ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№4(129)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019
Nur-Sultan, 2019
Нур-Султан, 2019

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Ашық қолданудағы электрондық нұска: http://bulmathmc.enu.kz
Тиражы: 20 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 20 copies
Available at: http://bulmathmc.enu.kz
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;
tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 20 экземпляров. Электронная версия в открытом доступе: http://bulmathmc.enu.kz
Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №4(129)/2019

МАЗМҰНЫ

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №4(129)/2019

CONTENTS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА, №4(129)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE
МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2019, том 129, №4, 8-53 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 27.25.19

N. Temirgaliyev, Sh.K.Abikenova, Sh.U. Azhgaliyev, G.E.Taugynbayeva, A.Zh.Zhubanysheva

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan
(E-mail: ntmath10@mail.ru)

Theory of Radon Transform in the Concept of Computational (Numerical) Diameter and Methods of the Quasi-Monte Carlo Theory [1]

Abstract: In the paper is shown that results of C(N)D-recovery of derivatives by the value at the point with using just only one relationships $\|f\|_{W_2^r(0,1)^s} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}(0,1)^s}$ implies Radon's scanning algorithm of an arbitrary open (not necessarily connected) bounded set, which is optimal among the all computational aggregates, constructed by arbitrary linear numerical information from the considered object with indicating the boundaries of the computational error, not affecting the final result.

Keywords: Radon transform, Sobolev space, Computational (numerical) diameter (C(N)D), recovery by accurate and inaccurate information, computational unit, discrepancy, uniformly distributed grids, Korobov grids, optimal coefficients.

Introduction. Let begin with the following extensive quotation of Stanislav Lem [2].

1."MADNESS, NOT A NECESSARY METHOD. Let's imagine a madman tailor who sews all kinds of clothes. He knows nothing about people, nor about birds, nor about plants. He is not interested in the world, he is not studying it. He sews clothes. He doesn't know for whom. He doesn't think about it. Some clothes have the shape of a ball without any holes; in others, the tailor sews pipes, which he calls "sleeves" or "trousers". Their number is arbitrary. Clothing consists of a different number of parts. The tailor cares about only one thing: he wants to be consistent.

...

The tailor takes the finished clothes to a huge warehouse. If we could enter there, we would be convinced that some costumes fit the octopus, others fit trees or butterflies, some fit people. We would find clothes for a centaur and a unicorn, as well as for creatures that no one had invented yet. The vast majority of clothes would not find any use. Anyone admits that the Sisyphean labor of this tailor is sheer madness.

Just like this tailor, math works. She creates structures, but it is not known whose. The mathematician builds models that are perfect on their own (that is, perfect in their accuracy), but he does not know what models he creates. This does not interest him. He does what he does, since such an activity has been possible. Of course, the mathematician uses, especially when establishing initial positions, the words that we know from everyday language. He speaks, for example, about balls, or straight lines, or about points. But by these terms he does not mean familiar to us concepts. The shell of his ball has no thickness, and the point has no dimensions.

---

[1]This article was completed within of grant funding from the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, the project № AP05132938 "Radon transform on the problem of discretization".

[2]Stanislaw Lem. Summa Technologiae. — Krakow, 1967.

The space he constructed is not our space, since it can have an arbitrary number of dimensions. The mathematician knows not only infinity and trans finiteness, but also negative probabilities. If something should probably happen, its probability is one. If the phenomenon cannot happen at all, it is equal to zero. It turns out that something less than just the non-occurrence of an event can happen. Mathematicians know very well that they don't know what they are doing. A very competent person, namely Bertrand Russell, said: "Mathematics can be defined as a doctrine in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true".

It was in this vein that events occurred due to the invention of a technique that, when a material object was illuminated, made it possible to obtain the beam intensity at the output equal to the integral of the density distribution function of the substance along the beam path, which very accurately descriptions at the event "**Innovations through fundamental research. Contribution of scientific theories and discoveries to the progress of society as a whole**(University of Vienna, 2016)[3]:

Rector of the University of Vienna (on the example of I.Radon). "Often things are such that mathematical theories are in abstract form, perhaps they are considered sterile tricks that suddenly turn out to be valuable tools for physical knowledge and, thus, unexpectedly reveal their hidden power".

Karl Sigmund "Johann Radon investigated the abstract problems of the so-called pure mathematics and had no idea that today the Radon transform is the basis of computed tomography. Their numerous applications confirm the rule: there is nothing more practical than a good theory".

So, if the density distribution function of the substance is denoted by f, then the integral along the lines, subsequently called the *Radon transform*, is

$$F(p,\varphi)=F(-p,\varphi+\pi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(p\cos\varphi-s\sin\varphi, p\sin\varphi+s\cos\varphi)\,ds \tag{0.1}$$

and

$$\bar{F}_p(q)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(x\cos\varphi+y\sin\varphi+q,\varphi)\,d\varphi.$$

Now the problem reduce to representation f by the F and $\bar{F}$:

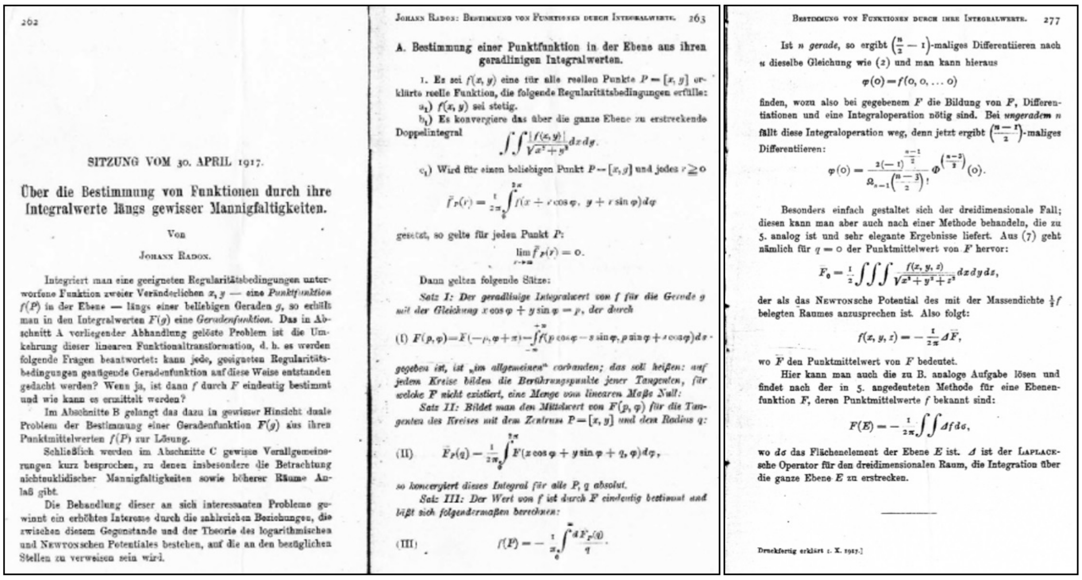
$$f(P)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\bar{F}_p(q)}{q}. \tag{0.2}$$

Definitions (0.1) and theorem (0.2) were given in 1917 by the Austrian mathematician Johann Radon in a16-page article in the journal of the Saxon Academy of Sciences [1]

2. Johann Radon (16.12.1887-25.05.1956). Johann Radon was born in Decin (Bohemia) in the Austro-Hungarian Empire (now Czech Republic). He received his doctor's degree in mathematics from the University of Vienna in 1910. He has published 45 scientific papers in various areas of mathematics. The most famous of them relate to calculus of variations, function theory of a real variable, functional analysis and geometry.

The supervisor is Gustav Ritter von Escherich (06.01.1849 - 01.28.1935), an Austrian mathematician, studied mathematics and physics at the University of Vienna. From 1876 to 1879 he taught at the University of Graz, in 1882 he worked at the University of Technology Graz, then at the University of Vienna, where he was president of the university in 1903-1904. Together

[3]Hetzenecker K., Limbeck-Lilienau C., Schweizer D., Laufersweiler B. Innovation durch Grund lagenforschung. Der Beitragwissenschaftlicher Theorien und Entdeckungenzumgesamtgesellschaftlichen Fortschritt. Begleitheft zur Ausstellungander Universitet Wien [Internet]. Wien: Universitet Wien; 2016. S. 68. http://phaidra.univie.ac.at/o:560305Google Scholar BibTex RIS



202

SITZUNG VOM 30. APRIL 1917.

Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.

Von

Johann Radon.

Integriert man eine geeigneten Regularitätsbedingungen unterworfene Funktion zweier Veränderlichen x, y — eine *Punktfunktion* $f(P)$ in der Ebene — längs einer beliebigen Geraden g, so erhält man in den Integralwerten $F(g)$ eine *Geradenfunktion*. Das in Abschnitt A vorliegender Abhandlung gelöste Problem ist die Umkehrung dieser linearen Funktionaltransformation, d. h. es werden folgende Fragen beantwortet: kann jede, geeigneten Regularitätsbedingungen genügende Geradenfunktion auf diese Weise entstanden gedacht werden? Wenn ja, ist dann f durch F eindeutig bestimmt und wie kann es ermittelt werden?

Im Abschnitte B gelangt das dazu in gewisser Hinsicht duale Problem der Bestimmung einer Geradenfunktion $F(g)$ aus ihren Punktmittelwerten $f(P)$ zur Lösung.

Schließlich werden im Abschnitte C gewisse Verallgemeinerungen kurz besprochen, zu denen insbesondere die Betrachtung nichteuklidischer Mannigfaltigkeiten sowie höherer Räume Anlaß gibt.

Die Behandlung dieser an sich interessanten Probleme gewinnt ein erhöhtes Interesse durch die zahlreichen Beziehungen, die zwischen diesem Gegenstande und der Theorie des logarithmischen und Newtonschen Potentiales bestehen, auf die an den bezüglichen Stellen zu verweisen sein wird.

Johann Radon: Bestimmung von Funktionen durch Integralwerte. 263

A. Bestimmung einer Punktfunktion in der Ebene aus ihren geradlinigen Integralwerten.

1. Es sei $f(x, y)$ eine für alle reellen Punkte $P = [x, y]$ erklärte reelle Funktion, die folgende Regularitätsbedingungen erfülle:

a_1) $f(x, y)$ sei stetig.

b_1) Es konvergiere das über die ganze Ebene zu erstreckende Doppelintegral

$$\iint \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy.$$

c_1) Wird für einen beliebigen Punkt $P = [x, y]$ und jedes $r \geq 0$

$$\bar{f}_P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r\cos\varphi,\ y + r\sin\varphi)\,d\varphi$$

gesetzt, so gelte für jeden Punkt P:

$$\lim_{r\to\infty} \bar{f}_P(r) = 0.$$

Dann gelten folgende Sätze:

Satz I: Der geradlinige Integralwert von f für die Gerade g mit der Gleichung $x\cos\varphi + y\sin\varphi = p$, der durch

$$\text{(I)}\quad F(p,\varphi) = F(-p,\varphi+\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p\cos\varphi - s\sin\varphi,\ p\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds$$

gegeben ist, ist „im allgemeinen" vorhanden; das soll heißen: auf jedem Kreise bilden die Berührungspunkte jener Tangenten, für welche F nicht existiert, eine Menge vom linearen Maße Null:

Satz II: Bildet man den Mittelwert von $F(p, \varphi)$ für die Tangenten des Kreises mit dem Zentrum $P = [x, y]$ und dem Radius q:

$$\text{(II)}\quad \bar{F}_P(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x\cos\varphi + y\sin\varphi + q, \varphi)\,d\varphi,$$

so konvergiert dieses Integral für alle P, q absolut.

Satz III: Der Wert von f ist durch F eindeutig bestimmt und läßt sich folgendermaßen berechnen:

$$\text{(III)}\quad f(P) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{d\bar{F}_P(q)}{q}.$$

Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte. 277

Ist n *gerade*, so ergibt $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$-maliges Differentiieren nach u dieselbe Gleichung wie (2) und man kann hieraus

$$\varphi(0) = f(0, 0, \ldots 0)$$

finden, wozu also bei gegebenem F die Bildung von $\bar{F}$, Differentiationen und eine Integraloperation nötig sind. Bei *ungeradem* n fällt diese Integraloperation weg, denn jetzt ergibt $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-maliges Differentiieren:

$$\varphi(0) = \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_{n-1}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\,\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(0).$$

Besonders einfach gestaltet sich der dreidimensionale Fall; diesen kann man aber auch nach einer Methode behandeln, die zu 5. analog ist und sehr elegante Ergebnisse liefert. Aus (7) geht nämlich für $q = 0$ der Punktmittelwert von F hervor:

$$\bar{F}_0 = \frac{1}{2}\iiint \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

der als das Newtonsche Potential des mit der Massendichte $\frac{1}{2}f$ belegten Raumes anzusprechen ist. Also folgt:

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\Delta\bar{F},$$

wo $\bar{F}$ den Punktmittelwert von F bedeutet.

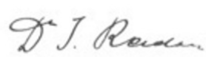
Hier kann man auch die zu B. analoge Aufgabe lösen und findet nach der in 5. angedeuteten Methode für eine Ebenenfunktion F, deren Punktmittelwerte f bekannt sind:

$$F(E) = -\frac{1}{2\pi}\iint \Delta f\,d\sigma,$$

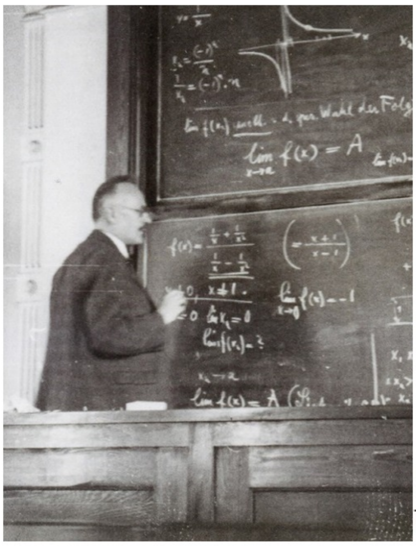
wo $d\sigma$ das Flächenelement der Ebene E ist. Δ ist der Laplacesche Operator für den dreidimensionalen Raum, die Integration über die ganze Ebene E zu erstrecken.

Druckfertig erklärt 1. X. 1917.]

with Emil Weir, he founded the journal "Monatshefte fur Mathematik und Physik", as well as the Austrian Mathematical Society together with Ludwig Boltzmann and Emil Muller.



Радóн Иоганн. Radon Johann
(16.12.1887 - 25.05.1956)



г. Дечин (Děčín)

Институт вычислительной и прикладной математики имени И. Радона

The Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM)

Chronology of research activities:

1910-1911: University of Gottingen (Germany).

1912: Assistant in Deutsche Technische Hoch schule Brunn (Brno, German: Brunn, Austria-Hungary, now Czech Republic).

1912 - 1919: Assistant at Vienna Technical University.

1913-1914: Habilitated at Vienna University.

1919-1921: Extraordinary professor (professor without a chair) at the newly created University of Hamburg (Germany).

1922-1924: Professor at the University of Greifswald (Germany).

1925-1927: Professor at the University of Erlangen (Germany).

1928-1945: Professor at the University of Breslau (Breslau, Silesia until 1945, Germany, now Wroclaw, Poland).

1945-1946: Professor at the University of Innsbruck (Austria).

1946-1954: Professor at the Institute of Mathematics at the University of Vienna.

1954-1955: Rector of the University of Vienna.

In 1939, Radon became a corresponding member, and in 1947 a full member of the Austrian Academy of Sciences. From 1952 to 1956 he was secretary of the Department of Mathematics and Science at the Austrian Academy of Sciences.

From 1948 to 1950: President of the Austrian Mathematical Society.

In 2003, the Austrian Academy of Sciences founded the J.Radon Institute of Computational and Applied Mathematics.

Radon is known as the author of a number of fundamental mathematical results, among which the Theorem of Radon-Nicodemus and Radon's measure and integral.

Johann Radon in 1916 married Maria Rigel, a high school teacher, they had three sons who died in childhood, and daughter Brigitte (born in 1924). She received her doctorate in mathematics from the University of Innsbruck, and in 1950 she married for the Austrian mathematician Eric Bukovich. Brigitte Radon (Bukovich) lives in Vienna.

The information given in clauses paragraph 3-5 is published in [2-39] and in the Bibliography available in them.

3. Another confirmation of the Rudin principle "Historical reliability of mathematical nomenclature". In 1961, American neuroradiologist William Oldendorf developed the method of Computed Tomography, in 1963, the American mathematician Allan Kormakfrom the Tufts University conducted laboratory experiments on x-ray tomography and showed the feasibility of image recovery. Working independently, in 1973, English research engineer, Hoffrey Hounsfield, developed the first commercial system - a brain scanner. In 1979, Hounsfield and Cormack were awarded the Nobel Prize in Medicine for their outstanding contribution to the development of Computed Tomography.

Another confirmation of the principle of Walter Rudin [40, 429p.] "The historical reliability of the mathematical nomenclature" is the fact that after the publication of the formula of the treatment of Radon in Leipzig in 1917 and until the Nobel Prize in medicine in 1979, 62 (!!!) yearы have passed. Each of the scientists found the formula independently of each other, not knowing the results obtained by Radon. But, this case confirms that the rapid development of mathematical methods is dictated by practical need, in this case, the progress of computed tomography.

There are many other "re-discoveries" of Radon's results in applied literature, which ended around 1972, when Soviet and American authors Stein (1972), Weinstein and Orlov (1972), West (1973), Cormack (1973) indicated that Radon's work was fundamental to the problem of projection recovery. Cormack made reference to this in his 1979 Nobel speech. In a historical observation on this subject, Marr (1982) notes that Pincus (1964) was apparently the first person to develop a recovery algorithm with knowledge of the available material in mathematics literature, including a 1917 article by Radon.

Although Radon's work in 1917 was practically unknown in applied fields until the early 1970s, it was certainly appreciated by mathematicians and was already widely used in the books of John (1955) and Gelfand, Graev and Vilenkin (1966).

The designation"Radon Transform" was given by Fritz John.

As is often the case in science, Radon himself also had predecessors: an analog of the Radon transform on the S^2 sphere was studied by Funk a year before the work of Radon appeared, and the extension to other homogeneous spaces was the work of Sigurdur Helgason.

4. Problems leading to the theory of Radon transform. Many problems of natural science and technology (astrophysics, plasma physics, seismology, medicine and etc.) are reduced to solving inverse problems.

Recall the difference between direct and inverse problems. For example, let are given an ordinary differential equation and additional conditions (initial or boundary). It is required to find a solution such problem. This is a direct problem. Consider the same from different perspectives. Let the same type of equation and the same type of conditions. But some parameters included in the equation or in the conditions are unknown. But the solution is known. It is required to find the corresponding parameter values. This is the inverse problem.

In the context of the Radon transform, this is when, according to the results of x-ray or ultrasound scanning of a certain body from various directions, it is necessary to present the structure of the interior of this body.

In the version of the mathematical formulation, this is the recovery of the value of a function from the known values of the integrals of this function, calculated from the elements of a certain set of surfaces, i.e. the function itself is unknown; only many linear or surface integrals of this function obtained as a result of experiments are known.

The range of applications of the Radon transform is very wide, with a tendency toward constant expansion: magnetic resonance imaging (MRI), radio astronomy, electron microscopy, x-ray diagnostics, biochemistry, industry, geophysics, seismology and, etc. Another wide area of application of the Radon transform and its various modifications is the digital processing of images, namely the determination of the parameters of various curves and their identification, whether it is a simple straight line, a handwritten font or a photograph of a person's face. The most important turned out to be the application of the Radon transform to tomography - a method for studying the formations hidden in the body (tumors, internal hemorrhages, etc.), which consists in obtaining a layered image of the object when it is irradiated. The Radon transform has been studied for many years and has been applied in various fields of science.

In this connection, we note that the theory of recovery of functions is actively developing in accordance with the achievements of computer technologies in the field of Mathematics and, of course, in Computer Science (which, in particular, is covered in the supporting articles of all issues of this journal 2018-2019).

5. Radon transform - 100 years later. In 2017, the mathematical scientific community widely celebrated the 100th anniversary of the famous publication "UberdieBestimmungvon-FunktionendurchihreIntegralwertel" angsgewisserMannigfaltigkeiten (On the definition of functions by their integral values along some manifolds"). Relevant research activities have been prepared on its many applications. In Austria (Linz) from March 27 to March 31, 2017 the conference "100 years of Radon Transformation", which organized by the Institute of Computational and Applied Mathematicsof Johann Radon (RICAM)was held. The content of this conference is reflected in the scientific publication [9] "The first 100 years of the Radon transform", which provides an overview of the latest scientific results on Radon tranform and inverse problems using 23 scientific papers of various authors. As reported in it, the bulk of the work is devoted to the use of the Radon transform, in particular, by Riesz and his coauthors provided information on the examination of the underwater pipeline with a limited x-ray of a computer tomography, Helin et al. examined the profiling of atmospheric turbulence to reconstruct stellar images from blurry astronomical data, Leeuwen and others examined automatic alignment for three-dimensional tomographic reconstruction of 2D sectional image data, which is an important practical a coding problem in medical imaging, Adler and Ock presented a new approach to solving practical inverse problems based on deep neural networks, Grathwohl et al. considered a numerical solution to the seismic imaging problem, Stefanov et al. studied the inverse problem of elasticography, Andersson and Boman provided new results on stability issues in limited angular tomography; Alpers and Gritzmann report on recent developments in dynamic discrete tomography; Holman et al. consider the development of surveying eskih and suspended x-ray changes. Hop and Ilmavirt presented an analysis of Abel transforms and applications to x-ray tomography on spherically symmetric manifolds. Goncharov and Novikov gave an example of non-uniqueness for weighted Radon transforms.

The series of works is devoted to the study of tomography along indirect paths, for example, application in photoacoustics, where average values are calculated for spheres or circles. Photoacoustic inverse problems are considered in Beigl et al., Frikel and Haltmeier. Gindikin reports a curved version of the Radon inversion formula on the plane. Compton image processing and cone transform are a new topic in inverse problems. The relation to generalized Radon transformations was documented in the Terziogluetal review. The model for Compton single scattering in positron emission tomography was presented by Kazantsev et al. Recoveryformulas and analysis of the integral transforms of the cone were registered by Palamodov.

Vector and tensor tomography were studied in the works of Lehtonen et al. Tensor field tomographic problems were investigated by Derevtsov et al. The exact inversion formula for solenoidal fields in a cone beam vector tomography was developed by Katsevich et al. Numerical methods for obtaining higher contrast in tomographic images and for recovery patterns is the subject of Zibetti et al. Recovery of electron paramagnetic resonance and pattern recognition with a complete change and and curve regulation studied by Durandetal. Handling nonlinear tomographic problems reviewed by Baletal.

In general, the various applications of the mathematical apparatus under study in the real world and the enormous influence of mathematical tomography in modern applied sciences are demonstrated by the example of the above works.

6. Computational (Numerical) diameter in application to the Radon transform. This title has a complex of three tasks (see [41] and [42]): for given T, F, Y, D_N (explanations are given below)

C(N)D-1: *Find order*

$$\asymp \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N} \sup_{f\in F} \|Tf\,(\cdot) - \varphi_N\,(l_1(f),...,l_N(f);\cdot)\|_Y \equiv \delta_N\,(0;T;F;D_N)_Y \equiv \delta_N\,(0;D_N)_Y$$

-informative power of a set of computational aggregate $D_N \equiv D_N\,(F)_Y$;

C(N)D-2: *constructed an optimal computational aggregates* $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ *with the gradation "deviation from the exact value of the functional is not greater than* $\tilde{\varepsilon}_N$ *" and "deviation from the exact value of the functional is equal to* $\tilde{\sigma}_N$ *" from* $D_N \equiv D_N\,(F)_Y$, *which supporting an order* $\asymp \delta_N\,(0;D_N)_Y$ *for which (it is the same for* $\{\tilde{\sigma}_N\}$ *only with honors* $\gamma_N^{(\tau)} \equiv 1$ *instead of* $\left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \leq 1$*) is considered the problem of the existence and finding the sequence* $\bar{\varepsilon}_N \equiv \bar{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)\right)_Y$ *— C(N)D-2 — limiting error (corresponding to computational aggregates* $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ *), such that*

$$\delta_N\,(0;Tf;F;D_N)_Y \asymp \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;Tf;F;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{f\in F,\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \leq 1\,(\tau=1,2,...,N)}} \left\|Tf\,(\,\cdot\,) - \bar{\varphi}_N\left(l_1(f)+\gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N,...,l_N(f)+\gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_Y,$$

with simultaneous execution

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty): \overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;Tf;F;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y}{\delta_N\,(0;Tf;F;D_N)_Y} = +\infty.$$

C(N)D-3:*Establish massiveness of the limiting error* $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(D_N,\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)$ *: as a huge as possible set* $D_N\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ *(usually associated with the structure of the source* $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ *) of* *computational aggregates* $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \equiv \varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot\right)$ *, is found, which are constructed by functionals* $l_1, ..., l_N$ *, such that for each of them the following relation holds*

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1},\ \eta_N \to +\infty) : \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; Tf; F; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y}{\delta_N\left(0; Tf; F; D_N\right)_Y} = +\infty.$$

In the case $\varepsilon_N \equiv 0$ we will talk about the task of recovering by accurate information and in the case $\varepsilon_N > 0$ - by inaccurate information.

Here F is a class of functions and $Y-$ normalized space defined on Ω_F and Ω_Y respectively(or $Y \equiv C,$ where hereinafter C the field of complex numbers). T is the operator from F to Y. Numerical information $l^{(N)} = \left(l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f)\right)$ of volume $N\,(N = 1, 2, ...)$ about f from class F is taken from defined on it linear functionals $l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$ (in general, not necessary linear).By $L = L_N$ we denote the set composed of all possible sets of N linear functionals $(l_1, ..., l_N)$. *An information processing algorithm* $\varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C$ is a correspondence, which for every fixed $(z_1, ..., z_N) \in C^N$ as a function of $(\cdot)$ is an element of Y. The record $\varphi_N \in Y$ means that φ_N satisfies all the conditions listed above, and $\{\varphi_N\}_Y$ is a set composed of all $\varphi_N \in Y$. Further, $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ is a computing aggregate of recovery from accurate information. The accurate values $l_\tau(f)$ are replaced with a given accuracy $\varepsilon_N^{(\tau)} \geq 0$ by approximate values $z_\tau \equiv z_\tau(f)$, $\left|z_\tau(f) - l_N^{(\tau)}(f)\right| \leq \varepsilon_N^{(\tau)}\ (\tau = 1, ..., N)$. Numbers $z_\tau \equiv z_\tau(f)\ (\tau = 1, ..., N)$ are prossed using the algorithm φ_N up to the function $\varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)$, which will constitute the computational aggregate $\left(l^{(N)}, \phi_N\right) \equiv \phi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)$ constructed according to information of the precision $\varepsilon_N = \left(\varepsilon_N^{(1)}, ..., \varepsilon_N^{(N)}\right)$. Here function $\varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)$ acquires the status of a computational aggregates for approximate calculation in the metric Y operator $Tf \equiv u(\cdot; f)$. $D_N \equiv D_N(F)_Y -$ a given set of complexes $\left(l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}; \varphi_N\right) \equiv \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$.

Under the conditions of C(N)D-study of the Radon transform, we will talk about recovery of functions $Tf = f$ from the numerical information obtained from linear functionals - the Radon transform Rf.

Note that the practical application of each computational aggregates from C(N)D-2 and -3 is carried out through the construction of a physical device for receiving (measuring) digital information $\bar{l}_1, ..., \bar{l}_N$ on the class F with accuracy $\tilde{\varepsilon}_N$ (it is clear that than the greater the limiting error $\tilde{\varepsilon}_N$, than the device is easier in perform and cheaper to operate) and through software $\bar{\varphi}_N$ - algorithms for computational calculation.

7. The quantitative form of the Radon theorem. The main result of the article is a complete C(N)D-study of the Radon transform in the model case: for a space dimension equal to s = 2, in the case of an open set $\Omega \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ is obtained a formula recovery of functions from the values of its Radon transform at points, orderly exact in Sobolev space $H_0^r(\Omega)$, unimprovable in numerical information obtained from all linear functionals, with the establishment in the variants of the limiting error of the calculation of the Radon transform, preserving the unimprovable error of recovery from the exact oh information.

The following theorem holds, which could be called **the Quantitative Form of Radon's Theorem.**

Before we preface the statement of this theorem with the notation and definitions used in it (which are fully given in §1).

Let is given an open set $\Omega \subset E_s \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$. By definition, the Sobolev space $H_0^r(\Omega)$ consists of all functions $f(x)$ defined on the set Ω, predefinedby zero to E_s in the form $f_\Omega(x)$, which equal to $f(x)$ or 0 depending on whether $x \in \Omega$ or $x \in E_s \backslash \Omega$, 1-periodic in each of the s-variables with a finite norm

$$\|f\|_{H_0^r(\Omega)} := \|f_\Omega\|_{W_2^r(E_s)}\ (r \geq 0,\ s = 1, 2, ...).$$

Also recall the definition of two-dimensional Dirichlet kernels $(N = n^2, n = 2, 3, ...)$

$$D_N\left(x_1, x_2\right) = D_n(x_1)\cdot D_n(x_2), D_n(x_i) = \frac{1}{2} + \sum_{k_i=1}^{n} cos2\pi ikx_i (i=1,2)$$

Let denote by special notation $\mathcal{F}$ one-dimensional Fourier transform

$$\mathcal{F}g\left(\sigma\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(\tau\right) e^{2\pi i\sigma\tau} d\tau.$$

Main theorem. *Let are given an open set $\Omega\subset E_2\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, number $r>0$. Then for class $H_0^r(\Omega)$ defined by $W_2^r(E_2)$ and all $N=n^2(n=2,3,...)$ satisfies*

C(N)D-1.

$$\inf_{\substack{l_1,...,l_N - all\ possible\\ linear\ functionals\ over\, H_0^r(\Omega),\ \varphi_N}} \sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \left\| f\left(x\right) - \varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f); x\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp$$

$$\asymp \inf_{(\alpha_\tau,t_\tau)\in E_2(\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \left\| f\left(x\right) - \varphi_N\left(Rf_\Omega(\alpha_1,t_1), ..., Rf_\Omega(\alpha_N,t_N); x\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \left\| f\left(x_1,x_2\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}},$$

where

$$Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) \equiv \int\limits_{b_1\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)}^{b_2\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)} f_\Omega\left(\frac{\sqrt{2}k_2}{n}\cos\frac{2\pi k_1}{n} - y\sin\frac{2\pi k_1}{n}, \frac{\sqrt{2}k_2}{n}\sin\frac{2\pi k_1}{n} + y\cos\frac{2\pi k_1}{n}\right) dy,$$

and

$$R^{-1}\left(D_N\left(\alpha,\tau\right)\right) = R^{-1}D_N\left(x_1,x_2\right) = \int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\int\limits_{T_{\alpha,t}\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2}\left(\frac{\sin\pi\left(2n+1\right)\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha\right)}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\sin\pi\left(2n+1\right)\left(\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right)}\right) dy\right) e^{2\pi i\gamma t}dt\ \Big] e^{2\pi i(x_1\gamma cos2\pi\alpha + x_2\gamma sin2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha.$$

C(N)D-2 (version "equal to $\tilde{\sigma}$ "). For a computational aggregates

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right), \qquad (0.3)$$

and for the sequences $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ the following relationships holds:

Firstly,

$$\sup_{f\,\in\, H_0^r(\Omega)} \left\| f\left(x_1,x_2\right) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) + \tilde{\sigma}_N\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Secondly, for any increasing to $+\infty$ a positive sequence $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\sigma}_N \equiv \eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{N}\sum\limits_{k_1=1}^{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N\left(0; \mathrm{L}_N(H_0^r(\Omega))\times\{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)}\right)_{L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

C(N)D-2. (version "no more $\tilde{\varepsilon}_N$ *"). For the computational operator* (0.3) *and for the sequence* $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ *satisfies:*

$$\sup_{\substack{f \in H_0^r(\Omega) \\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right| \leq 1}} \left\| f\left(x_1, x_2\right) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) + \gamma_N^{(k_1,k_2)}\bar{\varepsilon}_N\right) R^{-1}D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Thus, if the Radon transform is calculated with the accuracy $\tilde{\varepsilon} = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ then the error of approximation f can't gange.

At the same time, if the calculation of the Radon transform is mistaken for a $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$, then there will also be no loss of final accuracy, but this will collapse for $\eta_N\tilde{\sigma}_N$, for any arbitrarily slowly increasing to the sequence $\{\eta_N\}$.

The question of the finality of the error $\bar{\varepsilon}_N$ in the case "no more $\tilde{\varepsilon}_N$ ", when it is necessary to find out whether there is or will not be $\overline{\eta}_N \to +\infty$ such that $\bar{\varepsilon}_N\overline{\eta}_N =: \tilde{\varepsilon}_N$ will be the limit in the "no more $\tilde{\varepsilon}_N$" version, remains open*(it is known only* $N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)} = \bar{\varepsilon}_N \leq \tilde{\varepsilon}_N \leq \tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ *).*

In order to calculate the inverse Radon transform $R^{-1}g$ in the general case [7, V. 2. Fourier algorithm], a special procedure of high efficiency and with a thorough analysis of errors has been written. It is possible that the Fourier algorithm for a specific case of the Dirichlet kernel $R^{-1}D_N(x_1, x_2)$, to the calculation of which the Basic Theorem reduces the entire Radon scan procedure, will be acceptable.

Note that the proof of the Main theorem is completely made up of the results previously obtained for C(N)D-study of the problem of numerical differentiation [43], the application to the Radon transform is ensured by its feature, which is contained in the relation (in the two-dimensional case) $\|f\|_{W_2^r} \asymp \|\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}}$.

For the sake of completeness, the main theorem as an introduction to the C(N)D-approach to the theory of Radon transforms in a model situation, the proofs of these C(N)D-results, adapted to the two-dimensional case, are given in full.

Thus, pursuing internal goals, what is the main purpose of this journal, all the proofs of the Main Theorem in §2, as far as possible, are given in closed form.

In doing so, we adhere to the following scheme. The upper bounds in full are given for unit cubes, since only 1-periodic functions for each variable are studied and their integral characteristics are the same in them - these are Sobolev classes $W_2^r\left(E_s\right)$ based on harmonic analysis. Then, the results obtained are transferred to classes defined on bounded open sets $\Omega \subset E_s$, according to a chain of inequalities

$$\sup\left\|f - \varphi\left(Rf\right)\right\|_{W_2^r(E_s)} \geq \sup\left\|f_\Omega - \varphi\left(Rf_\Omega\right)\right\|_{W_2^r(E_s)} \geq \sup\left\|f_\Omega - \varphi\left(Rf_\Omega\right)\right\|_{H_0^r(\Omega)} = \sup\left\|f - \varphi\left(Rf_\Omega\right)\right\|_{H_0^r(\Omega)}.$$

The lower bounds are carried out in the reverse order - extreme functions g , with the possibility of continuation by zero to all E_s while maintaining class membership $H_0^r\left(\Omega\right)$, are determined on cubes $E_s^\delta \subset \Omega$ with sides of length $2\delta \leq 1$, then conclusions are made in the reverse order

$$\|g\|_{W_2^r\left(E_s^\delta\right)} \leq \|g\|_{H_0^r(\Omega)} \leq \|g_\Omega\|_{W_2^r(E_s)}.$$

In §1, the notation used and the necessary definitions are stated. Section 3 is devoted to the further development of the C(N)D -study of the Radon transform in the case of arbitrary dimension and various classes of functions (not necessarily Hilbert).

Inparticular, theMain Theorem is carried over to the multidimensional case.

In conclusion, we note that the main ideas of the approach and illustrative results werean-nouncedin [65].

§1. Notations and Definitions

1. Notations. Throughout the article we will use the following notations.

$R^s = \{(x_1, ..., x_s) : x_1 \in R, ..., x_s \in R\}$ – s-dimensional Euclidean space, where R is the field of real numbers and $s = 1, 2, ...$.

$E_s(a) = \left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right]^s$ – unit cube in R^s with the center at the point $(a, ..., a)$, in particular, for $s = 2$ we have $E_2(0) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ and $E_2\left(\frac{1}{2}\right) = [0,1]^2$.

In general, for $\delta > 0$

$$E_s^\delta(\eta_1, ..., \eta_s) = [\eta_1 - \delta, \eta_1 + \delta] \times \cdots \times [\eta_s - \delta, \eta_s + \delta].$$

$V_s = \left\{(x_1, ..., x_s) \in R^s : x_1^2 + ... + x_s^2 \le \delta^2\right\}$ – ball in R^s with center at the origin and $\delta > 0$.

$V_2 = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$ – unit circle on the plane.

$S^{s-1} = \left\{(x_1, ..., x_s) \in R^s : x_1^2 + ... + x_s^2 = 1\right\}$ – unit sphere in R^s.

$S^{s-1} \times R^1 \equiv \left\{(\theta_1, ..., \theta_s, \tau) \in R^{s+1} : \theta_1^2 + ... + \theta_s^2 = 1, -\infty < \tau < \infty\right\}$ – unit cylinder in R^{s+1}, for $s = 2$ unit cylinder is $\left\{(\theta_1, \theta_2, \tau) \in R^3 : \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1, -\infty < \tau < \infty\right\}$.

$x \cdot y = x_1y_1 + ... + x_sy_s = \langle x, y\rangle$ - scalar product of vectors $x = (x_1, ..., x_s)$ and $y = (y_1, ..., y_s)$ from R^s.

$\theta = (\theta_1, ..., \theta_s) \in R^s,$ where $\theta_1^2 + ... + \theta_s^2 = 1$ - is an unit vector in R^s.

$\theta^\perp$ - unit vector orthogonal $\theta : \left\langle \theta, \theta^\perp \right\rangle = 0$.

For $s = 2$, $-\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{1}{2}$ $(\textit{или}\, 0 \le \alpha < 1)$, $\theta_\alpha = (\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$, $\theta_\alpha^\perp = (-\sin 2\pi\alpha, \cos 2\pi\alpha) : \left\langle \theta_\alpha, \theta_\alpha^\perp \right\rangle = -\cos 2\pi\alpha \sin 2\pi\alpha + \sin 2\pi\alpha \cos 2\pi\alpha = 0$.

$f^{(\alpha)}(x) \equiv f^{(\alpha_1, ..., \alpha_s)}$ – Weil derivative of f the order $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$.

$A << B$ $(B \ge 0)$ means $|A| \le cB$ for some $c > 0$.

$A \asymp B$ $(A \ge 0,\ B \ge 0)$ means simultaneous execution of $A << B$ and $B << A$.

$[x]$ is an integer part of the number x.

$\{x\}$ is a fractional part of the number x.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ – ring of all integers.

$Z_+ = \{0, 1, 2, ...\}$ – the set of all non-negative integers.

$Z^s = \{m = (m_1, ..., m_s) : m_1 \in Z, ..., m_s \in Z\}$.

$\bar{m}_j = \max\{|m_j|; 1\}$ for $m_j \in Z$.

The carrier $supp\, f$ of a continuous function f is the closure of the set of all points x, such that $f(x) \ne 0$.

For function f which defined on a set $\Omega \subset R^s$, by $f_\Omega(x)$ is denoted a function

$$f_\Omega(x) = \begin{cases} f(x),\ if\ x \in \Omega, \\ 0,\ if\ x \in R^s \backslash \Omega, \end{cases}$$

which defined on R^s.

For $f(x) \in L^1(R^s)$ the direct and inverse Fourier transforms are defined by the equalities

$$\hat{f}(\xi) \equiv \hat{f}(\xi_1, ..., \xi_s) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_s) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx_1 ... dx_s$$

and

$$\tilde{f}(\xi) \equiv \tilde{f}(\xi_1, ..., \xi_s) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ... x_s) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx_1, ..., dx_s.$$

2. Definitions. $L^p(\Omega)$ is the space of all measurable on a nonempty set Ω functions f with the finite norm функций с конечной нормой $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

C^∞ is the set of all infinitely differentiable on R^s functions.

C_0^∞ - is the set of all infinitely differentiable on R^s functions $f(x)$, such that the carrier of each of them forms a limited set.

Let define the norms has of in the Sobolev space $W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s\right)$: we expand the 1-periodic by each of their s variable function $f(x) \in L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s\right)$ to the trigonometric Fourier series on $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{m\in Z^s} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i(m,x)},\ \hat{f}(m) = \int\limits_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s} f(x)\, e^{-2\pi i(m,x)} dx,$$

then, using the definition of the Weyl r-derivative and Parseval's equality, for all real $r \geq 0$ we set

$$\|f(x)\|^2_{W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)} = \sum_{m=(m_1,\dots,m_s)\in Z^s} \left(\bar{m}_1^2 + \dots + \bar{m}_s^2\right)^r \left|\hat{f}(m)\right|^2. \qquad (1.1)$$

In particular, $W_2^0\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right) = L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$.

By definition,

$H^r(R^s) = \{f : f-$ generalized functions over the Schwartz space of functions $\varphi(x) \in C^\infty(R^s)$, for all $k = (k_1,...,k_s) \in Z_+^s$, $\ell = (\ell_1,...,\ell_s) \in Z_+^s$ such that

$$\|\varphi\|_{k,\ell} := \sup\left\{\left|x_1^{k_1}\cdots x_s^{k_s}\frac{\partial^{(\ell_1+\dots+\ell_s)}\varphi(x_1,...,x_s)}{\partial^{\ell_1}x_1\dots\partial^{\ell_s}x_s}\right| : x=(x_1,...,x_s)\in R^s\right\} = c_{k,\ell} < +\infty\right\},$$

with the finite norm

$$\|f\|_{H^r(R^s)} = \left(\int\limits_{R^s}\left(1+|\xi|^2\right)^r\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.2)$$

Let is given an open set Ω in R^s, then

$$H_0^r(\Omega) = \left\{f \in H^r(R^s) : suppf \subset \bar{\Omega}\right\}, \qquad (1.3)$$

with norm

$$\|f\|_{H_0^r(\Omega)} \overset{(1.2)}{=} \|f\|_{H^r(R^s)}.$$

Note (see [7, Chapter VII, Lemma 4.4]) that for all real $r \geq 0$ norm (1.1) for $\Omega = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^s$ is equivalent to the norm $\|f\|_{H_0^r(\Omega)}$ of the functions from of the space (1.3).

We note that 1-periodic continuous functions $f(x)$, including trigonometric polynomials,which generate regular generalized functions $\int\limits_{R^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s} f(x)\varphi(x)\,dx$, for all $r \geq 0$ belong to the space $H_0^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$.

