Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2022, Vol. 138, №1, P.23-35
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.31.17, 30.19.33**

Л.А. Алексеева, Г.Д. Арепова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, ул. Пушкина 125, Алматы, Казахстан
(E-mail: alexeeva@math.kz, arepovag@mail.ru)

Обобщенные решения краевых задач для уравнения Даламбера с локальными и связанными граничными условиями

Аннотация: Рассматриваются начально-краевые задачи для волнового уравнения с локальными и нелокальными линейными краевыми условиями на концах отрезка общего вида. Для их решения разработан метод обобщенных функций, который переводит исходные краевые задачи в решение волнового уравнения с сингулярной правой частью, содержащей сингулярные простые и двойные слои, плотности которых определяются граничными и начальными значениями искомой функции и ее производных. Получено интегральное представление решения через граничные функции, которые являются обобщением формулы Грина для решений волнового уравнения. Для определения неизвестных граничных функций построена в пространстве преобразований Фурье по времени разрешающая система из двух линейных алгебраических уравнений, которая связывает 4 граничные значения решения и его производных.Совместно с двумя краевыми условиями локального и нелокального типа построена разрешающая система уравнений для решения поставленных начально-краевых задач. На ее основе даны аналитические решения для классических трех краевых задач с условиями Дирихле, Неймана и смешанными на концах отрезка. Разработанный метод позволяет решать краевые задачи с различными локальными и нелокальными краевыми условиями и должен найти применение при решении волновых и других уравнений на графах различной структуры.

Кілт сөздер: уравнение Даламбера, краевая задача, начальные условия, краевые условия, метод обобщенных функций, функция Римана, обобщенное решение, разрешающие уравнения.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/1.2

2000 Mathematics Subject Classification: 35.

Введение

Решение многих задач акустики, гидромеханики, теории упругости и других разделов физики связано с решением краевых задач для гиперболических уравнений, описывающих процессы распространения волн в однородных изотропных средах. В последние десятилетия появилось много работ, посвященных дифференциальным уравнениям и краевым задачам на графах (в других терминах - пространственных сетях, одномерных стратифицированных множествах, одномерных клеточных комплексах) [1]. Краевые задачи на графах позволяют моделировать поведение самых разнообразных сетевых систем, как инженерно-технических, так и биологических, поэтому весьма актуально построение эффективных способов решения краевых задач для них с произвольной геометрией и разнообразным видом граничных условий и условий трансмиссии в узлах графа. Процессы передачи сигнала (возмущения, деформации и т.п.) по сетям описываются волновыми уравнениями,в частности, уравнением Даламбера. В работах [2-12] рассмотрен ряд краевых задач для этого уравнения на отрезке и на графах определенной структуры и вопросы их разрешимости. Отметим, что классическое понятие дифференцируемости решений для гиперболических уравнений, каковым является уравнение Даламбера, резко сужает класс задач, полезных для приложений. В частности, типичные физические процессы, сопровождающиеся ударными волнами, не описываются дифференцируемыми решениями гиперболических уравнений. При применении численных методов решения для изучения таких процессов возникают сложности при построении разностных сеток и обеспечении точности выполнения граничных условий и условий на фронтах ударных волн, где производные функций терпят разрыв. Поэтому необходима разработка эффективных математических методов для исследования таких процессов.

Базовым элементом для волнового графа является отрезок конечной длины, на котором функция состояния графа удовлетворяет дифференциальному уравнению при разных краевых условиях на концах отрезка, которые могут быть и связанными. Здесь строятся решения начально-краевых задач для уравнения Даламбера на отрезке при локальных и нелокальных линейно-связанных краевых условиях. для решения задачи используется метод обобщенныых функций [12,13], который позволяет исследовать и ударные волны в таких системах. Этот метод позволяет перейти от поставленной начально-краевой задачи к решению уравнения Даламбера с сингулярной правой частью в пространстве обобщенных функций. При этом начальные и граничные условия входят в эти уравнения в виде плотности простых и двойных слоев правой части. Свертка ее с фундаментальным решением уравнения позволяет построить решение при известных граничных функциях и их производных. А асимптотические свойства решения - построить уравнения для определения неизвестных граничных функций. Для решения этих уравнений используется обобщенное преобразование Фурье. Получены разрешающие алгебраические уравнения для определения трансформант Фурье граничных функций, на основе которых построены решения ряда краевых задач в исходном пространстве-времени.

Разработанная методика построения решения волнового уравнения на отрезке позволяет строить линейные алгебраические системы разрешаюших уравнений на графах самой разнообразной структуры и исследовать периодические процессы в сетевых системах и нестационарные процессы, сопровождаемые ударными волнами.

1. Обобщенные решения волнового уравнения, ударные волны

Рассмотрим волновое уравнение Даламбера:

$$\Box_c u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G(x,t), \qquad (1)$$

где $G(x,t)$– локально интегрируемая функция, c – положительная константа, которая, как известно, описывает скорость распространения волн в среде. Уравнение строго гиперболическое, класс его решений содержит разрывные по производным функции. Поверхности разрыва F – это характеристические поверхности, которые удовлетворяют характеристическому уравнению в $R^2 = \{(x, \tau = ct)\}$:

$$\nu_\tau^2 - \nu_x^2 = 0 \quad \Rightarrow \left|\frac{\nu_\tau}{\nu_x}\right| = 1. \qquad (2)$$

Здесь (ν_x,ν_τ) - вектор нормали к F. Ему соответствуют характеристики: $x \pm ct = const$. В R^1 им соответствуют *волновые фронты* (F_t), движущиеся со скоростью c. На них выполняются условия Адамара:

$$[u\,(x,t)]_{F_t} = 0, \quad [u_{,t}\,]_{F_t} = -c\,[u_{,x}\,]_{F_t} \qquad (3)$$

где через $[f\,(x,t)]_{F_t}$ обозначен скачок f на F_t :

$$[f\,(x,t)]_{F_t} = f^+\,(x,t) - f^-\,(x,t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(f\,(x+\varepsilon,t) - f\,(x-\varepsilon,t)\right), \quad x \in F_t.$$

Класс подобных решений гиперболических уравнений называют *ударными волнами* , т.к. на их фронтах скорости испытывают скачки, вызванные скачком напряжений в физических средах.

