф., Бердников Г. С., Крусс Ю. С. Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина // Матем. заметки. - 2015. - Т. 98. - Вып. 2. - С. 310–313.

25 Berdnikov G. S. Necessary and sufficient condition for an orthogonal scaling function on Vilenkin groups // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. - 2019. - Т.19. - Вып. 1. - С. 24–33.

26 Benedetto R.L. Examples of wavelets for local fields // Contemporary Mathematics. - 2004. - V. 345. - P. 27-47.

27 Benedetto J. J., Benedetto R. L. The construction of wavelet sets // In: Cohen, Jonathan (ed.) et al., Wavelets and multiscale analysis. Theory and applications. Selected papers based on the presentations at the international conference on wavelets: *Twenty Years of Wavelets*, DePaul University, Chicago, IL, USA, May 15–17, 2009. New York, NY: Springer (Applied and Numerical Harmonic Analysis). 2011. P.17-56.

Ю.А. Фарков

Ресей Федерациясы Президенті жанындағы Ресей халық шаруашылығы және мемлекеттік қызмет академиясы, Мәскеу, Ресей

Крестенсон-Леви жүйесі және баспалдақты масштабтаушы функциялар

Аннотация: $L^2(\mathbb{R}_+)-$ дегі еселі масштабты анализдерді туындатушы Крестенсон-Леви жүйесі мен модификацияланған Коэн шарты арқылы баспалдақты масштабтаушы функциялар құрылды. Виленкин топтарындағы ортогоналды вэйвлеттер және Парсеваль фреймдеріне ұқсас құрылымдар талқыланады.

Түйін сөздер: Уолш функциялары, ортогоналды вэйвлеттер, масштабтаушы баспалдақты функциялар, еселі масштабты анализ, Парсеваль фреймдері, Виленкин топтары, Крестенсон-Леви жүйесі.

Yu. A. Farkov

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Moscow, Russian Federation

Chrestenson-Levy system and step scaling functions

Abstract: Using the Chrestenson-Levy system and the modified Cohen condition, step scaling functions are constructed that generate multiresolution analyzes in $L^2(\mathbb{R}_+)$. Analogies with orthogonal wavelet constructions and Parseval frames for Vilenkin groups are discussed.

Keywords: Walsh functions, orthogonal wavelets, step scaling functions, multiresolution analysis, Parseval frames, Vilenkin groups, Chrestenson-Levy system.

References

1 Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H. Construction of wavelets through Walsh functions / Industrial and Applied Mathematics. — Singapore: Springer, 2019. 382 p.

2 Farkov Yu. A. Wavelet frames related to Walsh functions, Eur. J. Math. 2019. Vol. 5. № 1. P. 250-267.

3 Farkov Yu. A. Discrete wavelet transforms in Walsh analysis, Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS-17, St. Petersburg Polytechnic University, July 24-28, 2017, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 160, VINITI, Moscow, 2019, 126–136

4 Schipp F., Wade W. R., Simon, P. Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. New York: Adam Hilger, 1990.

5 Golubov, B.; Efimov, A.; Skvortsov, V. Walsh series and transforms. Theory and applications. Transl. from the Russian by W. R. Wade. Mathematics and Its Applications. Soviet Series. 64. Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers Group. xiii. 1991. 368 p.

6 Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh functions, Pacific. J. Math. 1955. Vol. 5. № 1. P. 17-32.

7 Bespalov M.S. Generating operator for discrete Chrestenson functions, Problems Inform. Transmission, 2015. Vol. 51. № 1. P. 37–48.

8 Shcherbakov V.I. Divergence of the Fourier series by generalized Haar systems at points of continuity of a function, Russian Mathematics. 2016. Vol 60. № 1. P. 42–59.

9 Farkov Yu. A. On wavelets related to the Walsh series, J. Approx. Theory. 2009. V. 161. № 1. P. 259-279.

10 Protasov V. Yu., Farkov Yu.A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line, Sb. Math. 2006. V. 197. № 10. P. 1529–1558.