Thus, in the case of 1-periodic functions by each of their s- variable, for all real $r \geq 0$ the following set-theoretic equalities holds

$$H_0^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right) \equiv W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right) \equiv W_2^r(0,1)^s. \qquad (1.4)$$

In the context of the above definitions of Sobolev spaces $H_0^r(\Omega)$, we distinguish open sets $\Omega \subset \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$ to which this article is devoted.

In this case, according to (1.3), the space $H_0^r(\Omega)$ consists of all functions $f(x)$ defined on the set Ω, redefined by zero up to $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$ in the form $f_\Omega(x)$, 1-periodic by each of their s-variables, with equivalent finite norms (1.1) and (1.2), providing (1.4) resulting in

$$\|f\|_{H^r(\Omega)} := \|f_\Omega\|_{W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)}\ (r \geq 0,\ s = 1,2,...), \qquad (1.5)$$

what will be reflected in the record $H_0^r(\Omega) \sim W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$.

Of course, the transition from f defined on to Ω to f_Ω defined on R^s ensures the correctness of operating with f on R^s.

Let give equivalent definitions of the Sobolev space $H_0^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right) \equiv W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$ in terms of derivatives.

Let are given integer $r > 0$ and integer $s\,(s = 1,2,...)$, then

$$\|g(x)\|^2_{W_2^r([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^s)} = \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z_+^s \\ |k|=k_1+...+k_s\le r}} \int\limits_{V^2} \left|\frac{\partial^{|k|} g(x_1,...,x_s)}{\partial^{k_1}x_1...\partial^{k_s}x_s}\right|^2 dx_1...dx_s.$$

If $r>0$ - not an integer and $r=\bar{r}+\sigma$, where $\bar{r}$ - integer and, $0<\sigma<1$, then

$$\|g(x)\|^2_{W_2^r([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^s)} = \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z_+^s \\ |k|=k_1+...+k_s\le r}} \int\limits_{[0,1]^2} \left|\frac{\partial^{|k|} g(x_1,...,x_s)}{\partial^{k_1}x_1...\partial^{k_s}x_s}\right|^2 dx_1...dx_s +$$

$$+\sum_{k_1+...+k_s=\bar{r}} \int\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^s} \int\limits_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^s} \frac{\left|\frac{\partial^{\bar{r}} g}{\partial^{k_1}x_1...\partial^{k_s}x_s}(x_1,...,x_s) - \frac{\partial^{\bar{r}} g}{\partial^{k_1}y_1...\partial^{k_s}y_s}(y_1,...,y_s)\right|^2}{\|x-y\|_{R^s}^{s+2\sigma}} dx_1...dx_s dy_1...dy_s.$$

To conclude the topic of the Sobolev space, we give a chain of definitions that totaly give the definition of spaces $H_p^r(\Omega)$: these are paragraphs [44, 2.2.1] - the space of slowly growing generalized functions $S'(R^s)$, [44, 2.3.1] - the set of functions f from $S'(R^s)$ with the requirement $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{r}{2}} \hat{f}(\xi)\in L^2(R^s)$ for smoothness r of $H_p^r(R^s)$, [44, 4.2.1]- $H_p^r(\Omega)$ and $\overset{\circ}{H}{}_p^r(\Omega)$, [44, 4.3.2] - $H_p^r(\Omega)=\overset{\circ}{H}{}_p^r(\Omega)=\tilde{H}_p^r(\Omega)=\left\{f: f\in H_p^r(R^s), \text{suppf}\in\bar{\Omega}\right\}$ from [44] and the definition of a slowly growing generalized function from [45, chapter VI, §1].

s-dimensional Dirichlet kernels are $(N=n^s, n=2,3,\ldots)$

$$D_n(x_1,...,x_s)=D_n(x_1)\cdots D_n(x_s), D_n(x_i)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos 2\pi k x_i = \frac{\sin\pi(2n+1)x_i}{2\sin\pi x_i}\ (i=1,...,s).$$

Further

$$\sum_{-n}^{n} e^{iku} = e^{-inu}\sum_{0}^{2n} e^{iku} = e^{-inu}\frac{e^{(2n+1)iu}-1}{e^{iu}-1} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}},$$

then for $u=2\pi x_i$

$$D_n(x_i)=\frac{1}{2}\sum_{|k|\le n} e^{2\pi i k x_i} = \frac{\sin\pi(2n+1)x_i}{2\sin\pi x_i}. \tag{1.6}$$

Radon Transform. The Radon transform (s-dimensional) of a function $f(x)$, which are given on the closure $\bar{\Omega}$ of an open set $\Omega\subset R^s$, for each $s-1$ hyperplane dimentional perpendicular to the vector $\tau\cdot\theta$, $\theta:=(\theta_1,...,\theta_s)\in R^s$ with $\theta_1^2+...+\theta_s^2=1$ and $-\infty<\tau<\infty$ associates the integral over it

$$Rf(\theta,\tau)\equiv Rf(\theta_1,...,\theta_s;\tau) = \int\limits_{x:\langle x,\theta\rangle=\tau\cap\Omega} f(x)dx = \int\limits_{y:y\in R^{s-1}} f_\Omega(\tau\theta+y)dy. \tag{1.7}$$

In two-dimensional case $(s=2)$, the unit vector $\theta_\alpha^\perp:=(-\sin 2\pi\alpha, \cos 2\pi\alpha)$ is perpendicular to the unit vector $\theta_\alpha:=(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$, since their scalar product

$$\left\langle\theta_\alpha,\theta_\alpha^\perp\right\rangle = -\sin 2\pi\alpha\cos 2\pi\alpha + \cos 2\pi\alpha\sin 2\pi\alpha = 0.$$

Therefore, the integral along a straight line $T_{\alpha,\tau}$ perpendicular to a vector $\tau(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$ with a beginning at a point $(0,0)$ is the integral along a straight line $\tau\theta+y\theta^\perp$ $(-\infty<\tau<+\infty,\ -\infty<y<+\infty)$.

Thus,

$$Rf\left(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau\right) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(T_{\alpha,\tau}\right) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\tau\theta + y\theta^{\perp}\right) dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\tau\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \tau\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy.$$

When $s = 2$ the integral in (1.7) is actually taken over the set $T_{\alpha,\tau} \bigcap \operatorname{supp} f$, i.e.

$$Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau\right) = \int\limits_{T_{\alpha,\tau} \bigcap \operatorname{supp} f} f\left(\tau\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \tau\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy. \quad (1.8)$$

In the case of a class of functions f defined on the set Ω , we will also write $T_{\alpha,t}\left(\Omega\right)$.

This article is devoted to the case $\operatorname{supp} f \subset \bar{\Omega}$ where an open set Ω is contained in a unit cube $E_s \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$ (or $[0,1]^s$), which is equivalent for functions that are 1-periodic by each of their variable.

Adapting to each of these cases, we will τ parameterize through $\tau = \tau\left(t\right)$ where $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ (or $0 \leq t \leq 1$) so that it $\tau\left(t\right)\theta_{\alpha}$ belongs to the circle as the smallest circle $\left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$ containing a square $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$. Then for $\tau = \tau(t)$ when instead $Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau = \tau\left(t\right)\right)$ we will write $Rf\left(\alpha, t\right)$.

So, for $s = 2$, $\bar{\Omega} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ satisfies: for $\tau(t) = \sqrt{2}t$, $\tau\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ and by (1.8) satislies

$$Rf\left(\alpha, t\right) \equiv Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha; \tau\left(t\right)\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy. \quad (1.9)$$

With $s = 2$, $E_2 \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2, -\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$, $\operatorname{supp} f \subset E_2$ we have a more accurate record (1.9)

$$Rf\left(\alpha, t\right) \equiv Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha; \tau = \tau(t) = \sqrt{2}t\right) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-(2t)^2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-(2t)^2}} f_{E_2}\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy. \quad (1.10)$$

Note that along with "Radon Transformation", other equivalent names are used - "Radon image", "Radon projection ($f(x)$ on $\langle x, \theta\rangle = t$)" and etc.

Let us single out a special notation $\Im$ for the one-dimensional Fourier transform

$$\Im g\left(\sigma\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(\tau\right) e^{2\pi i\sigma\tau} d\tau. \quad (1.11)$$

§2. Complete C(N)D-study of the Radon transform in the model two-dimensional case

In the notation and definitions §1 satisfies

Theorem 1 (C(N)D-1,upper bound). *Let are given $r > 0$ and $N = n^2$ $(n = 2, 3, ...)$. Then, for a computational aggregate constructed by the values at the points of the Radon transform of a function $f(x_1, x_2)$ from the class $W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2\right)$*

$$\Lambda_N (x_1, x_2; f) = \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)$$

the following relation holds

$$\sup_{f \in W_2^r \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2} \left\| f(x_1, x_2) - \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_1}{n}\right) \right\|_{L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2} << N^{-\frac{r}{2}},$$

where

$$R^{-1} \left(D_N (\alpha, \tau)\right) = R^{-1} D_N (x_1, x_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{0}^{\infty} \mathcal{F} \left(R D_N (\alpha, \gamma)\right) e^{2\pi i (x_1 \gamma cos 2\pi\alpha + x_2 \gamma sin 2\pi\alpha)} \gamma d\gamma d\alpha.$$

Consequence 1. *Let are given an open set* $\Omega \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ *and* $r > 0$. *Then for class* $H_0^r (\Omega) \sim W_2^r \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2\right)$ *and all* $N = n^2$ $(n = 2, 3, ...)$ *the following inequality holds*

$$\sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \left\| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} << N^{-\frac{r}{2}},$$

where

$$R^{-1} \left(D_N (\alpha, \tau)\right) = R^{-1} D_N (x_1, x_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{0}^{\infty} \mathcal{F} \left(R D_N (\alpha, \gamma)\right) e^{2\pi i (x_1 \gamma \cos 2\pi\alpha + x_2 \gamma \sin 2\pi\alpha)} \gamma d\gamma d\alpha.$$

The subject of study in this section are the functions of two variables, 1-periodic for each of them, therefore, are completely determined by consideration on any unit square with sides parallel to the coordinate axes.

Those will be here $E_2 \equiv E_2(0) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ and $E_2\left(\frac{1}{2}\right) = [0, 1]^2$, related by replacements: if $(x_1, x_2) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, then $\left(x_1 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2}\right) \in [0, 1]^2$ and, conversely, if $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$, then $\left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2 - \frac{1}{2}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$.

Generally, when consider the following changing of variables $(i = 1, 2)$

$$x_i = \varphi_i(t_i) \ \ (\alpha_i \leq t_i \leq \beta_i)$$

the following equalities holds

$$\int_{\varphi_1(\alpha_1)}^{\varphi_1(\beta_1)} \int_{\varphi_2(\alpha_2)}^{\varphi_2(\beta_2)} g(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \end{pmatrix} \right| dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2)) \left| \varphi_1'(t_1) \cdot \varphi_2'(t_2) \right| dt_1 dt_2,$$

in particular

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x_1, x_2) \, dx_1 dx_2 = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} g\left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2 - \frac{1}{2}\right) dx_1 dx_2$$

and

$$\int_0^1\int_0^1 g(x_1,x_2)\,dx_1dx_2=\int_{-\frac12}^{\frac12}\int_{-\frac12}^{\frac12} g\left(x_1+\frac12,x_2+\frac12\right)dx_1dx_2.$$

In the case of linear functions $x_i=a_it_i+b_i(i=1,2)$ we have $dx_1dx_2=|a_1a_2|\,dt_1dt_2$.

The final results will be formulated for $\left[-\frac12,\frac12\right]^2$, and the proofs will be formulated on the two indicated squares (for example, so as not to reformulate the known results for $[0,1]^2$).

First, we give a number of auxiliary statements on the basis of which we will prove an upper bound in C(N)D-1. We begin by establishing the representation of the Radon transform through a multiple integral. In the two-dimensional case, $\bar\Omega=\left[-\frac12,\frac12\right]^2\equiv E_2(0)\equiv E_2$ to which the main theorem being proved is devoted, the Radon transform is written in the form of a surface integral (see §1).

Lemma 1. *Let are given* $E_2\equiv\left[-\frac12,\frac12\right]^2$. *Then, the following relation holds*

$$\|Rf\|^2_{H^r(Z)}=2\sqrt2\pi\,\|Rf\|^2_{H_0^r\left(\left[-\frac12,\frac12\right]^2\right)}. \tag{2.1}$$

Proof. Cylinder

$$Z\equiv\left\{\left(\bar\theta,\bar{\bar\theta},\tau\right)\in R^3:\bar\theta^2+\bar{\bar\theta}^2=1,-\infty<\tau<+\infty\right\},dZ=\sqrt{EG-F^2}d\alpha d\tau,$$

according to which the Sobolev space is defined through the surface integral, has a parametric representation $-\frac12\le\alpha<\frac12,\theta_\alpha=(\cos2\pi\alpha,\sin2\pi\alpha)$ and $-\infty<\tau<+\infty$.

In this notation, successively applying the definitions of norms $H^r\left(R^2\right)$ from [7, II.5] and $H_0^r(\Omega)$ from [7, VII.4] and writing the surface integral through the double integral, for the function $g(\alpha,\tau):=g(\cos2\pi\,\alpha,\sin2\pi\alpha,\tau)$ we obtain

$$\|g\|^2_{H^r(Z)}\overset{def H^r(Z)}{=}\iint\limits_Z\left(1+\tau^2\right)^r\hat g(\alpha,\tau)\,dZ=\int_{-\frac12}^{\frac12}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\tau^2\right)^r\hat g(\alpha,\tau)\sqrt{EG-F^2}d\alpha d\tau,$$

where

$$E=\left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\tfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\tfrac{\partial\tau}{\partial\alpha}\right)^2=(-2\pi\sin2\pi\alpha)^2+(2\pi\cos2\pi\alpha)^2+0=4\pi^2,$$

$$G=\left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial\tau}\right)^2+\left(\tfrac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\right)^2+\left(\tfrac{\partial\tau}{\partial\tau}\right)^2=0+0+1=1,$$

$$F=\tfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\tfrac{\partial\theta_1}{\partial\tau}+\tfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\tfrac{\partial\theta_2}{\partial\tau}+\tfrac{\partial\tau}{\partial\alpha}\tfrac{\partial\tau}{\partial\tau}=0,$$

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{4\pi^2\cdot1}=2\pi,$$

whence

$$dZ=2\pi\,d\alpha\,d\tau$$

and in the end

$$\|g\|^2_{H^r(Z)}=2\pi\int_{-\frac12}^{\frac12}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\tau^2\right)^r\hat g(\alpha,\tau)\,d\alpha d\tau\overset{def H_0^r(\Omega)}{=}2\pi\,\|g\|_{H_0^r\left(\left[-\frac12,\frac12\right)\times R^1\right)}. \tag{2.2}$$

Now we apply this definition to the Radon transform (1.7)-(1.8) for $\bar\Omega=\left[-\frac12,\frac12\right]^2$.

First we write the Radon transform for the unit square $\left[-\frac12,\frac12\right]^2$.

Let are given the function $f(x)\equiv f(x_1,x_2)$ which defined on a unit square $E_2\equiv\left[-\frac12,\frac12\right]^2$ and numbers $-\frac12\le\alpha<\frac12$ and $-\infty<\tau<+\infty$.

Moreover, the intersection $T_{\alpha,\tau}$ with domain of f for all $-\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}$ is fulfilled for τ, which modulo no larger diagonal of the square $\left[0, \frac{1}{2}\right]^2$, i.e. quantities $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Passing to a linear function $\tau(t)$, when $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$ taking one-by-one all the values of the interval $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, which are $\tau(t) = \sqrt{2}t$, we obtain the desired parameterization (1.9)

$$\left\{\begin{array}{ll} \theta_1 = \cos 2\pi\alpha, & -\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{1}{2}, \\ \theta_2 = \sin 2\pi\alpha, & \\ \tau = \tau\left(t\right) = \sqrt{2}t, & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}, \end{array}\right. \quad \{(\alpha,t)\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \equiv E_2 \tag{2.3}$$

at which

$$T_{\alpha,t} = \left\{\tau\left(t\right)\theta_\alpha + y\theta_\alpha^\perp : -\infty < y < +\infty\right\} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2.$$

Thus, passing in (2.2) to (2.3)

$$g\left(\alpha,\tau\right) = Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau\right) \quad \left(-\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}, -\infty < \tau < +\infty\right),$$

together with the replacement $\tau = \tau(t) = \sqrt{2}t,\ d\tau = \sqrt{2}dt\left(-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}\right)$ we have (2.1)

Lemma 1 is proved.

We write out the segments $T_{\alpha,t} = \left[b_1\left(\alpha,t\right), b_2\left(\alpha,t\right)\right]$ in the local coordinate system with the beginning at the base of the perpendicular $\left(\sqrt{2}t \cdot \theta_2\right)^\perp$ with the direction "counterclockwise, from right to left":

$$b_1\left(\alpha,t\right) = \left\{\begin{array}{ll} \max\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha + 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if} -1/2 \le \alpha < -3/8, \\ \max\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha + 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{-1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if} -3/8 \le \alpha < -1/8, \\ \max\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha - 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{-1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if} -1/8 \le \alpha < 1/8, \\ \max\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha - 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if}\ 1/8 \le \alpha < 3/8, \\ \frac{1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha} & \textit{if}\ 3/8 \le \alpha < 1/2 \end{array}\right. \tag{2.4}$$

$$b_2\left(\alpha,t\right) = \left\{\begin{array}{ll} \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha + 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if} -1/2 \le \alpha < -3/8, \\ \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha - 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{-1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if} -3/8 \le \alpha < -1/8, \\ \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha - 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if} -1/8 \le \alpha < 1/8, \\ \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha + 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if}\ 1/8 \le \alpha < 3/8, \\ \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha + 1/2}{\sin 2\pi\alpha}, \frac{-1/2 - t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \textit{if}\ 3/8 \le \alpha < 1/2. \end{array}\right.$$

Note that it f has an argument $x = (x_1, x_2)$ from a unit square $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, the of variables Radon transform Rf is (α, t) from $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. The inverse Radon transform $R^{-1}g$ is when for a unit operator E satisfies $RR^{-1} = E = R^{-1}R$, the function $g(\alpha, t)$ of variables (α, t) from $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ associates a function $R^{-1}g$ defined $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ on of variables (x_1, x_2).

In calculations, as far as possible, these variables of different meanings will be indicated:

$$f(x_1,x_2) \overset{Rf}{\mapsto} R\left(f\left(x_1,x_2\right)\right) \equiv Rf\left(\alpha,t\right) = g(\alpha,t),$$

$$g(\alpha,t) \overset{R^{-1}g}{\mapsto} R^{-1}\left(g(\alpha,t)\right) \equiv R^{-1}g\left(x_1,x_2\right) = f(x_1,x_2),$$

where $R\left(f\left(x_1,x_2\right)\right)$ the results of applying operator R for $f\left(x_1,x_2\right)$, the result Rf depends on (α,t), in the record $Rf\left(\alpha,t\right)$.

And conversely, $R^{-1}\left(g\left(\alpha,t\right)\right) -$ the operator R^{-1} is applied to $g\left(\alpha,t\right)$, the result $R^{-1}g-$ depends on (α,t), in the record (α,t), в записи $R^{-1}g\left(x_1,x_2\right)$.

Under conditions (2.4), we have $T_{\alpha,t} = T_{\alpha,t}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right) = \left[b_1(\alpha,t), b_2(\alpha,t)\right]$, and the Radon transform (1.9) is written in the form

$$Rf(\alpha;t) \equiv Rf(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, t) =$$

$$= \int\limits_{T_{\alpha,t}\bigcap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2} f\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy =$$
$$= \int\limits_{b_1(\alpha,t)}^{b_2(\alpha,t)} f\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy, \tag{2.5}$$

where as the notation (1.10) for $\Omega \subset \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^2$ leads to a different form

$$Rf(\alpha;t) \equiv Rf(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, t) = \int\limits_{T_{\alpha,t}} f_\Omega(y)dy =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-4t^2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-4t^2}} f_\Omega\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy.$$

By applying (2.4) - (2.5) to the Radon transform of the Dirichlet kernel (see (1.6), $N = n^2$)

$$D_N(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{m_1=1}^{n}\cos 2\pi m_1 x_1\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{m_2=1}^{n}\cos 2\pi m_2 x_2\right) = \left(\frac{\sin\pi(2n+1)x_1}{2\sin\pi x_1}\right)\cdot\left(\frac{\sin\pi(2n+1)x_2}{2\sin\pi x_2}\right) \tag{2.6}$$

and

$$h_{m_1,m_2}(x_1,x_2) = \cos 2\pi m_1 x_1 \cdot \cos 2\pi m_2 x_2. \tag{2.7}$$

Then, we have

Lemma 2. *For all* $-\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{1}{2}$ *and* $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$ *satisfy equalities*

$$RD_N(\alpha,t) =$$

$$= \int\limits_{T_{\alpha,t}\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2} \left(\frac{\sin\pi(2n+1)\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha\right)}\right)\times\left(\frac{\sin\pi(2n+1)\left(\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right)}\right) dy$$

and

$$Rh_{k_1,k_2}(\alpha,t) = \int\limits_{T_{\alpha,t}\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2} \cos 2\pi n_1\left[\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha\right]\times\cos 2\pi n_2\left[\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right] dy.$$

Lemma 3. *The Radon transform* $Rf(\alpha,t)$ *has a period 1 by* α *and by* t *, and periodically continues for all* R^2 *.*

Proof. By $t = -\frac{1}{2}$ and $t = \frac{1}{2}$ segment

$$T_{\alpha,t} \equiv \left\{\langle x,\theta\rangle = x_1\cos 2\pi\alpha + x_2\sin 2\pi\alpha = \sqrt{2}t : -\frac{1}{2} \le x_1, x_2 \le \frac{1}{2}\right\}$$

in

$$Rf(\alpha;t) \equiv Rf(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, t) \overset{(2.5)}{=} \int\limits_{T_{\alpha,t}} f(y)dy$$

turns to a point, therefore

$$Rf\left(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha, -\frac{1}{2}\right) = 0 = Rf\left(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha, \frac{1}{2}\right).$$

The segment $T_{\alpha,t}$ by α has period 1 and therefore the function Rf by also has period 1.

Lemma 4 (Frank Natterer [7], Theorem 5.2.). *For any* $r \geq 0$ *and any function* $f(x_1,x_2)$ *from* $W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)$, *its Radon transform* $Rf(\alpha,t)$ *belongs to* $W_2^{r+\frac{1}{2}}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)$ *and, conversely, the inclusion* $Rf(\alpha,t) \in W_2^{r+\frac{1}{2}}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)$ *implies* $f(x_1,x_2) \in W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)$, *moreover the following relation holds*

$$\|Rf(\alpha,t)\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)} \asymp \|f(x_1,x_2)\|_{W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)} \tag{2.8}$$

The proof follows from the following relation (from [10, Theorem 3.1]) for abounded open set $\Omega \subset R^2$

$$\|Rf\,(\alpha,t)\|_{H_0^{r+\frac{1}{2}}(Z)} \asymp \|f\,(x_1,x_2)\|_{H_0^r(\Omega)}$$

and Lemma 1.

The following M. Riess-Torin theorem is given in the entries from [7, VII, §4 (p. 230)]):

Lemma 5. *For all* $0 \leq \nu < \mu$ *,for each* $g(x) \equiv g(x_1,...,x_s)$ *from the class* $W_2^{\mu}(E_s)$ *the interpolation inequality holds*

$$\|g\,(x_1,...,x_s)\|_{\,W_2^{\nu}(E_s)} << \|g\,(x_1,...,x_s)\|^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}_{W_2^0(E_s)} \|g\,(x_1,...,x_s)\|^{\frac{\nu}{\mu}}_{W_2^{\mu}(E_s)}.$$

Below, the results previously obtained in [43], which were established for an arbitrary dimension, with full proofs, are presented in the two-dimensional case $s=2$. In this case $[0,1]^2$, a square will be kept in the reasoning, which in applications for 1-periodic functions will not preclude use in the case $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$.

By the *Weil derivative* of order $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ of a function g, where β_1,β_2 are nonnegative numbers, we mean a function $g^{(\beta)}\,(x) \equiv g^{(\beta_1,\beta_2)}(x)$ which Fourier-Lebesque series is (see [46])

$$\sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2} \hat{g}\,(m)\left(e^{2\pi i(m,x)}\right)^{(\beta_1,\beta_2)} \equiv \sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^s} \hat{g}\,(m_1,m_2)\left(e^{2\pi i m_1 x_1}\right)^{(\beta_1)}\left(e^{2\pi i m_2 x_2}\right)^{(\beta_2)}, \tag{2.9}$$

where

$$\left(e^{2\pi i(m,x)}\right)^{(\beta_1,\beta_2)} = \prod_{j=1}^{2}\left(e^{2\pi i m_j x_j}\right)^{(\beta_j)} =$$

$$= \left(\overline{2\pi m_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi m_2}\right)^{\beta_2} e^{i\beta_1\frac{\pi}{2}sign m_1 + i\beta_2\frac{\pi}{2}sign m_2} e^{2\pi i(m,x)}. \tag{2.10}$$

$$(m_1,m_2)\in Z^2,\ (\beta_1,\beta_2)\in R^2, \beta_j \geq 0, 1^{\beta_j} \equiv 1\,(j=1,2)\,,$$

Note that (2.9)-(2.10) differs from the definition of the derivative $g^{(\beta_1,\beta_2)}\,(x)$ given in [47] in that $g^{(\beta_1,\beta_2)}\,(x)$ takes into account the Fourier-Lebesque coefficients $\hat{g}(m_1,m_2)$ with some of the components m_j being zero.

For $N=n^2\,(n=5,6,...)$ we denote the operator of differentiation $(E^* = E\backslash\,\{0\})$

$$\Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}\,(x;g) = \bar{\varphi}_N\left(\left\{g\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\right\}_{k_j=1(j=1,2)}^{n};x\right) = \tag{2.11}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{k=(k_1,k_2)\in Z^2:\\ k_j=1,...,n\\ (j=1,2)}} g\left(\xi^{(k)}\right)\sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} * \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{\beta_1 i\frac{\pi}{2}sign t_1 + \beta_2 i\frac{\pi}{2}sign t_2} e^{2\pi i\left(t,x-\xi^{(k)}\right)},$$

where

$$\xi^{(k)} = \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) \tag{2.12}$$

and

$$A_N = \left\{(t_1, t_2) : \ t_j = -\left[\frac{n}{2}\right] + y \quad (y = 1, ..., n; j = 1,\ 2)\right\}. \tag{2.13}$$

Thereby, the operator (2.11) is the finite convolution operator (with respect to (2.12) and (2.13))

$$\Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{k=(k_1,k_2)\in Z^2: \\ k_j = 1,...,n \\ (j=1,2)}} g\left(\xi^{(k)}\right) \cdot D_N^{(\beta_1,\beta_2)}\left(x - \xi^{(k)}\right), \tag{2.14}$$

where

$$D_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x) = \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)}.$$

Lemma 6(N.Temirgaliyev, A.Zh.Zhubanysheva [43]). *Let are given nonnegative integer numbers* r, β_1, β_2 *such that* $r > \max\{\beta_1 + \beta_2, 1\}$. *Then for any 1-periodic by each of their two variables and summarized on* $[0,1]^2$ *functions* $g \equiv g(x) \equiv g(x_1, x_2)$ *with series*

$$\sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2} (\overline{2\pi i m_1})^{\beta_1} (\overline{2\pi i m_2})^{\beta_2} \left|\hat{g}(m)\right| < +\infty, \tag{2.15}$$

the following inequality holds

$$\Delta_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) \equiv g^{(\beta_1,\beta_2)}(x) - \Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) =$$

$$= - \sum_{\substack{t=(t_1,t_2)\in Z^2 \\ t\in A_N}} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\tau=(\tau_1,\tau_2)\in Z^2} {}^*\hat{g}(\tau n + t) +$$

$$+ \sum_{t=(t_1,t_2)\in Z^2\setminus A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}(t). \tag{2.16}$$

Proof. From the conditions (2.15) of Lemma it follows that function g and $g^{(\beta_1,\beta_2)}$ continious on $[0,1]^2$. In particular, the operator (2.14) defined correctly. We have $\left(N = n^2,\ n = 2, 3, ...\right)$

$$\Lambda_N^{(\beta_1,\beta_s)}(x;g) = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{k=(k_1,k_2)\in Z^2: \\ k_j=1,...,n\ (j=1,2)}} \sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2} \hat{g}(m) e^{2\pi i\left(m,\xi^{(k)}\right)} \times$$

$$\times \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i\left(t, x-\xi^{(k)}\right)} =$$

$$= \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2} \hat{g}(m) \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{k=(k_1,k_2)\in Z^2: \\ k_j=1,...,n \quad (j=1,2)}} e^{2\pi i\left(m-t,\xi^{(k)}\right)} =$$

$$= \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2} \hat{g}(m) \prod_{j=1}^{2} \chi_{(n)}(m_j - t_j) =$$

$$= \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\substack{m=(m_1,m_2)\in Z^2 \\ m_j \equiv t_j \,(modn)}} \hat{g}\,(m) =$$

$$= \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\tau=(\tau_1,\tau_2)\in Z^2} \hat{g}\,(n\tau + t)\,, \tag{2.17}$$

such that ($m_j \equiv t_j \,(modn) \Leftrightarrow m_j - t_j = \tau_j n \Leftrightarrow m_j = \tau_j n + t_j$)

$$\frac{1}{n}\sum_{k_j=1}^{n} e^{2\pi i (m_j - t_j)\frac{k_j}{n}} = \chi_{(n)}\,(m_j - t_j) = \begin{cases} 1, \ for \ (m_j - t_j) \equiv 0\,(modn)\,, \\ 0, \ otherwise. \end{cases}$$

Thus, according to (2.17), we have, respectively

$$\Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}\,(x,g) = \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\tau\in Z^2} \hat{g}\,(n\tau + t) =$$

$$= \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \left[\hat{g}\,(t) + \sum_{\tau\in Z^2} *\hat{g}\,(n\tau + t)\right] =$$

$$= \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}\,(t) +$$

$$+ \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\tau\in Z^2} *\hat{g}\,(n\tau + t)$$

and

$$g^{(\beta_1,\beta_s)}\,(x) = \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}\,(t) +$$

$$+ \sum_{t\in Z^2\setminus A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}\,(t)$$

from wich follows (2.16). Lemma 6 is proved.

The following Lemma holds.

Lemma 7 (N.Temirgaliyev, A.Zh.Zhubanysheva [43]). *Let are given nonnegative numbers* r, β_1, β_2 *such that* $r > \max\{\beta_1 + \beta_2, 1\}$. *Then for any function* g *from* $W_2^r(0,1)^2$ *the following upper estimates holds* $(N = n^2)$

$$\left\| \sum_{t\in A_N} \sum_{\tau\in Z^2} {}^*\hat{g}\,(n\tau + t) \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} e^{2\pi i(t,x)} \right\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}. \tag{2.18}$$

Proof. Denoting through I_1 the series in (2.18), according to the Parseval equality, we have

$$\|I_1\|^2_{L^2(0,1)^2} \equiv \int_{[0,1]^2} \left| \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2} \sum_{\tau\in Z^2} {}^*\hat{g}\,(n\tau + t)\, e^{2\pi i(t,x)} \right|^2 dx \asymp$$

$$\asymp \sum_{t\in A_N} \left(\overline{t_1}\right)^{2\beta_1} \left(\overline{t_2}\right)^{2\beta_2} \left| \sum_{\tau\in Z^2} {}^*\hat{g}\,(n\tau + t) \right|^2 \asymp$$

$$\asymp \sum_{t\in A_N} \left(\overline{t_1}\right)^{2\beta_1} \left(\overline{t_2}\right)^{2\beta_2} \left| \sum_{\tau\in Z^2} {}^*\hat{g}\,(n\tau + t) \left(\left(\overline{n\tau_1 + t_1}\right)^{2r} + \left(\overline{n\tau_2 + t_2}\right)^{2r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\left(\overline{n\tau_1 + t_1}\right)^{2r} + \left(\overline{n\tau_2 + t_2}\right)^{2r}\right)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 <<$$

$$<< \sum_{t\in A_N} \left(\overline{t_1}\right)^{2\beta_1} \left(\overline{t_2}\right)^{2\beta_2} \sum_{\tau\in Z^2}{}^{*} \left|\hat{g}\left(n\tau+t\right)\right|^2 \left(\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r} + \left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}\right) \sum_{\tau\in Z^2}{}^{*} \frac{1}{\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r} + \left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}}.$$

Such that for any $t \in A_N$ and for any j $(j = 1, 2)$ satisfies $|t_j| \le \frac{n+1}{2}$, then from $\tau_j \ne 0$ follows

$$\overline{\tau_j n + t_j} = |\tau_j n + t_j| = n\left|\tau_j + \frac{t_j}{n}\right| \ge \frac{3}{7} n\,|\tau_j|\,,$$

because

$$\left|\tau_j + \frac{t_j}{n}\right| \ge |\tau_j| - \left|\frac{t_j}{n}\right| \ge |\tau_j| - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \ge |\tau_j| - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = |\tau_j| - \frac{7}{10} \ge \frac{3}{10}\,|\tau_j|$$

From here and from the criterion

$$\sum_{\tau\in Z^2} \frac{1}{\left(\overline{\tau_1}\right)^{2r} + \left(\overline{\tau_2}\right)^{2r}} < +\infty \Leftrightarrow 2r > 2,$$

we have

$$\sum_{\tau\in Z^2}{}^{*} \frac{1}{\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r} + \left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}} << \frac{1}{n^{2r}} \sum_{\tau\in Z^2}{}^{*} \frac{1}{\left(\overline{\tau_1}\right)^{2r} + \left(\overline{\tau_2}\right)^{2r}} << \frac{1}{n^{2r}}.$$

So,

$$\|I_1\|^2_{L^2(0,1)^2} <<$$

$$<< \tfrac{1}{n^{2r}} \sum_{t\in A_N} \left(\overline{t_1}\right)^{2\beta_1} \left(\overline{t_2}\right)^{2\beta_2} \sum_{\tau\in Z^2}{}^{*} \left|\hat{g}\left(n\tau+t\right)\right|^2 \left(\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r} + \left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}\right) <<$$
$$<< n^{2(\beta_1+\beta_2)-2r} \sum_{t\in A_n} \sum_{\tau\in Z^2}{}^{*} \left|\hat{g}\left(n\tau+t\right)\right|^2 \left(\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r} + \left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}\right).$$

As a result, according to the definition of the Sobolev class, we have

$$\|I_1\|_{L^2[0,1]^2} << n^{(\beta_1+\beta_2)-r} = N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}.$$

Lemma 7 is proved.

Lemma 8 (N.Temirgaliyev, A.Zh.Zhubanysheva [43]). *Let are given nonnegative numbers r, β_1, β_2, such that $r > \max\{\beta_1+\beta_2, 1\}$. Then for any function g from $W_2^r(0,1)^2$ the following upper bound holds*

$$\left\|\sum_{t=(t_1,t_2)\in Z^2\setminus A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}\left(t\right)\right\|_{L^2[0,1]^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}. \tag{2.19}$$

Proof. Again, denoting by I_2 a series in (2.19), we have

$$\|I_2\|^2_{L^2(0,1)^2} \equiv \int\limits_{[0,1]^s} \left|\sum_{m\in Z^2/A_N} \hat{g}\left(m\right) \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)}\right|^2 dx \asymp$$

$$\asymp \sum_{m\in Z^2/A_N} \left|\hat{g}\left(m\right)\right|^2 \left(\overline{m_1}\right)^{2\beta_1} \left(\overline{m_2}\right)^{2\beta_2}.$$

Then, by applying the inequality

$$\overline{m_1}^{\beta_1}\overline{m_2}^{\beta_2} \le \left(\max_{j=1,2}\overline{m}_j\right)^{\beta_1} \left(\max_{j=1,2}\overline{m}_j\right)^{\beta_2} = \left(\max_{j=1,2}\overline{m}_j\right)^{\beta_1+\beta_2}$$

satisfies

$$\|I_2\|^2_{L^2(0,1)^2} \underset{r,\beta_1,\beta_2}{\leq} \sum_{m\in Z^2/A_N} |\hat{g}(m)|^2 \left(\max_{j=1,2} \overline{m}_j\right)^{2(\beta_1+\beta_2)} =$$

$$= \sum_{m\in Z^2/A_N} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(m_1^{2r}+m_2^{2r}\right) \frac{\left(\max\limits_{j=1,2} \overline{m}_j\right)^{2(\beta_1+\beta_2)}}{\overline{m}_1^{2r}+\overline{m}_2^{2r}} \leq$$

$$\leq \sum_{m\in Z^2/A_N} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(\overline{m}_1^{2r}+\overline{m}_2^{2r}\right) \frac{\left(\max \overline{m}_j\right)^{2\beta_1+2\beta_2}}{\max \overline{m}_j^{2r}} \leq$$

$$\leq \sum_{m\in Z^2/A_N} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(\overline{m}_1^{2r}+\overline{m}_2^{2r}\right) \frac{1}{\left(\max \overline{m}_j\right)^{2r-(2\beta_1+2\beta_2)}} \underset{r,\beta_1,\beta_2}{\leq} \frac{1}{n^{2(r-(\beta_1+\beta_2))}} = N^{-2\left(\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)}.$$

Lemma 8 is proved.

Lemma 9 (N.Temirgaliyev, A.Zh.Zhubanysheva [43]). *Let are given nonnegative numbers r, β_1, β_2, such that $r > max\{\beta_1+\beta_2, 1\}$. Satisfies*

$$\sup_{g\in W_2^r(0,1)^2} \left\|g^{(\beta_1,\beta_2)}(\cdot) - \Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g)\right\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}.$$

Proof. Let g belongs to the class $W_2^r(0,1)^2$. According to the condition $2r > s$ satisfies $W_2^r(0,1)^2 \subset C(0,1)^2$. Thus, the problem of approximate differentiation with respect to values at points is posed correctly.

According to the Lemma 6 we have

$$\Delta_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) \equiv g^{(\beta_1,\beta_2)}(x) - \Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) = I_1 + I_2,$$

where

$$I_1 = -\sum_{t\in A_N}\sum_{\tau\in Z^2} {}^*\hat{g}(n\tau+t)\left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\beta_1\frac{\pi}{2}sgnt_1} e^{i\beta_2\frac{\pi}{2}sgnt_2} e^{2\pi i(t,x)},$$

$$I_2 = \sum_{m\in Z^2\setminus A_N} \hat{f}(m)\left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\beta_1\frac{\pi}{2}sgnt_1} e^{i\beta_2\frac{\pi}{2}sgnt_2} e^{2\pi i(t,x)}.$$

Further, according to the Lemma 7 and 8

$$\|I_1\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}$$

and

$$\|I_2\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}.$$

Then,

$$\left\|g^{(\beta_1,\beta_2)}(x) - \Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g)\right\|_{L^2(0,1)^2} \leq \|I_1\|_{L^2(0,1)^2} + \|I_2\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}.$$

After the preparation, we can begin to estimate from above in C(N)D-1 the errors of the recovery of functions $f(x_1,x_2)$ from the class $W_2^r(0,1)^2$ by its Radon transform.

Without loss of generality, we can assume that the amount of information is $N = n^2 (n = 5, 6, ...)$.

Let the function $f(x_1,x_2)$ belong to the class $W_2^r(0,1)^2$, then, according to Lemma 4, the Radon transform $Rf(\alpha,t)$ belongs to $W_2^{r+\frac{1}{2}}(0,1)^2$ and the relation (2.8) holds.

By Lemma 3, the Radon transform $Rf(\alpha,t)$ is a 1-periodic function by each of their two variables, therefore, according to Lemma 9 applied to $\beta_1 = \beta_2 = 0$, the computational aggregate

$$\Lambda_N(\alpha,t;Rf) \equiv \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{k=(k_1,k_2):\\ k_j=1,...,n\,(j=1,2)}} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\cdot R^{-1}D_N\left(\alpha-\frac{k_1}{n},t-\frac{k_2}{n}\right)$$

approximation the function $Rf(\alpha,t)\in W_2^{r+\frac{1}{2}}(0,1)^2$ with speed

$$\|Rf(\alpha,t)-\Lambda_N(\alpha,t;Rf)\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r+\frac{1}{2}}{2}} \tag{2.20}$$

Now we estimate this difference in the metric $W_2^\rho(0,1)^2$ for $\rho<r$, we show that, for any function $g(x_1,x_2)$ from $W_2^r(0,1)^2$, the upper bound

$$\left\|g(x_1,x_2)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n g\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^\rho(0,1)^2} << N^{-\frac{r-\rho}{2}},$$

where the constant in $<<$ is independent of g.

Indeed, since

$$\|g\|^2_{W_2^\rho(0,1)^2} = \sum_{\beta_1+\beta_2\le\rho}\int_{[0,1]^2}\left|\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}g(x_1,x_2)}{\partial^{\beta_1}x_1\partial^{\beta_2}x_2}\right|^2 dx_1dx_2,$$

then by Lemmas 6–9 we have

$$\left\|g(x_1,x_2)-\tfrac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n g\left(\tfrac{k_1}{n},\tfrac{k_2}{n}\right)D_N\left(x_1-\tfrac{k_1}{n},x_2-\tfrac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^\rho(0,1)^2} <<$$
$$<< \sum_{\beta_1+\beta_2\le\rho}\left\|g^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)-\tfrac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n g\left(\tfrac{k_1}{n},\tfrac{k_2}{n}\right)D_N^{(\beta_1,\beta_2)}\left(x_1-\tfrac{k_1}{n},x_2-\tfrac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} <<$$
$$<< \sum_{\beta_1+\beta_2\le\rho} N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}} << N^{-\frac{r-\rho}{2}}.$$

From here, for $\rho=2$ we obtain

$$\sup_{g\in W_2^r(0,1)^2}\left\|g(x_1,x_2)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n g\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r-2}{2}}. \tag{2.21}$$

Since the Radon transform $Rf(\alpha,t)$ of a function $f(x_1,x_2)$ from the Sobolev class $W_2^r(0,1)^2$ belongs to $W_2^{r+\frac{1}{2}}(0,1)^2$, then from (2.21) for $g=Rf$ we obtain

$$\sup_{Rf(\alpha,t)\in W_2^{r+\frac{1}{2}}(0,1)^2}\left\|Rf(\alpha,t)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n (Rf)\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)D_N\left(\alpha-\frac{k_1}{n},t-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^2(0,1)^2} << N^{-\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)-2}{2}}. \tag{2.22}$$

Further, applying Lemma 5 for $\nu=\frac{1}{2}$ and $\mu=2$, i.e. using the interpolation relation between the norms of spaces $W_2^2(0,1)^2$ and $L^2(0,1)^2=W_2^0(0,1)^2$ and both inequalities (2.20) and (2.22), we obtain an approximation estimate in the norm of space $W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2$

$$\|Rf(\alpha,t)-\Lambda_N(\alpha,t;Rf)\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} <<$$
$$<< \left(\|Rf(\alpha,t)-\Lambda_N(\alpha,t;Rf)\|_{W_2^0(0,1)^2}\right)^{1-\frac{\nu}{2}} \times \left(\|Rf(\alpha,t)-\Lambda_N(\alpha,t;Rf)\|_{W_2^2(0,1)^2}\right)^{\frac{\nu}{2}} <<$$

$$<< N^{-\left(\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\nu}{2}\right)}{2}+\frac{\left((r-2)+\frac{1}{2}\right)\frac{\nu}{2}}{2}\right)} = N^{-\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{\nu}{2}} \overset{\nu=\frac{1}{2}}{\overbrace{=}} = N^{-\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{1}{4}} = N^{-\frac{r}{2}}.$$

The inverse Radon transform R^{-1} of the Radon transform Rf gives the function f itself f. We construct the desired approximate computational aggregates: using Lemma 4 and the linearity of the Radon transform:

$$\left\| f(x_1,x_2) - \tfrac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\tfrac{k_1}{n},\tfrac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\tfrac{k_1}{n}, x_2-\tfrac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^0(0,1)^2} \asymp$$
$$\asymp \left\| Rf(\alpha,t) - \tfrac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\tfrac{k_1}{n},\tfrac{k_2}{n}\right) D_N\left(\alpha-\tfrac{k_1}{n}, t-\tfrac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}},$$

in particular,

$$\left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}}. \quad (2.23)$$

It remains to calculate the quantity $R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)$ in (2.23), for which, in the notation (2.23), it is necessary to have at our disposal an explicit formula for $R^{-1}\left(g(\alpha,t)\right) = R^{-1}g(x_1,x_2)$.