Далее рассмотрим функции $u(x,t)$, которые непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно почти всюду, за исключением конечного или счетного числа поверхностей разрыва - волновых фронтов, достаточно гладких почти всюду, на которых выполнены условия Адамара. Назовем такие решения *классическими*. Покажем, что они являются *обобщенными решениями* (1).

Для этого рассмотрим уравнение (1) на пространстве обобщенных функций медленного роста $S'(R^2) = \left\{\hat{f}(x,\tau)\right\}$ [15,16]. Отметим шапочкой регулярные обобщенные функции $\hat{u} = u(x,t), \quad \hat{G} = G(x,t)$.

Л е м м а 1.1. *Если* u *– классическое решение* (1), *то* $\hat{u}$ *является его обобщенным решением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если u имеет конечный разрыв на F, то в $S'(R^2)$, согласно правилам дифференцирования регулярных обобщенных функций ,

$$\hat{u}_{,j} = u_{,j} + [u]_F \nu_j \delta_F, \; x_1 = x, \; x_2 = \tau, \tag{4}$$

где первое слагаемое справа - классическая производная по x_j $(j = 1,2)$, $\nu = (\nu_x, \nu_\tau)$ - единичная нормаль к F , $\|\nu\| = 1$, δ_F - простой слой на F - сингулярная обобщенная функция, которая определяет функционал в виде поверхностного интеграла:

$$([u]_F \nu_j \delta_F(x,\tau), \phi(x,\tau)) = \int_F [u(x,\tau)]_F \nu_j(x,\tau)\phi(x,\tau) dF(x,\tau)$$

для $\forall \phi \in S(R^2)$. Поэтому, с учетом (4) и условий Адамара (3), получим

$$\hat{u}_{,j} = u_{,j} + [u]_F \nu_j \delta_F(x,\tau) = u_{,j} \,, \tag{5}$$

$$\hat{u}_{,jj} = u_{,jj} + [u_{,j}]_{F_t} \nu_j \delta_F(x,\tau), \quad j = 1,2. \tag{6}$$

Поскольку $\hat{u}_{,\tau} = c^{-1} u_{,t}$, $\hat{u}_{,\tau\tau} = c^{-2} u_{,tt} - c^{-1} [u_{,t}]_{F_t} \nu_\tau \delta_F$. с учетом этих равенств и условий Адамара (3), получим

$$\Box \hat{u} = u_{,xx} - u_{,\tau\tau} + \left\{\nu_x [u_{,x}]_F - \nu_\tau [u_{,\tau}]_F\right\} \delta_F =$$

$$= G + \nu_x \left([u_{,x}]_{F_t} + [u_{,\tau}]_{F_t}\right) \delta_F = G,$$

так как плотности слоев равны нулю. Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из этой леммы следует, что условия на фронтах ударных волн легко получить, рассматривая классические решения гиперболических уравнений как обобщенные. Достаточно приравнять нулю плотности соответствующих независимых сингулярных обобщенных функций – аналогов простых, двойных и др. слоев, возникающих при обобщенном дифференцировании решений. Определение таких условий на основе классических методов весьма трудоемкая процедура.

2. Постановка начально-краевых задач

Требуется найти решение волнового уравнения $u(x,t)$ при $t \geq 0$ в области $S^- = \{x : x \in (0,L)\}$, удовлетворяющее следующим начальным и граничным условиям при $x \in S = \{x = 0, \; x = L\}$.

Начальные условия Коши. При $t = 0$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ для } x \in S^- + S, \quad u_{,t}(x,0) = v_0(x) \quad \text{для } x \in S^-. \tag{7}$$

Здесь вначале рассмотрим три краевые задачи с локальными граничными условиями, соответствующими условиям Дирихле и Неймана на концах стержня.

Граничные условия:

(КЗ I)

$$u(x,t) = w_j(t) \text{ для } x \in S, \; t \geq 0; \tag{8}$$

(КЗ II)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p_j(x,t) \quad \text{для } x \in S, \; t \geq 0; \tag{9}$$

(КЗ III)

$$u(0,t) = w(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = p(L,t) \quad \text{для } t \geq 0. \tag{10}$$

Здесь j=1,2 соответственно левому и правому краю отрезка [0,L].

Для первой краевой задачи выполнены условия согласования граничных и начальных данных:

$$u_0(x) = w_j, \quad j = 1,2, \quad \text{для}\, x \in S. \tag{11}$$

На волновых фронтах, если они возникают, выполняются условия Адамара (3). Заметим, что ударные волны всегда возникают, если не выполнено условие согласования начальных и граничных данных по скоростям для $x \in S$:

$$\dot{u}(x,0) = v_0(x) \quad \text{для}\, x = 0,\ x = L, \tag{12}$$

что типично для физических задач (здесь и далее $\partial_t u = \dot{u}$). В этом случае в начальный момент времени на границе S формируется фронт ударной волны, который распространяется со скоростью c в S^- . Для построения непрерывно дифференцируемых решений условие (12) является необходимым.

Предполагается, что начальные условия заданы и известно одно из граничных условий соответственно рассматриваемой краевой задаче. Единственность решения поставленных начально-краевых задач с учетом ударных волн для уравнения Даламбера в пространствах размерности 1,2,3 показана в [12,13].

3. Постановка начально-краевой задачи в $S'(R^2)$ и ее обобщенное решение

Для построения решения КЗ перейдем в пространство обобщенных функций медленного роста $S'(R^2)$ [14,15]. Для этого введем характеристическую функцию области определения решения

$$H_D^-(x,t) \equiv H_S^-(x)\, H(t),$$

где $H_S^-(x) = H(x)H(L-x)$ - характеристическая функция множества S^- , равная 0,5 на его границе S, $H(t)$ - функция Хевисайда, равная 0,5 при t=0.