11 Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group, Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533-544.

12 Farkov Yu.A. Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups, Izvestiya: Mathematics. 2005. V. 69. № 3. P. 623-650.

13 Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis, Poincare J. Anal. Appl., Special Issue (IWWFA-II, Delhi). 2015. V. 2. P. 13-36.

14 Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties, Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. V. 5. № 1. Article ID 1550036, 19 p.

15 Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets in Walsh analysis, Sovremennye problemy matematiki i mehaniki. T. XI. Vyp. 1. Matematika. K 80-letiju V.A. Skvorcova. Obobshhennye integraly i garmonicheskij analiz [Modern problems of mathematics and mechanics. T. XI. Issue 1. Mathematics. On the 80th anniversary of V.A. Skvortsov. Generalized integrals and harmonic analysis]/ Pod redakciej T.P. Lukashenko i A.P. Solodova [Edited by T.P. Lukashenko and A.P. Solodova] (Moscow University Press, Moscow, 2016, P. 62–75).

16 Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups, p -Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. V. 3. № 3. P. 181-195.

17 Dobeshi I. Desyat' lekcij po vejvletam [Ten lectures on wavelets] (NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika", Izhevsk, 2001, 464 p.).

18 Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups, J. Fourier Anal. Appl. 2014. V. 20. P. 42-65.

19 Rodionov E. A. Razrabotka vejvlet-metodov dlya vyyavleniya predvestnikovyh effektov zemletryasenij [Development of wavelet methods for identifying the precursor effects of earthquakes]: diss. na soiskanie uch. st. kand. fiz.-mat. nauk: 05.13.18 - Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm [diss. for

the competition Art. Cand. Phys.-Math. Sciences: 05.13.18 - Mathematical modeling, numerical methods and complexes of programs]. Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting. Moscow, 2018.– 161 p.

20 Novikov I.Ya., Protassov V.Yu., and Skopina M.A.Wavelet Theory. Translations of Mathematical Monographs 239. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2011).

21 Protasov V. Yu. A complete solution characterizing smooth refinable functions, SIAM J. of Math. Anal. 2000. V. 31. № 6. P. 1332-1350.

22 Rodionov E.A., Farkov Yu.A. Estimates of the smoothness of dyadic orthogonal wavelets of Daubechies type, Mathematical Notes. 2009. V. 86. № 63. P. 407-421.

23 Lukomskii S. F., Berdnikov G. S., N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups, Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. V. 13. № 5 Article ID 1550037, 23 p.

24 Lukomskii S.F., Berdnikov G.S., Kruss Yu.S. On the orthogonality of a system of shifts of the scaling function on Vilenkin groups, Mathematical Notes. 2015. V. 98. P. 339–342.

25 Berdnikov G. S. Necessary and sufficient condition for an orthogonal scaling function on Vilenkin groups, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. V. 19. № 1. P. 24–33.

26 Benedetto R.L. Examples of wavelets for local fields, Contemporary Mathematics. 2004. V. 345. P. 27-47.

27 Benedetto J. J., Benedetto R. L. The construction of wavelet sets // In: Cohen, Jonathan (ed.) et al., Wavelets and multiscale analysis. Theory and applications. Selected papers based on the presentations at the international conference on wavelets: *Twenty Years of Wavelets*, DePaul University, Chicago, IL, USA, May 15–17, 2009. New York, NY: Springer (Applied and Numerical Harmonic Analysis). 2011. P.17-56.

Information about author:

Фарков Ю.А. - д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладных информационных технологий, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (РАНХиГС), проспект Вернадского, 82, 119571 Москва, РФ.

Farkov Yu.A. - Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor, Department of Applied Information Technology, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Prospect Vernadskogo, 82, Moscow, Russian Federation, 119571.

Поступила в редакцию 7.01.2020