Let establish the inverse formula for the Radon transform (see also [7, V. 2. Fourier algorithm]).

Lemma 10 (Fourier synthesis method). *Let is given an infinitely differentiable function* $g(\alpha,t)$, *with support* $E_2 = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$. *Then*

$$R^{-1}\left(g(\alpha,t)\right) = R^{-1}g(x_1,x_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty} \mathcal{F}g(\alpha,\gamma)\, e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha + x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha \quad (2.24)$$

and

$$R^{-1}g(x_1,x_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(\alpha,t)\, e^{2\pi i\gamma t}dt\right] e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha + x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha. \quad (2.25)$$

Proof (under the assumption that all calculations are legal). Let is given the function $f(x_1,x_2)$, which belong to $H^r\left(R^2\right)$ c $supp\, f \subset \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$.

The direct and inverse Fourier transforms take place, respectively:

$$\hat{f}(\xi) \equiv \hat{f}(\xi_1,\xi_2) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}dx_1dx_2$$

and

$$f(x) \equiv f(x_1,x_2) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi_1,\xi_2)e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}d\xi_1 d\xi_2.$$

In polar coordinates

$$\begin{cases} \xi_1 = \gamma\cos 2\pi\alpha, \\ \xi_2 = \gamma\sin 2\pi\alpha, \end{cases} : 0 \le \gamma < +\infty,\ -\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{1}{2}$$

all R^2 is described, on the basis of which the last equality is rewritten in the form

$$f(x_1,x_2)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\hat{f}\left(\gamma\cos 2\pi\alpha,\gamma\sin 2\pi\alpha\right)e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha+x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha. \tag{2.26}$$

This equality suggests $\hat{f}\left(\gamma cos2\pi\alpha,\gamma sin2\pi\alpha\right)$ via the Radon transform $Rf(\alpha,\tau)\equiv Rf(\theta_\alpha,\tau)$, where the role of the unit vector $\theta_\alpha=(cos2\pi\alpha,sin2\pi\alpha)\left(-\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{1}{2}\right)$ and the numerical parameter $\tau\,(-\infty<\tau<\infty)$ consists in the fact that $\tau\theta_\alpha$ is a vector, the perpendicular $(\tau\theta_\alpha)^{\perp}$ to which is the straight line

$$\tau\theta_\alpha+y\theta_\alpha^{\perp}=\left(\tau cos2\pi\alpha-ysin2\pi\alpha,\tau sin2\pi\alpha+ycos2\pi\alpha\right), \tag{2.27}$$

the integral of f along which is the Radon projection on (2.27).

Then, according to Theorem 1.1 of [7, p. 19], the required equality holds for a fixed $-\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{1}{2}$, and all $-\infty<\sigma<\infty$

$$\hat{f}\left(\sigma cos2\pi\alpha,\sigma\sin 2\pi\alpha\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}Rf\,(\alpha,\tau)e^{2\pi i\sigma\tau}d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(\tau\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha,\tau\cos 2\pi\alpha+y\ sin2\pi\alpha\right)dy\Big)\ e^{2\pi i\tau\sigma}d\tau,$$

in which the variable α responsible for the unit vector $\theta_\alpha=(cos2\pi\alpha,sin2\pi\alpha)$ is fixed, and the Fourier transform is carried out in the numerical (one-dimensional) variable τ with the role (2.27).

Thus, (2.26) in the above notation and equalities, with σ replaced by γ, takes the form

$$f(x_1,x_2)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha,\tau\cos 2\pi\alpha+y\sin 2\pi\alpha)dy\right)e^{2\pi i\gamma\tau}d\tau\right]\times$$

$$\times e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha+x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}Rf\,(\alpha,\tau)\,e^{2\pi i\gamma\tau}d\tau\right]e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha+x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha. \tag{2.28}$$

In order to reduce the records and make the statements $\hat{f}\left(\gamma\cos 2\pi\alpha,\gamma\sin 2\pi\alpha\right)$ more informative, we express through the one-dimensional variable τ inverse Fourier transform $\mathcal{F}$ (see (1.11)) the Radon transform $Rf\,(\alpha,\tau)$ $\left(-\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{1}{2},-\infty<\tau<+\infty\right)$ in the record (1.8)

$$\mathcal{F}g\,(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}g\,(\tau)\,e^{2\pi i\sigma\tau}d\tau,$$

$$\mathcal{F}\left(Rf\,(\alpha,\tau)\right)\equiv\mathcal{F}Rf\,(\alpha,\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}Rf\,(\alpha,\tau)\,e^{2\pi i\sigma\tau}d\tau,$$

leading to equality

$$\hat{f}\left(\gamma\cos 2\pi\alpha,\gamma\sin 2\pi\alpha\right)=\mathcal{F}Rf\,(\alpha,\gamma)\,.$$

Under these conditions, equality (2.28) takes the form

$$f(x_1,x_2)=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{+\infty}\mathcal{F}Rf\left(\alpha,\gamma\right)e^{-2\pi i((\gamma\cos 2\pi\alpha,\gamma\sin 2\pi\alpha),(x_1,x_2))}\gamma d\gamma d\alpha.$$

It remains to establish the convergence of the integrals from (2.24) – (2.25). Due to the finiteness of the function $g\left(\alpha,t\right)$ by the integration formula by parts for all integers $r\geq 1$, we have

$$\mathcal{F}g\left(\alpha,\gamma\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(\alpha,\tau\right)e^{2\pi i\gamma\tau}d\tau=\frac{(-1)^r}{(2\pi i\gamma)^r}\int_{-\infty}^{+\infty}g_\tau^{(r)}\left(\alpha,\tau\right)e^{2\pi i\gamma\tau}d\tau. \tag{2.29}$$

From here

$$\left|\mathcal{F}g\left(\alpha,\gamma\right)\right|\ll\frac{1}{|\gamma|^r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|g_\tau^{(r)}\left(\alpha,\tau\right)\right|d\tau, \tag{2.30}$$

so when $r\geq 3$

$$\left|\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{1}^{\infty}\mathcal{F}g\left(\alpha,\gamma\right)e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha+x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha\right|\overset{(2.24)}{<<}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{1}^{\infty}|\mathcal{F}g(\alpha,\gamma)|\gamma d\gamma d\alpha\ll\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{r-1}}d\gamma<+\infty. \tag{2.31}$$

As a result, by replacing in $f=R^{-1}Rf$ the Radon transform $Rf\left(\alpha,t\right)$ by $g\left(\alpha,t\right)$, by virtue of (2.28) and (1.11), we obtain the desired (2.24) and (2.25), respectively.

Lemma 10 is proved.

In the practical application of formulas (2.24)-(2.25) of the inverse Radon transform, it is necessary to follow the scheme of its proof, which, in accordance with the needs of Theorem 1, we demonstrate step by step using the Dirichlet kernel D_N (which, by virtue of linearity Rf and $R^{-1}g$, is equivalent to finding $R^{-1}h_{m_1,m_2}$ (see (2.6) and (2.7)).

1-step. Let establish the infinite smoothness (Lemma 3) of 1-periodic functions $RD_N\left(\alpha,\tau\right)$ and $R^{-1}D_N\left(x_1,x_2\right)$ by each of their variable: for all $r>0$, by virtue of Lemmas 4 and 15 (the proof is below),

$$N^{\frac{r+1}{2}}\asymp\left\|D_N\left(x_1,x_2\right)\right\|_{W_2^r(E_2)}\asymp\left\|RD_N\left(\alpha,\tau\right)\right\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}(E_2)} \tag{2.32}$$

and

$$N^{\frac{r+1}{2}}\asymp\left\|D_N\left(\alpha,\tau\right)\right\|_{W_2^r(E_2)}\asymp\left\|RR^{-1}D_N\left(\alpha,\tau\right)\right\|_{W_2^r(E_2)}\asymp\left\|R^{-1}D_N\left(x_1,x_2\right)\right\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}(E_2)}.$$

2-step. The correctness of the presentation(2.24) – (2.25) for

$$g\left(\alpha,\tau\right)=RD_N\left(\alpha,\tau\right). \tag{2.33}$$

By virtue of (2.32) and the definition of $W_2^r(E_2)$, the norm for any $r>\frac{1}{2}$

$$supp\ g\left(\alpha,\tau\right)=E_2,g_t^{(r)}\left(\alpha,\tau\right)\in L^2(E_2).$$

Again, repeating (2.29)-(2.31), we obtain the convergence of the integrals from (2.24)-(2.25) in the case (2.33).

Thus, the problem was reduced to the calculation of specific integrals of elementary functions.

Of course, by the computational algorithm (0.3) in the Main Theorem, the question arises of the Radon transform of the Dirichlet kernel $D_N\left(x_1-\aleph_1,x_2-\aleph_2\right)$ with a shift by $(\aleph_1,\aleph_2)$ argument $\left(x_1,x_2\right)$.

At $-\frac{1}{2}\leq\alpha,t\leq\frac{1}{2}$ the answer is as follows (see also (1.6))

$$D_N\left(x_1-\aleph_1,x_2-\aleph_2\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{|m_1|,|m_2|\le n} e^{2\pi i m_1(x_1-\aleph_1)}\cdot e^{2\pi i m_2(x_2-\aleph_2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{|m_1|,|m_2|\le n} e^{2\pi i(m_1\aleph_1+m_2\aleph_2)}\times e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}\right),$$

from (see (2.4)-(2.5))

$$R\left(D_N\left(x_1-\aleph_1,x_2-\aleph_2\right)(\alpha,t)\right)=\frac{1}{4}\sum_{|m_1|,|m_2|\le n} e^{2\pi i(m_1\aleph_1+m_2\aleph_2)}\times$$

$$\times\int\limits_{b_1(\alpha,t)}^{b_2(\alpha,t)} e^{-2\pi i\left[m_1\left(\sqrt{2t}\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha\right)+m_2\left(\sqrt{2t}\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right)\right]}dy.$$

Thus, the optimal Radon computational aggregate for recovery of function $f(x_1,x_2)$ from a class $W_2^r\left(0,1\right)^2$ is

$$\Lambda_N\left(x_1,x_2;f\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\int\limits_{b_1\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)}^{b_2\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)} f_\Omega\left(\frac{\sqrt{2}k_2}{n}\cos\frac{2\pi k_1}{n}-y\sin\frac{2\pi k_1}{n},\frac{\sqrt{2}k_2}{n}\sin\frac{2\pi k_1}{n}+y\cos\frac{2\pi k_1}{n}\right)dy\times$$

$$\times\int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\int\limits_{T_{\alpha,t}\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2}\left(\frac{\sin\pi\left(2n+1\right)\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha\right)}\right)\times\right.\right.$$

$$\times e^{2\pi i\left(\left(x_1-\frac{k_1}{n}\right)\gamma\cos 2\pi\alpha+\left(x_2-\frac{k_2}{n}\right)\gamma\sin 2\pi\alpha\right)}\gamma d\gamma d\alpha.$$

Theorem 1 is proved.

Now we pass to the lower estimate.

Theorem 2 (C(N)D-1, lower bound). *Let is given* $r>\frac{1}{2}$ *. Then for* $N=n^2$ $(n=2,3,...)$ *the following relationships hold*

$$N^{-\frac{r}{2}}<<\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\textit{all possible}\\ \textit{linear functionals over } W_2^r(0,1)^2,\ \varphi_N}}\ \sup_{f\in W_2^r(0,1)^2}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);(x_1,x_2)\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}\asymp$$

$$\asymp\inf_{\{(\alpha_k,t_k)\}_{k=1}^N\subset[0,1]^2,\ \varphi_N}\ \sup_{f\in W_2^r(0,1)^2}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\varphi_N\left(Rf\left(\alpha_1,t_1\right),...,Rf\left(\alpha_N,t_N\right);(x_1,x_2)\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}\asymp$$

$$\asymp\sup_{f\in W_2^r(0,1)^2}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_1}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}<<N^{-\frac{r}{2}}.$$

Corollary 2. *Let are given* $r>\frac{1}{2}$ *and a set* $\Omega\subset E_2\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$ *. Then for the class* $H_0^r\left(\Omega\right)\sim W_2^r\left(E_2\right)$ *and all* $N=n^2$ $(n=2,3,...)$ *holds*

$$N^{-\frac{r}{2}}<<$$

$$\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\textit{all possible}\\ \textit{linear functionals over } H_0^r(\Omega),\ \varphi_N}}\ \sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);x\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp$$

$$\asymp\inf_{(\alpha^{(\tau)},t^{(\tau)})\in E_2(\tau=1,...,N),\ \varphi_N}\ \sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(Rf_\Omega(\alpha^{(1)},t^{(1)}),...,Rf_\Omega(\alpha^{(N)},t^{(N)});x\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \left\| f\left(x_1,x_2\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Proof. In this chain of inequalities, it suffices to establish the first of them (the last is Theorem 1)

$$N^{-\frac{r}{2}} << \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{ all possible} \\ \text{linear functionals };\varphi_N}} \sup_{f\in W_2^r(0,1)^2} \left\| f\left(x_1,x_2\right) - \varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);(x_1,x_2)\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}, \tag{2.34}$$

which is directly derived from

Lemma 11(F. Nutterer [10], Theorem 4.1). *Let are given an open bounded set $\Omega\subset R^2$, numbers $r>0$ and N $(N=2,3,...)$, linear functionals $l_1,...,l_N$ over $H_0^r(\Omega)$. Then, there is a function g from $H_0^r(\Omega)$, such that the following statements hold:*

$$l_j(g)=0\ (j=1,...,N)\,, \quad \|g\|_{H_0^r(\Omega)}\le 1, \quad \|g\|_{L^2(\Omega)} >> N^{-\frac{r}{2}}.$$

In this connection, we note

Theorem A (N. Temirgaliyev, A.Zh. Zhubanysheva [43]). *Let are given positive integer s and $N=n^s\ (n=5,6,...)$, function $\omega(t)$ из $C^\infty(-\infty,+\infty)$, such that*

$$\text{supp}\omega=[0,1]\,, 0\le\omega\left(t\right)\le 1=\max_{0\le t\le 1}\omega\left(t\right).$$

Let denote $A_N=\{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\ 0\le k_j\le 4n-1\ (j=1,...,s)\}$ and let define on $[0,1]^s$ orthogonal system

$$\psi_k\left(x\right)=\psi_{k_1,...,k_s}\left(x_1,...,x_s\right)=\prod_{j=1}^{s}\omega\left(4n\left(x_j-\frac{k_j}{4n}\right)\right)\ \left(k\in A_N\right).$$

Then, for any set of linear functionals $l_1,...,l_N$, defined, at least on the set of all polynomials by the system, $\{\psi_k(x)\}_{k\in A_N}$, there is a finite numerical sequence $\{b_k\}_{k\in A_N}$, such that for the function $B_N\left(x\right)\equiv B_N\left(x;l_1,...,l_N\right)=\sum_{k\in A_N} b_k\psi_k\left(x\right)$ the following relations hold

$$l_1\left(B_N\right)=...=l_N\left(B_N\right)=0$$

and for any non-negative integers $\lambda_1,...,\lambda_s$ and any p, $1\le p\le\infty$

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,...,\lambda_s)}\right\|_{L^p(0,1)^s} \asymp \begin{cases} N^{\frac{\lambda_1+...+\lambda_s}{s}-\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{k\in A_N}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{for } 1\le p<\infty, \\ N^{\frac{\lambda_1+...+\lambda_s}{s}+1} \quad \text{for } p=\infty. \end{cases}$$

When $s=2$, $p=q=2$, $\beta_1=\beta_2=0$ Theorem ascended to Lemma 11.

Since Lemma 11 is a combined corollary [11-12], following the stated goal, we give a complete proof of Lemma 11 in the two-dimensional case by the direct method of Theorem A.

However, we first state the following statement.

Lemma 12. *Let are given an open $\Omega\subset[0,1]^2$ and the square $E_2^\delta=[\eta_1-\delta,\eta_1+\delta]\times[\eta_2-\delta,\eta_2+\delta]$ from Ω.*

Then for any positive integers r and N, or any system of linear functionals $l_1,...,l_N$, given on Ω ,there is a function $g\in H_0^r\left(\Omega\right)$ such that

$$l_1\left(g\right)=0,...,l_N\left(g\right)=0, \|g\|_{H_0^r(\Omega)}\equiv\|g_\Omega\|_{W_2^r\left((0,1)^2\right)}\le 1, \|g_\Omega\|_{L^2\left((0,1)^2\right)}\ge N^{\frac{r}{2}},$$

where

$$g_\Omega\left(x\right)=\begin{cases} g\left(x\right), & if\,x\in\Omega \\ 0, & ifx\ \in[0,1]^2\setminus\Omega\,. \end{cases}$$

Without loss of generality, it is sufficient to prove this lemma for $\Omega=(0,1)^2$, as was said above, by the method from Theorem A, which is devoted to

Lemma 13 **(N. Temirgaliev, A.Zh. Zhubanysheva [43]).** *Let a positive integer be given* $N = n^2\,(n = 5, 6, ...)$ *and function* $\omega(t)$ *from* $C^\infty(-\infty, +\infty)$ *such that*

$$supp\omega = [0,1]\,, 0 \le \omega(t) \le 1 = \max_{0\le t\le 1} \omega(t)\,. \tag{2.35}$$

Let denote $A_N = \left\{k = (k_1, k_2) \in Z^2 :\ 0 \le k_j \le 4n-1\ (j = 1, 2)\right\}$ *and let denote* $[0,1]^2$ *orthogonal system*

$$\psi_k(x) = \psi_{k_1,k_2}(x_1, x_2) = \omega\left(4n\left(x_1 - \frac{k_1}{4n}\right)\right)\omega\left(4n\left(x_1 - \frac{k_1}{4n}\right)\right)\ (k \in A_N)\,. \tag{2.36}$$

Then for any set of linear functionals $l_1, ..., l_N$ *, defined, at least on the set of all polynomials by the system* $\{\psi_k(x)\}_{k\in A_N}$ *, there exists a finite numerical sequence* $\{b_k\}_{k\in A_N}$ *such that for the function* $B_N(x) \equiv B_N(x; l_1, ..., l_N) = \sum\limits_{k\in A_N} b_k\psi_k(x)$ *the following relations holds*

$$l_1(B_N) = ... = l_N(B_N) = 0 \tag{2.37}$$

and for any non-negative integers λ_1, λ_2

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp N^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}+\frac{1}{2}}. \tag{2.38}$$

Proof. Definitions (2.35)-(2.36) imply the set-theoretic equalities

$$T_k \equiv T_{k_1,k_2} := \left[\frac{k_1}{4n}, \frac{k_1+1}{4n}\right] \times \left[\frac{k_2}{4n}, \frac{k_2+1}{4n}\right] = \mathtt{supp}\psi_k\ \ (k \in A_N) \tag{2.39}$$

and that for any integer vector (λ_1, λ_2) with non-negative components, for any $k \in A_N$

$$\left\|\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|_{L^2(0,1)^2} = \left(\int\limits_{[0,1]^2} \left|\left(\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{T_k} \left|\left(\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{2}\left(\int\limits_{\frac{k_j}{4n}}^{\frac{k_j+1}{4n}} (4n)^{2\lambda_j}\left|\omega^{(\lambda_j)}\left(4n\left(x_j - \frac{k_j}{4n}\right)\right)\right|^2 dx_j\right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^{2}(4n)^{\lambda_j-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^1 \left|\omega^{(\lambda_j)}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp n^{\lambda_1+...+\lambda_s-1} \asymp N^{\frac{\lambda_1+...+\lambda_s}{2}-\frac{1}{2}}. \tag{2.40}$$

Let are given a set of linear functionals $l_1, ..., l_N$ defined at least on the set of all polynomials in the orthogonal system $\{\psi_k(x)\}_{k\in A_N}$. Using Lemma B from [48], we find that there exists a finite real-valued sequence $\{b_k\}_{k\in A_N}$ such that for the function $B_N(x) = \sum\limits_{k\in A_N} b_k\psi_k(x)$ following relations holds

$$l_1(B_N) = ... = l_N(B_N) = 0, \tag{2.41}$$

$$N = \sum_{k\in A_N} b_k^2\,\|\psi_k\|^2_{L^2(0,1)^2} \asymp \sum_{k\in A_N} b_k^2\frac{1}{N}. \tag{2.42}$$

From the definition of function $B_N(x) = \sum_{k\in A_N} b_k\psi_k(x)$ and (2.42) it immediately follows that for any integer vector (λ_1, λ_2) with non-negative components (see also (2.40))

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|^2_{L^2(0,1)^2} = \sum_{k\in A_N}\int\limits_{T_k}\left|b_k\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right|^2 dx \asymp \sum_{k\in A_N}|b_k|^2\int\limits_{T_k}\left|\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right|^2 dx \asymp N^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}2-1}\sum_{k\in A_N}|b_k|^2\,,$$

i.e.

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp N^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}+\frac{1}{2}}. \tag{2.43}$$

Statement (2.37) and (2.38) respectively follow from (2.41) and (2.43).

Lemma 13 is completely proved.

Now we turn to the proof of Theorem 2. Let are given a positive integer N $\left(N = n^2,\ n = 1, 2, ...\right)$, a set of functionals $l_1(f), ..., l_N(f)$ and a function $\varphi_N\left(z_1, ..., z_N; x\right)$ an algorithm $\varphi_N\left(z_1, ..., z_N; x\right)$ of processing numerical information of volume N.

Let $B_N\left(x\right)$ be the function from the Lemma 13. Let define on $[0,1]^2$ the function

$$g_N(x) \equiv g_N(x; r, p, l_1, ..., l_N) = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)} B_N\left(x\right).$$

For any j $(j = 1, 2)$ by (2.35) we have

$$\left\| \frac{\partial^r g_N\left(x\right)}{\partial x_j^r} \right\|_{L^p\left([0,1]^2\right)} \asymp \frac{1}{N^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}} \left\| \frac{\partial^r B_N\left(x\right)}{\partial x_j^r} \right\|_{L^p[0,1]^2} \asymp \frac{1}{N^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}} N^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}} \asymp 1,$$

so the function $g_N\left(x\right)$ belongs to the class $W_2^r\left(0,1\right)^2$.

Further, the relations are satisfied for the function $g_N\left(x\right)$ (see (2.35))

$$\|g_N\|_{L^p\left([0,1]^2\right)} \asymp N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)} \|B_N\|_{L^p\left([0,1]^2\right)} \asymp N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)} N^{\frac{1}{2}} = N^{-\frac{r}{2}}. \tag{2.44}$$

According to (2.41) and the definitions of the function g_N and φ_N, we have

$$\varphi_N\left(l_N\left(g_N\right), ..., l_N\left(g_N\right); x\right) = 0.$$

Therefore, due to the arbitrariness of $l_N, ..., l_N$ and φ_N, and due to (2.44), we obtain the desired lower bound

$$\inf_{\substack{l_1, ..., l_N - \textit{all possible} \\ \textit{linear functional;}\varphi_N}} \sup_{f \in W_2^r((0,1)^2)} \left\| f\left(x\right) - \varphi_N\left(l_1\left(f\right), ..., l_N\left(f\right); x\right) \right\|_{L^2(0,1)^2} \geq$$

$$\geq \left\| g_N\left(x\right) - \varphi_N\left(l_1\left(g_N\right), ..., l_N\left(g_N\right); x\right) \right\|_{L^2(0,1)^2} = \|g_N\|_{L^2(0,1)^2} >> N^{-\frac{r}{2}}.$$

The lower bound in (2.34), and Theorem 2 are proved.

Now we turn to the task C(N)D-2 in its two versions "equal to $\tilde{\varepsilon}_N$" and "no more $\tilde{\varepsilon}_N$".

Let's start with the first one:

Theorem 3 *(C(N)D-2,a version "equal to $\tilde{\varepsilon}_N$"). Let is given $r > \frac{1}{2}$. Then for $N = n^2$ $(n = 2, 3, ...)$ and for the computational operator*

$$\frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)$$

the value $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ is the limiting error: firstly

$$\sup_{f \in W_2^r(0,1)^2} \left\| f\left(x_1, x_2\right) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \left(Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) + \tilde{\varepsilon}_N \right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right) \right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Secondly, for any increasing to $+\infty$ a positive sequence $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ the equality

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N \left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \frac{1}{N} \sum\limits_{k_1=1}^{n} \sum\limits_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right) \right)_{L^2(0,1)^2}}{\delta_N \left(0; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^2) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2}\right)_{L^2(0,1)^2}} = +\infty. \tag{2.45}$$

Corollary 3 (C(N)D-2, a version "equal to $\tilde{\varepsilon}_N$"). *Let is givenan open set $\Omega \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$. For a computational operator*

$$\frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right),$$

and for the $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ *satisfy:*
Firstly,

$$\sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\tilde{\varepsilon}_N\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Secondly, for any increasing to $+\infty$ *a positive sequence* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *holds*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{N}\sum\limits_{k_1=1}^{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N\left(0;\mathrm{L}_N(H_0^r(\Omega))\times\{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)}\right)_{L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

We preface the proof of Theorem 3 with the following statement.
Lemma 14. *For* $\beta \geq 0$ and $N = n^2\,(n=2,3,...)$ *and the relations*

$$\left\|\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}\right)D_N\left(x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^\beta(0,1)^2} \asymp N^{\frac{\beta}{2}}.$$

Proof. Let

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_N\left(x-\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos 2\pi m\left(x-\frac{k}{n}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}+\frac{1}{n}2\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leq|m|\leq n} e^{2\pi m\left(x-\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{2}+2\sum_{1\leq|m|\leq n} e^{2\pi mx}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-2\pi i\frac{m}{n}k}\right) =$$
$$= \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-2\pi i\frac{m}{n}k} = \chi_{Z\cdot n}(m) = \begin{cases} 1, & if\,\frac{m}{n}\in Z\\ 0, & if\,\frac{m}{n}\notin Z\end{cases}\right\| =$$
$$= \frac{1}{2}+2\left(e^{2\pi inx}+e^{-2\pi inx}\right) = \frac{1}{2}+\cos 2\pi nx.$$

From here $g(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k_1=1}^{n} D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n} D_N\left(x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)$ satisfies

$$\|g(x_1,x_2)\|^2_{W_2^\beta(0,1)^2} = \left\|\left(\frac{1}{2}+2\left(e^{2\pi inx_1}+e^{-2\pi inx_1}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+2\left(e^{2\pi inx_2}+e^{-2\pi inx_2}\right)\right)\right\|^2_{W_2^\beta(0,1)^2},$$

where for all (m_1,m_2), other than $(0,0)$, $(0,\pm n)$, $(\pm n,0)$, $(\pm n,\pm n)$, the following equalities hold

$$\hat{g}(m_1,m_2) = 0,$$

where from

$$\left\|\left(\frac{1}{n}\sum_{k_1=1}^{n} D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k_2=1}^{n} D_N\left(x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)\right\|_{W_2^\beta(0,1)^2} =$$
$$= \sqrt{\sum_{|m_1|\cdot|m_2|\leq n}\left(\bar{m}_1^2+\bar{m}_2^2\right)^\beta|\hat{g}(m_1,m_2)|^2} \asymp \sqrt{n^{2\beta}} = n^\beta = N^{\frac{\beta}{2}}.$$

Proof of Theorem 3. Applying the linearity of the Radon transform and the upper bound for the error of recovery by exact information, we obtain

$$\left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\bar{\varepsilon}_N\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \leq$$

$$\leq \left\| f\left(x_1,x_2\right) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} +$$

$$+\left\|\bar{\varepsilon}_N\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} << \tag{2.46}$$

$$<< N^{-\frac{r}{2}} + \bar{\varepsilon}_N\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}.$$

Let estimate the second term

$$\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}$$

. Applying Lemma 4 to the function

$$g\left(x_1,x_2\right)=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)$$

in the norm $L^2(0,1)^2=W_2^0(0,1)^2$, we obtain

$$\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} = \left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^0(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \left\|R\left(\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} = \left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2}. \tag{2.47}$$

Applying Lemma 14 for $\beta=\frac{1}{2}$ we obtain

$$\tilde{\varepsilon}_N\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \tilde{\varepsilon}_N\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} \asymp \tilde{\varepsilon}_N N^{\frac{1}{4}}. \tag{2.48}$$

Equating $N^{-\frac{r}{2}}$ and $\tilde{\varepsilon}_N N^{\frac{1}{4}}$, by (2.46) and (2.48) we obtain $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ (see also Theorem A)

$$N^{-\frac{r}{2}} << \delta_N(0; L_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^2)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2})_{L^2(0,1)^2} <<$$

$$<< \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; L_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^2)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2})_{L^2(0,1)^2} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,\ldots,l_N \, all \quad possible \\ linear \;\; functionals;\, \varphi_N}} \sup\left\{\left\|g\left(x\right)-\varphi_N\left(l_1\left(g\right)+\tilde{\varepsilon}_N,\ldots,l_N\left(g\right)+\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} : g\in W_2^r(0,1)^2\right\} <<$$

$$<< \sup_{f\,\in\, W_2^r(0,1)^2}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\tilde{\varepsilon}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}},$$

which completes the first part of Theorem 3.

Now we prove the second part that for any increasing to $+\infty$ a positive sequence $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ we have equality (2.45)

Assuming $g_N\left(x\right)=0$, by virtue of (2.46), we have

$$\delta_N\left(\eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(0,1)^2} =$$

$$= \sup_{f\in W_2^r(0,1)^2}\left\|f(x_1,x_2)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\tilde{\varepsilon}_N\eta_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \geq$$

$$\geq \left\|g_N(x_1,x_2)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rg_N\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\tilde{\varepsilon}_N\eta_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} =$$

$$= \left\|\frac{\tilde{\varepsilon}_N\eta_N}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \tilde{\varepsilon}_N\eta_N\left\|\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} >> \tilde{\varepsilon}_N\eta_N N^{-\frac{1}{4}}.$$

In the end,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(0,1)^2}}{\delta_N\left(0;\mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^2)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2}\right)_{L^2(0,1)^2}} \geq$$

$$\geq \lim_{N\to\infty}\frac{\eta_N\tilde{\varepsilon}_N N^{\frac{1}{4}}}{N^{-\frac{r}{2}}} = \lim_{N\to\infty}\eta_N = +\infty.$$

Theorem 3 is proved.

Theorem 4 (C(N)D-2, the version of "no more $\tilde{\varepsilon}_N$ "). Let is given $r>0$. Then for $N=n^2$ $(n=2,3,...)$ and for the computational operator

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right),$$

where

$$D_N(x_1,x_2)=D_n(x_1)\cdot D_n(x_2),D_n(x_i)=\frac{1}{2}+\sum_{k_i=1}^{n}cos2\pi kx_i(i=1,2)$$

and for the value $\bar{\varepsilon}_N=N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$

$$\sup_{\substack{f\in W_2^r(0,1)^2\\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right|\leq 1}}\left\|f(x_1,x_2)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\gamma_N^{(k_1,k_2)}\bar{\varepsilon}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}\asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Corollary 4 (C(N)D-2, the version of "no more $\tilde{\varepsilon}_N$ "). *Let are given an open set $\Omega\subset E_2\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$, $r>0$. Then for the class $H_0^r(\Omega)\sim W_2^r(E_2)$ every $N=n^2$ $(n=2,3,...)$ and for a computing operator*

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right),$$

and for the value $\tilde{\varepsilon}_N=N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ satisfies:

$$\sup_{\substack{f\in H_0^r(\Omega)\\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right|\leq 1}}\left\|f(x_1,x_2)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\gamma_N^{(k_1,k_2)}\bar{\varepsilon}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Proof of Theorem 4. Applying the linearity of the Radon transform and the upper bound for the error of reconstruction from exact information (Theorem 1), we obtain

$$\left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\bar{\varepsilon}_N\gamma_N^{(k_1k_2)}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \le$$

$$\le \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} + \tag{2.49}$$

$$+\left\|\bar{\varepsilon}_N\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \le$$

$$\le N^{-\frac{r}{2}}+\bar{\varepsilon}_N\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}.$$

Let estimate the second term

$$\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}.$$

Applying Lemma 4 for a function $g(x_1,x_2)=\sum\limits_{k_1=1}^{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)$ in the norm $L^2(0,1)^2=W_2^0(0,1)^2$ we obtain

$$\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1,k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}=\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1,k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^0(0,1)^2}\asymp$$

$$\asymp\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1,k_2)}\frac{1}{N}R\left(R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)\right\|_{W_2^{\frac12}(0,1)^2}=\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1,k_2)}\frac{1}{N}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac12}(0,1)^2}. \tag{2.50}$$

Separately, let estimate $W_2^{\beta}(0,1)^2$ norm of the Dirichlet kernel:

Lemma 15. *For any* $\beta\ge 0$

$$\|D_N(x_1-\alpha,x_2-t)\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2}\asymp N^{\frac{\beta}{2}+\frac12}.$$

Proof. According to the definition of the Dirichlet kernel

$$D_N(x_1-\alpha,x_2-t)=D_N(x_1-\alpha)\cdot D_N(x_2-t)=\frac14\sum_{|m_1|,|m_2|\le n}e^{2\pi i m_1(x_1-\alpha)}e^{2\pi i m_2(x_2-t)}.$$

Then

$$\frac14\left\|\sum_{|m_1|,|m_2|\le n}e^{2\pi i m_1(x_1-\alpha)}e^{2\pi i m_2(x_2-t)}\right\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2}=\left\|\frac14\sum_{\substack{|m_1|\le n,\\ |m_2|\le n}}e^{-2\pi i m_1\alpha}e^{-2\pi i m_2 t}e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}\right\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2},$$

whence

$$\|D_N(x_1-\alpha,x_2-t)\|^2_{W_2^{\beta}(0,1)^2}\asymp\sum_{k_1,k_2=1}^{n}(m_1^2+m_2^2)^{\beta}\left|\hat{D}_N(m_1,m_2)\right|^2=$$

$$= \sum_{k_1,k_2=1}^{n} (m_1^2+m_2^2)^{\beta} \asymp \sum_{\frac{n}{2}\le k_1,k_2\le n} (m_1^2+m_2^2)^{\beta} \asymp \left(n^2\right)^{\beta} n^2 \asymp n^{2\beta+2},$$

where from

$$\left\| D_N\left(x_1-\alpha\right)\cdot D_N\left(x_2-t\right)\right\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2} \asymp n^{\beta+1} = N^{\frac{\beta+1}{2}}.$$

Lemma 15 is proved.

Applying (2.50) and Lemma 15 for $\beta=\frac{1}{2}$, we obtain

$$\bar{\varepsilon}_N \left\| \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \gamma_N^{(k_1,k_2)} \frac{1}{N} R^{-1} D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \bar{\varepsilon}_N \left\| \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \gamma_N^{(k_1,k_2)} \frac{1}{N} D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} << \tag{2.51}$$

$$<< \bar{\varepsilon}_N \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \left\| \frac{1}{N} D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} << \frac{\bar{\varepsilon}_N}{N} N^{\frac{3}{4}} N = \bar{\varepsilon}_N N^{\frac{3}{4}}.$$

By virtue of (2.49) and (2.51), equating $N^{-\frac{r}{2}}$ and $\bar{\varepsilon}_N N^{\frac{3}{4}}$ we obtain $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$. Further, for $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ satisfies

$$N^{-\frac{r}{2}} << \delta_N(0; L_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^2)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2})_{L^2(0,1)^2} <<$$

$$<< \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}; L_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^2)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2})_{L^2(0,1)^2} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N - \,all\,possible\\ linear\,functionals;\varphi_N}} \sup_{\substack{g\in W_2^r(0,1)^2\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1\,(\tau=1,\dots.,N)}} \left\| g\left(x\right) - \varphi_N\left(l_1\left(f\right)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,\dots,l_N\left(f\right)+\gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} <<$$

$$<< \sup_{\substack{f\in W_2^r(0,1)^2\\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right|\le 1\,(1\le k_1,k_2\le n)}} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\bar{\varepsilon}_N\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right) R^{-1} D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}}.$$

Theorem 4 is proved.

§3 General remarks on further C(N)D-development of the theory of Radon transform

1. C(N)D is different. Lemma 11 of Frank Nutterer whichused in the proof of main theorem in the article [10] were applied to other questions related to the coding theory - how farfrom each other two functions can be removedin the Hilbert metric, whose Radon transforms approximatethis function with a given accuraly [10, Theorem 4.2]:

At the same time, as it turns out, the Radon transform naturally fits into the C(N)D-scheme.

Therefore, we continue to estimate the error of recovery of functions from this class (not necessarily $H_0^r \equiv W_2^r$) from arbitrary computational aggregates, including the values of the Radon transform at points.

2. The C(N)D-problem of approximate differentiation and the theory of Radon transform. The Radon transform $Rf\left(\alpha,t\right)$ ($s\left(s=2,3,\dots\right)$ -dimensional) (see 1.7) maps a function f , defined on a unit cube $[0,1]^s$ (or, which is the same thing, on a cube $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$) to the set of its integrals over hyperplanes $\left(\rho\left(t\right)\theta\left(\alpha\right)\right)^{\perp}$ in R^s , where

$$\theta\left(\alpha\right) = \left(\theta_1(\alpha),\dots,\theta_s(\alpha)\right) \equiv \begin{cases} \theta_1\left(\alpha\right) = \theta_1\left(\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}\right) = \sin 2\pi\alpha_1 \sin\pi\alpha_2 \dots \sin\pi\alpha_{s-1}, \\ \theta_2\left(\alpha\right) = \theta_2\left(\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}\right) = \cos 2\pi\alpha_1 \sin\pi\alpha_2, \\ \theta_j\left(\alpha\right) = \theta_j\left(\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}\right) = \cos\pi\alpha_{j-1}\prod\limits_{k=j}^{s-1}\sin\pi\alpha_k \quad npu\ j=3,\dots,s-1, \\ \theta_s\left(\alpha\right) = \theta_s\left(\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}\right) = \cos\pi\alpha_{s-1}, \end{cases}$$

A lower bound for the reconstruction error. Let y be the density of a picture in the bounded domain Ω. Suppose that all we know of y are approximate values g_k for $R_k y$ with

$$(4.1) \qquad \|Ry-g\|_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(R_k y - g_k)^2 \leqq \varepsilon^2.$$

What can we say about y?

Thus we are interested in the quantity

$$r(\alpha, n, \varepsilon) = \sup\{\|y_1-y_2\|_{L_2(\Omega)}: \|Ry_i - g\|_n \leqq \varepsilon, \|y_i\|_{H_0^\alpha(\Omega)} \leqq 1, i=1,2, \text{ for some } g\}$$
$$= 2\sup\{\|z\|_{L_2(\Omega)}: \|Rz\|_n \leqq \varepsilon, \|z\|_{H_0^\alpha(\Omega)} \leqq 1\}.$$

Obviously $r(\alpha, n, \varepsilon)$ is a lower bound for the worst case error of any reconstruction technique using only the erroneous data g_k and $\|y\|_{H_0^\alpha(\Omega)} \leqq 1$.

Now we can find a lower bound for $r(\alpha, n, \varepsilon)$. To fix ideas we assume the L_k to be the straight lines

$$(4.2) \qquad L_k: s_i\omega_j + t\omega_j^\perp, \qquad t\in\mathbb{R}^1,$$

where the $s_i \in \mathbb{R}^1$, $i=-q, \cdots, q$ are arbitrary and $\omega_j = (\cos\varphi_j, \sin\varphi_j)$, $\varphi_j = \theta j/p$, $j=0, \cdots, p-1$; i.e., p is arbitrarily discretized and possibly incomplete views have been taken from angles which are equally distributed in $[0, \theta]$, $0<\theta\leqq\pi$. The number n of data is $n=p(2q+1)$. The validity of Theorem 4.2 below depends in no way on these assumptions, which are made for ease of exposition.

THEOREM 4.2. *Let $\alpha > \frac{1}{2}$, Ω bounded, and assume the L_k to be the straight lines* (4.2). *Then there is a constant $C(\alpha, \Omega) > 0$ such that*

$$r(\alpha, n, \varepsilon) \geqq C(\alpha, \Omega)(n^{-\alpha/2} + \varepsilon^{\alpha/(\alpha+1/2)}).$$

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{s-1}) \in [0,1)^{s-1},$$

in which the parameter $\tau = \rho(t)$ and $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{s-1}$ spherical angles vary within $0 \le t \le 1, 0 \le \alpha_j < 1\,(j=1,2,...,s-1)$ and then

$$Rf(\alpha, t) = \int\limits_{(\rho(t)\theta(\alpha))^\perp} f(y)\,dy.$$

The inverse Radon transform $R^{-1}f$ over Rf naturally returns to f (see, for example, [7, Theorem 2.1] and Lemma 10).

The effectiveness and informativeness of tomographic methods is directly dependent on the depth and subtlety of the applied mathematical theory, but here it is the whole arsenal of harmonic analysis involving algebraic number theory.