Введем регулярные обобщенные функции, доопределенные нулем вне области решения КЗ:

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t)H_D^-(x,t),\ \hat{G}(x,t) = G(x,t)H_S^-(x)\, H(t),$$

где $u(x,t)$ - классическое решение КЗ. Легко показать, что их обобщенные частные производные равны:

$$\hat{u}_{,x} = u_{,x}\, H_D^- + u(0,t)\delta(x)H(t) - u(L,t)\delta(x-L)H(t),$$

$$\hat{u}_{,xx} = u_{,xx}\, H_D^- + u_{,x}(0,t)\delta(x)H(t) - u_{,x}(L,t)\delta(x-L)H(t)+$$

$$+u(0,t)\delta'(x)H(t) - u(L,t)\delta'(x-L)H(t), \tag{13}$$

$$\hat{u}_{,t} = u_{,t}\, H_D^- + u(x,0)\delta(t),$$

$$\hat{u}_{,tt} = u_{,tt}\, H_D^- + u_{,t}(x,0)\delta(t)H(x)H(L-x) + u(x,0)\delta'(t).$$

где $\delta(...)$ - сингулярная дельта-функция (функция Дирака). Если решение имеет скачки на волновых фронтах, то следует добавить соответствующие слагаемые из (5), (6). С учетом этих равенств и условий Адамара на фронтах, получим уравнение в $S'(R^2)$:

$$\Box_c \hat{u} = \hat{G} + u_{,x}(0,t)\delta(x)H(t) - u_{,x}(L,t)\delta(x-L)H(t)+$$

$$+u(0,t)\delta'(x)H(t) - u(L,t)\delta'(x-L)H(t)- \tag{14}$$

$$-c^{-2}\left\{u_{,t}(x,0)\delta(t) + u(x,0)\delta'(t)\right\}H(x)H(L-x)$$

Решением этого уравнения является свертка фундаментального решения уравнения с его правой частью. В качестве такого возьмем фундаментальное решение $\hat{U}\,(x,t)$:

$$\Box_c U = \delta(x)\delta(t), \tag{15}$$

удовлетворяющее условиям излучения:

$$\hat{U}\,(x,t) = 0 \text{ при } t<0, \quad \hat{U}\,(x,t) = 0 \text{ при } \|x\| > ct.$$

Решением его является функция Римана[14,15] :

$$\hat{U}\,(x,t) = -\frac{c}{2} H\,(ct - |x|)\,. \tag{16}$$

Эта свертка дает обобщенное решение краевых задач:

$$\begin{gathered}
\hat{u} = \hat{G} * \hat{U} + u_{,x}\,(0,t)\delta(x)H(t) * \hat{U} - u_{,x}\,(L,t)\delta(x-L)H(t) * \hat{U} + \\
+u(0,t)\delta'(x)H(t) * \hat{U} - u(L,t)\delta'(x-L)H(t) * \hat{U} - \\
-c^{-2}\left\{u_{,t}\,(x,0)\delta(t)H(x)H(L-x) * \hat{U} + u(x,0)\delta'(t) * \hat{U}\right\} = \\
= \hat{G} * \hat{U} + p_1(t)H(t) \underset{t}{*} \hat{U}(x,t) - p_2(t)H(t) \underset{t}{*} \hat{U}(x-l,t) + \\
+w_1(t)H(t) \underset{t}{*} \partial_x \hat{U}(x,t) - w_2(t)H(t) \underset{t}{*} \partial_x \hat{U}(x-l,t) + \\
-c^{-2}\left\{v_0(x)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \hat{U}(x) + u_0(x)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \partial_t \hat{U}\right\}
\end{gathered} \tag{17}$$

Его интегральное представление дает следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Решение начально краевых задач для уравнения Даламбера на отрезке* (a_1, a_2) *имеет вид*:

$$\begin{gathered}
2\hat{u} = c\left\{H\,(ct - |x-a_2|) \int_{\frac{|x-a_2|}{c}}^{t} u_{,x}\,(a_2,\tau)\,d\tau - H\,(ct - |x-a_1|) \int_{\frac{|x-a_1|}{c}}^{t} u_{,x}\,(a_1,\tau)\,d\tau\right\} + \\
+\mathrm{sgn}\,(x-a_1)\,H\,(ct-|x-a_1|)\,u\left(a_1, t - \frac{|x-a_1|}{c}\right) - \\
-\mathrm{sgn}\,(x-a_2)\,H\,(ct-|x-a_2|)\,u\left(a_2, t - \frac{|x-a_2|}{c}\right) + \\
+c^{-1}\int_{a_1}^{a_2} \dot{u}_0\,(y)\,H(ct-|x-y|)dy + u_0\,(x+ct)\,H_S^-\,(x+ct) + \\
+u_0\,(x-ct)\,H_S^-\,(x-ct) + 2\hat{G} * \hat{U}.
\end{gathered}$$

Здесь $a_1 = 0,\ a_2 = L.$

По аналогии с представлением решений уравнения Лапласа, эту формулу можно назвать *динамическим аналогом формулы Грина.* Она позволяет по граничным значениям функции и ее производных определять решние во всей области определения.

Для $x \in S$ формула дает 2 граничных интегральных уравнения для определения двух неизвестных граничных функций соответственно решаемой краевой задаче. В частности, при нулевых начальных условиях и правой части разрешающие граничные уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}
u(0,t) = c\left\{H\,(ct-L)\int_0^t u_{,x}\,(L,\tau)\,d\tau - H\,(t)\int_0^t u_{,x}\,(0,\tau)\,d\tau\right\} + \\
+H\,(ct-L)\,u\left(L, t - \frac{L}{c}\right),
\end{gathered}$$

$$u(L,t)=c\left\{H\left(t\right)\int_0^t u_{,x}\left(L,\tau\right)d\tau-H\left(ct-L\right)\int_{\frac{L}{c}}^t u_{,x}\left(0,\tau\right)d\tau\right\}+$$
$$+H\left(ct-L\right)u\left(0,t-\frac{L}{c}\right).$$

Доказательство этих граничных уравнений следует из предельного перехода в формуле теоремы 1 к граничным точкам области [12].