On the eternal problem of approximate differentiation in the framework of the C(N)D-theory, it is established

Teorema B (N.Temirgaliyev, A.Zh.Zhubanysheva [43]). *Let are given a positive integer s and non-negative numbers $r, \beta_1, ..., \beta_s$ such that $r > \max\left\{\beta_1 + ... + \beta_s, \frac{s}{2}\right\}$. Then the following statements hold $(N = n^s)$*

C(N)D-1: $\delta_N(0; P_{\mathrm{N}}(W_2^r\,(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s} \equiv$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \textit{all possible} \\ \textit{linear functionals;}\phi_N}} \sup_{f\in W_2^r(0,1)^s} \left\| f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x) - \phi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);\cdot\right)\right\|_{L^2(0,1)^s} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in W_2^r(0,1)^s} \left\| f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x) - \Lambda_N^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x;f)\right\|_{L^2(0,1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}}.$$

C(N)D-2*(version "equals $\tilde{\sigma}_N$ "). For the operator of approximate differentiation*

$$\Lambda_N^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x;f) \equiv \frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s: \\ k_j=0,1,...,n-1\,(j=1,...,s)}} f\left(\xi^{(k)}\right)\cdot\Omega_N\left(x-\xi^{(k)}\right), \xi^{(k)} = \left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right) \quad (3.1)$$

value $\tilde{\sigma}_N \equiv \tilde{\sigma}_N(\mathrm{P}_N) \equiv \tilde{\sigma}_N\left(\mathrm{P}_N(W_2^r)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)^s}\right) = N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}}$ *is the limitting error:*

At first,

$$\delta_N(0; P_{\mathrm{N}}(W_2^r\,(0,1)^s)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s} \asymp$$

$$\asymp \delta_N(\tilde{\sigma}_N(\mathrm{P}_N) = N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}}; P_{\mathrm{N}}(W_2^r\,(0,1)^s)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \textit{all possible} \\ \textit{linear functionals;}\phi_N}} \sup\left\{\left\| f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x) - \phi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right)+\tilde{\sigma}_N,...,f\left(\xi^{(N)}\right)+\tilde{\sigma}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2(0,1)^s} : f\in W_2^r\,(0,1)^s\right\} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in W_2^r(0,1)^s} \left\| f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x) - \Lambda_N^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x;f)\right\|_{L^2(0,1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}},$$

secondly, for any increasing to $+\infty$ *a positive sequence* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *the equality*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}}; \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s: \\ k_j=0,1,...,n-1\,(j=1,...,s)}} f\left(\xi^{(k)}\right)\cdot\Omega_N\left(x-\xi^{(k)}\right)\right)_{L^2(0,1)^s}}{\delta_N\left(0;\mathrm{P}_N(W_2^r(0,1)^s)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)}\right)_{L^2(0,1)^s}} = +\infty,$$

C(N)D-2 *(version "no more $\bar{\varepsilon}_N$ "). For the computational operator* (3.1) *and for the quantity* $\bar{\varepsilon}_N \equiv N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{1}{2}\right)}$ *the following relations holds*

$$\delta_N(0; P_{\mathrm{N}}(W_2^r\,(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s} \asymp \delta_N(\bar{\varepsilon}_N(\mathrm{P}_N) = N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{1}{2}\right)}; P_{\mathrm{N}}(W_2^r\,(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \textit{all possible} \\ \textit{linear functionals;}\phi_N}} \sup_{\substack{f\in W_2^r\,(0,1)^s \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1\,(\tau=1,...,N)}} \left\| f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x) - \phi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,...,f\left(\xi^{(N)}\right)+\gamma_N^{(n)}\bar{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2(0,1)^s} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in W_2^r(0,1)^s} \left\| f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x) - \Lambda_N^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x;f)\right\|_{L^2(0,1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}}.$$

secondly, for any increasing to $\beta_1 = ... = \beta_s = 0$ a positive sequence $+\infty$ the equality $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r}{s}+\frac{1}{2}}; \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s: \\ k_j=1,...,n\,(j=1,...,s)}} f\left(\xi^{(k)}\right)\cdot D_N\left(x-\xi^{(k)}\right)\right)_{L^2(0,1)^s}}{\delta_N\left(0;\mathrm{P}_N(W_2^r(0,1)^s)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)}\right)_{L^2(0,1)^s}} = +\infty,$$

Theorem B, in combination with the relation ([7, Theorem 5.2])

$$\|f(x_1,...,x_s)\|_{W_2^r(0,1)^s} \asymp \|Rf(\alpha,t)\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}(0,1)^s},$$

literal repetition of the scheme of the proof of Main theorem in §2, leads to s-measurable version of Main theorem

Theorema 5. Let are given $r > \frac{s}{2}$ $(s=1,2,...)$ and an open set $\Omega \subset E_s \equiv \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$. *Then for the class* $H_0^r(\Omega) \sim W_2^r(E_s)$ *and all* $N=n^s$ $(n=2,3,...)$ *the following statements holds*

C(N)D-1: The informative power of the Radon transform is

$$\inf_{\substack{l_1,...,l_N - -\text{all possible} \\ \text{linear functionals over} H_0^r(\Omega),\varphi_N}} \sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\|_{L^2(\Omega)} \asymp$$

$$\asymp \inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)})\in E_s(\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \left\|f(x)-\varphi_N\left(Rf_\Omega(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}),...,Rf_\Omega(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)});x\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \left\|f(x_1,...,x_2)-\frac{1}{n^s}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{s}}.$$

C(N)D-2 (equals "version $\tilde{\sigma}_N$ "). For computational aggregate

$$\frac{1}{n^s}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right), \tag{3.2}$$

and for the value $\tilde{\sigma}_N \equiv N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{2s}\right)}$ *the relations are satisfied:*

Firstly,

$$\sup_{f\,\in\, H_0^r(\Omega)} \left\|f(x_1,...,x_s)-\frac{1}{n^s}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)+\tilde{\sigma}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{s}}.$$

Secondly, for any increasing to $+\infty$ *a positive sequence,* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *the following equality holds*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\sigma}_N \equiv \eta_N N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{2s}\right)};\frac{1}{n^s}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right)\right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N\left(0;\mathrm{L}_N(H_0^r(\Omega))\times\{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)}\right)_{L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

C(N)D-2 (version "no more $\tilde{\varepsilon}_N$ "). For the computational operator (3.2) *and for the* $\varepsilon_N \equiv N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{s}+\frac{1}{2}\right)}$ *the relations:*

$$\sup_{\substack{f\,\in\, H_0^r(\Omega)\\ \left|\gamma_N^{(k_1,...,k_s)}\right|\le 1}} \left\|f(x_1,...,x_s)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)+\gamma_N^{(k_1,...,k_s)}\bar{\varepsilon}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{s}}.$$

Thus, for $s \geq 2$ and on the problemof recovery of f by the unexact information of the Radon transform with an accuracy of no greater than $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{s}+\frac{1}{2}\right)}$ there is no loss of final accuracy.

At the same time, if the calculation of the Radon transform is mistaken for a constant value $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{2s}\right)}$, then there will also be no loss of final accuracy, but it will collapse for $\eta_N\tilde{\sigma}_N$ - any arbitrarily slowly increasing to $+\infty$ the sequence $\{\eta_N\}$.

The question of the finality of the error $\bar{\varepsilon}_N$ in the "no more $\tilde{\varepsilon}_N$ " version, when it is necessary to find $\bar{\eta}_N \to +\infty$ such that $\bar{\varepsilon}_N\bar{\eta}_N =: \tilde{\varepsilon}_N$ in the limiting error in the version "no more $\tilde{\varepsilon}_N$ " remains open, it is known only that $N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{s}+\frac{1}{2}\right)} = \bar{\varepsilon}_N \leq \tilde{\varepsilon}_N \leq \tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{2s}\right)}$.

3. Radon transform in C(N)D-statement and lower bounds. Assume (below in addition to these brief notations, we will also use informative notations from [41-43, 48-51])

$$\delta_N(F,Rf)_{Y(\Omega)} = \inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)})\in E_s(\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f\in F(\Omega)} \left\|f(x)-\varphi_N\left(Rf_\Omega(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}),...,Rf_\Omega(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)});x\right)\right\|_{Y(\Omega)}. \tag{3.3}$$

Then the known lower bounds for the quantities $\delta_N(F,L)_Y$ for all possible linear functionals entail lower bounds for the quantity(3.3)

$$... \ll \delta_N(F;L)_Y \le \delta_N(F;Rf)_Y ,$$

which also apply to all linear counterparts and modifications of the Radon transform.

We specify C(N)D-the statement for the Radon transform. Here we restrict ourselves to the classes F of functions defined on the unit cube $[0,1]^s$, abanach spaces Y and functions $\varphi_N(z_1,...,z_N;\cdot)$ are taken as described in the Introduction (see also [41-42]).

From the results of [48] obtained for $\delta_N(F;L)_Y$, for the Radon transform, the following lower bounds holds (for the definitions of the involved classes of functions, see, for examplein, [44]).

Theorem 6 (Sh.U.Azhgaliyev, N.Temirgaliyev [48]). *Let are given an integer $s \ge 2$ and an open set $\Omega \subset_s \equiv \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$. Then for the class $H_P^r(\Omega)$ and any positive integer N the following statements hold:*

a) If $2 \le p \le q \le \infty$ and $r>0$ are such that $\frac{r}{s}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)>0$.

$$\mathrm{N}^{-(r/s-(1/p-1/q))} <<$$

$$<< \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{all possible} \\ \text{liniar funcsional over} H_p^r(\Omega),\ \varphi_N}} \sup_{f\in H_p^r(\Omega)} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\|_{L^q(\Omega)} <<$$

$$<< \inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)})\in E_S(\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f\in_p^r(\Omega)} \left\|f(x)-\varphi_N\left(Rf_\Omega\left(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}\right),...,Rf_\Omega\left(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)}\right);x\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

b) Let $2 \le p \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ and $r>0$ such that $\frac{r}{s}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)>0$.

Then the inequalities hold

$$\mathrm{N}^{-(r/s-(1/p-1/q))} <<$$

$$<< \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{all possible} \\ \text{liniar funcsional over } B_{p\theta}^r(\Omega),\ \varphi_N}} \sup_{f\in B_{p\theta}^r(\Omega)} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\|_{L^q(\Omega)} <<$$

$$<< \inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)})\in E_s(\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f\in B_{p\theta}^r(\Omega)} \left\|f(x)-\varphi_N\left(Rf_\Omega\left(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}\right),...,Rf_\Omega\left(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)}\right);x\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Theorem 7 (Sh.U.Azhgaliyev, N.Temirgaliyev [48]). *Let are given an integer numbers $s \ge 2$, $1 \le q \le p \le 2$, and an open set $\Omega \subset E_s \equiv \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$. Then for the class $H_p^r(\Omega)$ and any positive integer N the following statements hold:*

$$\mathrm{N}^{-r/s} << \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{all possible} \\ \text{liniar funcsional over} H_p^r(\Omega),\ \varphi_N}} \sup_{f\in H_p^r(\Omega)} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\|_{L^q(\Omega)} <<$$

$$<< \inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)})\in E_S(\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f\in H_p^r(\Omega)} \left\|f(x)-\varphi_N\left(Rf_\Omega(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}),...,Rf_\Omega(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)});x\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Theorem 8 (Sh.U.Azhgaliyev, N.Temirgaliyev [48]). *Let is given an integer numbers $s \ge 2$. Then*

a) For a real $r>\frac{1}{2}$ and any positive integer N, the inequalities hold

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}} << \delta_N\left(0;f;SW_2^r(\Omega);L_N\times\varphi_N\right)_{L^\infty(\Omega)} << \delta_N\left(0;f;SW_2^r(\Omega);Rf\times\varphi_N\right)_{L^\infty(\Omega)}.$$

b) For a real $r>0$ and any positive integer N, the inequalities hold

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r}} << \delta_N\left(0;f;SW_2^r(\Omega);L_N\times\varphi_N\right)_{L^2(\Omega)} << \delta_N\left(0;f;SW_2^r(\Omega);Rf\times\varphi_N\right)_{L^2(\Omega)}.$$

Thus, in the C(N)D-statement, the Radon problem is reduced to upper bounds for the quantity (3.3) (as reported in the Introduction, which consists of obtaining $\|f\|_{F^r} \asymp \|Rf\|_{F^{r+?}}$), with the subsequent finding within the framework of C(N)N-2 the limiting error of the recovery from the numerical values of the Radon transform, with the completion of C(N)D-3.

4. Radon transform and the quasi Monte Carlo method. Each $b \equiv (\alpha_1, ..., \alpha_{s-1}, t) \in [0,1]^s$ in formula (1.7) has its own hyperplane $(\tau(t)b)^{\perp}$. At the same time, it is natural to expect that than more evenly amformly on $[0,1]^s$ the sequence (grid) of points $b_1, ..., b_N$, that the closer to $f(x)$ (in Y) the function $\bar{\varphi}_N\left(Rf\left(b_1\right), ..., Rf\left(b_N\right); x\right)$ (with the proper algorithm $\bar{\varphi}_N\left(z_1, ..., z_N; x\right)$).

Thus, here we can apply the quasi Monte Carlo theory, in which the degree of uniformity-distribution is determined through the discrepancy (χ_J is the characteristic function of the set J)

$$D_s\left(b_1, b_2, ..., b_N\right) = \sup\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\chi_J(b_k) - \prod_{j=1}^{s}(d_j - c_j)\right| : J = \prod_{j=1}^{s}[c_j, d_j] \subset [0,1]^s\right\}.$$

In this circle of questions, the heuristic principle "Spectrum of large trigonometric coefficients. For all classes of Sobolev, Nikolsky, and Infinite classes, there are integer points corresponding to the dimensions of the cube with an accompanying equal grid (as in Theorem B for the Sobolev class $W_2^r(0,1)^s$). However, this means that function classes are the dominant mixed derivative or difference. "Hyperbolic crosses," which already correspond to uniformly distributed grids with a disk in the extreme degree of a power series $\frac{\log^{\beta} N}{N}$ (for details, see [52-64])

So in the case of a class $SW_2^r(0,1)^2$, uniform meshes are replaced by meshes (see [53] and [55])

$$b_\tau = \left(\frac{\tau}{c_n}, \left\{\frac{\tau\, c_{n-1}}{c_n}\right\}\right)\ (\tau = 1, 2, ..., N = c_n (n \geq 3)),$$

where $\{c_\tau\}$ is a Fibonacci sequence $c_0 = c_1 = 1,\ c_\tau = c_{\tau-1} + c_{\tau-2}\ (\tau \geq 2)$.

By K. Sherniyazov [63] (see also [64]) was obtained a series of exact in the power scale theorems of recovers of functions from their values at grid nodes constructed on the basis of Korobov grids and their modification (see [52]).

Valid

Theorema C (K. Sherniyazov [63]). *Let is given a positive integer s. Then for every integer positive N we have the following relations holds*

1) for $r > 1$

$$N^{-(r-1)} \underset{r,s}{\ll} \inf \sup_{f \in E_s^r} \sup_{x \in R^s} \left|f(x) - \left(T_N f\right)(x)\right| \underset{r,s}{\ll} N^{-(r-1)} ln^{(r(s-1))} N,$$

$$N^{-(r-\frac{1}{2})} \underset{r,s}{\ll} \inf \sup_{f \in E_s^r} \left|f(\cdot) - \left(T_N f\right)(\cdot)\right|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{\ll} N^{-(r-\frac{1}{2})} ln^{(r(s-1)} N,$$

2) for $r > 1/2$

$$N^{-(r-1)} \underset{r,s}{\ll} \inf \sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \sup_{x \in R^s} \left|f(x) - \left(T_N f\right)(x)\right| \underset{r,s}{\ll} N^{-(r-\frac{1}{2})} (lnN)^{(r+\frac{1}{2})(s-1)},$$

$$N^{-(r-\frac{1}{2})} \underset{r,s}{\ll} \inf \sup_{f \in SH_2^r(0,1)^s} \sup_{x \in R^s} \left|f(x) - \left(T_N f\right)(x)\right| \underset{r,s}{\ll} N^{-(r-\frac{1}{2})} ln^{(r(s-1)} N$$

Here, in all relations inf is taken over all operators of the form

$$T_N \equiv \left(T_N f\right)(x) = \varphi_N\left(f\left(\xi_1\right), ..., f\left(\xi_N\right), x\right),$$

where $\varphi_N\left(z_1, ..., z_N; x\right) : C^N \times R \mapsto C$ is a measurable function and $\xi_j \in [0,1]^s (j = 1, 2, ..., N)$. Moreover, upper bounds in all these relations are sharps on

$$\left(T_N^{(0)} f\right) = \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \tau_j > 0 \\ \tau_1 + \cdots + \tau_s \leq n}} \frac{1}{detA_{n,\tau}} \sum_{\substack{k \in Z^s : -2^{\tau_1} p_{\tau_1 + \cdots + \tau_s} \leq k_1 \leq 2^{\tau_1} p_{\tau_1 + \cdots + \tau_s} \\ -2^{\tau_j} \leq k_j \leq 2^{\tau_j}\ (j = 2, ..., s)}} f\left(\left\{\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)' k\right\}\right)$$

$$\sum_{\substack{m \in Z^s : 2^{\tau_1 - 1} max\{1, |m_j|\} < 2^{\tau_j} \\ (j=1,2,\ldots,s)}} e^{2\pi i \left(m, x - \left(A_{n,\tau}^{-1}\right)' k\right)},$$

where a positive integer n *is determined by* N *. Further, for all* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_s) \in Z^s$ *such that* $\tau_j > 0 (j = 1, \ldots s)$ *and* $\tau_1, \ldots, \tau_s \leq n$

$$A_{n,s} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{\tau_1+\cdots+\tau_s} & -2^{\tau_1+1} a_2^{(\tau_1+\cdots+\tau_s)} \ldots & -2^{\tau_1+1} a_s^{(\tau_1+\cdots+\tau_s)} \\ 0 & 2^{\tau_2+1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix}$$

where $p_1, p_2, \ldots, p_s$ *-primes such that*

$$2^{n-k+2s}(n-k+1)^{-2} \leq p_k < 2^{n-k+2s+1}(n-k+1)^{-2},$$

and integer $a_1 = 1, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, \ldots, a_s^{(k)}$ *are optimal coefficients by modulo* $p (k = 1, 2, \ldots, n)$ *of index* $\beta(s) > 0$ *.*

Applying this theorem to the Radon transform Rf again leads to the problem $\|f\|_{F^r} \asymp \|Rf\|_{F^{r+?}}$, i.e. obtaining an analogue of Theorem 5.1 from [7] for the norms F^r from Theorem C (and, in general, all classes from [44]).

In conclusion, the authors are deeply grateful to the staff of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computation of the L.N. Gumilyov Eurasian National University S.S. Kudaibergenov and N.Zh. Nauryzbaev for valuable advice and useful discussions.

References

1 Radon J. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichteuber die Verhandlungen Gesellshaft der Wissenschaften //Leipzig. Journal of Mathematical Physics - 1917 - 69 - C. 262-277.
2 Cormack A. M. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications I, II //J. Appl. Phys. -1963. 34. -P. 2722-2727; -1964. 35. -P. 2908-2912.
3 Hounsfield, G. N. A method of and apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation. -London: The Patent Office, 1972.
4 Hounsfield, G. N. Computerized transverse axial scanning tomography // British J. Radiology. -1973. -46. - P. 1016-1022.
5 Cormack A. M. Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it // Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971-1980, World Scientific Publishing Co. -1992 - P. 551-563.
6 Hounsfield G. N. Computed Medical Imaging // Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971-1980, World Scientific Publishing Co, 1992. - P. 568-586.
7 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography// SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
8 Helgason, S. The Radon Transform,2nd ed. - Birkhauser, Boston - 1999.
9 The first 100 years of the Radon transform Linz, Austria, March 27-31. -2017. -P.60
10 Natterer F. A Sobolev space analysis of picture reconstruction // SIAM Journal on Applied Mathematics - 1980. -Vol. 39. -№3. -P. 402-411.
11 Jerome J. On n width in Sobolev spaces and applications to elliptic boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. - 1970 - Is. 29. -№ 1 - P. 201-215.
12 Helferich H. Optimalelineare Approximation beschrdnkter Mengen in normierten Raumen// J. Appr. Th. - 1971 - 4 - P. 165-182.
13 Deans Stanley R. The Radon Transform and Some of Its Applications. - New York: John Wiley & Sons, 1983.
14 Epstein C. L. Introduction to the Mathematics of Medical Imaging, 2nd ed.- SIAM, Philadelphia -2008.
15 Freeman R. Magnetic Resonancein Chemistryand Medicine, Oxford University Press, Oxford - 2003.
16 Gadian D. G. Nuclear Magnetic Resonance and Its Applications to Living Systems. - Oxford: Oxford University Press, 1982.
17 Peter D. Lax The Radon transform and translation representation // J. evol. equ. - 2001 - 1 - P. 311-323.
18 Rowland S. W. Computer implementation of image reconstruction formulas, in Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications, G. T. Herman, Editor// Topics in Applied Physics 32 - Springer, Berlin, 1979.
19 Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии - М.: Наука - 1987.

20 Allan Greenleaf and Gunther Uhlmann Estimates for singular Radon transforms and pseudodifferential operators with singular symbols // J. Funct. Anal. - 1990 - Vol. 89 (1). - P.202-232
21 Elias M. Stein and Brian Street Multi-parameter singular Radon transforms // Math. Res. Lett. -2011. - 18(2). - P. 257-277.
22 Boris Rubin Radon transforms and Gegenbauer-Chebyshev integrals, II; examples // Anal. Math. Phys.- 2017 - 7. -P. 349-375. -DOI 10.1007/s13324-016-0145-5.
23 Smith K. T. and Keinert F. Mathematical foundations of computed tomography//Appl. Opt. - 1985 - 24 - P. 3950-3957.
24 Shepp L. A. and Kruskal J. B. Computerized tomography: The new medical X-ray technology// Amer. Math. Monthly - 1978 - 85 - P.420-439.
25 Madych W. R. and Nelson S. A. Polynomial based algorithms for computed tomography// SIAM J. Appl. Math. - 1983 - 43. - P. 193-208.
26 Madych W. R. Degree of approximation in computerized tomography//Approximation Theory III (E. W.Cheney, Ed.)- Academic Press, New York, 1980 - P. 615-622.
27 Holschneider M. Inverse Radon transform through inverse wavelet transforms // Inverse Problems - 1991. - 7. - P. 853-861.
28 Delaney A. and Bresler Y. Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets// IEEE Trans. Image-Proc. 1995. -4. -P. 799-813.
29 Deans S. R. The Radon Transform and Some of Its Applications. - New York: Wiley, 1983
30 Berenstein C. A. and Walnut D. Local inversion of the Radon transform in even dimensions using wavelets - International Press, Cambridge, MA 1994 in "75 Years of Radon Transform" (S. Gindikin and P. Michor, Eds.) - P. 45-69.
31 Aldroubi A. and Unser M. Eds., Wavelets in Medicine and Biology. - CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
32 T W. R. Madych. Tomography, Approximate Reconstruction, and Continuous Wavelet Transforms //Applied and Computational Harmonic Analysis. -1999. - 7 -P. 54-100.
33 Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В., Светов И. Е. Приближенное восстановление функции, заданной в области с малой рефракцией, по ее лучевым интегралам //Сиб. журн. индустр. матем. - 2014 - 17(4). -C.48-59
34 Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн. - 1967. - 8(5) -С. 1206-1208.
35 Pfitzenreiter T., Schuster T. Tomographic reconstruction of the curl and divergence of 2D vector fields taking refractions into account // SIAM J. Imaging Sci. - 2011 -4. -P. 40-56.
36 Holland G. N., Hawkes R. C, and Moore W. S. NMR tomography of the brain, coronal and sagittal sections // J. Comput. Assisted Tomog. -1980 -4. -P. 429-433.
37 SMITH K. T., SOLMON D. C., AND WAGNER S. L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs// Bull. Amer. Math. Soc. - 1977. -83. -P. 1227-1270.
38 House W. V. Introduction to the principles of NMR// IEEE Trans. Nucl. Sci. -1980 -27(3). - P.1220-1226.
39 Bagramyan T. E. Optimal Recovery of Harmonic Functions in the Ball from Inaccurate Information on the Radon Transform // Mathematical Notes -2015. -98(2). -P. 195-203.
40 Рудин У. Функциональный анализ -М: Мир,1975. -449 стр.
41 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. - №3. -С. 8-88.
42 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97.
43 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения // Изв. вузов. Матем. -2017. - №3. -С. 89-95.
44 Triebel H., Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland Pub. Co. in Amsterdam, NewYork ,1978-P.518 (Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.//М: Мир. - 1980. 664С.)
45 Иосида К., Функциональный анализ. -М: Мирб 1967. -624 стр.
46 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования// Изв. РАН, Сер.матем. -2009 - 73(2) - P.183-224.
47 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. -М.: Наука,1996.
48 Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов// Матем. Заметки. - 2003. -73(6) -С.803-812.
49 Темиргалиев Н., Шерниязов К.Е, Берикханова М.Е. Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона по коэффициентам Фурье //Совр. пробл. матем. -2013 - 17 - С. 179-207.

50 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора диференцирования на многомерных классах Соболева // Ж. вычисл. матем.и матем. физ. -2005. -55(9) -С. 1474-1485.
51 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К.,Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв. вузов, Матем. - 2013 - 8 -С. 86-93
52 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализею -М.: Физматгиз, 1963.
53 Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of Number Theory of Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg: New York: Springer Yerlag, 1981.
54 Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. Wien; Munchen; Oldenbourg, 1981.
55 Бахвалов Н.С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. МГУ. Сер.матем., мех. -1959. - 4. -С. 3-18.
56 Plaskota L., Wozhniakowski H. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods// Springer Science & Business Media, 2010.
57 Dick J. and Pillichshammer F. Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration// Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
58 Воронин С.М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Матем. заметки - 1989 - 46(2)- С. 34-41.
59 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем.сб. -1990. -181(4). -С.490-505
60 Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных // Докл. РАН. -2007 -416(2). -С. 169-173.
61 Жубанышева А. Ж., Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул // ЖВМ иМФ. - 2009 -49(1)- С. 14-25.
62 Баилов Е.А.,Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных// ЖВМ и МФ - 2014- 54(7) -С. 1059-1077.
63 Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, КазГУим. аль-Фараби, 1998.
64 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази- Монте-Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье// Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н.Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева -2010. -194 с.
65 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К.,Ажгалиев Ш.У., Таугынбаева Г.Е. Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло// Изв. вузов, Матем. -2020. -№ 3 -С. 98-101.

Н. Темірғалиев, Ш.К. Абикенова, Ш.У. Әжғалиев, Г.Е. Тауғынбаева, А.Ж. Жұбанышева

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Іргелі математика және ғылыми есептеулер институты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Компьютерлік (есептеуіш) диаметр концепсиясындағы квази Монте-Карло әдісіндегі Радон түрлендіруі

Аннотация. Макалада функция туындысын олардың нүктедегі мәндері бойынша жуықтау есебінің К(Е)Д бойынша алынған нәтижелері тек бір $\|f\|_{W_2^r(0,1)^s} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}(0,1)^s}$ қатынасын ғана қолдану арқылы кез келген шенелген ашық жиында (міндетті түрде байланысты емес) зерттеу объектісінен алынған барлық мүмкін сызықтық функционалдар арқылы құрылған есептеу агрегаттарының арасында оптимальді болатын Радондық сканерлеру алгоритімін беретіндігі көрсетілген. Сонымен қатар соңғы нәтижеге еш кедергі келтірмейтін есептеу қателіктерінің шекаралары көрсетілген.

Түйін сөздер: Радон түрлендіруі, Соболев кеңістігі, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр (К(Е)Д), дәл және дәл емес мәліметтер бойынша жуықтау, есептеу агрегаты, дискрепанс, бірқалыпты үлестірілген тор, Коробов торы, оптималды коэффициенттер.

Н. Темиргалиев, Ш.К. Абикенова, Ш.У. Ажгалиев, Г.Е. Таугынбаева, А.Ж.Жубанышева

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Теория преобразования Радона в концепции Компьютерного (вычислительного) поперечника и методов теории квази Монте-Карло

Аннотация. Показано, что результаты по К(В)П-задаче восстановления производных функций по их значениям в точках, с использованием всего лишь одного соотношения $\|f\|_{W_2^r(0,1)^s} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}(0,1)^s}$ влекут алгоритм Радоновского сканирования произвольного открытого (не обязательно связного) ограниченного множества, оптимальный среди всех вычислительных агрегатов, построенных по произвольной линейной числовой информации об изучаемом объекте, к тому же с указанием границ вычислительной погрешности, не влияющих на окончательный результат.

Keywords: преобразование Радона, пространство Соболева, Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П), восстановление по точной и по неточной информации, вычислительный агрегат, дискрепанс, равномерно распределенные сетки, сетки Коробова, оптимальные коэффициенты.

References

1 Radon J. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichteuber die Verhandlungen Gesellshaft der Wissenschaften, Journal of Mathematical Physics, (69), 262-277 (1917).

2 Cormack A. M. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications I, II, J. Appl. Phys., 34, 2722-2727(1963); 35, 2908-2912(1964).

3 Hounsfeld G. N. A method of and apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation (The Patent Ofice, London, 1972).

4 Hounsfeld G. N. Computerized transverse axial scanning tomography, British J. Radiology (46), 1016-1022(1973).

5 Cormack A. M. Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it, Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971-1980, World Scientific Publishing Co., 551-563(1992).

6 Hounsfield G. N. Computed Medical Imaging, Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971-1980, World Scientific Publishing Co., 568-586 (1992).

7 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

8 Helgason S. The Radon Transform, 2nd ed., Birkhauser, Boston, 1999.

9 The first 100 years of the Radon transform Linz, Austria, March 27-31, 60(2017).

10 Natterer F. A Sobolev space analysis of picture reconstruction, SIAM Journal on Applied Mathematics, 39(3), 402-411(1980).

11 Jerome J. On n width in Sobolev spaces and applications to elliptic boundary value problems, J. Math. Anal. Appl., (29), 201-215(1970).

12 Helferich H. Optimalelineare Approximation beschrdnkter Mengen in normierten Raumen, J. Appr. Th., 4, 165-182(1971).

13 Deans Stanley R. The Radon Transform and Some of Its Applications (John Wiley & Sons, New York, 1983).

14 Epstein C.L. Introduction to the Mathematics of Medical Imaging, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, 2008.

15 Freeman R. Magnetic Resonancein Chemistryand Medicine (Oxford University Press, Oxford, 2003).

16 Gadian D. G. Nuclear Magnetic Resonance and Its Applications to Living Systems (Oxford University Press, Oxford, 1982).

17 Peter D. Lax The Radon transform and translation representation, J. evol. equ. 1, 311-323 (2001).

18 Rowland S. W. Computer implementation of image reconstruction formulas, in Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications, G. T. Herman, Editor, Topics in Applied Physics 32, Springer, Berlin, 1979.

19 Tihonov A. N., Arsenin V. YA., Timonov A. A. Matematicheskie zadachi komp'yuternoj tomografii[Mathematical problems of computed tomography] (Nauka, Moscow, 1987).

20 Allan Greenleaf and Gunther Uhlmann Estimates for singular Radon transforms and pseudodifferential operators with singular symbols, J. Funct. Anal. 89(1), 202-232 (1990).

21 Elias M. Stein and Brian Street Multi-parameter singular Radon transforms, Math. Res. Lett. 18(2), 257-277 (2011).

22 Boris Rubin Radon transforms and Gegenbauer-Chebyshev integrals, II; examples, Anal. Math. Phys., 7, 349-375(2017). DOI 10.1007/s13324-016-0145-5.

23 Smith K. T. and Keinert F. Mathematical foundations of computed tomography, Appl. Opt. 24, 3950-3957(1985).

24 Shepp L. A. and Kruskal J. B. Computerized tomography: The new medical X-ray technology, Amer. Math. Monthly (85), 420-439(1978).

25 Madych W. R. and Nelson S. A. Polynomial based algorithms for computed tomography, SIAM J. Appl. Math. (43), 193-208(1983).

26 Madych W. R. Degree of approximation in computerized tomography, "Approximation Theory III" (E. W.Cheney, Ed.), Academic Press, New York, 615-622 (1980).

27 Holschneider M. Inverse Radon transform through inverse wavelet transforms, Inverse Problems, 7, 853-861(1991).

28 Delaney A. and Bresler Y. Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets, IEEE Trans. Image-Proc., (4), 799-813(1995).

29 Deans S. R. The Radon Transform and Some of Its Applications (Wiley, New York, 1983).

30 Berenstein C. A. and Walnut D. Local inversion of the Radon transform in even dimensions using wavelets, International Press, Cambridge, MA 1994 in "75 Years of Radon Transform" (S. Gindikin and P. Michor, Eds.), 45-69.

31 Aldroubi A. and Unser M. Eds. Wavelets in Medicine and Biology, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
32 Madych T W. R. Tomography, Approximate Reconstruction, and Continuous Wavelet Transforms, Applied and Computational Harmonic Analysis (7), 54-100(1999).
33 Derevtsov E.Yu., Maltseva S.V., Svetov I.E. Approximate reconstruction from ray integrals of a function on a domain with low refraction, Journal of Applied and Industrial Mathematics, 9, 36–46(2015).
34 Romanov V.G. O vosstanovlenii funkcii cherez integraly po semejstvu krivyh [On the restoration of a function through integrals over a family of curves], Sib. mat. zhurn[Sib. mat. journal], 8(5), 1206-1208(1967).
35 Pfitzenreiter T., Schuster T. Tomographic reconstruction of the curl and divergence of 2D vector fields taking refractions into account, SIAM J. Imaging Sci., 4, 40-56(2011).
36 Holland G.N., Hawkes R.C, and Moore W.S. NMR tomography of the brain, coronal and sagittal sections, J. Comput. Assisted Tomog., 4, 429-433(1980).
37 Smith K.T., Solman D.C., Wagner S.L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs, Bull. Amer. Math. Soc., 83, 1227-1270(1977).
38 House W.V. Introduction to the principles of NMR, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-27(3), 1220-1226(1980).
39 Bagramyan T.E. Optimal Recovery of Harmonic Functions in the Ball from Inaccurate Information on the Radon Transform, Mathematical Notes, 98(2), 195-203(2015).
40 Rudin U. Funkcional'nyj analiz[Functional analysis] (Mir, Moscow, 1975, 449 p.).
41 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 124(3), 8-88 (2018).
42 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ), N 1, 89-97(2019).
43 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Order Estimates of the Norms of Derivatives of Functions with Zero Values on Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics, 61(3), 77–82(2017).
44 Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland Pub. Co. in Amsterdam (New York, 1978, 518p.).
45 Iosida K. Funkcional'nyj analiz [Functional Analysis] (Mir, Moscow, 1967, 624p.).
46 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration, Izvestiya: Mathematics, 73(2), 393-434(2009).
47 Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M. Integral'nye predstavlenija funkcij i teoremy vlozhenija [Integral representations of functions and embedding theorems] (Fizmatlit, Moscow, 1996). [in Russian].
48 Azhgaliev Sh. , Temirgaliev N. Informativeness of Linear Functionals, Mathematical Notes, 73(6), 759-768(2003).
49 Temirgaliev N. , Sherniyazov K. E. , Berikhanova M. E. Exact Orders of Computational Cross-Sections in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein-Gordon Equation from Fourier Coefficients, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 282, suppl. 1, 165-191(2013).
50 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432–1443(2015).
51 Temirgaliev N. , Abikenova Sh. K. , Zhubanysheva A. Zh. , Taugynbaeva G. E. . Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 57(8), 75-80(2013).
52 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analizeyu [Theoretical and numerical methods in approximate analysis] (Fizmatgiz, Moscow, 1963).
53 Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of Number Theory of Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg: New York: Springer Yerlag, 1981.
54 Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. Wien; Munchen; Oldenbourg, 1981.
55 Bahvalov N.S. O priblizhennom vychislenii kratnyh integralov[On the approximate calculation of multiple integrals], Vestn. MGU. Ser.matem., mekh., 4, 3-18(1959).
56 Plaskota L., Wozniakowski H. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods, Springer Science & Business Media, 2010.
57 Dick J. and Pillichshammer F. Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
58 Voronin S. M. , Temirgaliev N. Quadrature formulas associated with divisors of the field of Gaussian numbers, Mat. zametki, 46(2), 597-602 (1989).
59 Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik, 69(2), 527-542(1990).
60 Bailov E. A. , Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables, Dockland Mathematics, 2007, pp. 681-685.

61 Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. , Temirgalieva Zh. N. Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Computational mathematics and mathematical physics, 49(1), 12-22(2009).

62 Bailov E. A. , Sikhov M. B. , Temirgaliev N. General Algorithm for the Numerical Integration of Functions of Several Variables, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 54(7), 1061–1078(2014).

63 Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B, //Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, КазГУим. аль-Фараби, 1998.

64 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series.], Vest. ENU im. L. N. Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L.N. Gumilev ENU], 1-194 (2010).

65 Temirgaliyev N., Abikenova SH.K., Azhgaliyev SH.U., Taugynbaeva G.E. Preobrazovanie Radona v skheme K(V)P-issledovanij i teorii kvazi Monte-Karlo[Radon conversion in the scheme C(N)D-studies and theories of quasi Monte Carlo], Izv. vuzov, Matem. [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], (3), 98-101(2020).

Information about authors:

Temirgaliyev N. – Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Abikenova Sh. K. – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Azhgaliyev Sh. O. – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Taugynbayeva G. E. – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Zhubanysheva A.Zh. – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, Head of the Department of Scientific Publications ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Абикенова Ш.К. – кандидат физико-математических наук, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Ажгалиев Ш.О. – кандидат физико-математических наук, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Таугынбаева Г.Е. – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Жубанышева А.Ж. – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений, начальник отдела научных изданий Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Поступила в редакцию 17.12.2019

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2019, том 129, №4, 89-135 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 27.25.19

Н. Темиргалиев, Ш.К. Абикенова, Ш.У. Ажгалиев, Г.Е. Таугынбаева, А.Ж.Жубанышева

Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru)

Теория преобразования Радона в концепции Компьютерного (вычислительного) поперечника и методов теории квази Монте-Карло [1]

Аннотация: Показано, что результаты по К(В)П-задаче восстановления производных функций по их значениям в точках, с использованием всего лишь одного соотношения $\|f\|_{W_2^r(0,1)^s} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}(0,1)^s}$ влекут алгоритм Радоновского сканирования произвольного открытого (не обязательно связного) ограниченного множества, оптимальный среди всех вычислительных агрегатов, построенных по произвольной линейной числовой информации об изучаемом объекте, к тому же с указанием границ вычислительной погрешности, не влияющих на окончательный результат.

Ключевые слова: Преобразование Радона, пространство Соболева, Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П), восстановление по точной и по неточной информации, вычислительный агрегат, дискрепанс, равномерно распределенные сетки, сетки Коробова, оптимальные коэффициенты.

Введение

Начнем со следующего обширного цитирования Станислава Лема[2].

1. «БЕЗУМИЕ, НЕ ЛИШЕННОЕ МЕТОДА. *Давайте представим себе портного-безумца, который шьет всевозможные одежды. Он ничего не знает ни о людях, ни о птицах, ни о растениях. Его не интересует мир, он не изучает его. Он шьет одежды. Не знает, для кого. Не думает об этом. Некоторые одежды имеют форму шара без всяких отверстий, в другие портной вшивает трубы, которые называет "рукавами" или "штанинами". Число их произвольно. Одежды состоят из разного количества частей. Портной заботится лишь об одном: он хочет быть последовательным.*

...

Готовую одежду портной относит на огромный склад. Если бы мы могли туда войти, то убедились бы, что одни костюмы подходят осьминогу, другие - деревьям или бабочкам, некоторые - людям. Мы нашли бы там одежды для кентавра и единорога, а также для созданий, которых пока никто не придумал. Огромное большинство одежд не нашло бы никакого применения. Любой признает, что сизифов труд этого портного - чистое безумие.

Точно так же, как этот портной, действует математика. Она создает структуры, но неизвестно чьи. Математик строит модели, совершенные сами по себе (то есть совершенные по своей точности), но он не знает, модели чего он создает. Это его не интересует. Он делает то, что делает, так как такая деятельность оказалась возможной. Конечно, математик употребляет, особенно при установлении первоначальных положений, слова, которые нам известны из обыденного языка. Он говорит, например, о шарах, или о прямых линиях, или о точках. Но под этими терминами он не подразумевает знакомых нам понятий. Оболочка его шара не имеет

---

[1]Статья выполнена в рамках грантового финансирования по линии МОН РК, проект № AP05132938 "Преобразование Радона в задачах дискретизации"

[2]Станислав Лем: Сумма технологии. М., «Мир», 1968.

толщины, а точка - размеров. Построенное им пространство не является нашим пространством, так как оно может иметь произвольное число измерений. Математик знает не только бесконечности и трансфинитности, но также и отрицательные вероятности. Если нечто должно произойти наверное, его вероятность равна единице. Если же явление совсем не может произойти, она равна нулю. Оказывается, что может случиться нечто меньшее, чем просто ненаступление события. Математики прекрасно знают, что не знают, что делают. Весьма компетентное лицо, а именно Бертран Рассел, сказал: "Математика может быть определена как доктрина, в которой мы никогда не знаем, ни о чем говорим, ни того, верно ли то, что мы говорим"».

Именно в этом ключе происходили события, вызванные изобретением техники, позволяющей при просвечивании материального объекта интенсивность луча на выходе получить равным интегралу функции распределения плотности вещества вдоль траектории луча, с весьма точными описаниями на мероприятии «**Инновации через фундаментальные исследования. Вклад научных теорий и открытий в прогресс общества в целом (Венский университет, 2016)** [3]:

Ректор Венского университета (на примере И. Радона). «Часто вещи таковы, что математические теории находятся в абстрактной форме, возможно, рассматриваются как стерильные уловки, которые внезапно оказываются ценными инструментами для физических знаний и, таким образом, неожиданно раскрывают их скрытую силу».

Карл Зигмунд «Иоганн Радон исследовал абстрактные проблемы так называемой чистой математики и понятия не имел, что сегодня преобразование Радона является основой компьютерной томографии. Их многочисленные приложения подтверждают правило: нет ничего более практичного, чем хорошая теория».

Так вот, если функцию распределения плотности вещества обозначить через f, то интеграл вдоль прямых, впоследствии названный *преобразованием Радона,* есть

$$F\left(p,\varphi\right)=F\left(-p,\varphi+\pi\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(p\cos\varphi-s\sin\varphi,p\sin\varphi+s\cos\varphi\right)ds \tag{0.1}$$

и

$$\bar{F}_p\left(q\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}F\left(x\cos\varphi+y\sin\varphi+q,\varphi\right)d\varphi.$$

Теперь проблема сводится к представлению f через F и $\bar{F}$:

$$f\left(P\right)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\bar{F}_p\left(q\right)}{q}. \tag{0.2}$$

Определения (0.1) и теорема (0.2) были даны в 1917 году австрийским математиком Иоганном Радоном в 16-страничной статье в журнале Саксонской академии наук [1]

2.Радон Иоганн(Radon Johann, 16.12.1887 - 25.05.1956). Иоганн Радон родился в городе Дечин (Богемия) в Австро-Венгерской империи (ныне Чехия). Получил докторскую степень по математике в Венском университете в 1910 году. Опубликовал 45 научных работ по различным разделам математики. Наиболее известные из них относятся к вариационному исчислению, теории функций действительного переменного, функциональному анализу и геометрии.

Научный руководитель– Густав Риттер фон Эшерих (01.06.1849 – 28.01.1935), австрийский математик, изучал математику и физику в университете Вены. С 1876 до 1879 годы преподавал в университете Граца, в 1882 году работал в Технологическом университете Граца, затем в университете Вены, в котором был президентом университета

[3]Hetzenecker K, Limbeck-Lilienau C, Schweizer D, Laufersweiler B. Innovation durch Grundlagen for schung. Der Beitragwissenschaftlicher Theorienund Entdeckungen zum gesamt gesellschaftlichen Fortschritt. Begleitheft zur Ausstellung ander Universitet Wien [Internet]. Wien: Universitet Wien; 2016. S. 68. http://phaidra.univie.ac.at/o: 560305 Google Scholar BibTex RIS

262

SITZUNG VOM 30. APRIL 1917.

Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.

Von

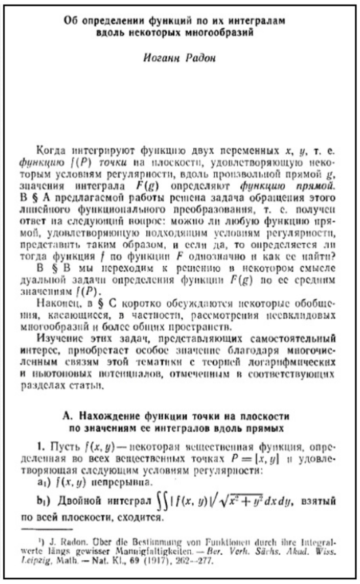
Johann Radon.

Integriert man eine geeigneten Regularitätsbedingungen unterworfene Funktion zweier Veränderlichen x, y — eine *Punktfunktion* $f(P)$ in der Ebene — längs einer beliebigen Geraden g, so erhält man in den Integralwerten $F(g)$ eine *Geradenfunktion*. Das in Abschnitt A vorliegender Abhandlung gelöste Problem ist die Umkehrung dieser linearen Funktionaltransformation, d. h. es werden folgende Fragen beantwortet: kann jede, geeigneten Regularitätsbedingungen genügende Geradenfunktion auf diese Weise entstanden gedacht werden? Wenn ja, ist dann f durch F eindeutig bestimmt und wie kann es ermittelt werden?

Im Abschnitte B gelangt das dazu in gewisser Hinsicht duale Problem der Bestimmung einer Geradenfunktion $F(g)$ aus ihren Punktmittelwerten $f(P)$ zur Lösung.

Schließlich werden im Abschnitte C gewisse Verallgemeinerungen kurz besprochen, zu denen insbesondere die Betrachtung nichteuklidischer Mannigfaltigkeiten sowie höherer Räume Anlaß gibt.

Die Behandlung dieser an sich interessanten Probleme gewinnt ein erhöhtes Interesse durch die zahlreichen Beziehungen, die zwischen diesem Gegenstande und der Theorie des logarithmischen und Newtonschen Potentiales bestehen, auf die an den bezüglichen Stellen zu verweisen sein wird.



Об определении функций по их интегралам вдоль некоторых многообразий

Иоганн Радон

Когда интегрируют функцию двух переменных x, y, т. е. *функцию* $f(P)$ *точки* на плоскости, удовлетворяющую некоторым условиям регулярности, вдоль произвольной прямой g, значения интеграла $F(g)$ определяют *функцию прямой*. В § A предлагаемой работы решена задача обращения этого линейного функционального преобразования, т. е. получен ответ на следующий вопрос: можно ли любую функцию прямой, удовлетворяющую подходящим условиям регулярности, представить таким образом, и если да, то определяется ли тогда функция f по функции F однозначно и как ее найти?

В § B мы переходим к решению в некотором смысле дуальной задачи определения функции $F(g)$ по ее средним значениям $f(P)$.

Наконец, в § C коротко обсуждаются некоторые обобщения, касающиеся, в частности, рассмотрения неевклидовых многообразий и более общих пространств.

Изучение этих задач, представляющих самостоятельный интерес, приобретает особое значение благодаря многочисленным связям этой тематики с теорией логарифмических и ньютоновых потенциалов, отмеченным в соответствующих разделах статьи.

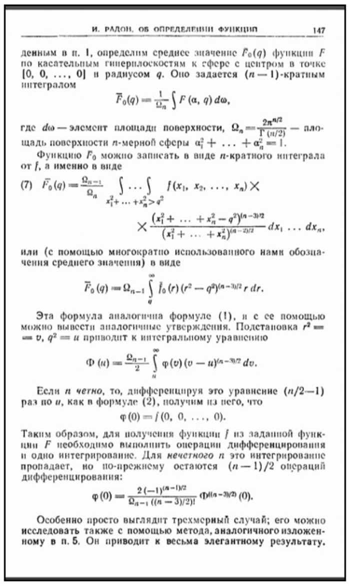
A. Нахождение функции точки на плоскости по значениям ее интегралов вдоль прямых

1. Пусть $f(x, y)$ — некоторая вещественная функция, определенная во всех вещественных точках $P=[x, y]$ и удовлетворяющая следующим условиям регулярности:

a$_1$) $f(x, y)$ непрерывна.

b$_1$) Двойной интеграл $\iint |f(x, y)|/\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, взятый по всей плоскости, сходится.

[1] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. — *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math. — Nat. Kl., 69 (1917), 262—277.



И. РАДОН. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИЙ 147

денным в п. 1, определим среднее значение $\overline{F}_0(q)$ функции F по касательным гиперплоскостям к сфере с центром в точке $[0, 0, \ldots, 0]$ и радиусом q. Оно задается $(n-1)$-кратным интегралом

$$\overline{F}_0(q)=\frac{1}{\Omega_n}\int F(\alpha, q)\,d\omega,$$

где $d\omega$ — элемент площади поверхности, $\Omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь поверхности n-мерной сферы $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2=1$.

Функцию $\overline{F}_0$ можно записать в виде n-кратного интеграла от f, а именно в виде

$$(7)\quad \overline{F}_0(q)=\frac{\Omega_{n-1}}{\Omega_n}\underset{x_1^2+\ldots+x_n^2>q^2}{\int\ldots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\times \times\frac{(x_1^2+\ldots+x_n^2-q^2)^{(n-3)/2}}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{(n-2)/2}}\,dx_1\ldots dx_n,$$

или (с помощью многократно использованного нами обозначения среднего значения) в виде

$$\overline{F}_0(q)=\Omega_{n-1}\int_q^\infty \bar{f}_0(r)(r^2-q^2)^{(n-3)/2}\,r\,dr.$$

Эта формула аналогична формуле (1), и с ее помощью можно вывести аналогичные утверждения. Подстановка $r^2=v$, $q^2=u$ приводит к интегральному уравнению

$$\Phi(u)=\frac{\Omega_{n-1}}{2}\int_u^\infty \varphi(v)(v-u)^{(n-3)/2}\,dv.$$

Если n *четно*, то, дифференцируя это уравнение $(n/2-1)$ раз по u, как в формуле (2), получим из него, что

$$\varphi(0)=f(0, 0, \ldots, 0).$$

Таким образом, для получения функции f из заданной функции F необходимо выполнить операции дифференцирования и одно интегрирование. Для *нечетного* n это интегрирование пропадает, но по-прежнему остаются $(n-1)/2$ операций дифференцирования:

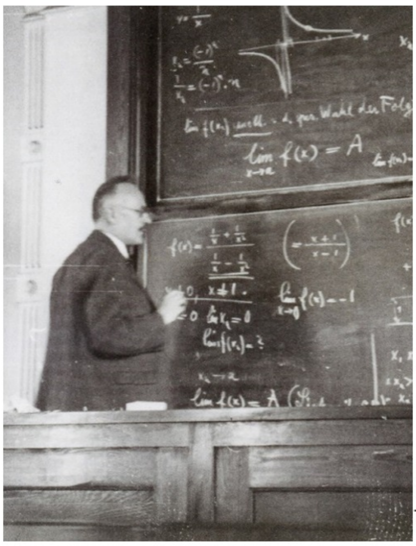
$$\varphi(0)=\frac{2(-1)^{(n-1)/2}}{\Omega_{n-1}((n-3)/2)!}\Phi^{((n-3)/2)}(0).$$

Особенно просто выглядит трехмерный случай; его можно исследовать также с помощью метода, аналогичного изложенному в п. 5. Он приводит к весьма элегантному результату.

в 1903-1904 годах. Вместе с Эмилем Веиром он основал журнал «Monatshefte fur Mathematik und Physik», а также вместе с Людвигом Больцманом и Эмилем Мюллером – Австрийское математическое общество.

Dr J. Radon

Радóн Иоганн. Radon Johann
(16.12.1887 - 25.05.1956)



г. Дечин (Děčín)

Институт вычислительной и прикладной математики имени И. Радона

The Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics (RICAM)

Хронология научно-преподавательской деятельности:

1910-1911 годы: Гёттингенский университет (Германия).

1912 год:ассистент в Deutsche Technische Hochschule Brunn (Брно, нем. Brunn, Австро-Венгрия, ныне Чехия).

1912 - 1919 годы: ассистент в Венском техническом университете.

1913-1914 годы: прошел хабилитацию в Венском университете.

1919-1921 годы: экстраординарный профессор (профессор без кафедры) в только что созданном Гамбургском университете (Германия).

1922-1924 годы: профессор в Грайфсвальдском университете (Германия).

1925-1927 годы: профессор в Эрлангенском университете (Германия).

1928-1945 годы: профессор в университете Бреслау (Бреслау, Силезия до 1945 года, Германия, ныне Вроцлав, Польша).

1945-1946 годы: профессор в Инсбрукском университете (Австрия).

1946-1954 годы: профессор в Институте математики в Венском университете.

1954-1955 годы: ректор Венского университета.

В 1939 году Радон становится членом-корреспондентом, а в 1947 году действительным членом Австрийской Академии наук. С 1952 по 1956 годы был секретарем Отделения Математики и Науки в Австрийской Академии наук.

С 1948 по 1950 годы:Президент Австрийского математического общества.

В 2003 году Австрийская Академия наук основала Институт вычислительной и прикладной математики имени И. Радона.

Радон известен как автор ряда фундаментальных математических результатов,среди которых Теорема Радона-Никодима и Мера и интеграл Радона.

Иоганн Радон в 1916 году женился на Марии Ригель, учительнице старших классов, у них было три сына, которые умерли в детстве, и дочь Бригитта (родилась в 1924 году). Она получила докторскую степень по математике в Инсбрукском университете и в 1950 году вышла замуж за австрийского математика Эрика Буковича. Бригитта Радон (Букович) живет в Вене.

Приводимые в п.3-5 сведения опубликованы в [2-39] и в имеющихся в них Библиографии.

3. Еще одно подтверждение принципа Рудина «Историческая надежность математической номенклатуры». В 1961 году американский нейрорентгенолог Вильям Ольдендорф разработал метод Компьютерной томографии, в 1963 году американский математик Аллан Кормак из Университета Тафтса (Tufts University) провел лабораторные эксперименты по рентгеновской томографии и показал выполнимость реконструкции изображения. Работая независимо, в 1973 году английский инженер-исследователь Гофри Хаунсфилд разработал первую коммерческую систему – сканер головного мозга. В 1979 году Хаунсфилду и Кормаку за выдающийся вклад в развитие Компьютерной томографии была присуждена Нобелевская премия в области медицины.

В качестве еще одного подтверждения принципа Уолтера Рудина[40, стр. 429] «Историческая надежность математической номенклатуры» выступает тот факт, что после публикации формулы обращения Радона в Лейпциге в 1917 году и до Нобелевской премии 1979 года в области медицины, прошло 62(!!!) года. Каждый из ученых нашел формулу независимо друг от друга, не зная результатов, полученных Радоном. Но, именно этот случай подтверждает, что стремительное развитие математических методов продиктовано практической потребностью, в данном случае прогрессом Компьютерной томографии.

Есть и много других «повторных открытий» результатов Радона в прикладной литературе, которые закончились примерно в 1972 году, когда советские и американские авторы Штейн (1972), Вайнштейн и Орлов (1972), Вест (1973), Кормак (1973) указали, что работа Радона была фундаментальной для проблемы реконструкции по проекциям. Кормак ссылался на это в своей Нобелевской речи 1979 года. В историческом наблюдении по этому вопросу Марр (1982) отмечает, что Пинкус (1964), по-видимому, был первым человеком, разработавшим алгоритм реконструкции со знанием доступного материала в литературе по математике, включая статью Радона 1917 года.

Хотя работа Радона в 1917 году была практически неизвестна в прикладных областях до начала 1970-х годов, она, безусловно, была оценена математиками и уже широко использовалась в книгах Джона (1955) и Гельфанда, Граева и Виленкина (1966).

Название«Преобразование Радона» было дано Фрицем Джоном.

Как это часто бывает в науке, сам Радон тоже имел предшественников: аналог преобразования Радона на сфере S^2 был изучен Функом за год до появления работы Радона, распространение на другие однородные пространства было работой Сигурдура Хельгасона.

4. Задачи, приводящие к теории преобразования Радона. Многие проблемы естествознания и техники (астрофизики, физики плазмы, сейсмологии, медицины и т.п.) сводятся к решению обратных задач.

Напомним, в чем разница между прямыми и обратными задачами. Например, пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение и дополнительные условия (начальные или краевые). Требуется найти решение такой задачи. Это прямая задача. Рассмотрим то же с иных позиций. Пусть тот же тип уравнения и тот же вид условий. Но некоторые параметры, входящие в уравнение или в условия неизвестны. Зато известно решение. Требуется найти соответствующие значения параметров. Это – обратная задача.

В контексте преобразования Радона – это когда по результатам рентгеновского или ультразвукового просвечивания некоторого тела с различных направлений требуется представить структуру внутренности этого тела.

В варианте математической постановки - это восстановление значения функции по известным значениям интегралов от этой функции, вычисленным по элементам некоторого множества поверхностей, т.е. сама функция неизвестна, известно лишь множество линейных или поверхностных интегралов от этой функции, полученных в результате экспериментов.

Спектр применения преобразования Радона весьма широк с тенденцией к постоянному расширению: магнитно- резонансная томография (МРТ), радиоастрономия, электронная микроскопия, рентгенодиагностика, биохимия, промышленность, геофизика, сейсмология и т.п. Другая широчайшая область применения преобразования Радона и различных его модификаций – цифровая обработка изображений, а именно определение параметров различных кривых и их идентификация, будь то простейшая прямая линия, рукописный шрифт или фотография лица человека. Наиболее важным оказалось приложение преобразования Радона к томографии – методу исследования скрытых в организме образований (опухолей, внутренних кровоизлияний и т.п.), заключающемуся в получении послойного изображения объекта при его облучении. Преобразование Радона изучалось напритяжений многих лет и применялось в разных областях науки.

В связи с чем отметим, что теория восстановления функций – активно развивающаяся в соответствии с достижениями компьютерных технологий область Математики и, естественно, Компьютерных наук (чему, в частности, посвящены несущие статьи всех номеров данного журнала 2018-2019 годов).

5. Преобразование Радона – 100 лет спустя. В 2017 году математической научной общественностью было широко отмечено 100-летие знаменитой публикации «Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten (Об определении функций по их интегральным значениям вдоль некоторых многообразий)». Были подготовлены соответствующие научно-исследовательские мероприятия, посвященные его многочисленным применениям.В Австрии (г.Линц) с 27 по 31 марта 2017 года состоялась конференция «100 лет преобразованию Радона», организованная Институтом вычислительной и прикладной математики им. Иоганна Радона (RICAM). Содержание данной конференции отражено в научной публикации [9] «The first 100 years of the Radon transform», в котором дан обзор последних научных результатов по преобразованию Радона и обратных задач на примере 23 научных работ различных авторов. Как в нем сообщается, основная часть работ посвящена применению преобразования Радона, в частности, Риис и др. была представлена информация обобследовании подводного трубопровода поограниченной рентгенограмме компьютерного томографа, Хелин и др. рассмотрели профилирование атмосферной турбулентности для восстановления звездных изображений из размытых астрономических данных, Leeuwen и др. рассмотрели автоматическое выравнивание для трехмерной томографической реконструкции данных 2D-секционных изображений, что является важной практической проблемой в медицинской визуализации, Адлером и Окем был представлен новый подход к решению практических обратных задач, основанных на глубоких нейронных сетях, Grathwohl и др. рассмотрели численное решение проблемы сейсмической визуализации, Стефановым и др. была изучена обратная задача упругографии, Андерссон и Боман предоставляют новые результаты в вопросах стабильности в ограниченной угловой томографии, Альперс и Гритцманн сообщают о последних событиях в динамической дискретной томографии, Holman и др. рассматривают развитие геодезических и взвешенных рентгеновских преобразований. В работе Хопа и Ильмавирта представлен анализ преобразований Абеля и приложений к рентгеновской томографии на сферически-симметричных многообразиях, Гончаровым и Новиковым был дан пример не единственности для взвешенных преобразований Радона.

Цикл работ посвящен изучению томографии по непрямым путям, например, применению в фотоакустике, где вычисляются средние значения по сферам или кругам. Фотоакустические обратные задачи рассматриваются в Beigl и др., Frikel и Haltmeier. Гиндикин сообщает о изогнутой версии формулы обращения Радона на плоскости. Обработка изображений Compton и преобразование конуса являются новой темой в обратных задачах. Отношение к обобщенным преобразованиям Радона было задокументировано в обзоре Terziogluetal. Модель для комптоновского одиночного рассеяния в позитрон-эмиссионной томографии была представлена Казанцевым и др.. Формулы восстановления и анализ интегральных преобразований конуса были зарегистрированы Паламодовым.

Векторная и тензорная томография были изучены в работах Лехтонена и др. Тензорные полевые томографические задачи быличисленно исследованы Деревцовым и др. Точная инверсионная формула для соленоидальных полей в векторной томографии конического пучка была разработана Кацевичем и др. Численные методы получения более высокого контраста в томографических изображениях и для реконструирования паттернов являются темой работ Зибетти и др. Реконструкция электронного парамагнитного резонанса и распознавание образов с полным изменением и регуляцией кривых изучены Durandetal. Обработка нелинейных томографических проблем рассмотрена Baletal.

В целом, на примере выше указанных работ продемонстрированы разнообразные применения исследуемого математического аппарата в реальном мире и огромное влияние математической томографии в современных прикладных науках.

6. Компьютерный (вычислительный) поперечник в применении к преобразованию Радона. Такое название носит комплекс из трех задач (см. [41] и [42]):при заданных T, F, Y, D_N (пояснения даны ниже)

К(В)П-1:Находится порядок $\asymp \inf\limits_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N} \sup\limits_{f\in F} \left\| Tf(\cdot) - \varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);\cdot\right)\right\|_Y \equiv$ $\equiv \delta_N\left(0;T;F;D_N\right)_Y \equiv \delta_N\left(0;D_N\right)_Y$ *–информативная мощность набора вычислительных агрегатов* $D_N \equiv D_N\left(F\right)_Y$;

К(В)П-2:*Производится построение оптимального вычислительного агрегата* $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ *из* $D_N \equiv D_N\left(F\right)_Y$ *с градацией «отклонение от точного значения функционала не больше* $\tilde{\varepsilon}_N$ *» и «отклонение от точного значения функционала равно* $\tilde{\sigma}_N$ *», поддерживающего порядок* $\asymp \delta_N\left(0;D_N\right)_Y$. *Для* $\{\tilde{\varepsilon}_N\}$ *(то же для* $\{\tilde{\sigma}_N\}$, *лишь с тем отличием, что вместо* $\left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1$ *берется* $\gamma_N^{(\tau)} \equiv 1$*) исследуется задача существования и нахождения последовательности* $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(D_N;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y$ *– К(В)П-2 –предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату* $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$*), такой, что*

$$\delta_N\left(0;Tf;F;D_N\right)_Y \asymp \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;Tf;F;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{f\in F,\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1\,(\tau=1,2,...,N)}} \left\|Tf\left(\,\cdot\,\right)-\bar{\varphi}_N\left(l_1(f)+\gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N,...,l_N(f)+\gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_Y,$$

с одновременным выполнением

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty):\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;Tf;F;\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)_Y}{\delta_N\left(0;Tf;F;D_N\right)_Y}=+\infty.$$

К(В)П-3:*Устанавливается массовость предельной погрешности* $\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N\left(D_N,\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)\right)$ *: находится как можно большее множество* $D_N\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ *(обычно связанных со структурой исходного* $\left(\bar{l}^{(N)},\bar{\varphi}_N\right)$ *) вычислительных агрегатов* $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\equiv\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);\cdot\right)$, *построенных по всевозможным (не обязательно линейным) функционалам* $l_1,...,l_N$ *, таких, что для каждого из них выполнено соотношение*

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to+\infty):\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;Tf;F;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y}{\delta_N\left(0;Tf;F;D_N\right)_Y}=+\infty.$$

В случае $\varepsilon_N\equiv 0$ речь будет идти о задаче восстановления по точной информации, в остальных – это $\varepsilon_N>0$, по неточной.

Здесь полагаются заданными класс F и нормированное пространство Y (или $Y\equiv C$, где C здесь и далее – поле комплексных чисел) функций с множеством определения Ω_F и Ω_Y соответственно,оператор T, действующий из F в Y, $l_1,...,l_N$ – набор функционалов $l^{(N)}$ (не обязательно линейных), посредством которых каждой функции f из F ставится в соответствие конечная последовательность $l_1(f),...,l_N(f)$*–числовая информация об* f *объема N.* Через $L=L_N$ будем обозначать множество, составленное из всех возможных наборов из N линейных фуркционалов $(l_1,...,l_N)$. *Алгоритм переработки приближенной информации* $z_1(f),...,z_N(f)$ *об* f, полученной от функционалов $l_1(f),...,l_N(f)$ с точностью ε_N есть, по определению, числовая функция $\varphi_N\left(z_1,...,z_N;\cdot\right)$, которая при любом фиксированном $(z_1,...,z_N)\in C^N$ является принадлежащей Y функцией переменной $(\cdot)\in\Omega_Y$ (множество, составленное из всех таких φ_N обозначим через $\{\varphi_N\}_Y$). Затем, после подстановки $z_1=z_1(f),...,z_N=z_N(f)$, $|l_\tau(f)-z_\tau(f)|\le\varepsilon_N\,(\tau=1,...,N)$ функция $\varphi_N\left(z_1(f),...,z_N(f);\cdot\right)$ приобретает статус *вычислительного агрегата* для приближенного вычисления в метрике Y оператора $Tf\equiv u(\cdot;f)$.

В условиях К(В)П-исследования преобразования Радона речь будет идти о восстановлении функции $Tf=f$ по числовой информации, полученной от линейных функционалов Rf – преобразования Радона.

Отметим, что практическое применение каждого вычислительного агрегата из К(В)П-2 и -3 осуществляется через построение физического прибора для получения (измерений) цифровой информации $\bar{l}_1,...,\bar{l}_N$ на классе F с точностью $\tilde{\varepsilon}_N$ (понятно, что чем больше предельная погрешность $\tilde{\varepsilon}_N$, тем прибор проще в техническом исполнении и дешеве в эксплутации) и через программное обеспечение $\bar{\varphi}_N$ - алгоритма для компьютерных вычислений.

7. Количественная форма теоремы Радона. Основной результат статьи заключается в полном К(В)П-исследовании преобразования Радона в модельной ситуации: при размерности пространства равного s=2 в случае открытого множества $\Omega\subset\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$ получена формула восстановления функций по значениям ее преобразования Радона в точках, порядково точное в пространстве Соболева $H_0^r(\Omega)$, неулучшаемая по числовой информации, полученной от всех линейных функционалов, с установлением в вариантах предельной погрешности вычисления преобразования Радона, сохраняющую неулучшаемую погрешность восстановления по точной информации.

Точно говоря, справедлива следующая теорема, которую можно было бы назвать **Количественной формой теоремы Радона.**

Формулировке этой теоремы предпошлем используемые в ней обозначения и определения (в полном объеме они даны в §1).

Пусть дано открытое множество $\Omega \subset E_s \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$. Пространство Соболева $H_0^r(\Omega)$, по определению, состоит из всех функций $f(x)$, определенных на множестве Ω, доопределенных нулем до E_s в виде $f_\Omega(x)$, равном $f(x)$ или 0 в зависимости от того, $x \in \Omega$ или $x \in E_s \backslash \Omega$, понятно 1-периодических по каждой из s-переменных, с конечной нормой

$$\|f\|_{H_0^r(\Omega)} := \|f_\Omega\|_{W_2^r(E_s)} \, (r \geq 0, \ s = 1, 2, ...).$$

Также напомним определение двумерных ядер Дирихле $(N = n^2, n = 2, 3, ...)$

$$D_N(x_1, x_2) = D_n(x_1) \cdot D_n(x_2), D_n(x_i) = \frac{1}{2} + \sum_{k_i=1}^{n} cos 2\pi i k x_i (i = 1, 2)$$

Специальное обозначение $\mathcal{F}$ выделим одномерному обратному преобразованию Фурье

$$\mathcal{F}g(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, e^{2\pi i \sigma \tau} d\tau.$$

Основная теорема. *Пусть даны открытое множество* $\Omega \subset E_2 \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, *число* $r > 0$. *Тогда для класса* $H_0^r(\Omega)$, *определенного через* $W_2^r(E_2)$, *и всякого* $N = n^2$ $(n = 2, 3, ...)$ *справедливы утверждения*

К(В)П-1. Находится порядок

$$\inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы над}\, H_0^r(\Omega),\ \varphi_N}} \sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); x)\|_{L^2(\Omega)} \asymp$$

$$\asymp \inf_{(\alpha_\tau, t_\tau) \in E_2 (\tau = 1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \|f(x) - \varphi_N(Rf_\Omega(\alpha_1, t_1), ..., Rf_\Omega(\alpha_N, t_N); x)\|_{L^2(\Omega)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \left\| f(x_1, x_2) - \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}},$$

где

$$Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) \equiv \int_{b_1\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right)}^{b_2\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right)} f_\Omega\left(\frac{\sqrt{2}k_2}{n} \cos\frac{2\pi k_1}{n} - y \sin\frac{2\pi k_1}{n}, \frac{\sqrt{2}k_2}{n} \sin\frac{2\pi k_1}{n} + y \cos\frac{2\pi k_1}{n}\right) dy,$$

и

$$R^{-1}(D_N(\alpha, \tau)) = R^{-1} D_N(x_1, x_2) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{T_{\alpha,t} \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2} \left(\frac{\sin\pi(2n+1)\left(\sqrt{2}t \cos 2\pi\alpha - y \sin 2\pi\alpha\right)}{2 \sin 2\pi\left(\sqrt{2}t \cos 2\pi\alpha - y \sin 2\pi\alpha\right)} \right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\frac{\sin\pi(2n+1)\left(\sqrt{2}t \sin 2\pi\alpha + y \cos 2\pi\alpha\right)}{2 \sin 2\pi\left(\sqrt{2}t \sin 2\pi\alpha + y \cos 2\pi\alpha\right)} \right) dy \right) e^{2\pi i \gamma t} dt \right] e^{2\pi i (x_1 \gamma cos 2\pi\alpha + x_2 \gamma sin 2\pi\alpha)} \gamma d\gamma d\alpha.$$

К(В)П-2 (версия «равно $\tilde{\sigma}_N$ *»). Для вычислительного оператора*

$$\frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right), \tag{0.3}$$

и для величины $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ *выполняются соотношения:*

Во-первых,

$$\sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \left\| f(x_1, x_2) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \left(Rf_\Omega \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n} \right) + \tilde{\sigma}_N \right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N \left(\eta_N \tilde{\sigma}_N \equiv \eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{N} \sum\limits_{k_1=1}^{n} \sum\limits_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n} \right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N \left(0; \mathrm{L}_N(H_0^r(\Omega)) \times \{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)} \right)_{L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

К(В)П-2 (версия «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ *»). Для вычислительного оператора* (0.3) *и для величины* $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ *выполняются соотношения:*

$$\sup_{\substack{f \in H_0^r(\Omega) \\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right| \le 1}} \left\| f(x_1, x_2) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \left(Rf_\Omega \left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n} \right) + \gamma_N^{(k_1,k_2)} \bar{\varepsilon}_N \right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Тем самым, при погрешности вычисления преобразования Радона с точностью не большей $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ итоговой потери точности восстановления f не будет.

В то же время, если в вычислении преобразования Радона ошибаться на постоянную величину $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$, то также не произойдет потери итоговой точности, но это обрушится для $\eta_N \tilde{\sigma}_N$, – любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}$.

Вопрос об окончательности погрешности $\bar{\varepsilon}_N$ *в версии «не больше* $\tilde{\varepsilon}_N$ *», когда необходимо выяснить, найдется или не найдется* $\bar{\eta}_N \to +\infty$ *такая что* $\bar{\varepsilon}_N \bar{\eta}_N =: \tilde{\varepsilon}_N$ *будет предельным в версии «не больше* $\tilde{\varepsilon}_N$ *», остается открытым (известно только то, что* $N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)} = \bar{\varepsilon}_N \le \tilde{\varepsilon}_N \le \tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ *).*

Для вычисления обратного преобразования Радона $R^{-1}g$ в общем случае [7, V. 2. Фурье-алгоритм] выписана специальная процедура высокой эффективности и с тщательным анализом ошибок. Не исключено, что Фурье-алгоритм для конкретного случая ядра Дирихле $R^{-1}D_N(x_1, x_2)$, к вычислению чего Основная теорема сводит всю процедуру Радонского сканирования, будет приемлемым.

Отметим, что доказательство Основной теоремы полностью составляют результаты, ранее полученные при К(В)П-исследовании проблемы численного дифференцирования [43], применение к преобразованию Радона обеспечивается ее особенностью, заключенной в соотношении (в двумерном случае $s = 2$) $\|f\|_{W_2^r} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}}$.

Ради полноты изложения Основной теоремы как введения в К(В)П-подход к теории преобразования Радона в модельной ситуации, доказательства этих К(В)П-результатов, адаптированные к двумерному случаю, даны в полном объеме.

Тем самым,преследуя внутренние цели, в чем заключается главное назначение данного журнала, все доказательства Основной теоремы в §2, по мере возможности, даны в замкнутом виде.

При этом придерживаемся следующей схемы. Оценки сверху в полном объеме даются для единичных кубов, поскольку изучаются только 1-периодические по каждой переменной функции и их интегральные характеристики в них одинаковы,– это классы Соболева $W_2^r(E_s)$ на основе гармонического анализа. Затем, полученные результаты переносятся на классы, заданные на ограниченных открытых множествах $\Omega \subset E_s$, по цепочке неравенств

$$\sup \|f - \varphi(Rf)\|_{W_2^r(E_s)} \geq \sup \|f_\Omega - \varphi(Rf_\Omega)\|_{W_2^r(E_s)} \geq \sup \|f_\Omega - \varphi(Rf_\Omega)\|_{H_0^r(\Omega)} = \sup \|f - \varphi(Rf_\Omega)\|_{H_0^r(\Omega)}.$$

Оценки снизу проводятся в обратном порядке – экстремальные функции g, с возможностью продолжения нулем на все E_s с сохранением принадлежности классу $H_0^r(\Omega)$, определяются на кубах $E_s^\delta \subset \Omega$ со сторонами длины $2\delta < 1$, затем выводы делаются в обратном порядке

$$\|g\|_{W_2^r(E_s^\delta)} \leq \|g\|_{H_0^r(\Omega)} \leq \|g_\Omega\|_{W_2^r(E_s)}.$$

В §1 вынесены используемые обозначения и необходимые определения. Параграф 3 посвящен дальнейшему развитию К(В)П-исследования преобразования Радона в случае произвольной размерности и различных классов функций (не обязательно гильбертовых).

В частности, Основная теорема перенесена на многомерный случай.

В заключение отметим, что основные идеи подхода и иллюстрационные результаты анонсированы в [65].

§1. Обозначения и определения

1. Обозначения. Всюду в статье будем пользоваться следующими обозначениями.

s-мерное евклидово пространство есть $R^s = \{(x_1, ..., x_s) : x_1 \in R, ..., x_s \in R\}$, где R поле действительных чисел и *s=1,2,...*.

$E_s(a) = \left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right]^s$ – единичный куб в R^s с центром в точке $(a, ..., a)$, в частности, при $s = 2$ имеем $E_2(0) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ и $E_2\left(\frac{1}{2}\right) = [0,1]^2$.

В общем случае, при $\delta > 0$

$$E_s^\delta(\eta_1, ..., \eta_s) = [\eta_1 - \delta, \eta_1 + \delta] \times \cdots \times [\eta_s - \delta, \eta_s + \delta].$$

$V_s = \left\{(x_1, ..., x_s) \in R^s : x_1^2 + ... + x_s^2 \leq \delta^2\right\}$ – шар в R^s с центром в начале координат и радиуса $\delta > 0$.

$V_2 = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$ – единичный круг на плоскости.

$S^{s-1} = \left\{(x_1, ..., x_s) \in R^s : x_1^2 + ... + x_s^2 = 1\right\}$ – единичная сфера в R^s.

$S^{s-1} \times R^1 \equiv \left\{(\theta_1, ..., \theta_s, \tau) \in R^{s+1} : \theta_1^2 + ... + \theta_s^2 = 1, -\infty < \tau < \infty\right\}$ – единичный цилиндр в R^{s+1}, при $s = 2$ единичный цилиндр есть $\left\{(\theta_1, \theta_2, \tau) \in R^3 : \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1, -\infty < \tau < \infty\right\}$.

$x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_s y_s = \langle x, y \rangle$ -скалярное произведение векторов $x = (x_1, ..., x_s)$ и $y = (y_1, ..., y_s)$ из R^s.

$\theta = (\theta_1, ..., \theta_s) \in R^s, \theta_1^2 + ... + \theta_s^2 = 1$ - единичный вектор в R^s.

$\theta^\perp$ - единичный вектор, ортогональный $\theta : \langle \theta, \theta^\perp \rangle = 0$.

При $s = 2$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ $(\textit{или}\, 0 \leq \alpha < 1)$, $\theta_\alpha = (\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$, $\theta_\alpha^\perp = (-\sin 2\pi\alpha, \cos 2\pi\alpha) : \langle \theta_\alpha, \theta_\alpha^\perp \rangle = -\cos 2\pi\alpha \sin 2\pi\alpha + \sin 2\pi\alpha \cos 2\pi\alpha = 0$.

$f^{(\alpha)}(x) \equiv f^{(\alpha_1, ..., \alpha_s)}$ – производная Вейля порядка $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ функции f.

$A << B$ $(B \geq 0)$ означает $|A| \leq cB$.

$A \asymp B$ $(A \geq 0,\ B \geq 0)$ означает одновременное выполнение $A << B$ и $B << A$.

$[x]$ есть целая часть числа x.

$\{x\}$ есть дробная часть числа x.

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ – кольцо всех целых чисел.

$Z_+ = \{0, 1, 2, ...\}$ – множество всех неотрицательных целых чисел.

$Z^s = \{m = (m_1, ..., m_s) : m_1 \in Z, ..., m_s \in Z\}$.

$\bar{m}_j = \max\{|m_j|; 1\}$ для $m_j \in Z$.

Носителем $\operatorname{supp} f$ непрерывной функции называется замыкание множества всех точек, где $f(x) \neq 0$.

Если функция задана на множестве $\Omega \subset R^s$, то через $f_\Omega(x)$ обозначаем функцию, определенную на R^s посредством равенства $f_\Omega(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{если}\ x \in \Omega, \\ 0, & \textit{если}\ x \in R^s \backslash \Omega. \end{cases}$

Для $f(x) \in L^1(R^s)$ прямое и обратное преобразования Фурье задаются равенствами

$$\hat{f}(\xi) \equiv \hat{f}(\xi_1, ..., \xi_s) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_s) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx_1 ... dx_s$$

и

$$\tilde{f}(\xi) \equiv \tilde{f}(\xi_1, ..., \xi_s) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ... x_s) e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx_1, ..., dx_s.$$

2. Определения. $L^p(\Omega)$ –пространство всех измеримых на непустом множестве Ω функций с конечной нормой $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

C^∞ - бесконечно дифференцируемые на R^s функции.

C_0^∞ - бесконечно дифференцируемые на R^s функции $f(x)$ такие, что носитель каждого из них образует ограниченное множество.

Определим нормы в $W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s\right)$ – пространстве Соболева: 1-периодическую по каждой из s переменных функцию $f(x) \in L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s\right)$ разложим в тригонометрический ряд Фурье на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i (m,x)}, \hat{f}(m) = \int\limits_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s} f(x) e^{-2\pi i (m,x)} dx,$$

затем, пользуясь определением r-производной Вейля и равенством Парсеваля, для всех действительных $r \geq 0$ положим

$$\|f(x)\|^2_{W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s\right)} = \sum_{m=(m_1,...,m_s) \in Z^s} \left(\bar{m}_1^2 + ... + \bar{m}_s^2\right)^r \left|\hat{f}(m)\right|^2. \tag{1.1}$$

В частности, $W_2^0\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s\right) = L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s\right)$.

По определению,

$H^r(R^s) = \{f : f-$ обобщенные функции над пространством Шварца функций $\varphi(x) \in C^\infty(R^s)$, при всех $k = (k_1, ..., k_s) \in Z_+^s$, $\ell = (\ell_1, ..., \ell_s) \in Z_+^s$ таких, что

$$\|\varphi\|_{k,\ell} := \sup\left\{\left| x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_s} \frac{\partial^{(\ell_1 + ... + \ell_s)} \varphi(x_1, ..., x_s)}{\partial^{\ell_1} x_1 \ldots \partial^{\ell_s} x_s} \right| : x = (x_1, ..., x_s) \in R^s \right\} = c_{k,\ell} < +\infty \right\},$$

с конечной нормой

$$\|f\|_{H^r(R^s)} = \left(\int\limits_{R^s} \left(1 + |\xi|^2\right)^r \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Пусть Ω –открытое множество в R^s, тогда

$$H_0^r(\Omega) = \left\{f \in H^r(R^s) : supp f \subset \bar{\Omega}\right\}, \tag{1.3}$$

с нормой

$$\|f\|_{H_0^r(\Omega)} \overset{(1.2)}{=} \|f\|_{H^r(R^s)}.$$

Отметим (см.[7, Глава VII, Лемма 4.4]), что при всех действительных $r \geq 0$ норма (1.1) при $\Omega = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^s$ эквивалентна норме $\|f\|_{H_0^r(\Omega)}$ функций пространства (1.3).

Заметим, что 1-периодические непрерывные функции $f(x)$, в их числе и тригонометрические многочлены, порождающие регулярные обобщенные функции

$\int\limits_{R^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s} f(x)\varphi(x)\,dx$, принадлежат пространству $H_0^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$ при всех $r \geq 0$.

Таким образом, в случае 1- периодических по каждой из s- переменных функций при всех действительных $r \geq 0$ справедливы теоретико-множественные равенства

$$H_0^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right) \equiv W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right) \equiv W_2^r\,(0,1)^s\,. \tag{1.4}$$

В контексте приведенных определений пространств Соболева $H_0^r(\Omega)$ выделим открытые множества $\Omega \subset \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$, коим посвящена настоящая статья.

В этом случае, согласно (1.3), пространство $H_0^r(\Omega)$ состоит из всех функций $f(x)$, определенных на множестве Ω, доопределенных нулем до $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$ в виде $f_\Omega(x)$, 1-периодических по каждой из s- переменных, с эквивалентными конечными нормами (1.1) и (1.2), обеспечивающих (1.4), в итоге приводящих к

$$\|f\|_{H^r(\Omega)} := \|f_\Omega\|_{W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)}\,(r \geq 0,\ s = 1,2,...)\,, \tag{1.5}$$

что будет отражено в записи $H_0^r(\Omega) \sim W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$.

Разумеется, переход от f, заданной на Ω, к f_Ω, заданной на всем R^s, обеспечивает корректность оперирования с f на всем R^s.

Приведем эквивалентные определения пространства Соболева $H_0^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right) \equiv W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$ через производные.