4. Трансформанты Фурье решений краевых задач по времени

Для построения решения граничных уравнений удобно использовать прямое и обратное преобразования Фурье по времени, которые имеют вид:

$$\widehat{u}\ (x,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{i\omega t}dt,\quad u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}\ (x,\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{18}$$

Используя свойства преобразования Фурье сверток и производных [14,15], получим из (17) трансформанту Фурье обобщенного решения:

$$\begin{gathered}\widehat{u}\ (x,\omega)H(x)H(L-x)=\widehat{G}\underset{x}{*}\widehat{U}+\widehat{p}_1\ (\omega)\ \widehat{U}\ (x,\omega)-\widehat{p}_2\ (\omega)\ \widehat{U}\ (x-L,\omega)+\\ +\widehat{w}_1\ (\omega)\partial_x\ \widehat{U}\ (x,\omega)-\widehat{w}_2\ (\omega)\partial_x\ \widehat{U}\ (x-L,\omega)+\\ -^{-2}\left\{v_0(x)H(x)H(L-x)\underset{x}{*}\widehat{U}-i\omega u_0(x)\underset{x}{*}\widehat{U}\right\}\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь ω - переменная Фурье по времени, $\widehat{U}\ (x,\omega)$ - преобразование Фурье по времени функции Римана:

$$\begin{gathered}\widehat{U}_{,xx}+k^2\ \widehat{U}=\delta(x),\quad k=\tfrac{\omega+i0}{c},\\ \widehat{U}\ (x,\omega)=0,5k^{-1}\sin(k\left|x\right|),\quad \widehat{U}_{,x}=0,5\cos(k\left|x\right|)\mathrm{sgn}(x),\end{gathered} \tag{20}$$
$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

В результате получим трансформанту решения:

$$\begin{gathered}\widehat{u}\ (x,\omega)H(x)H(L-x)=\widehat{G}\underset{x}{*}\widehat{U}+0,5k^{-1}\ \widehat{p}_1\ (\omega)\sin(k\left|x\right|)-\\ -0,5k^{-1}\ \widehat{p}_2\ (\omega)\sin(k\left|x-L\right|)+\\ +0,5\ \widehat{w}_1\ (\omega)\cos(k\left|x\right|)-0,5\ \widehat{w}_2\ (\omega)\cos(k\left|x-L\right|)+\\ -0,5k^{-1}c^{-2}\left\{v_0(x)H(x)H(L-x)\underset{x}{*}\sin(k\left|x\right|)-i\omega u_0(x)\underset{x}{*}\sin(k\left|x\right|)\right\}\end{gathered} \tag{21}$$

Если перейти в этой формуле к пределу к левому и правому краю интервала, с учетом свойства производной $U_{,x}$ (20), получим линейные алгебраические уравнения для определения неизвестных граничных функций:

$$0.5\ \widehat{w}_1\ (\omega)=\left.\widehat{G}\underset{x}{*}\widehat{U}\right|_{x=0}-0,5k^{-1}\ \widehat{p}_2\ (\omega)\sin(kL)-0,5\ \widehat{w}_2\ (\omega)\cos(kL)+$$
$$-0,5c^{-2}k^{-1}\left(v_0(x)-i\omega u_0(x)\right)H(x)H(L-x)\underset{x}{*}\left.\sin(k\left|x\right|)\right|_{x=0}$$

$$0.5\,\overset{\frown}{w}_2\,(\omega)=\overset{\frown}{G}\underset{x}{*}\overset{\frown}{U}\Big|_{x=L}+0,5k^{-1}\,\overset{\frown}{p}_1\,(\omega)\sin(kL)+0,5\,\overset{\frown}{w}_1\,(\omega)\cos(kL)+$$

$$-0,5c^{-2}k^{-1}\left(v_0(x)-i\omega u_0(x)\right)H(x)H(L-x)\underset{x}{*}\sin(k\,|x|)\Big|_{x=L}$$

Эту систему перепишем в матричном виде:

$$\left\{\begin{array}{cc}1, & 0\\ -\cos kL, & -k^{-1}\sin kL\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\overset{\frown}{w}_1\,(\omega)\\ \overset{\frown}{p}_1\,(\omega)\end{array}\right\}+$$

$$+\left\{\begin{array}{cc}\cos kL, & k^{-1}\sin kL\\ 1, & 0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\overset{\frown}{w}_2\,(\omega)\\ \overset{\frown}{p}_2\,(\omega)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}F_1(\omega)\\ F_2(\omega)\end{array}\right\}, \tag{22}$$

где правые части известны:

$$F_1(\omega)=\overset{\frown}{G}\underset{x}{*}\overset{\frown}{U}\Big|_{x=0}-0,5c^{-2}k^{-1}\left(v_0(x)-i\omega u_0(x)\right)H(x)H(L-x)\underset{x}{*}\sin(k\,|x|)\Big|_{x=0}$$

$$F_2(\omega)=\overset{\frown}{G}\underset{x}{*}\overset{\frown}{U}\Big|_{x=L}-0,5c^{-2}k^{-1}\left(v_0(x)-i\omega u_0(x)\right)H(x)H(L-x)\underset{x}{*}\sin(k\,|x|)\Big|_{x=L}$$

Здесь значение свертки в правой части берется в указанной точке на левом или правом концах отрезка.

В зависимости от решаемой краевой задачи из этой системы получим разрешающие уравнения для определения неизвестных граничных функций.

Первая краевая задача

$$\begin{array}{l}\overset{\frown}{p}_1\,(\omega)=-\frac{2F_2-\cos(kL)\overset{\frown}{w}_1(\omega)-\overset{\frown}{w}_2(\omega)}{k^{-1}\sin(kL)}\\[2ex] \overset{\frown}{p}_2\,(\omega)=-\frac{2F_1-\cos(kL)\overset{\frown}{w}_2(\omega)-\overset{\frown}{w}_1(\omega)}{k^{-1}\sin(kL)}\end{array} \tag{23}$$

Вторая краевая задача

$$\left\{\begin{array}{cc}1, & \cos(kL)\\ -\cos(kL), & 1\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\overset{\frown}{w}_1\,(\omega)\\ \overset{\frown}{w}_2\,(\omega)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}2F_1-k^{-1}\sin(kL)\,\overset{\frown}{p}_2\,(\omega)\\ 2F_2+k^{-1}\sin(kL)\,\overset{\frown}{p}_1\,(\omega)\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}f_1(\omega)\\ f_2(\omega)\end{array}\right\}$$

$$\overset{\frown}{w}_j\,(\omega)=\frac{\Delta_j(\omega)}{\Delta(\omega)},\quad \Delta(\omega)=1+\cos^2(kL), \tag{24}$$

$$\Delta_1=f_1(\omega)-f_2(\omega)\cos(kL(,\quad \Delta_2=f_2(\omega)+f_1(\omega)\cos(kL).$$

Третья краевая задача

$$\begin{array}{l}\overset{\frown}{w}_2\,(\omega)=\frac{2F_1(\omega)-\overset{\frown}{w}_1(\omega)-k^{-1}\sin(kL)\overset{\frown}{p}_2(\omega)}{\cos(kL)},\\[2ex] \overset{\frown}{p}_1\,(\omega)=-\frac{2F_2(\omega)+\cos(kL)\overset{\frown}{w}_1(\omega)-2\overset{\frown}{w}_2(\omega)}{k^{-1}\sin(kL)}.\end{array} \tag{25}$$

Выполняя обратное преобразование (18), получим оригинал решения в исходном пространстве-времени.

5. Разрешающие уравнения краевых задач с локальными и нелокальными краевыми условиями

Система из двух уравнений (22) связывает 4 граничные функции, из которых 2 неизвестны. Поэтому она позволяет ставить различные краевые задачи, кроме вначале представленных.

Для решения всех поставленных краевых задач удобно рассмотреть расширенную систему уравнений вида:

$$\left\{\begin{matrix} 0,5 & 0 & 0,5\cos(kL) & 0,5k^{-1}\sin(kL) \\ -0,5\cos(kL) & -0,5k^{-1}\sin(kL) & 0,5 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right\}\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{w}_2(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_2(\omega) \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ \overset{\frown}{b}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{b}_2(\omega) \end{matrix}\right\}, \tag{26}$$

где последние два уравнения – это краевые условия:

$$\left\{\begin{matrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_1(\omega) \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_2(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_2(\omega) \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{b}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{b}_2(\omega) \end{matrix}\right\}, \tag{27}$$

которые связывают граничные значения решения и его производных на концах отрезка. При заданных коэффициентах a_{ij} и правой части $\overset{\frown}{b}_i(\omega)$ этой линейной алгебраической системы уравнений ее решение имеет вид:

$$D_j(\omega)=\frac{\Delta_j(\omega)}{\Delta(\omega)},\quad D(\omega)=\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{w}_2(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_2(\omega) \end{matrix}\right\}, \tag{28}$$

где $\Delta(\omega)$ - определитель матрицы системы (22), $\Delta_j(\omega)$ определитель матрицы, которая определяется простым правилом Крамера для каждого $D_j(\omega)$. В частности, для представленных решений краевых задач компоненты расширенной матрицы будут иметь следующий вид:

(КЗ I)

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_1(\omega) \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_2(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_2(\omega) \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{w}_2(\omega) \end{matrix}\right\};$$

(КЗ II)

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_1(\omega) \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_2(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_1(\omega) \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} p_1(\omega) \\ p_2(\omega) \end{matrix}\right\};$$

(КЗ III)

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_1(\omega) \end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_2(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_2(\omega) \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} \overset{\frown}{w}_1(\omega) \\ \overset{\frown}{p}_2(\omega) \end{matrix}\right\}.$$

Очевидно, что задавая различные коэффициенты и правые части уравнений, разработанный метод позволяет решать задачи с краевыми условиями самого различного вида, как с локальными условиями на одном и другом концах стержня, так и не локальными, связывающими краевые условия на его концах. Поскольку для четырех граничных функций имеем два граничных уравнения, то можно задавать еще два линейных уравнения на граничные значения функции и ее производной.

Вопрос разрешимости краевых задач будет определяться разрешимостью расширенной системы уравнений (23). Нули определителя этой системы ω_k :

$$\Delta(\omega_k) = 0, \tag{29}$$

определяют спектр свободных колебаний, который зависит от рассматриваемых краевых условий.

6. Построение оригиналов решений нестационарных краевых задач

Подставляя преобразование Фурье граничных функций в формулу (23) и выполняя обратное преобразование Фурье решения краевой задачи, получим оригинал решения в исходном пространстве-времени.

Вычислим вначале в формуле слагаемые, связанное с известными правой частью и начальными условиями, которые для регулярных функций имеют интегральное представление:

$$\begin{gathered}\hat{G} * \hat{U} = H(t)\int_0^t d\tau \int_0^x G(y,\tau)U(x-y,t-\tau)dy = \\ = H(t)\int_0^t d\tau \int_0^x G(y,t-\tau)H(c\tau-|x-y|)dy = u1(x,t)\end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered}-u2(x,t) = \tfrac{1}{2c}\{v_0(x)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} H\left(ct-|x|\right) + \\ + \tfrac{1}{2c}u_0(x)H(x)H(L-x) \underset{x}{*} \delta\left(ct-|x|\right)\operatorname{sgn}(x)\} = \\ = \tfrac{1}{2c}\{H(t)\int_0^L v_0(y)H\left(ct-|x-y|\right)dy + \\ + u_0(x-ct)H_S^-(x-ct) - u_0(x+ct)H_S^-(x+ct)\}\end{gathered} \tag{31}$$

Заметим, что если $\hat{G}$ является сингулярной обобщенной функцией, то свертку в формуле нужно брать согласно определению свертки в пространстве обобщенных функций.

Теперь рассмотрим оставшиеся слагаемые, обусловленные краевыми условиями, которое формально можно записать в виде:

$$u3(x,t) = \tfrac{H(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left\{p_1(\omega)\,\widehat{U}\,(x,\omega) - \widehat{p}_2\,(\omega)\,\widehat{U}\,(x-L,\omega)\right\}d\omega$$

$$u4(x,t) = -\tfrac{H(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\, e^{i\omega t}\left\{\widehat{w}_1\,(\omega)\,\widehat{U}\,(x,\omega) - \widehat{w}_2\,(\omega)\,\widehat{U}\,(x-L,\omega)\right\}\,d\omega$$

Поскольку носитель по t положительная полуось, то

$$u3(x,t) = \tfrac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{p_1(\omega)\sin\tfrac{\omega x}{c} - \widehat{p}_2\,(\omega)\sin\tfrac{\omega(L-x)}{c}\right\}\tfrac{e^{i\omega t}}{\omega+i0}d\omega$$

$$u4(x,t) = -\tfrac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\widehat{w}_1\,(\omega)\sin\tfrac{\omega x}{c} - \widehat{w}_2\,(\omega)\sin\tfrac{\omega(L-x)}{c}\right\}e^{i\omega t}d\omega$$

Вычисление этих интегралов зависит от вида решаемой краевой задачи .

6.1. **Представление решения краевой задачи I.** Рассмотрим

$$\begin{gathered}u3(x,t) = \tfrac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\widehat{p}_1\,(\omega)\sin\tfrac{\omega x}{c} - \widehat{p}_2\,(\omega)\sin\tfrac{\omega(L-x)}{c}\right\}\tfrac{e^{i\omega t}}{\omega+i0}d\omega \triangleq \\ = \tfrac{c}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\widehat{p}_1\,(\omega)\sin\tfrac{\omega x}{c} - \widehat{p}_2\,(\omega)\sin\tfrac{\omega(L-x)}{c}\right\}\tfrac{e^{i\omega t}}{\omega+i\varepsilon}d\omega,\end{gathered}$$

$t \geq 0,\ x \in [0, L]$. Обозначим

$$u31(x,t) = \frac{c}{4\pi} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \widehat{p}_1\ (\omega) \sin \frac{\omega x}{c} \right\} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + i\varepsilon} d\omega,$$

$$u32(x,t) = \frac{c}{4\pi} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \widehat{p}_2\ (\omega) \sin \frac{\omega(x-L)}{c} \right\} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + i\varepsilon} d\omega.$$

В случае первой краевой задачи подынтегральные функции не имеют особенность в нуле. Действительно, из формул (23) следует:

$$\widehat{p}_1\ (\omega) = -\frac{2F_2(\omega) - \widehat{w}_1(\omega)\cos(\omega L/c) - \widehat{w}_2(\omega)}{c\sin((\omega+i0)L/c)}\omega \Rightarrow$$

$$\widehat{p}_1\ (0) = -\frac{1}{L}\left(2F_2(0) - \ \widehat{w}_1\ (0) - \ \widehat{w}_2\ (0)\right);$$

$$\widehat{p}_2\ (\omega) = -\frac{2F_1 - \widehat{w}_2(\omega)\cos(\omega L/c) - \widehat{w}_1(\omega)}{c\sin((\omega+i0)L/c)}\omega \Rightarrow$$

$$\widehat{p}_2\ (0) = -\frac{1}{L}\left(2F_1(0) - \ \widehat{w}_2\ (0) - \ \widehat{w}_1\ (0)\right).$$

Вычислим $u3(x,t) = u31(x,t) + u32(x,t)$, переходя к пределу по $\varepsilon \to +0$ с обходом нулей знаменателя подынтегральной функции по ε-полуокружностям в комплексной верхней полуплоскости . В результате получим :

$$u31(x,t) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2F_2(\omega) - \ \widehat{w}_1\ (\omega)\cos(\omega L/) - \ \widehat{w}_2\ (\omega) \right\} \frac{\sin(\omega x/c)}{\sin((\omega+i0)L/c)} e^{i\omega t} d\omega +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_n \mathrm{Res}\left\{ \left\{ 2F_2(\omega) - \ \widehat{w}_1\ (\omega)\cos(\omega L/c) - \ \widehat{w}_2\ (\omega) \right\} \frac{\sin(\omega x/c)}{\sin((\omega+i0)L/c)} e^{i\omega t} \right\} |_{\omega=\omega_n} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2F_2(\omega) - \ \widehat{w}_1\ (\omega)\cos(\omega L/c) - \ \widehat{w}_2\ (\omega) \right\} \frac{\sin(\omega x/c)}{\sin((\omega+i0)L/c)} e^{i\omega t} d\omega +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_n (-1)^{n+1} \left\{ 2F_2(\omega_n) - \ \widehat{w}_1\ (\omega_n)\cos(\omega_n L/c) - \ \widehat{w}_2\ (\omega_n) \right\} \sin(\omega_n x/c) e^{i\omega_n t}.$$

Здесь точки $\omega_n = \pi nc/L\ (n = \pm1, \pm2, ...)$, где знаменатель подынтегральной функции обращается в ноль. В окрестности этих точек интеграл следует брать в смысле главного значения. Здесь мы воспользовались леммой Жордана о вычетах при обходе полюсов функций, аналитических в их окрестности [16].

Аналогично получим

$$u32(x,t) = -\frac{c}{4\pi} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \widehat{p}_2\ (\omega) \sin\left(c^{-1}\omega(L-x)\right) \right\} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + i\varepsilon} d\omega =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2F_1(\omega) - \ \widehat{w}_2\ (\omega)\cos(\omega L/c) - \ \widehat{w}_1\ (\omega) \right\} \frac{\sin(\omega(L-x)/c)}{\sin(\omega L/c)} e^{i\omega t} d\omega +$$

$$-\frac{1}{4}\sum_n (-1)^n \left\{ 2F_1(\omega_n) - \ \widehat{w}_1\ (\omega_n)\cos(\omega_n L/c) - \ \widehat{w}_2\ (\omega_n) \right\} \sin(\omega_n(L-x)/c) e^{i\omega_n t}.$$

Итак, оригиналы всех слагаемых в формуле (25) определены. Решение КЗ I построено.

Если известен вид заданных граничных функций, то формулы можно упростить. Как, например для упругой струны с неподвижными концами:

$$\widehat{w}_1 = \widehat{w}_2 = 0.$$

Следовательно,

$$u31(x,t) = \frac{1}{2}\sum_n (-1)^{n+1} \left\{ F_2(\omega_n) \right) \} \sin(\omega_n x/c) e^{i\omega_n t},$$

$$u32(x,t) = \frac{1}{2}\sum_n (-1)^{n+1} \left\{ F_1(\omega_n) \right) \} \sin(\omega_n(L-x)/c) e^{i\omega_n t}$$

Интегралы исчезли, поскольку интегралы с обходом полюсов по $\varepsilon-$ полуокружностям можно, по той же лемме, заменить суммой вычетов подынтегральной функции в ее полюсах.

Аналогично можно построить оригиналы всех поставленных краевых задач.

7. Заключение

Если действующие источники и граничные условия описываются периодическими по времени функциями, то разлагая их в ряды Фурье по времени, получим краевые задачи для каждой гармоники ряда, решение которых совпадает с построенным здесь решением в пространстве преобразований Фуцрье при нулевых начальных условиях.

Разработанный метод можно использовать для решения волновых уравнений на графах, используя построенные здесь разрешающие системы уравнений на каждом элементе графа и дополняя их условиями трансмиссии в узлах графа и на концах его элементов. Такая система зависит от строения графа. И она позволяет определять спектр резонансных частот для такого графа. С такими задачами авторы постараются познакомить читателя в следующей статье.

8. Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки республики Казахстан (грант AP09261033).

Список литературы

1 Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазерев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

2 Покорный Ю.В., Прядиев В.Л., Боровских А.В. Волновое уравнение на пространственной сети // Докл. РАН. -2003. -Т. 38. № 1. -С. 16-18.

3 Kuchment P. Graph models of wave propagation in thin structures // Waves in Random Media. -2002. -Vol. 12. No 4. -P. 1-24.

4 Cattaneo C., Fontana L. D'Alambert formula on finite one-dimensional networks // Journal of Math. Anal. and Appl. -2003. -Vol. 28. No 2. -P. 403-424.

5 Pokorny Yu.V., Borovskikh A.V. Differential equations on networks (geometric graph) // Journal of Mathematical sciences. -2004. -Vol. 11. No 6. -P. 691-718.

6 Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закрепленном втором конце // Диф. уравнения. -1999. -Т. 35. № 12. -С. 1640-1659.

7 Nicaise S., Valein J., Fridman E. Stability of the heat and wave equations with boundary time-varying delays // Discrete Contin. Dyn. Syst. -2009. -Vol. 12. No 2. -P. 559–581.

8 Valein J., Zuazua E. Stabilization of the wave equation on 1-D networks // SIAM J. Control Optim. -2009. -Vol. 48. No 4. -P. 2771–2797.

9 Боровских А.В., Копытин А.В. О распространении волн по сети // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета. - Воронеж, Воронеж. гос. ун-т., -1999. - С.21-25.

10 Копытин А.В., Прядиев В.Л. Об аналоге формулы Даламбера и спектре лапласиана на графе с соизмеримыми рёбрами // Вест. Воронежю гос. ун-та. Сер. Физика. Матаматика. - 2001. - № 1. -С. 104-107.

11 Копытин А.В., Прядиев В.Л. Решение волнового уравнения на пространственной сети // Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета. - Воронеж, Воронеж. гос. ун-т. 2000. - С.19-23.

12 Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения// Математический журнал. -2006. -Т. 6. № 1. -С. 16-32.

13 Alexeyeva L.A. Boundary integral equations of nonstationary BVP for wave equations// Int. Congress of Mathematicians, Abstracts, Madrid -2006. -P.436.

14 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - Москва: Наука, 1982.

15 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - Москва: Наука, 1978.

16 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.. Методы теории функций комплексного переменного. - Москва: Наука, 1976.

Л.А. Алексеева, Г.Д. Арепова
ҚР БжҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Пушкин 125, Алматы, Қазақстан

Локалді және байланысты шекаралық шартты д'Аламбер теңдеуі үшін шекаралық есептердің жалпыланған шешімдері

Аннотация: Жалпы түрдегі сегменттің ұштарында локалді және локалді емес сызықтық шекаралық шарттары бар толқындық теңдеуі үшін бастапқы-шекаралық есептері қарастырылады. Оларды шешу үшін бастапқы шекаралық есептерді оң жағы тығыздығы ізделінді функция мен оның туындыларының шекаралық және бастапқы мәндері арқылы анықталатын қарапайым және қос қабатты сингулярлығы бар толқындық теңдеуді шешуге алып келетін жалпылама функциялар әдісі әзірленді. Толқындық теңдеудің шешімдері үшін Грин формуласының жалпылауы болып табылатын шекаралық функциялар арқылы өрнектелетін шешімнің интегралдық түрі алынды. Белгісіз шекаралық функцияларды анықтау үшін, уақыт бойынша Фурье түрлендіруі кеңістігінде 4 шекаралық шешімдері мен оның туындыларының мәндерін байланыстыратын екі сызықты алгебралық теңдеулерден тұратын шешуші жүйесі құрылды. Қойылған бастапқы-шекаралық есептерді шешу үшін локалді және локалді емес типтегі екі шекаралық шартпен бірге шешуші теңдеулер жүйесі құрылды. Оның негізінде кесіндінің ұштарында Дирихле, Нейман және аралас классикалық үш шекаралық есептердің аналитикалық шешімдері берілген. Әзірленген әдіс әртүрлі локалді және локалді емес шекаралық шартты шекаралық есептерді шешуге мүмкіндік береді және әртүрлі құрылымды графтардағы толқындық және басқа теңдеулерді шешуде қолданысы болуы керек.
Түйін сөздер: д'Аламбер теңдеуі, шекаралық есеп, бастапқы шарттар, шекаралық шарттар, жалпыланған функциялар әдісі, Риман функциясы, жалпылама шешім, шешуші теңдеулерді.

L.A. Alexeyeva, G.Zh. Arepova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Pushkin str., 125, Almaty, Kazakhstan

Generalized Solutions of boundary value problems for the d'Alembert equation with local and associated boundary conditions

Abstract: The initial-boundary value problems for the wave equations with local and non-local linear boundary conditions at the ends of a general segment are considered. To solve them, a generalize functions method has been developed, which translates the original boundary value problems to solving the wave equation with a singular right-hand side containing a singular simple and double layers, the densities of which are determined by the boundary and initial values of the desired function and its derivatives. Received integral representation of the solution in terms of boundary functions, which are a generalization of Green's formula for solutions of the wave equation. To determine the unknown boundary functions, it is built in space Fourier transforms in time, a two-leaf resolving system linear algebraic equations, which connects 4 boundary values solution and its derivatives. Together with two boundary conditions of local and non-local type, a resolving system of equations is built for solving the stated initial-boundary value problems. On its basis, given analytical solutions for classical three boundary value problems with conditions Dirichlet, Neumann and mixed at the ends of the segment. The developed method allows solving boundary value problems with different local and nonlocal boundary conditions and must find an application change in solving wave and other equations on graphs of different structures.
Keywords: d'Alembert equation, boundary value problem, initial conditions, boundary conditions, generalized functions method, Riemann function, generalized solution, solving equations.

References

1 Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V., Lazerev K.P., Shabrov S.A. Differencial'nye uravneniya na geometricheskih grafah [Differential Equations on Geometric Graphs] (FIZMATLIT, Moscow, 2004).

2 Pokorny Yu.V., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V. Volnovoe uravnenie na prostranstvennoj seti [Wave equation on a spatial network], Dokl. RAN. 38(1), 16-18(2003).

3 Kuchment P. Graph models of wave propagation in thin structures, Waves in Random Media. 12(4), 1-24(2002).

4 Cattaneo C., Fontana L. D'Alambert formula on finite one-dimensional networks, Journal of Math. Anal. and Appl. 28(2), 403-424(2003).

5 Pokorny Yu.V., Borovskikh A.V. Differential equations on networks (geometric graph), Journal of Mathematical sciences, 11(6), 691-718(2004).

6 Ilyin V.A. Volnovoe uravnenie s granichnym upravleniem na odnom konce pri zakreplennom vtorom konce[Wave Equation with Boundary Control at One End with the Second End Fixed], Dif. equations, 35(12), 1640-1659(1999).

7 Nicaise S., Valein J., Fridman E. Stability of the heat and wave equations with boundary time-varying delays, Discrete Contin. Dyn. Syst., 12(2), 559–581(2009).

8 Valein J., Zuazua E. Stabilization of the wave equation on 1-D networks, SIAM J. Control Optim., 48(4), 2771–2797(2009).

9 Borovskikh A.V., Kopytin A.V. O rasprostranenii voln po seti [On the propagation of waves over the network], Sbornik statej aspirantov i studentov matematicheskogo fakul'teta [Collection of articles of graduate students and students of the Faculty of Mathematics]. Voronezh, Voronezh. state university, 1999. P.21-25.

10 Kopytin A.V., Pryadiev V.L. Ob analoge formuly Dalambera i spektre laplasiana na grafe s soizmerimymi ryobrami [On an analogue of the d'Alembert formula and the spectrum of the Laplacian on a graph with

commensurate edges], Vest. Voronezhyu gos. un-ta. Ser. Fizika. Matamatika [Vest. Voronezh state. university Ser. Physics. Mathematics]. 2001. No. 1. P. 104-107.
11 Kopytin A.V., Pryadiev V.L. Reshenie volnovogo uravneniya na prostranstvennoj seti [Solving the wave equation on a spatial network], Sbornik statej aspirantov i studentov matematicheskogo fakul'teta [Collection of articles of graduate students and students of the Faculty of Mathematics]. Voronezh, Voronezh. state university. 2000. P.19-23.
12 Alekseeva L.A. Metod obobshchennyh funkcij v nestacionarnyh kraevyh zadachah dlya volnovogo uravneniya [The method of generalized functions in non-stationary boundary value problems for the wave equation], Matematicheskij zhurnal [Mathematical journal]. 6(1), 16-32(2006).
13 Alexeyeva L.A. Boundary integral equations of nonstationary BVP for wave equations, Int. Congress of Mathematicians, Abstracts, Madrid, 2006. P.436.
14 Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. (Nauka, Moscow, 1982).
15 Vladimirov V.S. [Generalized functions in mathematical physics]. (Nauka, Moscow, 1978).
16 Lavrentiev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funkcij kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]. (Nauka, Moscow, 1976).

Авторлар туралы мағлұмат:

Алексеева Людмила Алексеевна – ***автор для корреспонденции***, доктор физико-математических наук, професор, Институт математики и математического моделирования МОН РК, ул. Пушкина 125, Алматы, Казахстан.

Арепова Гаухар Джумабаевна – PhD, научный сотрудник, Институт математики и математического моделирования, Алма-Ата, Казахстан.

Alexeyeva Lyudmila A. – ***corresponding author***, Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, 125 Pushkin Str., Almaty, Kazakhstan.

Arepova Gaukhar Zh. – PhD, Scientific researcher, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, 125 Pushkin Str., Almaty, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 01.02.2022