Если $r > 0$- целое и $s\,(s = 1,2,...)$, то

$$\|g(x)\|^2_{W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)} = \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z_+^s\\ |k| = k_1+...+k_s \leq r}} \int\limits_{V^2} \left|\frac{\partial^{|k|} g(x_1,...,x_s)}{\partial^{k_1}x_1...\partial^{k_s}x_s}\right|^2 dx_1...dx_s.$$

Если $r > 0$- нецелое и $r = \bar{r} + \sigma$, $\bar{r}$- целое, $0 < \sigma < 1$, то

$$\|g(x)\|^2_{W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)} = \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z_+^s\\ |k| = k_1+...+k_s \leq r}} \int\limits_{[0,1]^2} \left|\frac{\partial^{|k|} g(x_1,...,x_s)}{\partial^{k_1}x_1...\partial^{k_s}x_s}\right|^2 dx_1...dx_s +$$

$$+ \sum_{k_1+...+k_s=\bar{r}} \int\limits_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s} \int\limits_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s} \frac{\left|\frac{\partial^{\bar{r}} g}{\partial^{k_1}x_1...\partial^{k_s}x_s}(x_1,...,x_s) - \frac{\partial^{\bar{r}} g}{\partial^{k_1}y_1...\partial^{k_s}y_s}(y_1,...,y_s)\right|^2}{\|x-y\|_{R^s}^{s+2\sigma}} dx_1...dx_s dy_1...dy_s.$$

В заключение темы Соболевского пространства приведем цепочку определений, в совокупности составляющих определение пространств $H_p^r(\Omega)$:это пункты [44,2.2.1 (стр.178)] – пространство медленно растущих обобщенных функций $S'(R^s)$, [44, 2.3.1 (стр.199-200)]– множество функций f из $S'(R^s)$ с требованием $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{r}{2}}\hat{f}(\xi) \in L^2(R^s)$ на r- гладкость $H_p^r(R^s)$, [44, 4.2.1(стр. 384-385)] - $H_p^r(\Omega)$ и $\overset{\circ}{H}{}_p^r(\Omega)$, [44, 4.3.2 (стр. 395)]- $H_p^r(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}_p^r(\Omega) = \tilde{H}_p^r(\Omega) = \left\{f : f \in H_p^r(R^s), supp f \in \bar{\Omega}\right\}$ из [44] и определение медленно растущей обобщенной функции из [45, глава VI, §1].

s-мерные ядра Дирихле $(N = n^s,\ n = 2,3,...)$

$$D_n(x_1,...,x_s) = D_n(x_1)\cdots D_n(x_s), D_n(x_i) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos 2\pi k x_i = \frac{\sin \pi\,(2n+1)\,x_i}{2\sin \pi x_i}\ (i = 1,...,s)\,.$$

Далее

$$\sum_{-n}^{n} e^{iku} = e^{-inu}\sum_{0}^{2n} e^{iku} = e^{-inu}\frac{e^{(2n+1)iu}-1}{e^{iu}-1} = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}},$$

откуда при $u = 2\pi x_i$ получим

$$D_n(x_i) = \frac{1}{2}\sum_{|k|\le n} e^{2\pi i k x_i} = \frac{\sin\pi\left(2n+1\right)x_i}{2\sin\pi x_i}. \tag{1.6}$$

Преобразование Радона. Преобразование Радона (s-мерное) функции $f(x)$, заданной на замыкании $\bar{\Omega}$ открытого множества $\Omega \subset R^s$, каждой гиперплоскости размерности $s-1$, перпендикулярной вектору $\tau\cdot\theta,\ \theta := (\theta_1, ..., \theta_s) \in R^s$ с $\theta_1^2 + ... + \theta_s^2 = 1$ и $-\infty < \tau < \infty$ ставит в соответствие интеграл по ней

$$Rf(\theta,\tau) \equiv Rf(\theta_1, ..., \theta_s; \tau) = \int\limits_{x:\langle x,\theta\rangle=\tau\cap\Omega} f(x)dx = \int\limits_{y:y\in R^{s-1}} f_{\Omega}(\tau\theta + y)dy. \tag{1.7}$$

В двумерном случае $s = 2$ единичный вектор $\theta_\alpha^\perp := (-\sin 2\pi\alpha, \cos 2\pi\alpha)$ перпендикулярен единичному вектору $\theta_\alpha := (\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$, поскольку их скалярное произведение

$$\left\langle \theta_\alpha, \theta_\alpha^\perp \right\rangle = -\sin 2\pi\alpha\cos 2\pi\alpha + \cos 2\pi\alpha\sin 2\pi\alpha = 0.$$

Поэтому интеграл по прямой $T_{\alpha,\tau}$, перпендикулярной к вектору $\tau\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha\right)$ с началом в точке $(0,0)$, есть интеграл вдоль прямой $\tau\theta + y\theta^\perp\left(-\infty < \tau < +\infty,\ -\infty < y < +\infty\right)$.

Таким образом,

$$Rf\left(\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau\right) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(T_{\alpha,\tau}\right)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\tau\theta + y\theta^\perp\right)dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\tau\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \tau\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right)dy.$$

Конечно,при $s = 2$ интеграл в (1.7) фактически берется по множеству $T_{\alpha,\tau}\bigcap \mathrm{supp} f$, т.е.

$$Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau\right) = \int\limits_{T_{\alpha,\tau}\bigcap \mathrm{supp}\, f} f\left(\tau\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \tau\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right)dy. \tag{1.8}$$

В случае класса функций f, определенных на множестве Ω, также будем писать $T_{\alpha,t}\left(\Omega\right)$.

Данная статья посвящена случаю $\mathrm{supp}\, f \subset \bar{\Omega}$, где открытое множество Ω содержится в единичном кубе $E_s \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$ (или $[0,1]^s$), что в случае 1-периодических по каждой переменной функций эквивалентно.

Приспосабливаясь к каждому из этих случаев, будем τ параметризовать через $\tau = \tau\left(t\right)$, где $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$ (или $0 \le t \le 1$), таким образом, чтобы $\tau\left(t\right)\theta_\alpha$ принадлежала кругу $\left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le \frac{1}{2}\right\}$ как наименьший круг, содержащий квадрат $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$. И тогда при $\tau = \tau(t)$ вместо $Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau = \tau\left(t\right)\right)$ будем писать $Rf\left(\alpha, t\right)$.

Так при $s = 2$, $\bar{\Omega} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ имеем: для $\tau(t) = \sqrt{2}t,\ \tau\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ и в силу (1.8) выполнено

$$Rf\left(\alpha, t\right) \equiv Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha; \tau\left(t\right)\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy. \tag{1.9}$$

При $s = 2$, $E_2 \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, $-\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{1}{2}$, $\quad -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$, $\operatorname{supp} f \subset E_2$ имеет место более точная запись (1.9)

$$Rf\left(\alpha, t\right) \equiv Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha; \tau = \tau(t) = \sqrt{2}t\right) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-(2t)^2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-(2t)^2}} f_{E_2}\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha, \sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right) dy. \tag{1.10}$$

Отметим, что наряду с «Преобразование Радона» используются и другие равнозначные названия – «Радоновский образ», «Проекция Радона ($f\left(x\right)$ на $\langle x, \theta\rangle = t$)» и др.

Специальное обозначение $\Im$ выделим одномерному преобразованию Фурье

$$\Im g\left(\sigma\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(\tau\right) e^{2\pi i\sigma\tau} d\tau. \tag{1.11}$$

§2. Полное К(В)П-исследование преобразования Радона в модельном двумерном случае

В обозначениях и определениях §1 имеет место

Теорема 1 (К(В)П-1, оценка сверху). *Пусть* $r > 0$ *и* $N = n^2$ $(n = 2, 3, ...)$. *Тогда для вычислительного агрегата, построенного по значениям в точках преобразования Радона функции* $f(x_1, x_2)$ *из класса* $W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2\right)$

$$\Lambda_N\left(x_1, x_2; f\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)$$

справедливо соотношение

$$\sup_{f\in W_2^r\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^2}\left\|f\left(x_1, x_2\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_1}{n}\right)\right\|_{L^2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^2} << N^{-\frac{r}{2}},$$

где

$$R^{-1}\left(D_N\left(\alpha, \tau\right)\right) = R^{-1}D_N\left(x_1, x_2\right) = \int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{F}\left(RD_N\left(\alpha, \gamma\right)\right) e^{2\pi i(x_1\gamma cos 2\pi\alpha + x_2\gamma sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha.$$

Следствие 1. *Пусть даны открытое множество* $\Omega \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ *и число* $r > 0$. *Тогда для класса* $H_0^r\left(\Omega\right) \sim W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2\right)$ *и всякого* $N = n^2$ $(n = 2, 3, ...)$ *выполнены неравенства*

$$\sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f\left(x\right) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} << N^{-\frac{r}{2}},$$

где

$$R^{-1}\left(D_N\left(\alpha, \tau\right)\right) = R^{-1}D_N\left(x_1, x_2\right) = \int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{0}^{\infty}\mathcal{F}\left(RD_N\left(\alpha, \gamma\right)\right) e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha + x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha.$$

Предметом изучения в этом параграфе являются функции двух переменных, 1-периодические по каждой из них, стало быть, полностью определяются рассмотрением на любом единичном квадрате со сторонами параллельными координатным осям.

Таковыми здесь будут $E_2 \equiv E_2(0) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ и $E_2\left(\frac{1}{2}\right) = [0,1]^2$, связанные заменами: если $(x_1, x_2) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, то $\left(x_1 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2}\right) \in [0,1]^2$, и, наоборот, если $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$, то $\left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2 - \frac{1}{2}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$.

Вообще говоря, при замене переменных $(i = 1, 2)$

$$x_i = \varphi_i(t_i) \ \ (\alpha_i \le t_i \le \beta_i)$$

выполнены равенства

$$\int\limits_{\varphi_1(\alpha_1)}^{\varphi_1(\beta_1)} \int\limits_{\varphi_2(\alpha_2)}^{\varphi_2(\beta_2)} g(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} g(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \end{pmatrix} \right| dt_1 dt_2 =$$

$$= \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} g(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2)) \left| \varphi_1'(t_1) \cdot \varphi_2'(t_2) \right| dt_1 dt_2,$$

в частности

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} g\left(x_1 - \frac{1}{2}, x_2 - \frac{1}{2}\right) dx_1 dx_2$$

и

$$\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} g(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g\left(x_1 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2}\right) dx_1 dx_2.$$

В случае линейных функций $x_i = a_i t_i + b_i (i = 1, 2)$ имеем $dx_1 dx_2 = |a_1 a_2|\, dt_1 dt_2$.

Итоговые результаты будут сформулированы на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, доказательства же – на двух указанных квадратах (например, чтобы не переформулировать используемые известные результаты, излагаемые для $[0,1]^2$).

Сначала приведем ряд вспомогательных утверждений, на основе которых будет доказана оценка сверху в К(В)П-1.Начнем с установления представленияпреобразования Радона через кратный интеграл. В двумерном случае, $\bar{\Omega} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2 \equiv E_2(0) \equiv E_2$ чему посвящена доказываемая Основная теорема, преобразование Радона записывается в виде поверхностного интеграла (см.§1).

Лемма 1. *При* $E_2 \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ *имеет место соотношение*

$$\|Rf\|^2_{H^r(Z)} = 2\sqrt{2}\pi \, \|Rf\|^2_{H_0^r\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2\right)}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Цилиндр

$$Z \equiv \left\{ \left(\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}}, \tau\right) \in R^3 : \bar{\theta}^2 + \bar{\bar{\theta}}^2 = 1, -\infty < \tau < +\infty \right\}, dZ = \sqrt{EG - F^2} d\alpha d\tau,$$

по которому пространство Соболева определено через поверхностный интеграл, имеет параметрическое представление $-\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{1}{2}$, $\theta_\alpha = (\cos 2\pi\alpha, \sin 2\pi\alpha)$ и $-\infty < \tau < +\infty$.

В этих обозначениях, последовательно применяя определения норм $H^r\left(R^2\right)$ из [7, II.5] и $H_0^r(\Omega)$ из [7,VII.4] и запись поверхностного интеграла через двойной интеграл, для функции $g(\alpha, \tau) := g(\cos 2\pi\, \alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau)$ получим

$$\|g\|^2_{H^r(Z)} \overset{defH^r(Z)}{=} \iint\limits_Z \left(1+\tau^2\right)^r \hat{g}\left(\alpha,\tau\right)dZ = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\tau^2\right)^r \hat{g}\left(\alpha,\tau\right)\sqrt{EG-F^2}d\alpha d\tau,$$

где

$$E = \left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial\tau}{\partial\alpha}\right)^2 = (-2\pi\sin 2\pi\alpha)^2 + (2\pi\cos 2\pi\alpha)^2 + 0 = 4\pi^2,$$

$$G = \left(\tfrac{\partial\theta_1}{\partial\tau}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial\theta_2}{\partial\tau}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial\tau}{\partial\tau}\right)^2 = 0+0+1 = 1,$$

$$F = \tfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\tfrac{\partial\theta_1}{\partial\tau} + \tfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\tfrac{\partial\theta_2}{\partial\tau} + \tfrac{\partial\tau}{\partial\alpha}\tfrac{\partial\tau}{\partial\tau} = 0,$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{4\pi^2\cdot 1} = 2\pi,$$

откуда

$$dZ = 2\pi\, d\alpha\, d\tau$$

и в итоге

$$\|g\|^2_{H^r(Z)} = 2\pi \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\tau^2\right)^r \hat{g}\left(\alpha,\tau\right)d\alpha d\tau \overset{defH_0^r(\Omega)}{=} 2\pi\,\|g\|_{H_0^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times R^1\right)}. \tag{2.2}$$

Теперь применим это определение к преобразованию Радона (1.7)-(1.8) при $\bar{\Omega} = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$.

Сначала выпишем преобразование Радона для единичного квадрата $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$.

Пусть функция $f(x) \equiv f(x_1,x_2)$ задана на единичном квадрате $E_2 \equiv \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$ и даны числа $-\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{1}{2}$ и $-\infty < \tau < +\infty$.

При этом пересечение $T_{\alpha,\tau}$ с множеством задания f при всех $-\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}$ выполнено при τ, по модулю не большего диагонали квадрата $\left[0,\frac{1}{2}\right]^2$, т.е. величины $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Переходя к линейной функции $\tau(t)$, при $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$ принимающей ровно по одному все значения отрезка $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, а это $\tau(t) = \sqrt{2}t$, получаем искомую параметризацию (1.9)

$$\begin{cases} \theta_1 = \cos\,2\pi\alpha, & -\frac{1}{2} \le \alpha < \frac{1}{2}, \\ \theta_2 = \sin\,2\pi\alpha, & \\ \tau = \tau\left(t\right) = \sqrt{2}t, & -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \{(\alpha,t)\} = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2 \equiv E_2 \tag{2.3}$$

при котором

$$T_{\alpha,t} = \left\{\tau\left(t\right)\theta_\alpha + y\theta_\alpha^\perp : -\infty < y < +\infty\right\} \subset \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2.$$

Тем самым, переходя в (2.2) к (2.3)

$$g\left(\alpha,\tau\right) = Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha, \sin 2\pi\alpha, \tau\right) \quad \left(-\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}, -\infty < \tau < +\infty\right),$$

вместе с заменой $\tau = \tau(t) = \sqrt{2}t,\ d\tau = \sqrt{2}dt\left(-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}\right)$ приходим к (2.1)

Лемма 1 доказана.

Выпишем отрезки $T_{\alpha,t} = \left[b_1\left(\alpha,t\right), b_2\left(\alpha,t\right)\right]$ в локальной системе координат с началом в основании перпендикуляра $\left(\sqrt{2}t\cdot\theta_2\right)^\perp$ с направлением «против часовой стрелки, справа налево»:

$$b_1(\alpha,t)=\begin{cases}\max\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha+1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } -1/2\le\alpha<-3/8,\\ \max\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha+1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{-1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } -3/8\le\alpha<-1/8,\\ \max\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha-1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{-1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } -1/8\le\alpha<1/8,\\ \max\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha-1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } 1/8\le\alpha<3/8,\\ \frac{1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha} & \text{если } 3/8\le\alpha<1/2\end{cases}\qquad(2.4)$$

$$b_2(\alpha,t)=\begin{cases}\min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha+1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } -1/2\le\alpha<-3/8,\\ \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha-1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{-1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } -3/8\le\alpha<-1/8,\\ \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha-1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } -1/8\le\alpha<1/8,\\ \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha+1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } 1/8\le\alpha<3/8,\\ \min\left\{\frac{t\cos 2\pi\alpha+1/2}{\sin 2\pi\alpha},\frac{-1/2-t\sin 2\pi\alpha}{\cos 2\pi\alpha}\right\} & \text{если } 3/8\le\alpha<1/2.\end{cases}$$

Отметим, что f имеет аргументом $x=(x_1,x_2)$ из единичного квадрата $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$, преобразование Радона Rf - переменными (α,t) из $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Так что обратное преобразование Радона $R^{-1}g$, это когда для единичного оператора E выполнено $RR^{-1}=E=R^{-1}R$, функции $g(\alpha,t)$ от переменных (α,t) из $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ ставит в соответствие функцию $R^{-1}g$, определенную на $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$ от переменных (x_1,x_2).

В вычислениях и выкладках, по мере возможностей, эти разного смысла переменные будут указываться:

$$f(x_1,x_2)\overset{Rf}{\mapsto}R\left(f\left(x_1,x_2\right)\right)\equiv Rf\left(\alpha,t\right)=g(\alpha,t),$$

$$g(\alpha,t)\overset{R^{-1}g}{\mapsto}R^{-1}\left(g(\alpha,t)\right)\equiv R^{-1}g\left(x_1,x_2\right)=f(x_1,x_2),$$

где $R\left(f\left(x_1,x_2\right)\right)$ - оператор R применен к $f\left(x_1,x_2\right)$, результат Rf - зависит от (α,t), в записи $Rf\left(\alpha,t\right)$.

И, наоборот, где $R^{-1}\left(g\left(\alpha,t\right)\right)-$ оператор R^{-1} применен к $g\left(\alpha,t\right)$, результат $R^{-1}g$ – зависит от (α,t), в записи $R^{-1}g\left(x_1,x_2\right)$.

В условиях (2.4) имеем $T_{\alpha,t}=T_{\alpha,t}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)=\left[b_1\left(\alpha,t\right),b_2\left(\alpha,t\right)\right]$, и преобразование Радона (1.9) записывается в виде

$$\begin{gathered}Rf\left(\alpha;t\right)\equiv Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha,\sin 2\pi\alpha,t\right)=\\ =\int\limits_{T_{\alpha,t}\bigcap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2} f\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha,\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right)dy=\\ =\int\limits_{b_1(\alpha,t)}^{b_2(\alpha,t)} f\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha,\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right)dy,\end{gathered}\qquad(2.5)$$

тогда как запись (1.10) при $\Omega\subset\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^2$ приводит к другой форме

$$Rf\left(\alpha;t\right)\equiv Rf\left(\cos 2\pi\,\alpha,\sin 2\pi\alpha,t\right)=\int\limits_{T_{\alpha,t}} f_\Omega(y)dy=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-4t^2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-4t^2}} f_\Omega\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha,\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right)dy.$$

Применим (2.4) - (2.5) к преобразованию Радона ядра Дирихле (см. (1.6) $N=n^2$)

$$D_N(x_1,x_2)=\Big(\frac{1}{2}+\sum_{m_1=1}^{n}\cos 2\pi m_1x_1\Big)\Big(\frac{1}{2}+\sum_{m_2=1}^{n}\cos 2\pi m_2x_2\Big)=\left(\frac{\sin\pi\left(2n+1\right)x_1}{2\sin\pi x_1}\right)\cdot\left(\frac{\sin\pi\left(2n+1\right)x_2}{2\sin\pi x_2}\right)\qquad(2.6)$$

и

$$h_{m_1,m_2}(x_1,x_2)=\cos 2\pi m_1x_1\cdot\cos 2\pi m_2x_2. \tag{2.7}$$

Тогда имеет место

Лемма 2. *При всех* $-\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{1}{2}$ *и* $-\frac{1}{2}\le t\le\frac{1}{2}$ *справедливы равенства*

$$RD_N(\alpha,t)=\int\limits_{T_{\alpha,t}\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2}\left(\frac{\sin\pi(2n+1)\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha\right)}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\sin\pi(2n+1)\left(\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right)}\right)dy$$

и

$$Rh_{k_1,k_2}(\alpha,t)=\int\limits_{T_{\alpha,t}\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2}\cos 2\pi n_1\left[\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha-y\sin 2\pi\alpha\right]\times\cos 2\pi n_2\left[\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right]dy.$$

Лемма 3. *Преобразование Радона* $Rf(\alpha,t)$ *имеет период 1 по* α *и по* t *, и периодически продолжаемо на все* R^2 *.*

Доказательство. При $t=-\frac{1}{2}$ и $t=\frac{1}{2}$ отрезок

$$T_{\alpha,t}\equiv\left\{\langle x,\theta\rangle=x_1\cos 2\pi\alpha+x_2\sin 2\pi\alpha=\sqrt{2}t:-\frac{1}{2}\le x_1,x_2\le\frac{1}{2}\right\}$$

в

$$Rf(\alpha;t)\equiv Rf(\cos 2\pi\,\alpha,\sin 2\pi\alpha,t)\overset{(2.5)}{=}\int\limits_{T_{\alpha,t}}f(y)dy$$

обращается в точку, поэтому

$$Rf\left(\cos 2\pi\alpha,\sin 2\pi\alpha,-\frac{1}{2}\right)=0=Rf\left(\cos 2\pi\alpha,\sin 2\pi\alpha,\frac{1}{2}\right).$$

Отрезок по $T_{\alpha,t}$ имеет период 1 и потому функция Rf по α также имеет период 1.

Лемма 4 (Frank Natterer [7], Theorem 5.2.). *Для всякого* $r\ge 0$ *и всякой функции* $f(x_1,x_2)$ *из* $W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)$*, ее преобразование Радона* $Rf(\alpha,t)$ *принадлежит* $W_2^{r+\frac{1}{2}}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)$ *и, наоборот, из включения* $Rf(\alpha,t)\in W_2^{r+\frac{1}{2}}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)$ *следует* $f(x_1,x_2)\in W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)$*, при этом имеет место соотношение*

$$\|Rf(\alpha,t)\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)}\asymp\|f(x_1,x_2)\|_{W_2^r\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2\right)} \tag{2.8}$$

Доказательство следует из следующего соотношения (из [10, Теорема 3.1]) для ограниченного открытого множества $\Omega\subset R^2$

$$\|Rf(\alpha,t)\|_{H_0^{r+\frac{1}{2}}(Z)}\asymp\|f(x_1,x_2)\|_{H_0^r(\Omega)}$$

и Леммы 1.

Следующую теорему М.Рисса-Торина приведем в записи из [7, VII, §4 (стр.230)]):

Лемма 5. *При всех* $0\le\nu<\mu$*, для всякой* $g(x)\equiv g(x_1,...,x_s)$ *из класса* $W_2^\mu(E_s)$ *выполняется интерполяционное неравенство*

$$\|g(x_1,...,x_s)\|_{W_2^\nu(E_s)}<<\|g(x_1,...,x_s)\|^{\frac{\mu-\nu}{\mu}}_{W_2^0(E_s)}\|g(x_1,...,x_s)\|^{\frac{\nu}{\mu}}_{W_2^\mu(E_s)}.$$

Ниже ранее полученные в [43] результаты, установленные для произвольной размерности, с полными доказательствами изложены в двумерном случае $s=2$. При этом в рассуждениях будет сохранен квадрат $[0,1]^2$, что в применениях для 1-периодических функций не будет препятствовать использованию в случае $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$.

Подпроизводной Вейля порядка $\beta = (\beta_1,\beta_2)$ функции g, где β_1,β_2 - неотрицательные числа, понимается функция $g^{(\beta)}(x)\equiv g^{(\beta_1,\beta_2)}$, ряд Фурье-Лебега которой есть (см. [46])

$$\sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2}\hat{g}(m)\left(e^{2\pi i(m,x)}\right)^{(\beta_1,\beta_2)}\equiv\sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^s}\hat{g}(m_1,m_2)\left(e^{2\pi i m_1x_1}\right)^{(\beta_1)}\left(e^{2\pi i m_2x_2}\right)^{(\beta_2)}, \tag{2.9}$$

где

$$\left(e^{2\pi i(m,x)}\right)^{(\beta_1,\beta_2)}=\prod_{j=1}^{2}\left(e^{2\pi i m_jx_j}\right)^{(\beta_j)}=$$
$$=\left(\overline{2\pi m_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi m_2}\right)^{\beta_2}e^{i\beta_1\frac{\pi}{2}signm_1+i\beta_2\frac{\pi}{2}signm_2}e^{2\pi i(m,x)}. \tag{2.10}$$

$$\left((m_1,m_2)\in Z^2,\ (\beta_1,\beta_2)\in R^2,\beta_j\geq 0\,(j=1,2)\,,1^{\beta_j}\equiv 1\right)$$

Заметим, что определение (2.9)-(2.10) отличается от определения производной $g^{(\beta_1,\beta_2)}(x)$, данного в [47] тем, что в $g^{(\beta_1,\beta_2)}(x)$ учтены также коэффициенты Фурье $\hat{g}(m_1,m_2)$, в которых не все коэффициенты m_j отличны от нуля.

Для $N = n^2\,(n=5,6,...)$ определим оператор приближенного дифференцирования $(E^*=E\backslash\{0\})$

$$\Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g)=\bar{\varphi}_N\left(\left\{g\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\right\}_{k_j=1(j=1,2)}^{n};x\right)= \tag{2.11}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{k=(k_1,k_2)\in Z^2:\\ k_j=1,...,n\\ (j=1,2)}}g\left(\xi^{(k)}\right)\sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N}{}^{*}\left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2}e^{\beta_1 i\frac{\pi}{2}signt_1+\beta_2 i\frac{\pi}{2}signt_2}e^{2\pi i\left(t,x-\xi^{(k)}\right)},$$

где

$$\xi^{(k)}=\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) \tag{2.12}$$

и

$$A_N=\left\{(t_1,t_2):\ t_j=-\left[\frac{n}{2}\right]+y\quad(y=1,...,n;j=1,\,2)\right\}. \tag{2.13}$$

Тем самым, оператор (2.11) есть оператор конечной свертки (относительно (2.12) и (2.13))

$$\Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g)=\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{k=(k_1,k_2)\in Z^2:\\ k_j=1,...,n\\ (j=1,2)}}g\left(\xi^{(k)}\right)\cdot D_N^{(\beta_1,\beta_2)}\left(x-\xi^{(k)}\right), \tag{2.14}$$

где

$$D_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x)=\sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N}\left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2}e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 signt_1+i\frac{\pi}{2}\beta_2 signt_2}e^{2\pi i(t,x)}.$$

***Лемма 6* (Н. Темиргалиев, А.Ж. Жубанышева [43]).** *Пусть даны неотрицательные числа r,β_1,β_2 такие, что $r>\max\{\beta_1+\beta_2;1\}$. Тогда для всякой 1-периодической по каждой из двух переменных суммируемой на $[0,1]^2$ функции $g\equiv g(x)\equiv g(x_1,x_2)$, со сходящимсярядом*

$$\sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2}(\overline{2\pi i m_1})^{\beta_1}(\overline{2\pi i m_2})^{\beta_2}\left|\hat{g}(m)\right|<+\infty, \tag{2.15}$$

выполняется равенство

$$\Delta_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) \equiv g^{(\beta_1,\beta_2)}(x) - \Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) =$$

$$= - \sum_{\substack{t=(t_1,t_2)\in Z^2 \\ t\in A_N}} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\tau=(\tau_1,\tau_2)\in Z^2} {}^*\hat{g}(\tau n + t) +$$

$$+ \sum_{t=(t_1,t_2)\in Z^2\setminus A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}(t). \qquad (2.16)$$

Доказательство. Из условия леммы (2.15) следует, что функции g и $g^{(\beta_1,\beta_s)}$ непрерывны на $[0,1]^2$. В частности, оператор (2.14) определен корректно. Имеем $\left(N=n^2,\ n=2,3,...\right)$

$$\Lambda_N^{(\beta_1,\beta_s)}(x;g) = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{k=(k_1,k_2)\in Z^2: \\ k_j=1,...,n\ (j=1,2)}} \sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2} \hat{g}(m) e^{2\pi i\left(m,\xi^{(k)}\right)} \times$$

$$\times \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i\left(t,x-\xi^{(k)}\right)} =$$

$$= \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2} \hat{g}(m) \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{k=(k_1,k_2)\in Z^2: \\ k_j=1,...,n\quad (j=1,2)}} e^{2\pi i\left(m-t,\xi^{(k)}\right)} =$$

$$= \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{m=(m_1,m_2)\in Z^2} \hat{g}(m) \prod_{j=1}^{2} \chi_{(n)}(m_j - t_j) =$$

$$= \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\substack{m=(m_1,m_2)\in Z^2 \\ m_j\equiv t_j\,(mod n)}} \hat{g}(m) = ,$$

$$= \sum_{t=(t_1,t_2)\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\tau=(\tau_1,\tau_2)\in Z^s} \hat{g}(n\tau + t) \qquad (2.17)$$

поскольку($m_j \equiv t_j\,(mod n) \Leftrightarrow m_j - t_j = \tau_j n \Leftrightarrow m_j = \tau_j n + t_j$)

$$\frac{1}{n} \sum_{k_j=1}^{n} e^{2\pi i(m_j-t_j)\frac{k_j}{n}} = \chi_{(n)}(m_j - t_j) = \begin{cases} 1, & \textit{если } (m_j - t_j) \equiv 0\,(mod n), \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, согласно (2.17), имеем соответственно

$$\Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x,g) = \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\tau\in Z^2} \hat{g}(n\tau + t) =$$

$$= \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \left[\hat{g}(t) + \sum_{\tau\in Z^2} {}^*\hat{g}(n\tau + t)\right] =$$

$$= \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}(t) +$$

$$+ \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \sum_{\tau\in Z^2} {}^*\hat{g}(n\tau + t)$$

и

$$g^{(\beta_1,\beta_s)}(x) = \sum_{t\in A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}(t) +$$

$$+\sum_{t\in Z^2\setminus A_N}\left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2}e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1+i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2}e^{2\pi i(t,x)}\hat{g}\left(t\right)$$

откуда следует (2.16).Лемма 6 доказана.

Лемма 7 (Н. Темиргалиев, А.Ж.Жубанышева [43]). *Пусть даны неотрицательные числа* r,β_1,β_2 *такие, что* $r>\max\{\beta_1+\beta_2,1\}$. *Тогда для всякой функции* g *из* $W_2^r(0,1)^2$ *справедлива оценка сверху* $\left(N=n^2\right)$

$$\left\|\sum_{t\in A_N}\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\hat{g}\left(n\tau+t\right)\left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2}e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1+i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2}e^{2\pi i(t,x)}\right\|_{L^2(0,1)^2}<<N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Обозначив через I_1 ряд в (2.18), в силу равенства Парсеваля получаем

$$\|I_1\|^2_{L^2(0,1)^2}\equiv\int\limits_{[0,1]^2}\left|\sum_{t\in A_N}\left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1}\left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2}e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1+i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2}\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\hat{g}\left(n\tau+t\right)e^{2\pi i(t,x)}\right|^2dx\asymp$$

$$\asymp\sum_{t\in A_N}\left(\overline{t_1}\right)^{2\beta_1}\left(\overline{t_2}\right)^{2\beta_2}\left|\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\hat{g}\left(n\tau+t\right)\right|^2\asymp$$

$$\asymp\sum_{t\in A_N}\left(\overline{t_1}\right)^{2\beta_1}\left(\overline{t_2}\right)^{2\beta_2}\left|\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\hat{g}\left(n\tau+t\right)\left(\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r}+\left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r}+\left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}\right)^{\frac{1}{2}}}\right|^2<<$$

$$<<\sum_{t\in A_N}\left(\overline{t_1}\right)^{2\beta_1}\left(\overline{t_2}\right)^{2\beta_2}\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\left|\hat{g}\left(n\tau+t\right)\right|^2\left(\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r}+\left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}\right)\times$$

$$\times\sum\nolimits_{\tau\in Z^2}{}^*\frac{1}{\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r}+\left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}}.$$

Так как для всякого $t\in A_N$ и для всякого j $(j=1,2)$ выполнено $|t_j|\le\frac{n+1}{2}$, то из $\tau_j\neq0$ следует

$$\overline{\tau_j n+t_j}=|\tau_j n+t_j|=n\left|\tau_j+\frac{t_j}{n}\right|\ge\frac{3}{7}n\left|\tau_j\right|,$$

ибо

$$\left|\tau_j+\frac{t_j}{n}\right|\ge|\tau_j|-\left|\frac{t_j}{n}\right|\ge|\tau_j|-\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\ge|\tau_j|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=|\tau_j|-\frac{7}{10}\ge\frac{3}{10}\left|\tau_j\right|$$

Отсюда, и из критерия

$$\sum_{\tau\in Z^2}\frac{1}{\left(\overline{\tau_1}\right)^{2r}+\left(\overline{\tau_2}\right)^{2r}}<+\infty\Leftrightarrow 2r>2,$$

получаем

$$\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\frac{1}{\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r}+\left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}}<<\frac{1}{n^{2r}}\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\frac{1}{\left(\overline{\tau_1}\right)^{2r}+\left(\overline{\tau_2}\right)^{2r}}<<\frac{1}{n^{2r}}.$$

Тем самым,

$$\|I_1\|^2_{L^2(0,1)^2}<<$$

$$<<\frac{1}{n^{2r}}\sum_{t\in A_N}\left(\overline{t_1}\right)^{2\beta_1}\left(\overline{t_2}\right)^{2\beta_2}\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\left|\hat{g}\left(n\tau+t\right)\right|^2\left(\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r}+\left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}\right)<<$$

$$<<n^{2(\beta_1+\beta_2)-2r}\sum_{t\in A_n}\sum_{\tau\in Z^2}{}^*\left|\hat{g}\left(n\tau+t\right)\right|^2\left(\left(\overline{n\tau_1+t_1}\right)^{2r}+\left(\overline{n\tau_2+t_2}\right)^{2r}\right).$$

В итоге, согласно определению класса Соболева,

$$\|I_1\|_{L^2[0,1]^2}<<n^{(\beta_1+\beta_2)-r}=N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}},$$

что и требовалось доказать.

***Лемма 8* (Н. Темиргалиев, А.Ж.Жубанышева [43]).** *Пусть даны неотрицательные числа* r, β_1, β_2 *такие, что* $r > \max\{\beta_1+\beta_2, 1\}$. *Тогда для всякой функции* g *из* $W_2^r(0,1)^2$ *справедлива оценка сверху*

$$\left\| \sum_{t=(t_1,t_2)\in Z^2\setminus A_N} \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \hat{g}(t) \right\|_{L^2[0,1]^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Опять же обозначая через I_2 ряд в (2.19), имеем

$$\|I_2\|^2_{L^2(0,1)^2} \equiv \int\limits_{[0,1]^s} \left| \sum_{m\in Z^2/A_N} \hat{g}(m) \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\frac{\pi}{2}\beta_1 sign t_1 + i\frac{\pi}{2}\beta_2 sign t_2} e^{2\pi i(t,x)} \right|^2 dx \asymp$$

$$\asymp \sum_{m\in Z^2/A_N} |\hat{g}(m)|^2 \left(\overline{m_1}\right)^{2\beta_1} \left(\overline{m_2}\right)^{2\beta_2}.$$

Далее, применяя неравенство

$$\overline{m_1}^{\beta_1}\overline{m_2}^{\beta_2} \le \left(\max_{j=1,2}\overline{m}_j\right)^{\beta_1} \left(\max_{j=1,2}\overline{m}_j\right)^{\beta_2} = \left(\max_{j=1,2}\overline{m}_j\right)^{\beta_1+\beta_2}$$

получаем

$$\|I_2\|^2_{L^2(0,1)^2} \underset{r,\beta_1,\beta_2}{\le} \sum_{m\in Z^2/A_N} |\hat{g}(m)|^2 \left(\max_{j=1,2}\overline{m}_j\right)^{2(\beta_1+\beta_2)} =$$

$$= \sum_{m\in Z^2/A_N} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(m_1^{2r}+m_2^{2r}\right) \frac{\left(\max\limits_{j=1,2}\overline{m}_j\right)^{2(\beta_1+\beta_2)}}{\overline{m}_1^{2r}+\overline{m}_2^{2r}} \le$$

$$\le \sum_{m\in Z^2/A_N} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(\overline{m}_1^{2r}+\overline{m}_2^{2r}\right) \frac{\left(\max\overline{m}_j\right)^{2\beta_1+2\beta_2}}{\max\overline{m}_j^{2r}} \le$$

$$\le \sum_{m\in Z^2/A_N} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(\overline{m}_1^{2r}+\overline{m}_2^{2r}\right) \frac{1}{\left(\max\overline{m}_j\right)^{2r-(2\beta_1+2\beta_2)}} \underset{r,\beta_1,\beta_2}{\le} \frac{1}{n^{2(r-(\beta_1+\beta_2))}} = N^{-2\left(\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)}.$$

Лемма 8 доказана.

***Лемма 9* (Н. Темиргалиев, А.Ж.Жубанышева [43]).** *Пусть даны неотрицательные числа* r, β_1, β_2 *такие, что* $r > \max\{\beta_1+\beta_2, 1\}$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\sup_{g\in W_2^r(0,1)^2} \left\| g^{(\beta_1,\beta_2)}(\cdot) - \Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) \right\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}.$$

Доказательство. Пусть g принадлежит классу $W_2^r(0,1)^2$. Так как по условию леммы справедливо вложение $W_2^r(0,1)^2 \subset C(0,1)^2$, задача приближенного дифференцирования по значениям в точках поставлена корректна.

Согласно Лемме 6 имеем

$$\Delta_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) \equiv g^{(\beta_1,\beta_2)}(x) - \Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = -\sum_{t\in A_N}\sum_{\tau\in Z^2} {}^*\hat{g}(n\tau+t) \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\beta_1\frac{\pi}{2}sign t_1} e^{i\beta_2\frac{\pi}{2}sign t_2} e^{2\pi i(t,x)},$$

$$I_2 = \sum_{m\in Z^2\setminus A_N} \hat{f}(m) \left(\overline{2\pi t_1}\right)^{\beta_1} \left(\overline{2\pi t_2}\right)^{\beta_2} e^{i\beta_1\frac{\pi}{2}sign t_1} e^{i\beta_2\frac{\pi}{2}sign t_2} e^{2\pi i(t,x)}.$$

Далее, в силу лемм 7 и 8

$$\|I_1\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}$$

и

$$\|I_2\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}.$$

Откуда,

$$\left\|g^{(\beta_1,\beta_2)}(\cdot) - \Lambda_N^{(\beta_1,\beta_2)}(x;g)\right\|_{L^2(0,1)^2} \le \|I_1\|_{L^2(0,1)^2} + \|I_2\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}}.$$

После проведенной подготовки можем приступить к оценке сверху в К(В)П-1 погрешности восстановления функций $f(x_1,x_2)$ из класса $W_2^r(0,1)^2$ по её преобразованию Радона.

Без ограничения общности можно считать, что количество информации $N = n^2\,(n=5,6,\dots)$.

Пусть функциия $f(x_1,x_2)$ принадлежит классу $W_2^r(0,1)^2$, тогда согласно Лемме 4 преобразование Радона $Rf(\alpha,t)$ принадлежит $W_2^{r+\frac{1}{2}}(0,1)^2$ и имеет место соотношение (2.8).

В силу леммы 3 преобразование Радона $Rf(\alpha,t)$ есть 1-периодическая по каждой из двух переменных функция, поэтому, согласно лемме 9, примененной при $\beta_1=\beta_2=0$, вычислительный агрегат

$$\Lambda_N(\alpha,t;Rf) \equiv \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{k=(k_1,k_2):\\ k_j=1,...,n\,(j=1,2)}} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\cdot R^{-1}D_N\left(\alpha-\frac{k_1}{n},t-\frac{k_2}{n}\right)$$

функцию $Rf(\alpha,t)\in W_2^{r+\frac{1}{2}}(0,1)^2$ приближает со скоростью

$$\|Rf(\alpha,t)-\Lambda_N(\alpha,t;Rf)\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r+\frac{1}{2}}{2}} \tag{2.20}$$

Теперь оценим эту разность в метрике $W_2^\rho(0,1)^2$ при $\rho<r$, для чего покажем, что для всякой функции $g(x_1,x_2)$ из $W_2^r(0,1)^2$ справедлива оценка сверху

$$\left\|g(x_1,x_2)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n g\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^\rho(0,1)^2} << N^{-\frac{r-\rho}{2}},$$

где константа в $<<$ не зависит от g.

Действительно, поскольку

$$\|g\|^2_{W_2^\rho(0,1)^2} = \sum_{\beta_1+\beta_2\le\rho}\int_{[0,1]^2}\left|\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}g(x_1,x_2)}{\partial^{\beta_1}x_1\partial^{\beta_2}x_2}\right|^2 dx_1dx_2,$$

то в силу лемм 6-9 имеем

$$\left\|g(x_1,x_2)-\tfrac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n g\left(\tfrac{k_1}{n},\tfrac{k_2}{n}\right)D_N\left(x_1-\tfrac{k_1}{n},x_2-\tfrac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^\rho(0,1)^2} <<$$
$$<< \sum_{\beta_1+\beta_2\le\rho}\left\|g^{(\beta_1,\beta_2)}(x_1,x_2)-\tfrac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^n\sum_{k_2=1}^n g\left(\tfrac{k_1}{n},\tfrac{k_2}{n}\right)D_N^{(\beta_1,\beta_2)}\left(x_1-\tfrac{k_1}{n},x_2-\tfrac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} <<$$
$$<< \sum_{\beta_1+\beta_2\le\rho} N^{-\frac{r}{2}+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}} << N^{-\frac{r-\rho}{2}}.$$

Отсюда при $\rho=2$ получаем

$$\sup_{g\in W_2^r(0,1)^2}\left\|g\left(x_1,x_2\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}g\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^2(0,1)^2}<<N^{-\frac{r-2}{2}}. \tag{2.21}$$

Поскольку преобразование Радона $Rf\left(\alpha,t\right)$ функции $f(x_1,x_2)$ из класса Соболева $W_2^r\left(0,1\right)^2$ принадлежит в $W_2^{r+\frac{1}{2}}(0,1)^2$, то из (2.21) для $g=Rf$ получим

$$\sup_{Rf(\alpha,t)\in W_2^{r+\frac{1}{2}}(0,1)^2}\left\|Rf\left(\alpha,t\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}(Rf)\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)D_N\left(\alpha-\frac{k_1}{n},t-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^2(0,1)^2}<<N^{-\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)-2}{2}}. \tag{2.22}$$

Далее, применяя лемму 4 при $\nu=\frac{1}{2}$ и $\mu=2$, т.е. используя интерполяционное соотношение между нормами пространств $W_2^2\left(0,1\right)^2$ и $L^2\left(0,1\right)^2=W_2^0\left(0,1\right)^2$ и неравенства (2.20) и (2.22), получим оценку приближения в норме пространства $W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2$

$$\|Rf(\alpha,t)-\Lambda(\alpha,t;Rf)\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2}<<$$
$$<<\left(\|Rf(\alpha,t)-\Lambda(\alpha,t;Rf)\|_{W_2^0(0,1)^2}\right)^{1-\frac{\nu}{2}}\times\left(\|Rf(\alpha,t)-\Lambda(\alpha,t;Rf)\|_{W_2^2(0,1)^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}<<$$
$$<<N^{-\left(\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)(1-\frac{\nu}{2})}{2}+\frac{\left((r-2)+\frac{1}{2}\right)\frac{\nu}{2}}{2}\right)}=N^{-\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{\nu}{2}}\overbrace{=}^{\nu=\frac{1}{2}}=N^{-\frac{\left(r+\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{1}{4}}=N^{-\frac{r}{2}}.$$

Обратное преобразование Радона R^{-1} от преобразования Радона Rf дает саму функцию f. Построим искомый приближающий вычислительный агрегат: используя лемму 4 и линейность преобразования Радона:

$$\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\tfrac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf\left(\tfrac{k_1}{n},\tfrac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\tfrac{k_1}{n},x_2-\tfrac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^0(0,1)^2}\asymp$$
$$\asymp\left\|Rf\left(\alpha,t\right)-\tfrac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf\left(\tfrac{k_1}{n},\tfrac{k_2}{n}\right)D_N\left(\alpha-\tfrac{k_1}{n},t-\tfrac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2}<<N^{-\frac{r}{2}},$$

в частности,

$$\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}<<N^{-\frac{r}{2}}. \tag{2.23}$$

Осталось вычислить в (2.23) величину $R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)$, для чего в обозначениях (2.3) необходимо в своем распоряжении иметь явную формулу для величины $R^{-1}\left(g\left(\alpha,t\right)\right)=R^{-1}g\left(x_1,x_2\right)$ к чему и перейдем.

Установим формулу обращения преобразования Радона (см. также [7, V. 2.Фурье-алгоритм]).

Лемма 10 (Метод Фурье-синтеза). *Пусть дана бесконечно дифференцируемая функция* $g\left(\alpha,t\right)$, *с носителем в* $E_2=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$. *Тогда*

$$R^{-1}\left(g\left(\alpha,t\right)\right)=R^{-1}g\left(x_1,x_2\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\mathcal{F}g\left(\alpha,\gamma\right)e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha+x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha \tag{2.24}$$

и

$$R^{-1}g\left(x_1,x_2\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}g\left(\alpha,t\right)e^{2\pi i\gamma t}dt\right]e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha+x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha. \tag{2.25}$$

Доказательство (в предположении, что все выкладки законны). Пусть функция $f(x_1,x_2)$ принадлежит классу $H^r\left(R^2\right)$ с $suppf\subset\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$.

Имеет место соответственно прямое и обратное преобразования Фурье:

$$\hat{f}(\xi)\equiv\hat{f}(\xi_1,\xi_2):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)e^{-2\pi i\langle\xi,x\rangle}dx_1dx_2$$

$$f(x)\equiv f(x_1,x_2):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi_1,\xi_2)e^{2\pi i\langle\xi,x\rangle}d\xi_1d\xi_2.$$

В полярных координатах

$$\begin{cases}\xi_1=\gamma\cos2\pi\alpha,\\ \xi_2=\gamma\sin2\pi\alpha,\end{cases}\quad:0\le\gamma<+\infty,\ -\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{1}{2}$$

описывается все R^2, на основании чего последнее равенство переписывается в виде

$$f(x_1,x_2)=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}\hat{f}\left(\gamma\cos2\pi\alpha,\gamma\sin2\pi\alpha\right)e^{2\pi i(x_1\gamma\cos2\pi\alpha+x_2\gamma\sin2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha. \tag{2.26}$$

Это равенство наводит на мысль представления $\hat{f}\left(\gamma\cos2\pi\alpha,\gamma\sin2\pi\alpha\right)$ через преобразование Радона $Rf(\alpha,\tau)\equiv Rf(\theta_\alpha,\tau)$, где роль единичного вектора $\theta_\alpha=(\cos2\pi\alpha,\sin2\pi\alpha)\left(-\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{1}{2}\right)$ и числового параметра $\tau\,(-\infty<\tau<\infty)$ состоит в том, что $\tau\theta_\alpha$ есть вектор, перпендикуляр $(\tau\theta_\alpha)^\perp$ к чему и составляет ту прямую

$$\tau\theta_\alpha+y\theta_\alpha^\perp=\left(\tau cos2\pi\alpha-ysin2\pi\alpha,\tau sin2\pi\alpha+ycos2\pi\alpha\right), \tag{2.27}$$

интеграл от f вдоль которой есть проекция Радона на (2.27).

Тогда, согласно Теореме 1.1 из [7, стр. 19], имеет место требующееся равенство при фиксированном $-\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{1}{2}$, и всех $-\infty<\sigma<\infty$

$$\hat{f}\left(\sigma cos2\pi\alpha,\sigma\sin2\pi\alpha\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Rf\left(\alpha,\tau\right)e^{2\pi i\sigma\tau}d\tau=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(\tau\cos2\pi\alpha-y\sin2\pi\alpha,\tau\cos2\pi\alpha+y\ sin2\pi\alpha\right)dy)\ e^{2\pi i\tau\sigma}d\tau,$$

в котором переменное α, отвечающее за единичный вектор $\theta_\alpha=(cos2\pi\alpha,sin2\pi\alpha)$ фиксировано, а преобразование Фурье проводится по числовой (одномерной) переменной τ с ролью (2.27)

Тем самым, (2.26) в выписанных обозначениях и равенствах, с заменой σ на γ, принимает вид

$$f(x_1,x_2)=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau\cos2\pi\alpha-y\sin2\pi\alpha,\tau\cos2\pi\alpha+y\sin2\pi\alpha)dy\right)e^{2\pi i\gamma\tau}d\tau\right]\times$$

$$\times e^{2\pi i(x_1\gamma\cos2\pi\alpha+x_2\gamma\sin2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}Rf\left(\alpha,\tau\right)e^{2\pi i\gamma\tau}d\tau\right]e^{2\pi i\langle(x_1\gamma\cos2\pi\alpha+x_2\gamma\sin2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha. \tag{2.28}$$

В целях сокращения записей и большей информативности утверждений $\hat{f}\left(\gamma\cos2\pi\alpha,\gamma\sin2\pi\alpha\right)$ выразим через одномерное по переменной

τ обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}$ (см. (1.11)) преобразования Радона $Rf(\alpha,\tau)$ $\left(-\frac{1}{2}\le\alpha<\frac{1}{2},\ -\infty<\tau<+\infty\right)$ в записи (1.8)

$$\mathcal{F}g(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\,e^{2\pi i\sigma\tau}d\tau,$$

$$\mathcal{F}(Rf(\alpha,\tau))\equiv\mathcal{F}Rf(\alpha,\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Rf(\alpha,\tau)\,e^{2\pi i\sigma\tau}d\tau,$$

что приводит к равенству

$$\hat f(\gamma\cos 2\pi\alpha,\gamma\sin 2\pi\alpha)=\mathcal{F}Rf(\alpha,\gamma).$$

В этих условиях равенство (2.28) приобретает вид

$$f(x_1,x_2)=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{0}^{+\infty}\mathcal{F}Rf(\alpha,\gamma)\,e^{-2\pi i((\gamma\cos 2\pi\alpha,\gamma\sin 2\pi\alpha),(x_1,x_2))}\gamma d\gamma d\alpha.$$

Осталось установить сходимость интегралов из (2.24) – (2.25). В силу финитности функции $g(\alpha,t)$ по формуле интегрирования по частям для всех целых $r\ge 1$ имеем

$$\mathcal{F}g(\alpha,\gamma)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\alpha,\tau)\,e^{2\pi i\gamma\tau}d\tau=\frac{(-1)^r}{(2\pi i\gamma)^r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g_\tau^{(r)}(\alpha,\tau)\,e^{2\pi i\gamma\tau}d\tau. \tag{2.29}$$

Отсюда

$$|\mathcal{F}g(\alpha,\gamma)|\ll\frac{1}{|\gamma|^r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|g_\tau^{(r)}(\alpha,\tau)\right|d\tau, \tag{2.30}$$

так что при $r\ge 3$

$$\left|\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{1}^{\infty}\mathcal{F}\ g(\alpha,\gamma)\,e^{2\pi i(x_1\gamma\cos 2\pi\alpha+x_2\gamma\sin 2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha\right|\overset{(2.24)}{<<}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{1}^{\infty}|\mathcal{F}g(\alpha,\gamma)|\gamma d\gamma d\alpha\ll\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{r-1}}d\gamma<+\infty. \tag{2.31}$$

В итоге,заменяя в $f=R^{-1}Rf$ преобразование Радона $Rf(\alpha,t)$ на $g(\alpha,t)$, в силу (2.28) и (1.11), получим искомые (2.24) и (2.25) соответственно.

Лемма 10 доказана.

В практическом применении формул (2.24)-(2.25) обратного преобразования Радона необходимо следовать схеме ее доказательства, что в соответствии с потребностями Теоремы 1, пошагово продемонстрируем на примере ядра Дирихле D_N (что, в силу линейности Rf и $R^{-1}g$ равносильно нахождению $R^{-1}h_{m_1,m_2}$ (см. (2.6) и (2.7))).

1-шаг. Установим бесконечную гладкость (Лемма 3) 1- периодической по каждой из переменных функций $RD_N(\alpha,\tau)$ и $R^{-1}D_N(x_1,x_2)$:

для всех $r>0$, в силу Лемм 4 и 15 (доказательство - ниже),

$$N^{\frac{r+1}{2}}\asymp\|D_N(x_1,x_2)\|_{W_2^r(E_2)}\asymp\|RD_N(\alpha,\tau)\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}(E_2)} \tag{2.32}$$

и

$$N^{\frac{r+1}{2}}\asymp\|D_N(\alpha,\tau)\|_{W_2^r(E_2)}\asymp\left\|RR^{-1}D_N(\alpha,\tau)\right\|_{W_2^r(E_2)}\asymp\left\|R^{-1}D_N(x_1,x_2)\right\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}(E_2)}.$$

2-шаг. Корректность представления (2.24) – (2.25) для

$$g(\alpha,\tau)=RD_N(\alpha,\tau). \tag{2.33}$$

В силу (2.32) и определения $W_2^r(E_2)$ – нормы при всяком $r > \frac{1}{2}$

$$suppg\,(\alpha,\tau) = E_2, g_t^{(r)}\,(\alpha,\tau) \in L^2(E_2).$$

Опять же, повторяя (2.29)-(2.31), получаем сходимость интегралов из (2.24)-(2.25) в случае (2.33).

Таким образом, задача свелась к вычислению конкретных интегралов от элементарных функций.

Конечно, по вычислительному алгоритму (0.3) в Основной теореме возникает вопрос о преобразовании Радона ядра Дирихле $D_N\,(x_1 - \aleph_1, x_2 - \aleph_2)$ со сдвигом на $(\aleph_1, \aleph_2)$ аргумента (x_1, x_2).

При $-\frac{1}{2} \le \alpha, t \le \frac{1}{2}$ ответ следующий (см. также (1.6))

$$D_N\,(x_1 - \aleph_1, x_2 - \aleph_2) = \frac{1}{4}\left(\sum_{|m_1|,|m_2|\le n} e^{2\pi i m_1 (x_1-\aleph_1)}\cdot e^{2\pi i m_2 (x_2 - \aleph_2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{|m_1|,|m_2|\le n} e^{2\pi i (m_1\aleph_1 + m_2\aleph_2)} \times e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}\right),$$

откуда (см. (2.4)-(2.5))

$$R\left(D_N\,(x_1 - \aleph_1, x_2 - \aleph_2)\,(\alpha, t)\right) = \frac{1}{4}\sum_{|m_1|,|m_2|\le n} e^{2\pi i (m_1\aleph_1 + m_2\aleph_2)} \times$$

$$\times \int\limits_{b_1(\alpha,t)}^{b_2(\alpha,t)} e^{-2\pi i\left[m_1\left(\sqrt{2t}\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha\right) + m_2\left(\sqrt{2t}\sin 2\pi\alpha + y\cos 2\pi\alpha\right)\right]} dy.$$

Таким образом, оптимальный вычислительный агрегат Радона для восстановления функции $f(x_1, x_2)$ из класса $W_2^r\,(0,1)^2$ есть

$$\Lambda_N\,(x_1, x_2; f) = \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} \int\limits_{b_1\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)}^{b_2\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)} f_\Omega\left(\frac{\sqrt{2}k_2}{n}\cos\frac{2\pi k_1}{n} - y\sin\frac{2\pi k_1}{n}, \frac{\sqrt{2}k_2}{n}\sin\frac{2\pi k_1}{n} + y\cos\frac{2\pi k_1}{n}\right) dy \times$$

$$\times \int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\int\limits_{T_{\alpha,t}\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2}\left(\frac{\sin\pi\,(2n+1)\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\cos 2\pi\alpha - y\sin 2\pi\alpha\right)}\right)\times\right.\right.$$

$$\times e^{2\pi i\left(\left(x_1 - \frac{k_1}{n}\right)\gamma\cos 2\pi\alpha + \left(x_2 - \frac{k_2}{n}\right)\gamma\sin 2\pi\alpha\right)}\gamma d\gamma d\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Теперь перейдем к оценке снизу.

Теорема 2 (К(В)П-1, оценка снизу). *Пусть дано число* $r > \frac{1}{2}$. *Тогда для* $N = n^2$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *справедливы неравенства*

$$N^{-\frac{r}{2}} << \inf_{\substack{l_1,\ldots,l_N - \text{ все возм.} \\ \text{линейн. функцион. над} W_2^r\,(0,1)^2,\ \varphi_N}} \sup_{f\in W_2^r(0,1)^2} \left\|f\,(x_1,x_2) - \varphi_N\,(l_1(f),\ldots,l_N(f);(x_1,x_2))\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \inf_{\{(\alpha_k,t_k)\}_{k=1}^N\subset[0,1]^2,\ \varphi_N}\ \sup_{f\in W_2^r(0,1)^2}\left\|f\,(x_1,x_2) - \varphi_N\left(Rf\,(\alpha_1,t_1),\ldots,Rf\,(\alpha_N,t_N);(x_1,x_2)\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in W_2^r(0,1)^2}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_1}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}<<N^{-\frac{r}{2}}.$$

Следствие 2. *Пусть даны число* $r>\frac{1}{2}$ *и открытое множество* $\Omega\subset E_2\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$. *Тогда для класса* $H_0^r(\Omega)\sim W_2^r(E_2)$ *и всякого* $N=n^2$ $(n=2,3,...)$ *справедливы утверждения*

$$N^{-\frac{r}{2}}<<\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\textit{все возможные}\\ \textit{линейные функцион. над}H_0^r(\Omega),\ \varphi_N}}\ \sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);x\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp$$

$$\asymp\inf_{(\alpha^{(\tau)},t^{(\tau)})\in E_2(\tau=1,...,N),\ \varphi_N}\ \sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(Rf_\Omega(\alpha^{(1)},t^{(1)}),...,Rf_\Omega(\alpha^{(N)},t^{(N)});x\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp$$

$$\sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Доказательство. В этой цепочке неравенств достаточно установить первое из них (последнее – это Теорема 1)

$$N^{-\frac{r}{2}}<<\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\textit{все возможные}\\ \textit{линейные функционалы};\varphi_N}}\ \sup_{f\in W_2^r(0,1)^2}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);(x_1,x_2)\right)\right\|_{L^2(0,1)^2},\tag{2.34}$$

которое непосредственно выводится из

Лемма 11 (Ф. Наттерер [10], Теорема 4.1). *Пусть даны открытое ограниченное множество* $\Omega\subset R^2$, *числа* $r>0$ *и* N $(N=2,3,...)$, *линейные функционалы* $l_1,...,l_N$ *над* $H_0^r(\Omega)$. *Тогда найдется функция* g *из* $H_0^r(\Omega)$,*что справедливы следующие утверждения:*

$$l_j(g)=0\ (j=1,...,N),\quad \|g\|_{H_0^r(\Omega)}\le 1,\quad \|g\|_{L^2(\Omega)}>>N^{-\frac{r}{2}}.$$

В связи с чем отметим, что имеет место

Теорема А (Н. Темиргалиев, А.Ж. Жубанышева [43]). *Пусть даны целые положительные числа* s *и* $N=n^s\,(n=5,6,...)$, *функция* $\omega(t)$ *из* $C^\infty\left(-\infty,+\infty\right)$ *такая, что*

$$\mathrm{supp}\omega=[0,1]\,,0\le\omega\left(t\right)\le 1=\max_{0\le t\le 1}\omega\left(t\right).$$

Положим $A_N=\{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\ 0\le k_j\le 4n-1\ (j=1,...,s)\}$ *и определим на* $[0,1]^s$ *ортогональную систему*

$$\psi_k\left(x\right)=\psi_{k_1,...,k_s}\left(x_1,...,x_s\right)=\prod_{j=1}^{s}\omega\left(4n\left(x_j-\frac{k_j}{4n}\right)\right)\ \left(k\in A_N\right).$$

Тогда для всякого набора линейных функционалов $l_1,...,l_N$, *определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по системе* $\{\psi_k(x)\}_{k\in A_N}$, *существует конечная числовая последовательность* $\{b_k\}_{k\in A_N}$ *такая, что для функции* $B_N\left(x\right)\equiv B_N\left(x;l_1,...,l_N\right)=\sum\limits_{k\in A_N}b_k\psi_k\left(x\right)$ *выполнены соотношения*

$$l_1\left(B_N\right)=...=l_N\left(B_N\right)=0$$

и для всякого набора целых неотрицательных чисел $\lambda_1,...,\lambda_s$ *и всякого* p, $1\le p\le\infty$

$$\left\|B_N^{(\lambda_1...,\lambda_s)}\right\|_{L^p(0,1)^s}\asymp\begin{cases}N^{\frac{\lambda_1+...+\lambda_s}{s}-\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{k\in A_N}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \textit{при } 1\le p<\infty,\\ N^{\frac{\lambda_1+...+\lambda_s}{s}+1}\ \textit{при } p=\infty. & \end{cases}$$

При $s=2$, $p=q=2$, $\beta_1=\beta_2=0$ Теорема А сводится к лемме 11.

Поскольку лемма 11 есть комбинированное следствие [11-12], то, следуя поставленной цели, приведем полное доказательство леммы 11 в двумерном случае прямым методом Теоремы А.

Однако, сначала сформулируем следующее утверждение.

Лемма 12. *Пусть дано открытое множество* $\Omega \subset [0,1]^2$ *и пусть, в свою очередь, квадрат* $E_2^{\delta} = [\eta_1 - \delta, \eta_1 + \delta] \times [\eta_2 - \delta, \eta_2 + \delta]$ *содержится в* Ω.

Тогда для всяких целых положительных r *и* N, *для всякой системы линейных функционалов* $l_1, ..., l_N$, *заданных на* Ω, *найдется функция* $g \in H_0^r(\Omega)$ *такая, что*

$$l_1(g) = 0, ..., l_N(g) = 0, \|g\|_{H_0^r(\Omega)} \equiv \|g_\Omega\|_{W_2^r\left((0,1)^2\right)} \leq 1, \|g_\Omega\|_{L^2\left((0,1)^2\right)} \geq N^{\frac{r}{2}},$$

где

$$g_\Omega(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in \Omega \\ 0, & \text{если } x \in [0,1]^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Не уменьшая общности, доказательство этой леммы достаточно провести для $\Omega = (0,1)^2$, как выше было сказано, методом из Теоремы А, чему посвящена

Лемма 13 **(Н. Темиргалиев, А.Ж. Жубанышева [43]).** *Пусть дано целое положительное число* $N = n^2$ $(n = 5, 6, ...)$ *и функция* $\omega(t)$ *из* $C^\infty(-\infty, +\infty)$ *такая, что*

$$supp\omega = [0,1], 0 \leq \omega(t) \leq 1 = \max_{0 \leq t \leq 1} \omega(t). \tag{2.35}$$

Положим $A_N = \left\{k = (k_1, k_2) \in Z^2 : \ 0 \leq k_j \leq 4n - 1 \ (j = 1, 2)\right\}$ *и определим на* $[0,1]^2$ *ортогональную систему*

$$\psi_k(x) = \psi_{k_1,k_2}(x_1, x_2) = \omega\left(4n\left(x_1 - \frac{k_1}{4n}\right)\right)\omega\left(4n\left(x_1 - \frac{k_1}{4n}\right)\right) \ (k \in A_N). \tag{2.36}$$

Тогда для всякого набора линейных функционалов $l_1, ..., l_N$, *определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по системе* $\{\psi_k(x)\}_{k \in A_N}$, *существует конечная числовая последовательность* $\{b_k\}_{k \in A_N}$ *такая, что для функции* $B_N(x) \equiv B_N(x; l_1, ..., l_N) = \sum\limits_{k \in A_N} b_k \psi_k(x)$ *выполнены соотношения*

$$l_1(B_N) = ... = l_N(B_N) = 0 \tag{2.37}$$

и для всякого набора целых неотрицательных чисел λ_1, λ_2

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp N^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}+\frac{1}{2}}. \tag{2.38}$$

Доказательство. Из определений (2.35)-(2.36) следуют теоретико-множественные равенства

$$T_k \equiv T_{k_1,k_2} := \left[\frac{k_1}{4n}, \frac{k_1+1}{4n}\right] \times \left[\frac{k_2}{4n}, \frac{k_2+1}{4n}\right] = \mathrm{supp}\psi_k \ \ (k \in A_N) \tag{2.39}$$

и что для всякого целочисленного вектора (λ_1, λ_2) с неотрицательными компонентами, для всякого $k \in A_N$ выполнено

$$\left\|\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|_{L^2(0,1)^2} = \left(\int\limits_{[0,1]^2} \left|\left(\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{T_k} \left|\left(\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{2}\left(\int\limits_{\frac{k_j}{4n}}^{\frac{k_j+1}{4n}} (4n)^{2\lambda_j}\left|\omega^{(\lambda_j)}\left(4n\left(x_j - \frac{k_j}{4n}\right)\right)\right|^2 dx_j\right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^{2}(4n)^{\lambda_j - \frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^1 \left|\omega^{(\lambda_j)}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \asymp \tag{2.40}$$

$$\asymp n^{\lambda_1+...+\lambda_s-1} \asymp N^{\frac{\lambda_1+...+\lambda_s}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Пусть теперь дан набор линейных функционалов $l_1, ..., l_N$, определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по ортогональной системе $\{\psi_k(x)\}_{k\in A_N}$. Тогда, пользуясь леммой B из [48], получаем, что существует конечная действительнозначная последовательность $\{b_k\}_{k\in A_N}$ такая, что для функции $B_N(x)=\sum\limits_{k\in A_N} b_k\psi_k(x)$ имеют место соотношения

$$l_1\left(B_N\right)=...=l_N\left(B_N\right)=0, \tag{2.41}$$

$$N=\sum_{k\in A_N} b_k^2\left\|\psi_k\right\|^2_{L^2(0,1)^2}\asymp\sum_{k\in A_N} b_k^2\frac{1}{N}. \tag{2.42}$$

Из определения функции $B_N\left(x\right)=\sum\limits_{k\in A_N} b_k\psi_k\left(x\right)$ и (2.42) непосредственно следует, что для всякого целочисленного вектора (λ_1,λ_2) с неотрицательными компонентами (см. также (2.40))

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|^2_{L^2(0,1)^2}=\sum_{k\in A_N}\int\limits_{T_k}\left|b_k\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right|^2dx\asymp\sum_{k\in A_N}|b_k|^2\int\limits_{T_k}\left|\psi_k^{(\lambda_1,\lambda_2)}(x)\right|^2dx\asymp N^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}2-1}\sum_{k\in A_N}|b_k|^2,$$

т.е.

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|_{L^2(0,1)^2}\asymp N^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}+\frac{1}{2}}. \tag{2.43}$$

Утверждение (2.37) и (2.38) соответственно следуют из (2.41) и (2.43).

Лемма 13 полностью доказана.

Теперь перейдем к доказательству Теоремы 2. Пусть заданы целое положительное число N $\left(N=n^2,\ n=1,2,...\right)$, набор функционалов $l_1(f),...,l_N(f)$ и функция $\varphi_N\left(z_1,...,z_N;x\right)$ - алгоритм переработки числовой информации объема N .

Пусть $B_N\left(x\right)$ функция из леммы 13. Определим на $[0,1]^2$ функцию

$$g_N(x)\equiv g_N(x;r,p,l_1,...,l_N)=N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)}B_N\left(x\right).$$

Для всякого j $(j=1,2)$ в силу (2.35)имеем

$$\left\|\frac{\partial^r g_N\left(x\right)}{\partial x_j^r}\right\|_{L^p\left([0,1]^2\right)}\asymp\frac{1}{N^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}}\left\|\frac{\partial^r B_N\left(x\right)}{\partial x_j^r}\right\|_{L^p\left([0,1]^2\right)}\asymp\frac{1}{N^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}}N^{\frac{r}{2}+\frac{1}{2}}\asymp 1,$$

так что функция $g_N\left(x\right)$ принадлежит классу $W_2^r\left(0,1\right)^2$.

Далее, для функции $g_N\left(x\right)$ выполнены соотношения (см.(2.35))

$$\left\|g_N\right\|_{L^p\left([0,1]^2\right)}\asymp N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)}\left\|B_N\right\|_{L^p\left([0,1]^2\right)}\asymp N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{2}\right)}N^{\frac{1}{2}}=N^{-\frac{r}{2}}. \tag{2.44}$$

Согласно (2.41) и определений функции g_N и φ_N , имеем

$$\varphi_N\left(l_N\left(g_N\right),...,l_N\left(g_N\right);x\right)=0.$$

Поэтому, в силу произвольности $l_N,...,l_N$ и φ_N , и в силу (2.44) получим искомую оценку снизу

$$\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\text{ все возможные}\\ \text{линейные функционалы};\varphi_N}}\ \sup_{f\in W_2^r((0,1)^2)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);x\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}\geq$$

$$\geq\left\|g_N\left(x\right)-\varphi_N\left(l_1\left(g_N\right),...,l_N\left(g_N\right);x\right)\right\|_{L^2((0,1)^2)}=\left\|g_N\right\|_{L^2(0,1)^2}>>N^{-\frac{r}{2}}.$$

Оценка снизу в (2.34), вместе с ней и Теорема 2 доказаны.

Теперь перейдем к задаче К(В)П-2 в двух ее вариантах *«равно $\tilde{\varepsilon}_N$ »* и *«не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ »*. Начнем с первой:

Теорема 3 (К(В)П-2, версия "равно $\tilde{\varepsilon}_N$ "). *Пусть дано число $r>\frac{1}{2}$. Тогда для $N=n^2$ $(n=2,3,...)$ и для вычислительного оператора*

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)$$

величина $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ *является предельной погрешностью: во-первых*

$$\sup_{f\in W_2^r(0,1)^2}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\tilde{\varepsilon}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\frac{1}{N}\sum\limits_{k_1=1}^{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n}Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(0,1)^2}}{\delta_N\left(0;\mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^2)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2}\right)_{L^2(0,1)^2}}=+\infty. \quad (2.45)$$

Следствие 3. (К(В)П-2, версия «равно $\tilde{\varepsilon}_N$»). *Пусть дано открытое множество* $\Omega\subset\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$. *Для вычислительного оператора*

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right),$$

и для величины $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ *выполняются соотношения:*
Во-первых,

$$\sup_{f\,\in\, H_0^r(\Omega)}\left\|f\left(x_1,x_2\right)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\tilde{\varepsilon}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)};\frac{1}{N}\sum\limits_{k_1=1}^{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n}Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N\left(0;\mathrm{L}_N(H_0^r(\Omega))\times\{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)}\right)_{L^2(\Omega)}}=+\infty.$$

Доказательству Теоремы 3 предпошлем следующее утверждение.
Лемма 14. *Для* $\beta\geq 0$ и $N=n^2\,(n=2,3,...)$ *справедливы соотношения*

$$\left\|\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}\right)D_N\left(x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2} \asymp N^{\frac{\beta}{2}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}D_N\left(x-\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos 2\pi m\left(x-\frac{k}{n}\right)\right)=\\
=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}+\frac{1}{n}2\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leq|m|\leq n}e^{2\pi m\left(x-\frac{k}{n}\right)}=\frac{1}{2}+2\sum_{1\leq|m|\leq n}e^{2\pi mx}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{-2\pi i\frac{m}{n}k}\right)=\\
=\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{-2\pi i\frac{m}{n}k}=\chi_{Z\cdot n}(m)=\begin{cases}1, & \text{если } \frac{m}{n}\in Z\\ 0, & \text{если } \frac{m}{n}\notin Z\end{cases}\right\|=\\
=\frac{1}{2}+2\left(e^{2\pi inx}+e^{-2\pi inx}\right)=\frac{1}{2}+\cos 2\pi nx.\end{gathered}$$

Отсюда для $g(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k_1=1}^{n}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n}D_N\left(x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)$
имеем

$$\|g(x_1,x_2)\|^2_{W_2^\beta(0,1)^2}=\left\|\left(\frac{1}{2}+2\left(e^{2\pi inx_1}+e^{-2\pi inx_1}\right)\right)\left(\frac{1}{2}+2\left(e^{2\pi inx_2}+e^{-2\pi inx_2}\right)\right)\right\|^2_{W_2^\beta(0,1)^2},$$

где при всех (m_1,m_2), отличных от $(0,0)$, $(0,\pm n)$, $(\pm n,0)$, $(\pm n,\pm n)$, выполнены равенства

$$\hat{g}(m_1,m_2)=0,$$

откуда

$$\left\|\left(\frac{1}{n}\sum_{k_1=1}^{n}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k_2=1}^{n}D_N\left(x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)\right\|_{W_2^\beta(0,1)^2}=$$

$$=\sqrt{\sum_{|m_1|\cdot|m_2|\le n}\left(\bar{m}_1^2+\bar{m}_2^2\right)^\beta|\hat{g}(m_1,m_2)|^2}\asymp\sqrt{n^{2\beta}}=n^\beta=N^{\frac{\beta}{2}}.$$

Доказательство Теоремы 3. Применяя линейность преобразования Радона и оценку сверху погрешности восстановления по точной информаций, получим

$$\left\|f(x_1,x_2)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\bar{\varepsilon}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}\le$$

$$\le\left\|f(x_1,x_2)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}+$$

$$+\left\|\bar{\varepsilon}_N\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}<< \tag{2.46}$$

$$<<N^{-\frac{r}{2}}+\bar{\varepsilon}_N\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}.$$

Оценим второе слагаемое $\left\|\sum\limits_{k_1=1}^{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}$. Применяя лемму 4 для функции $g(x_1,x_2)=\sum\limits_{k_1=1}^{n}\sum\limits_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)$ по норме $L^2(0,1)^2=W_2^0(0,1)^2$, получим

$$\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}=\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^0(0,1)^2}\asymp$$

$$\asymp\left\|R\left(\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2}=\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2}. \tag{2.47}$$

Применяя лемму 14 при $\beta=\frac{1}{2}$ получим

$$\tilde{\varepsilon}_N\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}\asymp$$

$$\asymp \tilde{\varepsilon}_N \left\| \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \frac{1}{N} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} \asymp \tilde{\varepsilon}_N N^{\frac{1}{4}}. \qquad (2.48)$$

Приравнивая $N^{-\frac{r}{2}}$ и $\tilde{\varepsilon}_N N^{\frac{1}{4}}$, в силу (2.46) и (2.48) получим $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ (см. также Теорему A)

$$N^{-\frac{r}{2}} << \delta_N(0; L_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^2) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2})_{L^2(0,1)^2} <<$$

$$<< \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; L_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^2) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2})_{L^2(0,1)^2} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N \,\text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы};\, \varphi_N}} \sup \left\{ \| g(x) - \varphi_N(l_1(g) + \tilde{\varepsilon}_N, \dots, l_N(g) + \tilde{\varepsilon}_N; \cdot) \|_{L^2(0,1)^2} : g \in W_2^r(0,1)^2 \right\} <<$$

$$<< \sup_{f \in W_2^r(0,1)^2} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \left(Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) + \tilde{\varepsilon}_N \right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}},$$

что завершает первую часть теоремы 3.

Теперь докажем вторую часть, что для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место равенство (2.45)

Полагая $g_N(x) = 0$, в силу (2.46) имеем

$$\delta_N \left(\eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right)_{L^2(0,1)^2} =$$

$$= \sup_{f \in W_2^r(0,1)^2} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \left(Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) + \tilde{\varepsilon}_N \eta_N \right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{L^2(0,1)^2} \geq$$

$$\geq \left\| g_N(x_1,x_2) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \left(Rg_N\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) + \tilde{\varepsilon}_N \eta_N \right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{L^2(0,1)^2} =$$

$$= \left\| \frac{\tilde{\varepsilon}_N \eta_N}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \tilde{\varepsilon}_N \eta_N \left\| \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} >> \tilde{\varepsilon}_N \eta_N N^{-\frac{1}{4}}.$$

В итоге,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N \left(\eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{N} \sum\limits_{k_1=1}^{n} \sum\limits_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right)_{L^2(0,1)^2}}{\delta_N \left(0; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^2) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2} \right)_{L^2(0,1)^2}} \geq$$

$$\geq \lim_{N\to\infty} \frac{\eta_N \tilde{\varepsilon}_N N^{\frac{1}{4}}}{N^{-\frac{r}{2}}} = \lim_{N\to\infty} \eta_N = +\infty.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4 (К(В)П-2, версия «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$»). *Пусть дано число $r > 0$. Тогда для $N = n^2$ $(n = 2, 3, \dots)$ и для вычислительного оператора*

$$\frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right),$$

где

$$D_N(x_1,x_2) = D_n(x_1) \cdot D_n(x_2), D_n(x_i) = \frac{1}{2} + \sum_{k_i=1}^{n} cos 2\pi k x_i (i = 1, 2)$$

и для величины $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ *выполняются соотношения*

$$\sup_{\substack{f \in W_2^r(0,1)^2 \\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right| \le 1}} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) + \gamma_N^{(k_1,k_2)}\bar{\varepsilon}_N\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Следствие 4 *(К(В)П-2, версия «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$»)*. Пусть даны открытое множество $\Omega \subset E_2 \equiv \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$, число $r>0$. Тогда для класса $H_0^r(\Omega) \sim W_2^r(E_2)$, всякого $N=n^2$ $(n=2,3,...)$, для вычислительного оператора

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right),$$

и для величины $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ *выполняются соотношения:*

$$\sup_{\substack{f \in H_0^r(\Omega) \\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right| \le 1}} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) + \gamma_N^{(k_1,k_2)}\bar{\varepsilon}_N\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}.$$

Доказательство Теоремы 4. Применяя линейность преобразования Радона и оценку сверху погрешности восстановления по точной информации (теорема 1), получим

$$\left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) + \bar{\varepsilon}_N\gamma_N^{(k_1k_2)}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \le$$

$$\le \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} + \tag{2.49}$$

$$+\left\| \bar{\varepsilon}_N\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} \le$$

$$\le N^{-\frac{r}{2}} + \bar{\varepsilon}_N\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}.$$

Оценим второе слагаемое

$$\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2}$$

.

Применяя лемму 4 для функции

$$g(x_1,x_2) = \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)$$

в норме $L^2(0,1)^2 = W_2^0(0,1)^2$ получим

$$\left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1,k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} =$$

$$= \left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1,k_2)}\frac{1}{N}R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^0(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \left\|\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\gamma_N^{(k_1,k_2)}\frac{1}{N}R\left(R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)\right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} =$$

$$= \left\| \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \gamma_N^{(k_1,k_2)} \frac{1}{N} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2}. \tag{2.50}$$

Отдельно оценим $W_2^{\beta}(0,1)^2$ – норму ядра Дирихле:

Лемма 15. *Для любого* $\beta \geq 0$

$$\left\| D_N (x_1 - \alpha, x_2 - t) \right\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2} \asymp N^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. В силу определения ядра Дирихле (см. §1)

$$D_N (x_1 - \alpha, x_2 - t) = D_N (x_1 - \alpha) \cdot D_N (x_2 - t) = \frac{1}{4} \sum_{|m_1|,|m_2| \leq n} e^{2\pi i m_1 (x_1 - \alpha)} e^{2\pi i m_2 (x_2 - t)}.$$

Тогда

$$\frac{1}{4} \left\| \sum_{|m_1|,|m_2| \leq n} e^{2\pi i m_1 (x_1 - \alpha)} e^{2\pi i m_2 (x_2 - t)} \right\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2} = \left\| \frac{1}{4} \sum_{\substack{|m_1| \leq n, \\ |m_2| \leq n}} e^{-2\pi i m_1 \alpha} e^{-2\pi i m_2 t} e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)} \right\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2},$$

откуда

$$\left\| D_N (x_1 - \alpha, x_2 - t) \right\|^2_{W_2^{\beta}(0,1)^2} \asymp \sum_{k_1,k_2=1}^{n} (m_1^2 + m_2^2)^{\beta} \left| \hat{D}_N (m_1, m_2) \right|^2 =$$

$$= \sum_{k_1,k_2=1}^{n} (m_1^2 + m_2^2)^{\beta} \asymp \sum_{\frac{n}{2} \leq k_1, k_2 \leq n} (m_1^2 + m_2^2)^{\beta} \asymp \left(n^2\right)^{\beta} n^2 \asymp n^{2\beta+2},$$

в итоге

$$\left\| D_N (x_1 - \alpha) \cdot D_N (x_2 - t) \right\|_{W_2^{\beta}(0,1)^2} \asymp n^{\beta+1} = N^{\frac{\beta+1}{2}}.$$

Лемма 15 доказана.

Применяя (2.50) и лемму 15 при $\beta = \frac{1}{2}$ получим

$$\bar{\varepsilon}_N \left\| \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \gamma_N^{(k_1,k_2)} \frac{1}{N} R^{-1} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{L^2(0,1)^2} \asymp$$

$$\asymp \bar{\varepsilon}_N \left\| \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \gamma_N^{(k_1,k_2)} \frac{1}{N} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} << \tag{2.51}$$

$$<< \bar{\varepsilon}_N \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \left\| \frac{1}{N} D_N \left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n} \right) \right\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0,1)^2} << \frac{\bar{\varepsilon}_N}{N} N^{\frac{3}{4}} N = \bar{\varepsilon}_N N^{\frac{3}{4}}.$$

В силу (2.49) и (2.51) приравнивая $N^{-\frac{r}{2}}$ и $\bar{\varepsilon}_N N^{\frac{3}{4}}$ получим $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$. Далее, при $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ имеем

$$N^{-\frac{r}{2}} << \delta_N(0; L_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^2) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2})_{L^2(0,1)^2} <<$$

$$<< \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}; L_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^2) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^2})_{L^2(0,1)^2} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\substack{l_1, \dots, l_N - \text{все возм.} \\ \text{лин. функ.}; \varphi_N}} \sup \{ \| g(x) -$$

$$- \varphi_N \left(l_1(f) + \gamma_N^{(1)} \bar{\varepsilon}_N, \dots, l_N(f) + \gamma_N^{(N)} \bar{\varepsilon}_N; \cdot \right) \Big\|_{L^2(0,1)^2} : g \in W_2^r(0,1)^2, \left| \gamma_N^{(\tau)} \right| \leq 1 \, (\tau = 1, \dots, N) \Big\} <<$$

$$<< \sup_{\substack{f \in W_2^r(0,1)^2 \\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right| \le 1 \\ (1 \le k_1, k_2 \le n)}} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) + \bar{\varepsilon}_N \gamma_N^{(k_1,k_2)}\right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(0,1)^2} << N^{-\frac{r}{2}}.$$

Теорема 4 доказана.

§3. Общие замечания по дальнейшему К(В)П- развитию теории преобразования Радона

1. К(В)П – это другое. Лемма 11 Франка Наттерера, использованная в доказательстве Основной теоремы, в самой статье [10] была применена к другой задаче, близкой к теории кодирования – насколько друг от друга в гильбертовой метрике могут быть удалены две функции, преобразования Радона которых с заданной точностью приближают данную функцию[10, Теорема 4.2]:

A lower bound for the reconstruction error. Let y be the density of a picture in the bounded domain Ω. Suppose that all we know of y are approximate values g_k for $R_k y$ with

$$(4.1) \qquad \|Ry - g\|_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(R_k y - g_k)^2 \leqq \varepsilon^2.$$

What can we say about y?

Thus we are interested in the quantity

$$r(\alpha, n, \varepsilon) = \sup\{\|y_1 - y_2\|_{L_2(\Omega)} : \|Ry_i - g\|_n \leqq \varepsilon, \|y_i\|_{H_0^\alpha(\Omega)} \leqq 1, i = 1, 2, \text{for some } g\}$$
$$= 2\sup\{\|z\|_{L_2(\Omega)} : \|Rz\|_n \leqq \varepsilon, \|z\|_{H_0^\alpha(\Omega)} \leqq 1\}.$$

Obviously $r(\alpha, n, \varepsilon)$ is a lower bound for the worst case error of any reconstruction technique using only the erroneous data g_k and $\|y\|_{H_0^\alpha(\Omega)} \leqq 1$.

Now we can find a lower bound for $r(\alpha, n, \varepsilon)$. To fix ideas we assume the L_k to be the straight lines

$$(4.2) \qquad L_k : s_i\omega_j + t\omega_j^{\perp}, \qquad t \in \mathbb{R}^1,$$

where the $s_i \in \mathbb{R}^1$, $i = -q, \cdots, q$ are arbitrary and $\omega_j = (\cos\varphi_j, \sin\varphi_j)$, $\varphi_j = \theta j/p$, $j = 0, \cdots, p-1$; i.e., p is arbitrarily discretized and possibly incomplete views have been taken from angles which are equally distributed in $[0, \theta]$, $0 < \theta \leqq \pi$. The number n of data is $n = p(2q+1)$. The validity of Theorem 4.2 below depends in no way on these assumptions, which are made for ease of exposition.

THEOREM 4.2. *Let $\alpha > \frac{1}{2}$, Ω bounded, and assume the L_k to be the straight lines* (4.2). *Then there is a constant $C(\alpha, \Omega) > 0$ such that*

$$r(\alpha, n, \varepsilon) \geqq C(\alpha, \Omega)(n^{-\alpha/2} + \varepsilon^{\alpha/(\alpha+1/2)}).$$

Вместе с тем, как оказывается, преобразование Радона естественным образом вписывается в К(В)П-схему.

Поэтому продолжим оценки погрешности восстановления функций из данного класса (не обязательно $H_0^r \equiv W_2^r$) по произвольным вычислительным агрегатам, включающих значения преобразования Радона в точках.

2. К(В)П-проблема приближенного дифференцирования и теория преобразования Радона. Преобразование Радона $Rf(\alpha, t)$ (s ($s = 2, 3, ...$) -мерное) (см.

1.7) отображает функцию f, определенную на единичном кубе $[0,1]^s$ (или, что то же самое, на кубе $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$) во множество ее интегралов по гиперплоскостям $(\rho(t)\,\theta(\alpha))^{\perp}$ в R^s, где

$$\theta(\alpha)=(\theta_1(\alpha),...,\theta_s(\alpha))\equiv\begin{cases}\theta_1(\alpha)=\theta_1(\alpha_1,...,\alpha_{s-1})=\sin 2\pi\alpha_1\sin\pi\alpha_2...\sin\pi\alpha_{s-1},\\ \theta_2(\alpha)=\theta_2(\alpha_1,...,\alpha_{s-1})=\cos 2\pi\alpha_1\sin\pi\alpha_2,\\ \theta_j(\alpha)=\theta_j(\alpha_1,...,\alpha_{s-1})=\cos\pi\alpha_{j-1}\prod\limits_{k=j}^{s-1}\sin\pi\alpha_k \quad \textit{при}\ j=3,...,s-1,\\ \theta_s(\alpha)=\theta_s(\alpha_1,...,\alpha_{s-1})=\cos\pi\alpha_{s-1},\end{cases}$$

$$\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{s-1})\in[0,1)^{s-1},$$

в которых параметр $\tau=\rho(t)$ и сферические углы $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{s-1}$ изменяются в пределах $0\le t\le 1, 0\le\alpha_j<1$ при $j=1,2,...,s-1$ и тогда

$$Rf(\alpha,t)=\int\limits_{(\rho(t)\theta(\alpha))^{\perp}} f(y)\,dy.$$

Обратное преобразование Радона $R^{-1}f$ над Rf, естественно, возвращает к f (см., напр.,[7, теорема 2.1] и Лемму 10).

Эффективность и информативность томографических методов находится в прямой зависимости от глубины и тонкости применяемой математической теории, а здесь это весь арсенал гармонического анализа с привлечением алгебраической теории чисел.

По вечной проблеме приближенного дифференцирования в рамках К(В)П-теории установлена

Теорема B (Н. Темиргалиев, А.Ж. Жубанышева [43]). *Пусть даны целое положительное число s и неотрицательные числа $r,\beta_1,...,\beta_s$ такие, что $r>\max\left\{\beta_1+...+\beta_s,\frac{s}{2}\right\}$. Тогда справедливы следующие утверждения $(N=n^s)$*

К(В)П-1: $\delta_N(0;P_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s}\equiv$

$$\equiv\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\textit{все возможные}\\ \textit{линейные функционалы};\phi_N}}\ \sup_{f\in W_2^r(0,1)^s}\left\|f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x)-\phi_N(l_1(f),...,l_N(f);\cdot)\right\|_{L^2(0,1)^s}\asymp$$

$$\asymp\sup_{f\in W_2^r(0,1)^s}\left\|f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x)-\Lambda_N^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x;f)\right\|_{L^2(0,1)^s}\asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}}.$$

К(В)П-2: *(версия «равно $\tilde{\sigma}_N$»). Для оператора приближенного дифференцирования*

$$\Lambda_N^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x;f)\equiv\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\\ k_j=0,1,...,n-1\,(j=1,...,s)}} f\left(\xi^{(k)}\right)\cdot\Omega_N\left(x-\xi^{(k)}\right),\xi^{(k)}=\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right) \tag{3.1}$$

величина $\tilde{\sigma}_N\equiv\tilde{\sigma}_N(\mathrm{P}_N)\equiv\tilde{\sigma}_N\left(\mathrm{P}_N(W_2^r)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)^s}\right)=N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}}$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N(0;P_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^s)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s}\asymp$$

$$\asymp\delta_N(\tilde{\sigma}_N(\mathrm{P}_N)=N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}};P_{\mathrm{N}}(W_2^r(0,1)^s)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s}\equiv$$

$$\equiv\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\textit{все возможные}\\ \textit{линейные, функционалы};\phi_N}}\sup\left\{\left\|f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x)-\phi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right)+\tilde{\sigma}_N,...,f\left(\xi^{(N)}\right)+\tilde{\sigma}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2(0,1)^s}:f\in W_2^r(0,1)^s\right\}\asymp$$

$$\asymp\sup_{f\in W_2^r(0,1)^s}\left\|f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x)-\Lambda_N^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x;f)\right\|_{L^2(0,1)^s}\asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место раlвенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}};\frac{1}{N}\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\\ k_j=0,1,...,n-1\,(j=1,...,s)}} f\left(\xi^{(k)}\right)\cdot\Omega_N\left(x-\xi^{(k)}\right)\right)_{L^2(0,1)^s}}{\delta_N\left(0;\mathrm{P}_N(W_2^r(0,1)^s)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)}\right)_{L^2(0,1)^s}}=+\infty,$$

К(В)П-2 *(версия «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ »). Для вычислительного оператора (3.1) и для величины $\bar{\varepsilon}_N\equiv N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{1}{2}\right)}$ выполняются соотношения*

$$\delta_N(0;P_N(W_2^r\,(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s}\asymp\delta_N(\bar{\varepsilon}_N\,(\mathrm{P}_N)=N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{1}{2}\right)};P_N(W_2^r\,(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s}\equiv$$

$$\equiv\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\text{все возм.}\\ \text{лин., функц.};\phi_N}}\ \sup_{\substack{f\in W_2^r(0,1)^s\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1\\ (\tau=1,...,N)}}\left\|f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x)-\phi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right)+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,...,f\left(\xi^{(N)}\right)+\gamma_N^{(n)}\bar{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2(0,1)^s}\asymp$$

$$\asymp\sup_{f\in W_2^r(0,1)^s}\left\|f^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x)-\Lambda_N^{(\beta_1,...,\beta_s)}(x;f)\right\|_{L^2(0,1)^s}\asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\beta_1+...+\beta_s}{s}}.$$

во-вторых, при $\beta_1=...=\beta_s=0$ для всякой возрастающей к ∞ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r}{s}+\frac{1}{2}};\frac{1}{N}\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\\ k_j=1,...,n\,(j=1,...,s)}} f\left(\xi^{(k)}\right)\cdot D_N\left(x-\xi^{(k)}\right)\right)_{L^2(0,1)^s}}{\delta_N\left(0;\mathrm{P}_N(W_2^r(0,1)^s)\times\{\phi_N\}_{L^2(0,1)}\right)_{L^2(0,1)^s}}=+\infty,$$

Дальше Теорема B, в сочетании с соотношением ([7, Теорема 5.2])

$$\|f(x_1,...,x_s)\|_{W_2^r(0,1)^s}\asymp\|Rf(\alpha,t)\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}(0,1)^s},$$

буквальным повторением схемы доказательства Основной теоремы в §2, приводит к s-мерному варианту Основной теоремы

Теорема 5. *Пусть даны число $r>\frac{s}{2}$ и открытое множество $\Omega\subset E_s\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$. Тогда для класса $H_0^r(\Omega)\sim W_2^r(E_s)$ и всякого $N=n^s$ $(n=2,3,...)$ справедливы утверждения*

$$\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\text{все возможные}\\ \text{линейные, функционалы над}H_0^r(\Omega),\ \varphi_N}}\ \sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\|f(x)-\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\|_{L^2(\Omega)}\asymp$$

$$\asymp\inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)})\in E_s(\tau=1,...,N),\ \varphi_N}\ \sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f(x)-\varphi_N\left(Rf_\Omega(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}),...,Rf_\Omega(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)});x\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f(x_1,...,x_2)-\frac{1}{n^s}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n}Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp N^{-\frac{r}{s}}.$$

К(В)П-2 (версия «равно $\tilde{\sigma}_N$ »). Для вычислительного оператора

$$\frac{1}{n^s}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n}Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right),\tag{3.2}$$

и для величины $\tilde{\sigma}_N\equiv N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{2s}\right)}$ выполняются соотношения:

Во-первых,

$$\sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\| f\left(x_1,...,x_s\right)-\frac{1}{n^s}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)+\tilde{\sigma}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp N^{-\frac{r}{s}}.$$

Во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\sigma}_N\equiv\eta_N N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{2s}\right)};\frac{1}{n^s}\sum\limits_{k_1=1}^{n}...\sum\limits_{k_s=1}^{n}Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right)\right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N\left(0;\mathrm{L}_N(H_0^r(\Omega))\times\{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)}\right)_{L^2(\Omega)}}=+\infty.$$

К(В)П-2 (версия «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ »). Для вычислительного оператора (3.2) *и для величины $\bar{\varepsilon}_N\equiv N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{s}+\frac{1}{2}\right)}$ выполняются соотношения:*

$$\sup_{\substack{f\in H_0^r(\Omega)\\ \left|\gamma_N^{(k_1,...,k_s)}\right|\le 1}}\left\| f\left(x_1,...,x_s\right)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}...\sum_{k_s=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right)+\gamma_N^{(k_1,...,k_s)}\bar{\varepsilon}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},...,x_s-\frac{k_s}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{r}{s}}.$$

Таким образом, при $s\ge 2$ и при погрешности вычисления преобразования Радона с точностью не большей $\bar{\varepsilon}_N=N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{s}+\frac{1}{2}\right)}$ итоговой потери точности восстановления f не будет.

В то же время, если в вычислении преобразования Радона ошибаться на постоянную величину $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{2s}\right)}$, то также не произойдет потери итоговой точности, но это обрушится для $\eta_N\tilde{\sigma}_N$,– любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}$.

Вопрос об окончательности погрешности $\bar{\varepsilon}_N$ в версии «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ », когда необходимо выяснить, найдется или не найдется $\bar{\eta}_N\to+\infty$ такая что $\bar{\varepsilon}_N\bar{\eta}_N=:\tilde{\varepsilon}_N$ будет предельным в версии «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$ », остается открытым (известно только то, что $N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{s}+\frac{1}{2}\right)}=\bar{\varepsilon}_N\le\tilde{\varepsilon}_N\le\tilde{\sigma}_N=N^{-\left(\frac{r}{s}+\frac{s-1}{2s}\right)}$).

3. Преобразование Радона в К(В)П-постановке и оценки снизу. Положим (помимо этих кратких обозначений, ниже также будем пользоваться информативными обозначениями из [41-43, 48-51])

$$\delta_N\left(F,Rf\right)_{Y(\Omega)}=\inf_{\substack{\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)}\in E_s\\ (\tau=1,...,N),\ \varphi_N}}\sup_{f\in F(\Omega)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(Rf_\Omega(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}),...,Rf_\Omega(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)});x\right)\right\|_{Y(\Omega)}. \tag{3.3}$$

Тогда известные оценки снизу величины $\delta_N\left(F,L\right)_Y$ для всех возможных линейных функционалов влекут за собой оценки снизу для величины (3.3)

$$...\ll\delta_N\left(F;L\right)_Y\le\delta_N\left(F;Rf\right)_Y,$$

которые также относятся и ко всем линейным аналогам и модификациям преобразования Радона.

Конкретизируем К(В)П– постановку для преобразования Радона. Здесь ограничимся классами F функций, заданных на единичном кубе в $[0,1]^s$,банаховы пространства Y и функции $\varphi_N\left(z_1,...,z_N;\cdot\right)$ берутся такими, как это сказано во Введении(см. также [41-42]).

Из результатов [48], полученных для $\delta_N\left(F;L\right)_Y$, для преобразования Радона вытекают следующие оценки снизу (определения привлеченных классов функций см., например, в [44]).

Теорема 6 (Ш.О.Ажгалиев, Н.Темиргалиев [48]). *Пусть даны целое число $s\ge 2$ и открытое множество $\Omega\subset E_s\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$. Тогда для класса $H_P^r\left(\Omega\right)$ и всякого целого положительного N справедливы утверждения:*

а) Если $2 \le p \le q \le \infty$ *и* $r > 0$ *таковы, что*

$$\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0,$$

то имеют место неравенства

$$\mathrm{N}^{-(r/s-(1/p-1/q))} << \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы над } H_p^r(\Omega),\ \varphi_N}} \sup_{f \in H_p^r(\Omega)} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\|_{L^q(\Omega)} <<$$

$$<< \inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)}) \in E_S (\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f \in H_p^r(\Omega)} \left\| f(x) - \varphi_N \left(Rf_\Omega\left(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}\right),...,Rf_\Omega\left(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)}\right);x\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

б) Пусть $2 \le p \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *и* $r > 0$ *таковы, что*

$$\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Тогда имеют место неравенства

$$\mathrm{N}^{-(r/s-(1/p-1/q))} << \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы над } B_{p\theta}^r(\Omega),\ \varphi_N}} \sup_{f \in B_{p\theta}^r(\Omega)} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\|_{L^q(\Omega)} <<$$

$$<< \inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)}) \in E_S (\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f \in B_{p\theta}^r(\Omega)} \left\| f(x) - \varphi_N \left(Rf_\Omega\left(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}\right),...,Rf_\Omega\left(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)}\right);x\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Теорема 7 (Ш.О.Ажгалиев, Н.Темиргалиев [48]). *Пусть даны числа – целое* $s \ge 2$ *и* $1 \le q \le p \le 2$, *открытое множество* $\Omega \subset E_s \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$. *Тогда для класса* $H_p^r(\Omega)$ *и всякого целого положительного* N *справедливы соотношения*

$$\mathrm{N}^{-r/s} << \inf_{\substack{l_1,...,l_N - \text{все возможные} \\ \text{линейные функционалы над} H_p^r(\Omega),\ \varphi_N}} \sup_{f \in H_p^r(\Omega)} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\|_{L^q(\Omega)} <<$$

$$<< \inf_{(\alpha_1^{(\tau)},...,\alpha_{s-1}^{(\tau)},t^{(\tau)}) \in E_S (\tau=1,...,N),\ \varphi_N} \sup_{f \in H_p^r(\Omega)} \left\| f(x) - \varphi_N \left(Rf_\Omega(\alpha_1^{(1)},...,\alpha_{s-1}^{(1)},t^{(1)}),...,Rf_\Omega(\alpha_1^{(N)},...,\alpha_{s-1}^{(N)},t^{(N)});x\right)\right\|_{L^q(\Omega)}.$$

Теорема 8 (Ш.О.Ажгалиев, Н.Темиргалиев [48]). *Пусть дано целое число* $s \ge 2$. *Тогда*

а) Для действительного $r > \frac{1}{2}$ *и всякого целого положительного* N *имеют место неравенства*

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}} << \delta_N\left(0; f; SW_2^r(\Omega); L_N \times \varphi_N\right)_{L^\infty(\Omega)} << \delta_N\left(0; f; SW_2^r(\Omega); Rf \times \varphi_N\right)_{L^\infty(\Omega)}.$$

б) Для любого числа $r > 0$ *и всякого целого положительного* N *имеют место неравенства*

$$\frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r} << \delta_N\left(0; f; SW_2^r(\Omega); L_N \times \varphi_N\right)_{L^2(\Omega)} << \delta_N\left(0; f; SW_2^r(\Omega); Rf \times \varphi_N\right)_{L^2(\Omega)}.$$

Таким образом,в К(В)П-постановке Радоновская проблематика сводится к оценкам сверху величины (3.3) (как сообщалось во Введении, заключающейся в получении соотношения $\|f\|_{F^r} \asymp \|Rf\|_{F^{r+?}}$), с последующим нахождением в рамках К(В)П-2 предельной погрешности восстановления по числовым значениям преобразования Радона, с завершением вК(В)П-3.

4. Преобразование Радона и метод квази Монте-Карло. Каждому $b \equiv (\alpha_1, ..., \alpha_{s-1}, t) \in [0,1]^s$ в формуле (1.7) соответствует своя гиперплоскость $(\tau(t)b)^\perp$. Вместе с тем, естественно ожидать, что чем более равномерно распределена на $[0,1]^s$ последовательность (сетка) точек $b_1, ..., b_N$, тем ближе к $f(x)$ (в Y) функция $\bar\varphi_N\left(Rf\left(b_1\right), ..., Rf\left(b_N\right); x\right)$ (при надлежащем алгоритме $\bar\varphi_N\left(z_1, ..., z_N; x\right)$).

Тем самым, здесь можно применить теорию квази Монте-Карло, в котором степень равномерности распределения определяется через величину дискрепанса (χ_J - характеристическая функция множества J)

$$D_s\left(b_1,b_2,...,b_N\right)=\sup\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\chi_J(b_k)-\prod_{j=1}^{s}(d_j-c_j)\right|:J=\prod_{j=1}^{s}[c_j,d_j]\subset[0,1]^s\right\}.$$

В этом круге вопросов ориентиром служит эвристический принцип *«Спектр больших тригонометрических коэффициентов Фурье данного класса функций несет в себе информацию, определяющую основные свойства функций класса».* Для (обычных) классов Соболева, Никольского и Бесоватакой спектр составляют целочисленные точки соответствующей размерности куба с сопровождающей равномерной сеткой (как в Теореме В для класса Соболева $W_2^r(0,1)^s$). Однако, для тех же (по названию) классов функций с доминирующей смешанной производной или разностью означенный спектр составляют т.н. *«гиперболические кресты»*, которым уже соответствуют равномерно распределенные сетки с дискрепансом предельного в степенной шкале порядка $\log^\beta N/_N$ (подробности в [52-64]).

Так в случае класса $SW_2^r(0,1)^2$ равномерные сетки заменяются на сетки(см.[53] и [55])

$$b_\tau=\left(\frac{\tau}{c_n},\left\{\frac{\tau\, c_{n-1}}{c_n}\right\}\right)\ (\tau=1,2,...,N=c_n(n\geq 3)),$$

где $\{c_\tau\}$ есть последовательность Фибоначчи $c_0=c_1=1,\ c_\tau=c_{\tau-1}+c_{\tau-2}\ (\tau\geq 2)$.

Опять же приходим к подлежащим дальнейшим исследованиям перспективным связям между преобразованиями Радона и метода квази Монте-Карло.

К. Шерниязовым [63](см. также [64]) получена серия точных в степенной шкале теорем восстановления функций по их значениям в узлах сеток, построенных на основе сеток Коробова и являющихся их модификацией(см. [52]) .

Справедлива

Теорема С (К. Шерниязов [63]). *Пусть задано целое положительное число s. Тогда для всякого целого положительного N имеют место соотношения*

1) при $r>1$

$$N^{-(r-1)}\underset{r,s}{\ll}\inf\sup_{f\in E_s^r}\sup_{x\in R^s}\left|f(x)-\left(T_Nf\right)(x)\right|\underset{r,s}{\ll}N^{-(r-1)}ln^{(r(s-1))}N,$$

$$N^{-(r-\frac{1}{2})}\underset{r,s}{\ll}\inf\sup_{f\in E_s^r}\left|f(\cdot)-\left(T_Nf\right)(\cdot)\right|_{L^2(0,1)^s}\underset{r,s}{\ll}N^{-(r-\frac{1}{2})}ln^{(r(s-1)}N,$$

2) при $r>1/2$

$$N^{-(r-1)}\underset{r,s}{\ll}\inf\sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s}\sup_{x\in R^s}\left|f(x)-\left(T_Nf\right)(x)\right|\underset{r,s}{\ll}N^{-(r-\frac{1}{2})}(lnN)^{(r+\frac{1}{2})(s-1)},$$

$$N^{-(r-\frac{1}{2})}\underset{r,s}{\ll}\inf\sup_{f\in SH_2^r(0,1)^s}\sup_{x\in R^s}\left|f(x)-\left(T_Nf\right)(x)\right|\underset{r,s}{\ll}N^{-(r-\frac{1}{2})}ln^{(r(s-1)}N$$

Здесь во всех соотношениях inf берется по всем операторам вида

$$T_N\equiv\left(T_Nf\right)(x)=\varphi_N\left(f\left(\xi_1\right),...,f\left(\xi_N\right),x\right),$$

где $\varphi_N\left(z_1,...,z_N;x\right):C^N\times R\mapsto C$ *-измеримая функция и* $\xi_j\in[0,1]^s(j=1,2,...,N)$. *При этом верхние оценки во всех этих соотношениях достигаются при восстановлении оператором*

$$\left(T_N^{(0)}f\right)=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\tau_j>0\\ \tau_1+\cdots+\tau_s\leq n}}\frac{1}{detA_{n,\tau}}\sum_{\substack{k\in Z^s:-2^{\tau_1}p_{\tau_1+\cdots+\tau_s}\leq k_1\leq 2^{\tau_1}p_{\tau_1+\cdots+\tau_s},\\ -2^{\tau_j}\leq k_j\leq 2^{\tau_j}\ (j=2,...,s)}}f\left(\left\{\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'k\right\}\right)$$

$$\sum_{\substack{m\in Z^s:\,2^{\tau_1-1}max\left\{1,|m_j|\right\}<2^{\tau_j}\\ (j=1,2,\ldots,s)}}e^{2\pi i\left(m,x-\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'k\right)},$$

где целое положительное число n *определено по* N *. Далее для всех* $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_s) \in Z^s$ *таких, что* $\tau_j \geq 0 (j = 1, 2, ..., s)$ *и* $\tau_1, \ldots, \tau_s \leq n$ *положено*

$$A_{n,s} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{\tau_1+\cdots+\tau_s} & -2^{\tau_1+1} a_2^{(\tau_1+\cdots+\tau_s)} \ldots & -2^{\tau_1+1} a_s^{(\tau_1+\cdots+\tau_s)} \\ 0 & 2^{\tau_2+1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix}$$

где $p_1, p_2, ..., p_s$ *- простые числа такие, что*

$$2^{n-k+2s}(n-k+1)^{-2} \leq p_k < 2^{n-k+2s+1}(n-k+1)^{-2},$$

а целые $a_1 = 1, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, ..., a_s^{(k)}$ *есть оптимальные коэффициенты по модулю* $p (k = 1, 2, ..., n)$ *индекса* $\beta(s) > 0$.

Применение этой теоремы к преобразованию Радона Rf снова приводит к задаче $\|f\|_{F^r} \asymp \|Rf\|_{F^{r+?}}$, т.е. получению аналога теоремы 5.1 из [7] для норм F^r из теоремы C(и, вообще, всех классов из [44]).

В заключение, авторы выражают глубокую благодарность сотрудникам Института теоретической математики и научных вычислений ЕНУ имени Л.Н.Гумилева С.С.Кудайбергенову и Н.Ж. Наурызбаеву за ценные советыи полезные обсуждения.

Список литературы

1 Radon J. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichteuber die Verhandlungen Gesellshaft der Wissenschaften //Leipzig. Journal of Mathematical Physics - 1917 - 69 - C. 262-277.

2 Cormack A. M. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications I, II //J. Appl. Phys. -1963. 34. -P. 2722-2727; -1964. 35. -P. 2908-2912.

3 Hounsfield, G. N. A method of and apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation. -London: The Patent Ofice, 1972.

4 Hounsfield, G. N. Computerized transverse axial scanning tomography // British J. Radiology. -1973. -46. -P. 1016-1022.

5 Cormack A. M. Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it // Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971-1980, World Scientific Publishing Co. -1992 - P. 551-563.

6 Hounsfield G. N. Computed Medical Imaging // Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971-1980, World Scientific Publishing Co, 1992. - P. 568-586.

7 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography// SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

8 Helgason, S. The Radon Transform,2nd ed. - Birkhauser, Boston - 1999.

9 The first 100 years of the Radon transform Linz, Austria, March 27-31. -2017. -P.60

10 Natterer F. A Sobolev space analysis of picture reconstruction // SIAM Journal on Applied Mathematics - 1980. -Vol. 39. -№3. -P. 402-411.

11 Jerome J. On n width in Sobolev spaces and applications to elliptic boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. - 1970 - Is. 29. -№ 1 - P. 201-215.

12 Helferich H. Optimalelineare Approximation beschrdnkter Mengen in normierten Raumen// J. Appr. Th. - 1971 - 4 - P. 165-182.

13 Deans Stanley R. The Radon Transform and Some of Its Applications. - New York: John Wiley & Sons, 1983.

14 Epstein C. L. Introduction to the Mathematics of Medical Imaging, 2nd ed.- SIAM, Philadelphia -2008.

15 Freeman R. Magnetic Resonancein Chemistryand Medicine, Oxford University Press, Oxford - 2003.

16 Gadian D. G. Nuclear Magnetic Resonance and Its Applications to Living Systems. - Oxford: Oxford University Press, 1982.

17 Peter D. Lax The Radon transform and translation representation // J. evol. equ. - 2001 - 1 - P. 311-323.

18 Rowland S. W. Computer implementation of image reconstruction formulas, in Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications, G. T. Herman, Editor// Topics in Applied Physics 32 - Springer, Berlin, 1979.

19 Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. Математические задачи компьютерной томографии - М.: Наука - 1987.

20 Allan Greenleaf and Gunther Uhlmann Estimates for singular Radon transforms and pseudodifferential operators with singular symbols // J. Funct. Anal. - 1990 - Vol. 89 (1). - P.202-232

21 Elias M. Stein and Brian Street Multi-parameter singular Radon transforms // Math. Res. Lett. -2011. - 18(2). - P. 257-277.

22 Boris Rubin Radon transforms and Gegenbauer-Chebyshev integrals, II; examples // Anal. Math. Phys.- 2017 - 7. -P. 349-375. -DOI 10.1007/s13324-016-0145-5.

23 Smith K. T. and Keinert F. Mathematical foundations of computed tomography//Appl. Opt. - 1985 - 24 - P. 3950-3957.
24 Shepp L. A. and Kruskal J. B. Computerized tomography: The new medical X-ray technology// Amer. Math. Monthly - 1978 - 85 - P.420-439.
25 Madych W. R. and Nelson S. A. Polynomial based algorithms for computed tomography// SIAM J. Appl. Math. - 1983 - 43. - P. 193-208.
26 Madych W. R. Degree of approximation in computerized tomography//Approximation Theory III (E. W.Cheney, Ed.)- Academic Press, New York, 1980 - P. 615-622.
27 Holschneider M. Inverse Radon transform through inverse wavelet transforms // Inverse Problems - 1991. - 7. - P. 853-861.
28 Delaney A. and Bresler Y. Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets// IEEE Trans. Image-Proc. 1995. -4. -P. 799-813.
29 Deans S. R. The Radon Transform and Some of Its Applications. - New York: Wiley, 1983
30 Berenstein C. A. and Walnut D. Local inversion of the Radon transform in even dimensions using wavelets - International Press, Cambridge, MA 1994 in "75 Years of Radon Transform" (S. Gindikin and P. Michor, Eds.) - P. 45-69.
31 Aldroubi A. and Unser M. Eds., Wavelets in Medicine and Biology. - CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
32 T W. R. Madych. Tomography, Approximate Reconstruction, and Continuous Wavelet Transforms //Applied and Computational Harmonic Analysis. -1999. - 7 -P. 54-100.
33 Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В., Светов И. Е. Приближенное восстановление функции, заданной в области с малой рефракцией, по ее лучевым интегралам //Сиб. журн. индустр. матем. - 2014 - 17(4). -С.48-59
34 Романов В.Г. О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн. - 1967. - 8(5) -С. 1206-1208.
35 Pfitzenreiter T., Schuster T. Tomographic reconstruction of the curl and divergence of 2D vector fields taking refractions into account // SIAM J. Imaging Sci. - 2011 -4. -P. 40-56.
36 Holland G. N., Hawkes R. C, and Moore W. S. NMR tomography of the brain, coronal and sagittal sections // J. Comput. Assisted Tomog. -1980 -4. -P. 429-433.
37 SMITH K. T., SOLMON D. C., AND WAGNER S. L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs// Bull. Amer. Math. Soc. - 1977. -83. -P. 1227-1270.
38 House W. V. Introduction to the principles of NMR// IEEE Trans. Nucl. Sci. -1980 -27(3). - P.1220-1226.
39 Bagramyan T. E. Optimal Recovery of Harmonic Functions in the Ball from Inaccurate Information on the Radon Transform // Mathematical Notes -2015. -98(2). -P. 195-203.
40 Рудин У. Функциональный анализ -М: Мир,1975. -449 стр.
41 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. - №3. -С. 8-88.
42 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97.
43 Н. Темиргалиев, А. Ж. Жубанышева, Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения // Изв. вузов. Матем. -2017. - №3. -С. 89-95.
44 Triebel H., Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland Pub. Co. in Amsterdam, NewYork ,1978-P.518 (Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.//М: Мир. - 1980. 664С.)
45 Иосида К., Функциональный анализ. -М: Мирб 1967. -624 стр.
46 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования// Изв. РАН, Сер.матем. -2009 - 73(2) - P.183-224.
47 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. -М.: Наука,1996.
48 Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов// Матем. Заметки. - 2003. -73(6) -С.803-812.
49 Темиргалиев Н., Шерниязов К.Е, Берикханова М.Е. Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона по коэффициентам Фурье //Совр. пробл. матем. -2013 - 17 - С. 179-207.
50 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора диференцирования на многомерных классах Соболева // Ж. вычисл. матем.и матем. физ. -2005. -55(9) -С. 1474-1485.
51 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К.,Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв. вузов, Матем. - 2013 - 8 -С. 86-93
52 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализеюе -М.: Физматгиз, 1963.

53 Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of Number Theory of Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg: New York: Springer Yerlag, 1981.

54 Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. Wien; Munchen; Oldenbourg, 1981.

55 Бахвалов Н.С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. МГУ. Сер.матем., мех. -1959. - 4. -С. 3-18.

56 Plaskota L., Wozhniakowski H. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods// Springer Science & Business Media, 2010.

57 Dick J. and Pillichshammer F. Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration// Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

58 Воронин С.М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Матем. заметки - 1989 - 46(2)- С. 34-41.

59 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем.сб. -1990. -181(4). -С.490-505

60 Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных // Докл. РАН. -2007 -416(2). -С. 169-173.

61 Жубанышева А. Ж., Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул // ЖВМ иМФ. - 2009 -49(1)- С. 14-25.

62 Баилов Е.А.,Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных// ЖВМ и МФ - 2014- 54(7) -С. 1059-1077.

63 Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, КазГУим. аль-Фараби, 1998.

64 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази- Монте-Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье// Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н.Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева -2010. -194 с.

65 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К.,Ажгалиев Ш.У., Таугынбаева Г.Е. Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло// Изв. вузов, Матем. -2020. -№ 3 -С. 98-101.

Н. Темірғалиев, Ш.К. Абикенова, Ш.У. Әжғалиев, Г.Е. Тауғынбаева, А.Ж. Жұбанышева

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Іргелі математика және ғылыми есептеулер институты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Компьютерлік (есептеуіш) диаметр концепсиясындағы квази-Монте Карло әдісіндегі Радон түрлендіруі

Аннотация. Функция туындысын олардың нүктедегі мәндері бойынша жуықтау есебінің К(Е)Д бойынша алынған нәтижелері тек бір $\|f\|_{W_2^r(0,1)^s} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}(0,1)^s}$ қатынасын ғана қолдану арқылы кез келген шенелген ашық жиында (міндетті түрде байланысты емес) зерттеу объектісінен алынған барлық мүмкін сызықтық функционалдар арқылы құрылған есептеу агрегаттарының арасында оптимальді болатын Радондық сканерлеру алгоритімін беретіндігі көрсетілген. Сонымен қатар соңғы нәтижеге еш кедергі келтірмейтін есептеу қателіктерінің шекаралары көрсетілген.

Түйін сөздер: Радон түрлендіруі, Соболев кеңістігі, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр (К(Е)Д), дәл және дәл емес мәліметтер бойынша жуықтау, есептек агрегаты, дискрепанс, бірқалыпты үлестірілген тор, Коробов торы, оптималды коэффициенттер.

N. Temirgaliyev, Sh.K.Abikenova, Sh.U. Azhgaliyev, G.E.Taugynbayeva, A.Zh.Zhubanysheva

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Theory of Radon Transform in the Concept of Computational (Numerical) Diameter and Methods of the Quasi-Monte Carlo Theory

Abstract. In the paper is shown that results of C(N)D-recovery of derivatives by the value at the point with using just only one relationships $\|f\|_{W_2^r(0,1)^s} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}(0,1)^s}$ implies Radon's scanning algorithm of an arbitrary open (not necessarily connected) bounded set, which is optimal among the all computational aggregates, constructed by arbitrary linear numerical information from the considered object with indicating the boundaries of the computational error, not affecting the final result. adon transform, Sobolev space, Computational (numerical) diameter (C(N)D), recovery by accurate and inaccurate information, computational unit, discrepancy, uniformly distributed grids, Korobov grids, optimal coefficients.

Keywords: radon transform, Sobolev space, Computational (numerical) diameter (C(N)D), recovery by accurate and inaccurate information, computational unit, discrepancy, uniformly distributed grids, Korobov grids, optimal coefficients.

References

1 Radon J. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichteuber die Verhandlungen Gesellshaft der Wissenschaften, Journal of Mathematical Physics, (69), 262-277 (1917).
2 Cormack A. M. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications I, II, J. Appl. Phys., 34, 2722-2727(1963); 35, 2908-2912(1964).
3 Hounsfeld G. N. A method of and apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation (The Patent Ofice, London, 1972).
4 Hounsfeld G. N. Computerized transverse axial scanning tomography, British J. Radiology (46), 1016-1022(1973).
5 Cormack A. M. Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it, Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971-1980, World Scientific Publishing Co., 551-563(1992).
6 Hounsfield G. N. Computed Medical Imaging, Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971-1980, World Scientific Publishing Co., 568-586 (1992).
7 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
8 Helgason S. The Radon Transform, 2nd ed., Birkhauser, Boston, 1999.
9 The first 100 years of the Radon transform Linz, Austria, March 27-31, 60(2017).
10 Natterer F. A Sobolev space analysis of picture reconstruction, SIAM Journal on Applied Mathematics, 39(3), 402-411(1980).
11 Jerome J. On n width in Sobolev spaces and applications to elliptic boundary value problems, J. Math. Anal. Appl., (29), 201-215(1970).
12 Helferich H. Optimalelineare Approximation beschrdnkter Mengen in normierten Raumen, J. Appr. Th., 4, 165-182(1971).
13 Deans Stanley R. The Radon Transform and Some of Its Applications (John Wiley & Sons, New York, 1983).
14 Epstein C.L. Introduction to the Mathematics of Medical Imaging, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, 2008.
15 Freeman R. Magnetic Resonancein Chemistryand Medicine (Oxford University Press, Oxford, 2003).
16 Gadian D. G. Nuclear Magnetic Resonance and Its Applications to Living Systems (Oxford University Press, Oxford, 1982).
17 Peter D. Lax The Radon transform and translation representation, J. evol. equ. 1, 311-323 (2001).
18 Rowland S. W. Computer implementation of image reconstruction formulas, in Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications, G. T. Herman, Editor, Topics in Applied Physics 32, Springer, Berlin, 1979.
19 Tihonov A. N., Arsenin V. YA., Timonov A. A. Matematicheskie zadachi komp'yuternoj tomografii[Mathematical problems of computed tomography] (Nauka, Moscow, 1987).
20 Allan Greenleaf and Gunther Uhlmann Estimates for singular Radon transforms and pseudodifferential operators with singular symbols, J. Funct. Anal. 89(1), 202-232 (1990).
21 Elias M. Stein and Brian Street Multi-parameter singular Radon transforms, Math. Res. Lett. 18(2), 257-277 (2011).
22 Boris Rubin Radon transforms and Gegenbauer-Chebyshev integrals, II; examples, Anal. Math. Phys., 7, 349-375(2017). DOI 10.1007/s13324-016-0145-5.
23 Smith K. T. and Keinert F. Mathematical foundations of computed tomography, Appl. Opt. 24, 3950-3957(1985).
24 Shepp L. A. and Kruskal J. B. Computerized tomography: The new medical X-ray technology, Amer. Math. Monthly (85), 420-439(1978).
25 Madych W. R. and Nelson S. A. Polynomial based algorithms for computed tomography, SIAM J. Appl. Math. (43), 193-208(1983).
26 Madych W. R. Degree of approximation in computerized tomography, "Approximation Theory III" (E. W.Cheney, Ed.), Academic Press, New York, 615-622 (1980).
27 Holschneider M. Inverse Radon transform through inverse wavelet transforms, Inverse Problems, 7, 853-861(1991).
28 Delaney A. and Bresler Y. Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets, IEEE Trans. Image-Proc., (4), 799-813(1995).
29 Deans S. R. The Radon Transform and Some of Its Applications (Wiley, New York, 1983).
30 Berenstein C. A. and Walnut D. Local inversion of the Radon transform in even dimensions using wavelets, International Press, Cambridge, MA 1994 in "75 Years of Radon Transform" (S. Gindikin and P. Michor, Eds.), 45-69.
31 Aldroubi A. and Unser M. Eds. Wavelets in Medicine and Biology, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
32 Madych T W. R. Tomography, Approximate Reconstruction, and Continuous Wavelet Transforms, Applied and Computational Harmonic Analysis (7), 54-100(1999).
33 Derevtsov E.Yu., Maltseva S.V., Svetov I.E. Approximate reconstruction from ray integrals of a function on a domain with low refraction, Journal of Applied and Industrial Mathematics, 9, 36–46(2015).

34 Romanov V.G. O vosstanovlenii funkcii cherez integraly po semejstvu krivyh [On the restoration of a function through integrals over a family of curves], Sib. mat. zhurn[Sib. mat. journal], 8(5), 1206-1208(1967).
35 Pfitzenreiter T., Schuster T. Tomographic reconstruction of the curl and divergence of 2D vector fields taking refractions into account, SIAM J. Imaging Sci., 4, 40-56(2011).
36 Holland G.N., Hawkes R.C, and Moore W.S. NMR tomography of the brain, coronal and sagittal sections, J. Comput. Assisted Tomog., 4, 429-433(1980).
37 Smith K.T., Solman D.C., Wagner S.L. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs, Bull. Amer. Math. Soc., 83, 1227-1270(1977).
38 House W.V. Introduction to the principles of NMR, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-27(3), 1220-1226(1980).
39 Bagramyan T.E. Optimal Recovery of Harmonic Functions in the Ball from Inaccurate Information on the Radon Transform, Mathematical Notes, 98(2), 195-203(2015).
40 Rudin U. Funkcional'nyj analiz[Functional analysis] (Mir, Moscow, 1975, 449 p.).
41 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 124(3), 8-88 (2018).
42 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ), N 1, 89-97(2019).
43 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Order Estimates of the Norms of Derivatives of Functions with Zero Values on Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics, 61(3), 77–82(2017).
44 Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland Pub. Co. in Amsterdam (New York, 1978, 518p.).
45 Iosida K. Funkcional'nyj analiz [Functional Analysis] (Mir, Moscow, 1967, 624p.).
46 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration, Izvestiya: Mathematics, 73(2), 393-434(2009).
47 Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M. Integral'nye predstavlenija funkcij i teoremy vlozhenija [Integral representations of functions and embedding theorems] (Fizmatlit, Moscow, 1996). [in Russian].
48 Azhgaliev Sh. , Temirgaliev N. Informativeness of Linear Functionals, Mathematical Notes, 73(6), 759-768(2003).
49 Temirgaliev N. , Sherniyazov K. E. , Berikhanova M. E. Exact Orders of Computational Cross-Sections in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein-Gordon Equation from Fourier Coefficients, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 282, suppl. 1, 165-191(2013).
50 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432–1443(2015).
51 Temirgaliev N. , Abikenova Sh. K. , Zhubanysheva A. Zh. , Taugynbaeva G. E. . Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ), 57(8), 75-80(2013).
52 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analizeyu [Theoretical and numerical methods in approximate analysis] (Fizmatgiz, Moscow, 1963).
53 Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of Number Theory of Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg: New York: Springer Yerlag, 1981.
54 Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. Wien; Munchen; Oldenbourg, 1981.
55 Bahvalov N.S. O priblizhennom vychislenii kratnyh integralov[On the approximate calculation of multiple integrals], Vestn. MGU. Ser.matem., mekh., 4, 3-18(1959).
56 Plaskota L., Wozniakowski H. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods, Springer Science & Business Media, 2010.
57 Dick J. and Pillichshammer F. Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
58 Voronin S. M. , Temirgaliev N. Quadrature formulas associated with divisors of the field of Gaussian numbers, Mat. zametki, 46(2), 597-602 (1989).
59 Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik, 69(2), 527-542(1990).
60 Bailov E. A. , Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables, Dockland Mathematics, 2007, pp. 681-685.
61 Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. , Temirgalieva Zh. N. Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Computational mathematics and mathematical physics, 49(1), 12-22(2009).
62 Bailov E. A. , Sikhov M. B. , Temirgaliev N. General Algorithm for the Numerical Integration of Functions of Several Variables, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 54(7), 1061–1078(2014).

63 Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B, //Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, КазГУим. аль-Фараби, 1998.

64 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series.], Vest. ENU im. L. N. Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L.N. Gumilev ENU], 1-194 (2010).

65 Temirgaliyev N., Abikenova SH.K., Azhgaliyev SH.U., Taugynbaeva G.E. Preobrazovanie Radona v skheme K(V)P-issledovanij i teorii kvazi Monte-Karlo[Radon conversion in the scheme C(N)D-studies and theories of quasi Monte Carlo], Izv. vuzov, Matem. [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], (3), 98-101(2020).

Сведения об авторах:

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Абикенова Ш.К. – кандидат физико-математических наук, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Ажгалиев Ш.О. – кандидат физико-математических наук, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Таугынбаева Г.Е. – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Жубанышева А.Ж. – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений, начальник отдела научных изданий Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Temirgaliyev N. – Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Abikenova Sh. K. – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Azhgaliyev Sh. O. – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Taugynbayeva G. E. – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Zhubanysheva A.Zh. – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, Head of the Department of Scientific Publications ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

Журналдың потенциалды авторлары мақала құрылымы бойынша келесі талаптарды ұстанулары қажет:

- Мақала мәтінін түсінуді қамтамасыз ететін қажетті белгілер мен анықтамалар;
- Мақалада қарастырылатын есептің қойылымы;
- Қарастырылатын есеп бойынша тарихи мәліметтер - мақала тақырыбына сәйкес бұрын алынған нәтижелер кіммен және қашан алынғандығы туралы толық сілтемелерімен берілген ақпарат;
- Кез келген ғылыми жұмыстың ең жауапты бөлігі ретінде мақаланың қажеттілігі мен өзектілігін негіздеу;
- Мақалада қойылған есеп шешімін нақты тұжырымдау және сипаттау;
- Бұрын белгілі мәнмәтінінде мақала нәтижесінің(нәтижелерінің) жаңалы?ын егжей-тегжейлі негіздеу;
- Есептің шешімі толық негіздеулермен (дәлелдемелермен) жабдықталуы тиіс.

Осы талаптардың ең болмағанда біреуі сақталмаған жағдайда мақала қарастыруға қабылданбайды.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аудармa мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 402-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_ math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

Potential authors of the journal should adhere to the following rules on the structure of the article point by point with headings:

- The necessary notation and definitions to ensure understanding of the text of the article;
- Statement of the problem, the solution of which the article is devoted to;
- Historical information on the statement of the problem - by whom and when the results were obtained that preceded the topic of the article with the corresponding full links;
- Justification of the necessity and relevance of the task of the article, as the most critical part of any scientific work;
- The exact wording and description of the solution to the problem presented in the article;
- A detailed justification of the novelty of the result (s) of an article in the context of a previously known one;
- The solution to the problem should be provided with detailed justifications (evidence).

If at least one of these requirements is not observed, the article is not accepted for consideration.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language

and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Nur-Sultan, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 402). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

Потенциальные авторы журнала должны попунктно с заголовками придерживаться следующих правил по структуре статьи:

- Необходимые обозначения и определения для обеспечения понимания текста статьи;
- Постановка задачи, решению которой посвящена статья;
- Исторические сведения по постановке задачи - кем и когда были получены результаты, предшествующие теме статьи с соответствующими полными ссылками;
- Обоснование необходимости и актуальности задачи статьи, как самая ответственная часть любой научной работы;
- Точная формулировка и описание представленного в статье решения поставленной задачи;
- Подробное обоснование новизны результата(ов) статьи в контексте ранее известного;
- Решение задачи должно быть снабжено подробными обоснованиями (доказательствами).

При несоблюдении хотя бы одного из этих требований статья не принимается к рассмотрению.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 402. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2019. 4(129)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 142-б.
Шартты б.т. - 17,75. Таралымы - 20 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды