bulmathmc.enu.kz

https://doi.org/10.32523/2616-7182

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian National University

№3 (128)/2019

ВЕСТНИК
Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№3(128)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019
Nur-Sultan, 2019
Нур-Султан, 2019

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 349 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 25 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-428).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 349, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: A.Zh. Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 25 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;
tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-428).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 349
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №3(128)/2019

МАЗМҰНЫ

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №3(128)/2019

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА, №3(128)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРЛIК ҒЫЛЫМДАР
MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE
МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетiнiң хабаршысы. Математика. Компьютерлiк ғылымдар. Механика сериясы, 2019, том 128, №3, 8-33 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.01**

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: ntmsth10@mail.ru)

Концепция С.М.Воронина в проблеме сравнений детерминированных и случайных вычислений в одних и тех же терминах

Аннотация: С.М.Воронин предложил через вероятностные меры на функциональных классах на одном и том же языке оценивать качество детерминированных и недетерминированных методов вычислений в теоретическом и практическом аспектах, чему посвящена эта статья.

Ключевые слова: алгоритмы вычислений, детерминированные методы, случайные (недетерминированные) методы, вероятностная мера на классах функций, метод Монте-Карло, метод квази Монте-Карло, средние погрешности вычислительных агрегатов относительно вероятностных мер на функциональных классах.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-128-3-8-33

Содержание

15. Перспективы

Введение

Исходным в обсуждаемом круге вопросов является вводная часть статьи [1]:

"Существуют два различных подхода к задаче численного интегрирования. Первый основан на методах теории функций (см. Никольский С.М. Квадратурные формулы. -М.: Наука, 1974), второй – на методах теории вероятностей (метод Монте-Карло). Оба подхода занимаясь одной и той же задачей нахождения приближенного значения определенного интеграла от конкретной функции, говорят на разных языках. Утверждения о приближенном значении некоторой величины с какой-то вероятностью и утверждения о точности значения той же величины без привлечения понятия вероятности представляются несоизмеримыми. В настоящей работе оба подхода к задаче численного интегрирования сравниваются в одних и тех же терминах".

Сразу же поддержанный академиком С.М.Никольским этот оригинальный взгляд на давно устоявшееся (отличительной чертой выдающегося советского русского математика С.М.Никольского по словам многих (в их числе и на собственном опыте автора этих строк) было особое чутье к новым идеям и подходам в математике и решительная поддержка в ранге Действительного члена АН СССР и России) встретил неоднозначное восприятие прямых специалистов.

С одной стороны – резко отрицательное мнение Н.С.Бахвалова, который даже спустя много лет, после моего выступления на его Семинаре в МГУ свое отношение высказал так *"Четыре темы мне понравились, а по пятой - подходу "в среднем" можете подавать статьи, я на них всегда буду давать отрицательные отзывы".*

С другой стороны – совершенно иным было отношение К.И.Бабенко, позже подтвержденное Н.Н.Ченцовым: *«Уважаемый Нурлан! Ваш подход к модели среднего случая представляется мне естественным и разумным, результаты – полезными. ...Они согласуются с концепциями покойного К.И.Бабенко в современной вычислительной математике.».*

Научное сотрудничество с С.М.Ворониным ввело в высокий Мир *"борьбы идей"* (цитируется по Альбому *"Научный и образовательный потенциал для ЕНУ и РК в целом Института теоретической математики и научных вычислений" для казахско-казахстанской научной молодежи):*

НАДО БЫТЬ ТВЕРДЫМ В СВОИХ УБЕЖДЕНИЯХ!

А.В. Сульдин в 1957 году впервые предложил "теоретико-вероятностный подход" к задачам Анализа и защитил по нему докторскую диссертацию.

Однако такой подход в Москве влиятельные математики не принимали. Только вмешательство, на основе других экспертных заключений, тогдашнего Министра высшего образования СССР В.П.Елютина, решило судьбу диссертации в пользу А.В. Сульдина. Но не судьбу темы.... И она, под натиском из Москвы, заглохла. Так вот, спустя десятилетия, подход А.В. Сульдина как со знанием его авторства (США: Дж. Трауб, Х. Вожняковский), так и без знания (США: С.Смейл; СССР: С.М.Воронин) был восстановлен в правах – признан заслуживающим исследований.

Третья глава докторской диссертации Н.Темиргалиева была посвящена этой теме, и потому, поскольку первопроходец темы А.В. Сульдин работал в Казанском государственном университете (первый декан Факультета вычислительной математики и кибернетики и Главный редактор "центрального" журнала "Известия высших учебных заведений. Математика"), Докторский Совет Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР утвердил этот университет в качестве ведущей организации.

В 1990 году Н.Темиргалиев приехал с научным докладом в Казань. Собрались, наверное, все математики Казани, – Москва, знаменитый Математический институт признают А.В. Сульдина! Конечно, Н.Темиргалиев подробно рассказал о международном признании результатов докторской диссертации А.В. Сульдина, в результате чего оставшийся со времен защиты, как говорят, "неприятный осадок", полностью растаял ...

На всю жизнь запомнился возглас после семинара, с жестом отчаяния уже немолодого, утратившего силы, и главное, время, А.В. Сульдина: "Зря я их послушался!".

МОРАЛЬ: Если убеждены в своих исследованиях, равно как и во всех других своих значимых устремлениях, то, несмотря ни на что, продолжайте, доказывайте, добивайтесь! И еще – в математике тоже "Рукописи не горят!".

На фоне этих событий, наверное, будет нелишне вспомнить некоторые поучительные моменты совместной с Сергеем Ворониным работы над темой "В среднем".

Как-то вместе с Ворониным подсчитали средние квадратические уклонения классов, состоящих из кусочно-постоянных функций, но полученные погрешности к нулю не стремились. *"Гладкость мы не ввели"* первым догадался Сергей, и с тех пор у меня сформировалось, можно сказать, пиететное отношение к давно известным мне классам – измерителям гладкости. В другой раз получили вроде бы оптимальную квадратурную формулу с узлами на границе многомерного куба. На следующий день был субботник в Стекловском институте, где Воронин рассказал Стечкину об этом результате. *"Глупости, в центре хотя бы одна точка должна же быть"*, - бросил Сергей Борисович. То было началом нашего пути к равномерно распределенным сеткам, более известным как метод квази Монте-Карло.

Еще случай, долго думал над вероятностной мерой на классах Коробова с индивидуальными оценками на тригонометрические коэффициенты Фурье, пока не наткнулся на фразу *"Функция может быть задана двояко: либо как правило, либо как полный набор тригонометрических коэффициентов Фурье"* из монографии В.М.Тихомирова, остальное было *"делом техники"*.

Отвечая на вопрос Владимира Михайловича Тихомирова, по наперед заданной стремящейся к нулю положительной числовой последовательности построил такую вероятностную меру,что каждый класс Коробова по ней измерим, и для него средние квадратические погрешности квадратурных формул с равными весами и равномерной сеткой убывают с той заданной точностью, что во мне вызвало чувство разочарования. Возникшее таким образом недоверие к теме было снято С.М.Ворониным, объяснившим, что это наоборот хорошо, ибо показывает гибкость меровведения для приспособления ко всем возможным случаям применений.

Переход к последовательностям коэффициентов Фурье с применением теоремы А.Н.Колмогорова о продолжении мер с конечных размерностей пространств на бесконечномерную, позволил нам ввести вероятностную меру на классах Соболева, тем самым, на классах со взвешенными коэффициентами Фурье. Потом мы с Сергеем Ворониным сделали доклад на семинаре "Теория функций действительного переменного" Д.Е.Меньшова и П.Л.Ульянова в МГУ, где присутствовали прямые специалисты по Мере и интегралу Лебега.

Вернулся в Алматы, оформляю статью и книга С.Сакса "Теория интеграла" упала с письменного стола, за которым я сидел, нагнулся поднять ее и на раскрывшейся странице вижу какие-то знакомые формулы. Оказалось, что построенная нами мера была определена еще Банахом и изложена в Приложении к этой книге Сакса. Так возникла мера Банаха, когда впоследствии я рассказал об этом случае Сергею Борисовичу Стечкину, он как-то неопределенно загадочно произнес *"Вам повезло"*.

Мы с С.М.Ворониным сделали большой доклад на семинаре С.Б.Стечкина, где Сергей Михайлович докладывал о своих продвижениях по решению бинарной проблемы Гольдбаха и пояснял свои промежуточные результаты, на что Сергей Борисович моментально реагировал, в каких других задачах эти приемы могут быть применены. Я же рассказал о мере Банаха и ее применении к задачам в среднем. Сергей Борисович поддержал, опубликовав нашу статью в журнале "Математические заметки", заместителем Главного редактора в котором он тогда состоял.

В тот день, когда Президент Академии наук СССР А.П.Александров созвал совещание по отставанию страны в информатике, я делал доклад на семинаре С.Б.Стечкина. Сергей Борисович с совещания пришел очень возбужденным и рассказал, что, как он выразился, информатику нужно довести до *"железки"*. Мой доклад о подходе "в среднем" воспринял очень хорошо и даже стал говорить своему Семинару, что нужно заниматься наукой именно такого уровня, а мне рекомендовал сообщить Председателю Совета министров Казахской ССР, что занимаюсь важными народнохозяйственными исследованиями. Здесь также надо отметить, что по ведомственной иерархии не подчиняющийся Президенту Академии наук Министр высшего образования издал приказ по всему Советскому Союзу, чтобы каждый преподаватель ВУЗа проходил двухмесячные курсы по информатике.

После того, как набрали достаточное количество результатов, продвижение по теме и возникающий при этом потенциал продолжений решили опубликовать в виде программной статьи. Помнится, мы шли втроем, Анатолий Алексеевич Карацуба, тогда заместитель Главного редактора журнала "Известия Академии наук СССР. Серия математическая", Сергей и я. Сергей советовался с Карацубой (кстати, зачинателем Теории быстрых вычислений, когда решил задачу А.Н.Колмогорова, доказав, что два действительных числа, записанных n знаками можно умножить за $n^{log_3 2}$ элементарных арифметических операций, когда весь мир в течение 4 тысяч лет столбиком умножал за n^2 действий) куда направить статью. Анатолий Алексеевич предложил свой журнал и они дальше обсуждали, кому послать на рецензию. Остановились на Константине Ивановиче Бабенко, как высшем разностороннем специалисте. Но здесь нас постигла неудача, как оказалось, Константин Иванович переезжал в новую квартиру и наша рукопись затерялась (положительную рецензию он дал после отклонения статьи). А второй неудачей было то, что я вопреки предупреждению Сергея в статью вставил теорему, что если иметь чуть-чуть информации, то обычная квадратурная формула с равными весами и равномерной сеткой в квадрат раз лучше метода Монте-Карло, в деталях эта история описана в статье [44].

В продвижении новых идей, по-видимому, замечательным примером является тема поперечников. Андрей Николаевич Колмогоров в 1936 году в Теории приближений поставил вопрос о том, какими данной размерности подпространствами функции данного класса приближать и дал полное решение в модельной ситуации. Казалось бы более чем прозрачная и ясная задача Андрея Николаевича в математически бушующем Советском Союзе без движения пролежала до 1954 года, пока Сергей Борисович Стечкин снова не поднял ее, сам сделал первые результаты и всему миру объяснил смысл этого принципиально нового подхода в Теории приближений. Поэтому решил высказаться еще по одному случаю, который я до сих пор не могу осмыслить.

Казалось бы прозаический вопрос " *Что такое Теория приближений?*" понятен всякому.

Был на представительной Конференции и слушая доклады по Теории функций как-то осознал, что через Компьютерный (вычислительный) поперечник (это то, что мы предлагали и что моментально понял и поддержал Сергей Михайлович Никольский и сразу же представил в Доклады РАН, но там работала какая-то комиссия, которая рецензировала представления академиков и мою статью отклонила с вердиктом "*Не имеет смысла*") можно по-новому взглянуть на Теорию приближений, Вычислительную математику и Численный анализ. Тогда сразу же обратился к Александру Моисеевичу Олевскому, который наряду с Евгением Михайловичем Никишиным и Сергеем Викторовичем Бочкаревым был кумиром вступающих в науку математиков тех лет и получил неожиданный ответ *"Нурлан, что ты меня спрашиваешь, ты же это знаешь лучше меня"*. Порядком ошарашенный обратился к Борису Ивановичу Голубову и Валерию Ивановичу Иванову, надо сказать высоконесущих знамя своих учителей Петра Лаврентьевича Ульянова и Сергея Борисовича Стечкина. Но, к моему удивлению, они как-то дипломатично увернулись от ответа на мой вопрос. Но тех, кто отвечал на мой вопрос, сам парировал (выдвигал в качестве эталона описание Теории вложений из [51]).

В итоге, в Москве в Математическом институте имени В.А.Стеклова РАН на семинаре Сергея Александровича Теляковского делаю доклад на тему "*Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника*". Это было 13 декабря 2018 года, начинаю свое выступление с вводной фразы (но не вопроса!) "*Что такое Теория приближений?*". Вдруг неожиданно С.В.Конягин говорит "*Я не отвечу на этот вопрос*", тогда я рассказал об уклонениях от ответа Олевского, Голубова и Иванова, что Сергей Владимирович констатировал "*Значит я в хорошей компании*".

Когда четыре математика высшей квалификации независимо друг от друга не дают ответа на вопрос о том, в чем специалистами они являются, требует осмысления – это высшей степени ответственность (как у Григория Перельмана) или что-либо другое?

Удивительная наука математика – всего одна фраза специалиста высшего класса может кардинально изменить устоявшиеся представления. Так, от С.В.Бочкарева услышал: "*Нурлан, на твою статью я написал положительный отзыв – мне понравились явные формулы*".

По научной жизни я строил разные контрпримеры и к формулам относился как к чему-то ограниченному, которые не могут отражать тонкости по всему пространству объекта изучения. Сейчас к формулам относимся по другому и каждый раз убеждаемся в их достаточной многоохватности. Обо всем этом, как всеобщем, Федор Алексеевич Богомолов в «*Хороших математиков в России могло бы быть больше* (http://ria.ru, 2 ноября 2011 г.)» говорит так «*Многие вещи я прочувствовал на собственном опыте, а они нет. И для молодого человека – во всяком случае, со мной было именно так - очень важно разговаривать с людьми, которые обладают большими знаниями, которые чувствуют предмет - это вещь неоценимая. Можно весь учебник от корки до корки выучить, а одно замечание преподавателя может полностью перевернуть представления студента о предмете. Мне везло в свое время с такими преподавателями, на всех этапах моего образования рядом оказывались люди, которые словом, объяснением, советом мне очень многое дали. Надеюсь, так же повезет и моим студентам*».

Не могу не отметить причины моего (счастливого!) сотрудничества с С.М.Ворониным (в подробном изложении см.[44]).

Мой научный руководитель по аспирантуре в Стекловском институте П.Л.Ульянов полтора из трех лет обучения заставлял сдавать зачеты и экзамены (чему я очень благодарен!), в том числе "Теорию меры и интеграла" по своей авторской программе: сначала прочитать первые девять глав И.П.Натансона "Теория функций вещественной переменной" (но без решения задач!), затем 4 главы "Теории интеграла" С.Сакса и 6 глав "Теории меры" П.Халмоша и, наконец, прорешать все задачи И.П.Натансона.

Именно по этой причине С.М.Воронин привлек меня к сотрудничеству, поскольку центральным моментом в его Концепции было построение вероятностных мер на естественных в этой проблематике классах С.Л.Соболева, С.М.Никольского и О.В.Бесова, Н.М.Коробова и им подобных , что и было исполнено.

В заключение отметим, что, как недавно стало известно из доклада Б.С.Кашина, посвященного 90-летию со дня рождения выдающегося советского армянского математика Александра Андрониковича Талаляна, в Математическом институте им. В.А.Стеклова АН СССР еще с тех времен существовало правило для аспирантов, окончивших университеты в союзных республиках: пребывание в Москве с сохранением всех привилегий продлевалось еще на полгода. Это, конечно, распространялось и на меня, что компенсировало время, затраченное на предподготовку.

1. Теоретико-функциональный и теоретико-вероятностный подходы к задачам Анализа. Задача приближенного вычисления интегралов возникла одновременно с понятием интеграла (с точки зрения интерпретации интеграла как площади и объема геометрических фигур даже намного раньше - на заре цивилизации).

В современной математике существуют два подхода к этой задаче: теоретико-функциональный и теоретико-вероятностный. Первый подход заключается, по существу, в сравнении различных квадратурных формул, когда за меру действенности квадратурной формулы на каком-либо функциональном компакте принимается максимальное уклонение. Своеобразие второго подхода состоит в том, что сами утверждения об отклонении квадратурной формулы от истинного значения интеграла имеют совершенно иной вид. Именно, чаще всего говорится, что с какой-то вероятностью (близкой к единице) погрешность будет мала [2].

В связи с этим возникают две проблемы. Во-первых, необходимо уметь сравнивать между собой оба подхода (например, для выбора конкретного метода при решении практических задач). Во-вторых, сравнение квадратурных формул по максимальному уклонению представляется все-таки грубым. Именно, два метода могут иметь одну и ту же максимальную погрешность на классе f, в то время как максимальное уклонение одного из них может достигаться только на функциях, которые в математической модели изучаемого процесса являются лишними, своего рода «мусором», которого, к тому же, в определенном смысле «мало», а другой - иметь погрешность, равную или близкую к максимальной, на функциях, которых «много» (количественная характеристика размеров подмножеств функций из класса f естественным образом производится на основе лебеговского меровведения на f). Хотя первый метод очевидным образом предпочтителен перед вторым, в рамках оценки качества приближения по максимальному уклонению оба метода неотличимы друг от друга.

Следующий единый способ оценки погрешности учитывает и в определенном смысле разрешает обе проблемы. Этот подход исходит из естественнонаучного соображения, что при решении какой-либо конкретной задачи естествознания функции встречаются с определенной частотой, т.е. для каждой специфической задачи будет специфический компакт функций и специфическая мера (частота) на нем (например, в геологии закономерность залегания полезных ископаемых ухватывается в мере).

Отметим, что в литературе в качестве открытой проблемы обсуждается вопрос о сравнении вероятностного метода Монте Карло с детерминированным методом Квази-Монте Карло, которому посвящен данный параграф.

Перейдем к точным формулировкам.

2. Средние относительно вероятностных мер на функциональных классах погрешности операторов восстановления.

Пусть дан компакт F числовых (действительно - или комплекснозначных) функций $f(x)$, определенных на s -мерном единичном кубе $[0,1]^s$ и пусть на f задано вероятностное пространство $(F, \sigma A_F, \mu_F)$ с мерой $\mu = \mu_F$. Обозначим через $L^p_\mu(F)\,(1 \le p \le +\infty)$ пространство всех σA_F -измеримых функций $\Psi : F \to R^1$ (или C) таких, что $|\Psi(f)|^p\,\mu_F$ -интегрируема на f.

Теперь сформулируем основное определение: величину

$$\delta^p_N\left(\left(l^{(N)}, \varphi_N\right); L^p_\mu(F), T\right)_Y = \int_F \|u(\cdot; f) - \varphi_N(l_1(f), ..., \ l_N(f); \cdot)\|^p_Y \, d\mu_F(f) \qquad (1)$$

назовем средней (в $L^p_\mu(F)$) *погрешностью восстановления оператора.*

Фактически определение (1) задает общую задачу восстановления (включающую и численное интегрирование), где знак супремума по f в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника заменен на математическое ожидание (или соответствующий момент).

Если же учесть, что при определенных условиях (подробнее об этом см. здесь (14) в п.11)

$$\lim_{p\to+\infty} \delta_N\left(T; l^{(N)}; \varphi_N; Y; L^p_\mu(F)\right) :=$$

$$:= \delta_N\left(T; l^{(N)}; \varphi_N; F\right)_Y \equiv \sup_{f\in F} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(l_1(f), ..., \ l_N(f); \cdot)\|_Y, \qquad (2)$$

т.е. определение (1) есть естественное обобщение соответствующего sup-определения.

Полагая в (1)

$$Tf = \int_{[0,1]} f(x)dx \equiv \int f(x)dx, l_k(f) = f(\xi_k)(k = 1, 2, ..., N), \Lambda(f) = \varphi_N(f(\varepsilon_1), ..., f(\varepsilon_N)), Y = R^1$$

получим среднюю (в $L^p\mu(F)$) погрешность агрегата интегрирования $\Lambda(f)$:

$$\delta^p_\Lambda(F;\mu) \equiv \int\limits_F \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx - \Lambda(f) \right|^p d\mu_F(f). \tag{3}$$

3. Средние погрешности метода интегрирования Монте-Карло. В основе подхода фон Неймана, о котором уже выше шла речь, лежит закон больших чисел в форме неравенства Чебышева $(0 < \eta < 1, \Omega = [0,1]^s)$:

$$m\left\{(t_1, ..., t_N) \in \Omega^N = [0,1]^{sN} : \left|\int_{[0,1]^s} f(x)dx - 1/N\sum_{k=1}^N f(t_k)\right| \le \sigma^2/\sqrt{n} \cdot 1/\sqrt{N}\right\} > 1 - \eta, \tag{4}$$

где $f(x)$ -непрерывная на Ω функция, $\sigma^2 = \int\limits_{[0,1]^s} f^2(x)dx - \left(\int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx\right)^2$, m есть $s\,.\,N$ – мерная классическая мера Лебега.

Другими словами, индексируя множество всевозможных квадратурных формул $N^{-1}\sum\limits_{k=1}^n f(t_k)$ точками $(t_1, ..., t_N)$ из sN-мерного единичного куба Ω^N, снабженного мерой m на нем, получаем, что m-мера всех квадратурных формул, приближающих интеграл

$$\int_{[0,1]^s} f(x)dx$$

с погрешностью не превышающей $\sigma^2\eta^{(-1/2)} \cdot N^{-1/2}$ больше чем $1 - \eta$.

Таким образом, с одной стороны, выбором числа $0 < \eta < 1$ можно m-меру множества $\{...\}$ в (4) сколь угодно близко приблизить к вероятности достоверного события, но, с другой стороны, ни одной конкретной квадратурной формулы из этого массивного в смысле m-меры множества квадратурных формул указать нельзя. Действительно, как включение, так и исключение любой одной квадратурной формулы из множества $\{...\}$ в (4) не отразится на справедливости (4), поскольку мера каждой из них равна нулю.

Построение различных вычислительных процедур, имитирующих независимость и одинаковую распределенность случайных величин

$\xi_k(\omega) = \xi_k(t_1, ..., t) = f(t_k)$ $(k=1,...,N)$,

применением к которым закона больших чисел и было получено (4), составляет содержание метода Монте-Карло.

В рамках (3), средней (в $L^p_\mu(f)$) погрешностью метода интегрирования Монте-Карло, соответствующей сетке (датчику информации) $t_1, ..., t_N$ называют величину

$$\sigma^p_{M-K}(t_1, ..., t_n; F;\mu)_p \equiv \int_F \left|\int_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(t_k)\right|^p d\mu_F(f), \tag{5}$$

а усреднение по всем датчикам обозначим через

$$\sigma^p_{M-K}(n; F;\mu) \equiv \int_{[0,1]^s} \cdots \int_{[0,1]^s} \sigma^p_{M-K}(t_1, ..., t_n; F;\mu)_p dt_1...dt_n \tag{6}$$

Величины (3) и (5)-(6) дают возможность в одних и тех же терминах сравнивать теоретико-функциональные и теоретико-вероятностные методы интегрирования, сравнивая между собой соответствующие числа δ_A для детерминированных методов и математические ожидания от δ_A для методов вероятностных.

Впервые погрешности (3) в одномерном случае относительно меры Винера были определены и изучены А.В. Сульдиным [3] (такой же подход в общих чертах намечен в [4, стр.68-73]), а определения (5) – (6) предложены С.М. Ворониным [1].

4. Построение вероятностных мер на классах функций. Определения (1) и (5) - (6) основаны на применении вероятностных мер на функциональных классах (но через (2) связаны с детерминированностью).

Наиболее известной мерой является, по-видимому, мера Винера, определенная на классе всех непрерывных на $[0,1]$ функций $f(t)$ таких, что $f(0)=0$. В шкале липшицевых классов эта мера сосредоточена на $Lip1/2$ (точнее, мера измеримого множества $Lip\alpha$ равна 1 или 0 смотря по тому, $0<\alpha<1/2$ или $1/2<\alpha<1$), при этом непрерывные нигде не дифференцируемые функции образуют множество полной винеровской меры (см., напр., [5]).

Однако, в различных задачах теории функций (квадратурные формулы, операторы восстановления, поперечники и т.д.) изучаются классы, отражающие те или иные дифференциально-разностные свойства функций. Поэтому задача конструктивного вероятностного мероввведения на функциональных классах, в первую очередь классических, в обсуждаемом круге проблем приобретает принципиальное значение.

Начнем с одной конструкции, в которой на основе конкретизации общей теоремы Колмогорова о продолжении меры [6], приведены эффективные методы построения вероятностных мер на ряде важных в теории функций и в других областях математики функциональных классов (для удобства применения сформулированных в виде двух теорем).

Пусть дано число $s(s=1,2,...)$ и пусть $\Gamma\equiv\{\Gamma_k\}_{k=0}^{+\infty}$ есть последовательность попарно непересекающихся конечных множеств $\Gamma_k\subset Z^s$, объединение которых есть все Z^s. Через d_k обозначим число точек в Γ_k и пусть $\nu_{-1}=0$ и $\nu_k=d_0+d_1+...+d_k$, а $j(m)$ есть фиксированное упорядочение Γ_k. Тогда каждый набор (s -мерную последовательность)

$$Y=\{y_m\}_{m\in Z} \tag{7}$$

комплексных чисел, с учетом равенства $y_m=a_{j(m)}+ib_{j(m)}$, будем считать представленной в виде последовательности $Y=(a_1,b_1,...,a_v,b_v,...)$.

И, наконец, пусть для каждого k на $2d_k$ -мерном евклидовом пространстве R^{2d_k} задана неотрицательная непрерывная функция ψ_k такая, что $\psi_k(0)=0$. Положим $\Psi\equiv\{\psi_\xi\}_{\xi=0}^{\infty}$ и определим классы $U(\Gamma,\Psi)$ как множество всех наборов (7) таких, что для каждого $k(k=0,1,2,...)$ выполнено неравенство

$$\psi_k(a_{\nu-1},b_{\nu-1},...,a_\nu,b_\nu)\le 1.$$

Пусть

$$D_k=(a_{\nu k-1+1},b_{\nu k-1+1}\in R^{2d_k})$$

Через $L(Dk)$ обозначим σ- алгебру всех измеримых по Лебегу подмножеств $D_k, D_k\subset R^{2d_k}$.

Измеримое пространство $(U,F(U))$ определим как наименьшую σ -алгебру, содержащую алгебру $L(U)$ всех цилиндрических множеств $(k=0,1,...;E_k\in L(D_k))$:

$$T(E_k)\equiv\left\{(a_1,b_1,...,a_{\nu_1},b_{\nu_1},...)\in U(\tilde{A},\Psi):\left(a_{\nu_{k-1}+1},b_{\nu_{k-1}+1},...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}\right)\in E_k\right\}$$

Справедлива

Теорема 1 (Н. Темиргалиев [7]). *Каждое из всевозможных вероятностных мер* μ *на измеримом пространстве* $(U,F(U))$ *однозначно определяется заданием последовательности вероятностных мер* μ_k *на измеримом пространстве* $(D_k,L(D_k))$ *таких, что для всех к* $(k=0,1,...)$ *и* $E_k(E_k\in L(D_k))$ *имеет место равенство* $\mu(T_k(E_k))=\mu_k(E_k)$.

Как уже отмечалось выше, это утверждение есть конкретизация теоремы о бесконечном произведении вероятностных пространств $(D_k,L(D_k),\mu_k)$ (см.,напр., [8, с.152-156]).

Если класс $U(\Gamma,\Psi)$ был определен независимыми ограничениями на отдельные конечные части, на которые разбита последовательность (7), то теперь перейдем классам, определяемых ограничениями на последовательность в целом.

Именно, через $B(\Gamma,\Psi)$ обозначим множество всех наборов (7) таких, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(a_{\nu_{n-1}},b_{\nu_{n-1}},...,a_{\nu_n},b_{\nu_n})\le 1.$$

Пусть

$$M_k=\left\{(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k}):\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(a_{\nu_{n-1}},b_{\nu_{n-1}},...,a_{\nu_n},b_{\nu_n})\le 1\right\},$$

а $L(M_k)$ есть σ-алгебра всех измеримых в смысле $2\nu_k$ - мерной меры Лебега подмножеств $M_k, M_k\in R^{2\nu_k}$.

Измеримое пространство $(B,F(B))$ определим как наименьшую σ-алгебру, содержащую алгебру $L(B)$ цилиндрических множеств $(k=0,1,...;E_k\in L(M_k))$

$S(E_k)=(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k},...)\in B(\Gamma,\Psi):(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\in E_k$

Имеет место

Теорема 2 (Н. Темиргалиев [7]). *Каждое из вероятностных мер μ на измеримом пространстве $(B,F(B))$ однозначно определяется заданием последовательности вероятностных мер μ_k на $(M_k,L(M_k))$ таких, что для всех $k(k=0,1,...)$ и всех $E_k\in L(M_k)$ наряду с равенством $\mu(S(E_k))=\mu_k(E_k)$ выполнено следующее условие согласованности $(l=1,2,...)$*

$$\mu_k(E_k)=\mu_{k+1}\Bigg\{(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\in R^{2\nu_{k+1}}:(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k})\in E^k,$$

$$\sum_{n=0}^{k+1}\psi_n(a_{\nu_{n-1}+1},b_{\nu_{n-1}+1},...,a_{\nu_n},b_{\nu_n})\le 1\Bigg\}. \tag{8}$$

В случае абсолютно непрерывных, относительно лебеговой, мер μ_k условия (8) приобретают более обозримый вид, позволяющий эффективно строить соответствующие меры.

Именно, в силу теоремы Радона-Никодима для каждого k найдутся определенные на M_k измеримые в смысле $2\nu_k$-мерной меры Лебега неотрицательные функции $\varphi_k\left(a_1,b_1,...,a_{\nu_{k+1}},b_{\nu_{k+1}}\right)$ такие, что

$$\mu_k(E_k)=\int_{E_k}\varphi_k. \tag{9}$$

Легко видеть, что тогда условия согласованности (8) перейдут в условия

$$\varphi_k(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k})=\int\limits_{A_k}\varphi_{k+1}(a_1,b_1,...,a_{\nu_{k+1}},b_{\nu_{k+1}})da_{\nu_k+1}db_{\nu_k+1}...da_{\nu_{k+1}}db_{\nu_{k+1}}, \tag{10}$$

где

$$A_k=A_k(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k})=\Bigg\{(a_{\nu_k+1},b_{\nu_k+1},...,a_{\nu_{k+1}},b_{\nu_{k+1}}):$$

$$\psi_{k+1}(a_{\nu_k+1},b_{\nu_k+1},...,a_{\nu_{k+1}},b_{\nu_{k+1}})\le 1-\sum_{n=0}^{k}\psi_n(a_{\nu_{n-1}+1},b_{\nu_{n-1}+1},...,a_{\nu_n},b_{\nu_n})\Bigg\}.$$

В свою очередь, функции φ_k, удовлетворяющие условиям (9) и (10), можно задать посредством функций t_k таких, что

$$\int_{A_k}t_{k+1}(a_1,b_1,...,a_{\nu_k},b_{\nu_k})da_1db_1...da_{\nu_k+1}db_{\nu_k+1} \tag{11}$$

для почти всех $(a_1, b_1, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k}) \in D_k$, и тогда

$$\varphi_k(a_1, b_1, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k}) = \prod_{n=0}^{k} t_n(a_1, b_1, ..., a_{\nu_n}, b_{\nu_n}), \tag{12}$$

причем выполнение условий (9) - (10) эквивалентно выполнению условий (11)-(12).

Отметим, что случай, когда t_k не зависит от $(a_{\nu_{k-1}+1}, ..., b_{\nu_k})$ изучался С. Банахом [9] (см. также [10]).

Поскольку функция может быть определена не только как правило, но и посредством задания полного набора ее коэффициентов Фурье по некоторой полной ортогональной системе, то соответствующим образом конкретизируя Γ_k и ψ_k в теоремах 1 и 2, получим вероятностное пространство $(\Omega,\, F,\, \mu)$ в случаях, когда $\Omega = SB_{p,\theta}^{r_1,\ldots,r_s}\,(0,\,1)^s$ $(s = 1, 2, ...; r > 0; 1 < p < \infty; 1 \leq \theta \leq +\infty)$ - классы Никольского – Бесова (см.[11, с.75-76]), $\Omega = SB_{p,\theta}^{r_1,\ldots,r_s}\,(0,\,1)^s$ - классы Никольского – Бесова – Аманова функций с доминирующей смешанной производной (см.[12], [13]), $\Omega = E_s^r$ - классы Коробова, $\Omega = W_2^r\,(0,\,1)^s$ - классы Соболева; $\Omega = SW_2^r\,(0,\,1)^s$ - классы Соболева с доминирующей смешанной производной.

Вероятностные меры на классах $U_s\,(\beta, \theta, \alpha, \psi)$ определяется в том же порядке идей, что и для классов Коробова E_s^r (см. [14], а также [15]): как счетное произведение вероятностных мер на кругах в точке O радиуса

$$r_m = \prod_{j=1}^{s} \bar{m}_j^{\beta_j} \theta_j^{m_j^{\frac{1}{\alpha_j}}}\, \psi_j\,(\bar{m}_j)\,.$$

В эту же схему укладывается и способ мероввведения через значения определяющих классы тригонометрических полиномов в узлах равномерной сетки, как это предложено в [16] для классов $H_p^r = B_{p,\infty}^r\,(0,\,1)$.

Вероятностная мера на шаре (в $L^p\,(0,1)^s$) тригонометрических полиномов от s переменных со спектром из параллелепипеда в Z^s построена в [17] Ш. Дильдабековой (Абикеновой).

Вероятностная мера на классе $Lip\,(\alpha, p)$ $(0 < \alpha < 1,\, 1 \leq p \leq \infty)$, основанный на одном критерии К.И. Осколкова [18], определена Е. Нурмолдиным [19].

Н. Темиргалиевым [20] дано построение вероятностных мер с привлечением безгранично делимых распределений. Эти меры являются далеко идущим обобщением мер Винера.

В заключение отметим, что подход «в среднем» с использованием различных вероятностных моделей является предметом исследований в разных областях математики и информатики (например, в линейном и целочисленном программировании, см. [21; стр. 218-225]).

Разумеется, приведенные выше способы мероввведения на классических и новых классах функций, также вписываются в обсуждаемую тематику. В связи с этим повторим взгляд на данную проблематику одного из крупнейших специалистов [22], выраженный в письме от 12 февраля 1990 года: «*Уважаемый Нурлан! ...Ваш подход к модели среднего случая представляется мне естественным и разумным, результаты – полезными. ...Они согласуются с концепциями покойного К.И.Бабенко в современной вычислительной математике. Ваш Н.Н.Ченцов*».

5. Одно замечание относительно теоретико-функциональных и теоретико-вероятностных постановок задач.

В отличие от задачи нахождения оптимальных порядков квадратурных формул на классах функций в «максимальной» постановке, где искомые порядки определяются параметрами классов, в постановке «в среднем» (3) такой определенности относительно параметров класса уже нет- необходимо учитывать и особенности меры. Именно, справедлива

Теорема 3 (Н. Темиргалиев [23]). *Существует функциональное пространство* $\Omega = T_1$ *, содержащее при каждом* $r > 1$ *класс функций*

$$E^r = \left\{ f\left(x\right) = c_0 + \sum_{n \in Z \setminus \{0\}} c_n e^{2\pi i n x} : |c_n| \leq \frac{1}{\left(1+|n|\right)^r}, \, n \in Z \setminus \{0\} \right\}$$

и σ *- алгебра* $\mathbf{A}$ *ее подмножеств такая, что для каждой положительной убывающей к нулю последовательности* $\varepsilon = \{\varepsilon_N\}_{N=1}^{\infty}$ *на измеримом пространстве* (Ω, A) *можно ввести такую меру* μ_ε *, что для каждого* $r > 1$ *класс* $E^r \mathbf{A}$ *–измерим и имеет меру* $\mu_\varepsilon(E^r) = 1/2^{r-1}$ *и, в то же время, для всех* $N \geq N\left(\varepsilon\right)$ *имеет место неравенство*

$$1/\mu_\varepsilon(E^r) \int_{E^r} \left| \int_0^1 f(x)dx - 1/N \sum_{k=1}^{n} f(k/N) \right| d\mu_\varepsilon(f) \leq \varepsilon_N.$$

Другими словами, фиксируя классы E^r конечное число раз дифференцируемых функций, фиксируя значения мер E^r равными $1/2^{r-1}$, способ интегрирования - формулу прямоугольников с равномерной сеткой, только за счет распределения меры μ на (Ω, A) можно добиться того, чтобы соответствующие средние погрешности на каждом из классов E^r убывали с заданной (сколь угодно большой) скоростью $\varepsilon \downarrow 0$.

Разумеется, в каждом случае конкретного применения, мера должна быть выбрана по конкретным частотным данным изучаемого процесса, равно как и сам класс, определяемый по априорным свойствам процесса.

В свете приведенного примера, оптимизационные задачи "в среднем" можно ставить в необозримом количестве постановок, поскольку к задачам, описанным в [45-46], присоединяются оптимизационные задачи при фиксированных вероятностной мере или же классах мер.

Чаще всего в роли вероятностных мер выступают мера Винера или же более общие гауссовские меры.

Так, обзор последних результатов по восстановлению в «среднем» относительно общих гаусовских мер дан статье [24].

Конечно, аналогичные постановки можно распространить на определенные здесь в п. 4 меры на классических функциональных классах, и не только на них.

6. Средние погрешности детерминированных квадратурных формул.

Впервые вопрос об эффективности квадратурных формул с точки зрения частотности появления функций изучался А.В. Сульдиным [3], где в одномерном случае в L^2 - норме найдены оптимальные квадратурные формулы относительно меры Винера.

Впоследствии, с меняющейся во времени интенсивностью, эта тематика привлекала внимание разных математиков из различных стран (см., напр., [1], [25] – [26]) в основном относительно меры Винера и гауссовской меры.

Первое применение вероятностных мер, отличных от гауссовских, к вопросам квадратур дано, по-видимому, в работе Н. Темиргалиева [15], где задачи (3) и (6) изучались относительно введенной там вероятностной меры на классе Коробова E_s^r .

Первая мера, отличная от винеровской, как уже сообщалось выше, была определена на компактах из l_2 еще С. Банахом [9], применение ее к вопросам квадратур дано в [10].

Определенные в п.4 вероятностные меры применены к оценкам погрешности приближенного интегрирования в работах [20], [27] и такого сорта применения могут быть продолжены.

В качестве примера приведём одно утверждение с небольшим комментарием (в формулируемой ниже теореме мера μ на классе $SH_2^r(0,1)^s$ определяется по теореме 1 с учетом специфики класса)

Теорема 4 (Н. Темиргалиев[27]). *Пусть* $l = s + 1 (3 \leq l \leq 19)$ *- простое число и* $r > 1/2$ *. Тогда для любого* $R \geq$ *найдутся простое* $p, p \equiv 1 (mod l), p \leq R ln^s R$ *и соответствующий этому* p *набор целых чисел* $a_1, ..., a_s$*, для отыскания которых согласно алгоритму 1-5 достаточно выполнить* $<< R ln^s R ln ln R$ *элементарных арифметических операций, такие что*

$$\delta_p^2 \equiv \int\limits_{SH_2^r(0,1)^s} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(t)dt - \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} f(\frac{na_1}{p},...,\frac{na_s}{p}) \right|^2 d\mu(f) \prec_{s,r} R^{-(2rR+1)}$$

.

Отсюда следует, что для класса $SH_2^r(0,1)^s$ погрешность δ_p в L^2-норме относительно соответствующей меры убывает со скоростью, чуть меньшей геометрической прогрессии: $\delta_p << a^{p/(lnp)^{s-1}}$ для некоторого $0 < a < 1$. Для сравнения напомним, что sup-погрешности формулы прямоугольников с равномерной сеткой для классов, составленных из аналитических функций, убывают со скоростью геометрической прогрессии.

В связи с этим отметим, что трудности построения оптимальных или близких к оптимальным квадратурных формул при "максимальном" подходе, вообще говоря, не облегчаются при подходе "в среднем"(напр., здесь, как и в [47-50], приходится применять развитые теоретико-числовые методы).

В заключение, приведем пример решения оптимизационной задачи относительно вероятностной меры, которая приводит к новым сеткам, и, стало быть, к новым квадратурным формулам. Именно, рассматривается задача минимизации относительно весов $c_1, c_2, ..., c_n$ и узлов $0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_n \le 1$ уклонения квадратурной формулы в среднем квадратическом относительно меры μ_{O-U} Орнштейна-Уленбека на пространстве непрерывных функций с корреляционной функцией

$$B(t,s) = \exp\{-|t-s|\}.$$

Справедлива

Теорема 5 (Н. Альжанова [28]). *Для каждого* $n, n = 2, 3, ...)$ *минимум величины*

$$\int\limits_C \left| \int\limits_0^1 f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} c_i f(t_i) \right|^2 d\mu_{O-U}(f)$$

достигается при $t_i = t_1 + \frac{i-1}{n-1}(1-2t_1), c_i = 2(1-e^{-t_1})$, *где* t_1 *является единственным решением уравнения* $e^{2t_1}\left(2e^{t_1-1}\right)^{n-1}$ *и находится в интервале* $(0,1)$.

Н. Альжановой [28 -30] также получены наилучшие квадратурные формулы в среднем квадратичном относительно условной меры Винера и меры Орнштейна-Уленбека и их приложения к вычислению в среднем весовых интегралов (в частности, коэффициентов Фурье).

7. Универсальная порядковая скорость убывания средних погрешностей методов интегрирования Монте-Карло. Как это видно из (4), скорость сходимости по вероятности квадратурных формул к истинному значению интеграла для индивидуальной непрерывной функции есть $\succ\prec 1/\sqrt{N}$.

Эта скорость оказалось универсальной для средних погрешностей метода интегрирования Монте-Карло (6). Именно, справедлива

Теорема 6 (С.М. Воронин, Н. Темиргалиев [31]). *Пусть дан компакт* F *действительнозначных функций, определенных на* $[0,1]^s$*(s=1,2,...)* . *Пусть на* F *задана* σ *-алгебра подмножеств и вероятностная мера* μ_F *на ней. Тогда для любого* μ_F *-измеримого множества* $E \subset F$ *с* $\mu_F(E) > 0$ *справедливы неравенства*

$$\frac{\sqrt{A_E^3}}{\sqrt{3(N-1)A_E + B_E}} \le \int\limits_{[0,1]^s} \cdots \int\limits_{[0,1]^s} \int\limits_E \left| \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_k) - \int\limits_{[0,1]^s} f(x)dx \right| d\mu_F(f)dt_1 \dots dt_N \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{C_E \mu_F(E)},$$

где

$$A_E \equiv \int\limits_E f_2^2 d\mu_F(f)\,,\ B_E \equiv \int\limits_E f_4 d\mu_F(f)\,,\ C_E \equiv \int\limits_E f_2 d\mu_F(f)\,,\ a\ \ f_p =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^s} \left| f(t) - \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx \right|^p dt.$$

Отсюда следует, что в двусторонней оценке величины (6) при конкретизации мер речь может идти лишь об уточнении констант.

Принципиальный вывод: В концепции С.М.Воронина средние погрешности (вероятностного) метода численного интегрирования Монте-Карло имеют универсальную погрешность порядка $\frac{1}{\sqrt{N}}$, поэтому этот подход в случае численного интегрирования сводится к нахождению скоростей убывания средних погрешностей(детерминированных) квадратурных формул.

8. Математическое ожидание Колмогоровской sup- погрешности численного интегрирования. Помимо (6), возможны и другие характеристики метода интегрирования Монте-Карло. Одна из них приведена в [32], где для математического ожидания Колмогоровской sup- погрешности следующая оценка снизу

$$\delta_{M-K}(F)_N \equiv \int\limits_{[0,1]^s} \ldots \int\limits_{[0,1]^s} \sup_{f\in F} \left| \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_k) \right| dt_1 \ldots dt_N \geq c(F)/\sqrt{N}$$

.

З а д а ч и. Вероятно, небезынтересной является задача получения двусторонних оценок (совпадающих или нет) для характеристики $\delta_{M-K}(F)_N$ и ей аналогичных для различных конкретных мер.

Быть может, имеет смысл изученные ранее задачи, относящиеся к методу Монте-Карло, рассмотреть относительно мер на классах функций.

9. Дискретизация решений уравнений в частных производных в среднем.

Это есть, по-видимому, перспективная тематика, в которой не лишены смысла многообразные вариации постановок задач восстановления функций из классов и дискретизации решений уравнений, причем количество задач увеличивается за счет различных способов мероввведения на функциональных классах.

Для иллюстрации сказанного приведем одну общую теорему.

Теорема 7 (Н. Темиргалиев [33]). *Пусть даны $l = s+1 (3 \leq l \leq 19)$ -простое число, $r > 1$, $SW_2^r(0,1)^s$ - соболевский класс функций с доминирующей смешанной производной с мерой Банаха на ней, соответствующая последовательности*

$$\Gamma_k = \left\{ m \in Z^s : \prod_{j=1}^{s} max(1; |m_j|) \leq g(k) \right\},$$

где g(t) -определенная на $[0,+\infty)$, положительная, непрерывная, строго возрастающая произвольная функция (определение меры Банаха см. в п.4).

Пусть I - отрезок из $[0,+\infty)$ и пусть на I для каждого $m \in Z^s$ определена непрерывная функция $\rho_m(t)$, такая, что для каждой функции $f \in SW_2^r(0,1)^s$ ряд

$$u(t,x,f) = \sum_{m\in Z^s} \rho_m(t) \hat{f}(m) e^{2\pi(m,x)} \tag{13}$$

сходится абсолютно при всяком $t \in I$.

Тогда для каждого $b \geq (l,g)$ найдутся простые $p, p \equiv 1(modl), p \leq T_b = c(s)g^2(b) \cdot ln^s g(b)$ и целые числа $a_1,...,a_s$, которые согласно алгоритму 1-5 из §1.А можно отыскать за $<< T_b lnln T_b$ элементарных арифметических операций и такие, что выполнено неравенство

$$\int\limits_{SW_2^r(0,1)^s}\int\limits_I\int\limits_{[0,1]^s}\left|u\left(t,x,f\right)-\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p}f\left(\xi_n\left(a\right)\right)\sum_{m\in\Gamma_b}\rho_m\left(t\right)e^{2\pi i(m,\xi_n(a)-x)}\right|^2 dxdtd\mu(f)\underset{r,g,s}{<<}$$

$$\underset{r,g,s}{<<}\left(\sum_{m\in\Gamma_b}\bar{\rho}_m^2\right)\sum_{k=b+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{g^{2r}(k-1)}+\sum_{k=b+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{g^{2r}(k-1)}\cdot\frac{1}{|\Gamma_k\ \Gamma_{k-1}|}\cdot\sum_{m\in\Gamma_k\ \Gamma_{k-1}}\bar{\rho}_m^2,$$

где

$$\int\limits_I\left[\rho_m\left(t\right)\right]^2dt\equiv\bar{\rho}_m^2.$$

Из этой общей теоремы, в частности, следуют оценки восстановления решений классических уравнений математической физики, поскольку при $\rho\left(t,m\right)=e^{-4\pi^2(m,m)t}(m\neq 0)$ и $\rho(t,0)=0$ функция (13) есть решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial_s^2},\ u\left(0,x\right)=f(x)\in SW_2^r\left(0,1\right)^s,$$

а при $\rho(t,m)=-1/4\pi^2(m,m)(m\neq 0)$ и $\rho(t,0)=0$ решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial_s^2}=f\in SW_2^r\left(0,1\right)^s,$$

и, наконец, при

$$\rho(t,m)=cos\left(t\sqrt{(m,m)}\right)\quad\rho(t,m)=4\pi^2 sin\left(t\sqrt{(m,m)}\right)/\sqrt{(m,m)},\ \rho(0,m)=0$$

решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial_s^2}$$

с начальными условиями

$$u\left(0,x\right)=f(x)\in SW_2^r\left(0,1\right)^s,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(0,x\right)=0$$

и

$$u\left(0,x\right)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(0,x\right)=f(x)\in SW_2^r\left(0,1\right)^s$$

соответственно.

10. Поперечники в среднем. Разумеется, подход "в среднем" возможен не только для рассмотренных выше приближенных методов интегрирования и восстановления, но и для других задач, получивших развитие в "максимальной" постановке (и не только для них).

К таким задачам относятся и задачи о вычислении поперечников.

Первое определение поперечника "в среднем" дано, по-видимому, С.М. Ворониным и Н. Темиргалиевым в [34]:

$$d_n\left(F,L_\mu^p,X\right)\equiv\inf_{T_n}\left\{\int\limits_F\left(\inf_{g\in T_n}\|f-g\|_X\right)^p d\mu_F\left(f\right)\right\}^{\frac{1}{p}},$$

где F – центрально-симметрический компакт в линейном нормированном пространстве X размерности $\geq n;\mu_F\left(f\right)$- вероятностная мера в $F;L_\mu^p\left(F\right)$- пространство всех μ_F- измеримых функций $\Psi:F\to R^1$, таких, что $|\Psi\left(f\right)|^p$ интегрируема; T_n- линейное подпространство X размерности n. Здесь же, в [34], была установлена оценка сверху этого типа поперечника для одномерного класса Соболева, снабженного мерой Банаха:

Теорема 8 (С.М. Воронин, Н. Темиргалиев [34]). Имеет место неравенство

$$d_{2n}\left(\tilde{W}_2^r, L^2_{\mu W}, L^2(0,1)\right) \equiv \inf_{T_{2n}} \left\{ \int\limits_{\tilde{W}_2^r} \left(\inf_{g\in T_{2n}} \sqrt{\int_0^1 |f(x)-g(x)|^2\,dx} \right)^2 d\mu_W(f) \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left[\frac{1}{2} \sum_{k=2n-1}^{\infty} \int\limits_{D_k} c_k^2 \varphi_k(c_1,...,c_k)\,dc_1...dc_k \right]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$D_k = \left\{ (c_1,...,c_k) \in R^k : \sum_{i=1}^{k} (c_i\lambda_i)^2 \le \frac{2}{(2\pi)^{2r}} \right\}, \lambda_{2i-1} = \lambda_{2i} = i^2$$

.

Развитие этих задач возможно в различных направлениях и постановках (см. об этом, напр., [35 - 37]).

11. Применение вероятностных мер к задаче вычисления экстремума функционала. Многие задачи естествознания приводят к задаче нахождения экстремума функционала. Большинство известных способов решения задач на экстремум основаны на одном соображении Ферма (см.,напр., [38], [39]). Именно, в точках экстремума производная либо отсутствует, либо существует и равна нулю.

В случае функции одной переменной принцип Ферма является весьма эффективным, так как граница отрезка, т.е. множество точек, где двусторонняя производная не определена, состоит всего из двух точек. При увеличении размерности граница становится очень сложной.

Предлагается следующий подход к задаче поиска приближенного значения экстремума, не основанный на многомерном принципе Ферма.

Пусть K есть компакт банахова пространства B и на K задан некоторый неотрицательный непрерывный функционал $f(x)$. Мы ставим перед собой следующую задачу: для заданного $\varepsilon > 0$ найти с этой точностью $\underset{x\in K}{max} f(x)$, т.е. указать такое m_ε, что

$$\underset{x\in K}{max} f(x) \equiv f(x_{max}) \ge m_\varepsilon > f(x_{max}) - \varepsilon.$$

Число m_ε будем называть ε - *максимумом* функционала f на K.

Предположим, что на компакте задана борелевская, т.е. такая положительная на открытых множествах единичная мера μ, что для каждого $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\inf_{x\in K} \mu(U_\delta(x)\cap K) \equiv \alpha(\delta) > 0,$$

где $U_\delta(x)$ есть δ-окрестность в B точки x.

Это ограничение на меру существенно, ибо тогда

$$\underset{r\to+\infty}{lim} \left(\int\limits_K f^r(x)d\mu(x) \right)^{\frac{1}{r}} = \underset{x\in K}{max} f(x). \tag{14}$$

Пусть число M таково, что $f(x) \le$ для всех $x \in$. Например, если $f(x_0) = 0$ для некоторого $_0 \in$, то за можно принять $\omega(diamK; f)$, где

$$diamK \equiv \sup_{x,y\in K} \|x-y\|_B, \omega(\delta; f) \equiv \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y\in K, \|x-y\|_B \le \delta\}.$$

Теперь в терминах модуля непрерывности функционала f оценим, каким должно быть r_ε, чтобы при всех $r \geq r_\varepsilon$ выполнялось соотношение

$$f\left(x_{max}\right) - \left(\int\limits_K f^{2r}(x)d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2r}} < \epsilon.$$

Имеет место

Теорема 9 (С.М. Воронин, Н. Темиргалиев [40]). *Пусть даны числа* $0 < \varepsilon < M$. *Тогда если* $\omega(\delta_\varepsilon, f) = \varepsilon/2$ *и* $r \geq \ln \alpha(\delta_\varepsilon)\left[2\ln\left(\frac{M-\varepsilon}{M-\varepsilon/2}\right)\right]$ *то*

$$f(x_{max}) - \varepsilon \leq m_{r,\varepsilon} \equiv \left(\int_K f^{2r}(x)d\mu(x)\right)^{1/2r} \leq f\left(x_{max}\right),$$

т.е. величина $m_{r,\varepsilon}$ *является* ε *- максимумом функции* $f(x)$ *на* K.

При практическом применении теоремы 9 целесообразно, варьируя мерой μ и числом δ, добиться выполнения неравенства

$$\left(1 - \alpha^{r/2}(\delta)\right)^{-1}\left(\varepsilon - \omega(\delta; f)\alpha^{r/2}(\delta)\right) \geq M$$

при возможно меньшем $r > 1$.

$$P_N(x) \equiv P_N(x_1, ..., x_s) = \sum_{\substack{(n_1,...,n_s):\\ n_j=0,1,...,N(j=1,...,s)}} a_{n_1,...,n_s} x_1^{n_1}\cdots x_s^{n_s}, \tag{15}$$

где N - целое положительное число; коэффициенты $a_{n_1,...,n_s}$ -действительные числа.

Требуется указать достаточно эффективный алгоритм для нахождения ε -максимума $|P_N(x)|$ на единичном кубе $[0,1]^s$.

Для того чтобы применить теорему 8 выразим число M и модуль непрерывности $\omega(\delta, f)$ через коэффициенты многочлена $P_N(x)$. Ясно, что для всех $x = (x_1, ..., x_s) \in [0,1]^s$ справедливо $|P_N(x)| \leq M \equiv \sum\limits_{\substack{(n_1,...,n_s):\\ n_j=0,1,...,N(j=1,...,s)}} |a_{n_1,...,n_s}|$.

Далее, если $\|x - y\| \equiv \max\limits_{j=1,...,s} |x_j - y_j|$, то

$$|P_N(x_1, ..., x_s) - P_N(y_1, ..., y_s)| \leq C\|x - y\| \equiv \omega(\|x - y\|, P_N),$$

где $C = \sum\limits_{\substack{(n_1,...,n_s):\\ n_j=0,1,...,N(j=1,...,s)}} (n_1 + \cdots + n_s)|a_{n_1,...,n_s}|, \omega(\delta, P_N) = C\delta$.

В качестве меры μ возьмем s-мерную меру Лебега. Тогда

$$\alpha(\delta) \equiv \inf_{x\in[0,1]^s} \mu(U_s(x) \cap [0,1]^s) = \delta^s.$$

где $U_s(x) = \{y \in [0,1]^s : \|x - y\| < \delta\}$.

Непосредственным следствием теоремы 9 является следующая (см. [40]):

Теорема 10. *Пусть дан алгебраический многочлен s переменных* (15). *Тогда если целое число r таково, что*

$$r \geq \frac{s}{2}\cdot(\ln\varepsilon/2C)(\ln\frac{M-\varepsilon}{M-\varepsilon/2})^{-1} \qquad (0 < \varepsilon < M),$$

то имеет место неравенство

$$\|P_N\| \equiv \max_{x\in[0,1]^s} |P_N(x)| \geq \left\{\int_0^1 \cdots \int_0^1 |P_N(x_1, ..., x_s)|^{2r} dx_1 \cdots dx_s\right\}^{1/2r} \geq \|P_N\| - \varepsilon$$

Перспективы. Предложенный здесь подход, безусловно, многообещающий, находится в зачаточном состоянии. Построение борелевских мер с заданными свойствами может оказаться полезным не только в рассмотренной здесь задаче, но и для решения других задач в «максимальной» постановке.

12. Дискретизация в среднем квадратичном относительно вероятностных мер решений уравнения Клейна – Гордона. Пусть задан компакт F числовых (действительных или комплекснозначных) функций $f(x)$, определенных па s-мерном единичном кубе $[0,l]^s$, и пусть на F заданы σ-алгебра σA_F подмножеств F и на ней вероятностная мера $\mu = \mu_F$. Обозначим через $L^p_\mu(F)$ $(1 \le p < +\infty)$ пространство всех σA_F-измеримых функций $\Psi : F \to R^1$ (или C) таких, что $|\Psi(f)|^p \mu_F$-интегрируема на F.

Величину

$$\delta^p\left(T; l^{(N)}; \varphi_N; Y; L^p_\mu(F)\right) = \int_F \|u(\cdot;f) - \varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); \cdot)\|^p_Y \, d\mu_F(f) \qquad (16)$$

назовем средней $(L^p_\mu(F))$ погрешностью восстановления $Tf = u(\cdot;f)$.

Определение (16) основано на построении вероятностных мер на функциональных классах. В случае классов Никольского $SH^r_2(0,1)^s$ с доминирующей смешанной производной вероятностные меры определены в [7]. Для класса $H^r_2(0,1)^s$ построение меры проводится по тому же методу. Именно положим

$$\beta(k) = \left\{m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s : 2^{k-1} < \|m\| \le 2^k\right\}, k = 0,\ 1,\ \dots .$$

Поскольку $\beta(k) = \left(\left[-2^k; 2^k\right]^s \setminus \left[-2^{k-1}; 2^{k-1}\right]^s\right) \cap Z^s$ для $k = 1,\ 2,\ \dots$ и в кубе $\left[-2^k,\ 2^k\right]^s$ количество точек с целыми координатами равно $\left(2^{k+1}+1\right)^s$, то количество элементов множества $\beta(k)$ равно $g(k) = \begin{cases} \left(2^{k+1}+1\right)^s - \left(2^k+1\right)^s, & k \ge 1, \\ 3^s - 1, & k = 0. \end{cases}$

Всякая функция f из класса $H^r_2(0,1)^s$ полностью определяется набором всех тригонометрических коэффициентов Фурье-Лебега $\hat{f}(m) = a_f(m) + ib_f(m)$, удовлетворяющих (согласно определению класса) неравенству

$$2^{-2rk} = \left(2^{-rk}\right)^2 \ge \sum_{m \in \beta(k)} \left|\hat{f}(m)\right|^2 = \sum_{m \in \beta(k)} \left(a^2_f(m) + b^2_f(m)\right) = \sum_{j=1}^{2g(k)} \left[f^{(k)}_j\right]^2 .$$

Поэтому можно установить взаимно-однозначное соответствие между всеми функциями f из класса $H^r_2(0,1)^s/const$ и всеми числовыми последовательностями $(f_1, f_2, ..., f_k, ...)$, где $f_k = \left\{\hat{f}(m)\right\}_{m \in \beta(k)} = \left\{f^{(k)}_1, ..., f^{(k)}_{2g(k)}\right\}$.

Пусть $B_k = \left\{y = \left(y_1, ..., y_{2g(k)}\right) : (y,y) \le 2^{-2rk}\right\}$. Положим

$$\beta(k) \ni m \overset{d_k}{\leftrightarrow} d_k(m) \in \{1, ..., g(k)\}, j = d_k\left(m^{(j)}\right),$$

$$x_{2j-1} = a_f\left(d^{-1}_k(j)\right) = f^{(k)}_{2j-1}, x_{2j} = b_f\left(d^{-1}_k(j)\right) = f^{(k)}_{2j}, j = 1,\ 2,\ ..., g(k),$$

тогда

$$H^r_2(0,\ 1)^s/const \ni f(x) = \sum_{m \in Z^s_0} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i(m,x)} \leftrightarrow \prod_{k=0}^{\infty} B_k = B.$$

Перейдем в B_k к сферическим координатам:

$$y_j = \tau \cos\varphi_{j-1} \prod_{\wp=j}^{2g(k)-1} \sin\psi_\wp, j = 1,\ 2,\ ...,\ 2g(k) - 1,$$

$$\psi_0 = 0, \psi_1 \in [0, 2\pi), \psi_j \in [0,\pi), j = 2, ..., 2g(k) - 1, 0 \le \tau \le 2^{-rk}.$$

Положим

$$V_k\left(\rho_1, \rho_2; \left[\psi^{(1)}_1, \psi^{(2)}_1\right),\ ...,\ \left[\psi^{(1)}_{2g(k)-1}, \psi^{(2)}_{2g(k)-1}\right)\right) =$$

$$\begin{cases} u = \left(u_1, u_2, ..., u_{2g(k)}\right) : u_j = y_j,\ j = 1, 2, ..., 2g(k) - 1 \\ \rho_1 \le \tau\rho_2,\ \psi^{(1)}_j \le \psi_j < \psi^{(2)}_j, j = 1,\ ...,\ 2g(k) - 1 \end{cases},$$

где $0 \le \rho_1 < \rho_2 \le 2^{-rk}$, $0 \le \psi_j^{(1)} < \psi_j^{(2)} \le \pi, j = 2, 3, ..., 2g\,(k) - 1, 0 \le \psi_1^{(1)} < \psi_1^{(2)} \le 2\pi$.

Тогда имеет место вложение

$$V_k \left(\rho_1, \rho_2; \left[\psi_1^{(1)}, \psi_1^{(2)}\right), ..., \left[\psi_{2g(k)-1}^{(1)}, \psi_{2g(k)-1}^{(2)}\right)\right) \subset V_k \equiv V_k \left(0, 2^{-rk}; [0, 2\pi)\,, [0, \pi)\,, ..., [0, \pi)\right) = B_k.$$

Пусть дана положительная последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{+\infty}$ такая, что $\varepsilon_k \downarrow 0\,(n \uparrow +\infty)$. На множестве $V_k = B_k$ определим предмеру следующим образом:

$$m_k \left(V_k \left(\rho_1, \rho_2; \psi_1^{(1)}, \psi_1^{(2)}, ..., \psi_{2g(k)-1}^{(1)}, \psi_{2g(k)-1}^{(2)}\right)\right) = (\lambda\,(\rho_2) - \lambda\,(\rho_1)) \cdot \frac{\psi_1^{(1)} - \psi_1^{(2)}}{2\pi} \times$$

$$\times \frac{\psi_2^{(1)} - \psi_2^{(2)}}{\pi} \cdots \frac{\psi_{2g(k)-1}^{(1)} - \psi_{2g(k)-1}^{(2)}}{\pi}, \tag{17}$$

где $\lambda_k\,(\tau) = 2^{(k+1)\varepsilon_{k+1}^2} \cdot \tau^{\frac{(k+1)\varepsilon_{k+1}^2}{rk}}$, $\tau \in \left[0, 2^{-rk}\right]$. Тогда, согласно лебеговой процедуре построения меры, приходим к вероятностной мере μ_k на B_k . Далее, произведение вероятностных мер $\prod_{k=0}^{\infty} \mu_k = \mu$ приводит к искомой мере на $B = \prod_{k=0}^{\infty} B_k$, стало быть, и на $H_2^r\,(0,1)^s\,/const$.

Для решений $u\,(x, t, f, 0)$ уравнения Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - u \;\; (u = u\,(x, t)\,, 0 \le t < \infty, x \in R^s,\; s = 1, 2, ...)$$

$$u(x, 0) = f(x) \in H_2^r\,(0,1)^s\,,\; \frac{\partial u}{\partial t}\,(x, 0) \equiv 0$$

справедлива

Теорема 11 (И. Ж. Ибатулин, Н. Темиргалиев [41]). *Пусть даны целое положительное число s и положительное r такие, что $r > 2 + \frac{s}{p}$. Пусть также дана положительная последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{+\infty}$ такая, что $\varepsilon_k \downarrow 0\,(k \uparrow +\infty)$ и пусть μ – вероятностная мера на $H_2^r\,(0,1)^s\,/const$, построенная по предмере (17). Тогда имеют место соотношения ($N = 2^s, 2^s + 1, \dots$)*

$$\tilde{\delta}_N = \left(\int\limits_{H_2^r} \left\| u\,(x, t; f, 0) - \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} f\left(\zeta^{(k)}\right) \sum_{m \in A_n} \cos\left(t\sqrt{4\pi^2\,(m, m) + 1}\right) e^{2\pi i\left(m, x - \zeta^{(k)}\right)} \right\|^2_{L^{2,\infty}(0,1)^s \times [0;+\infty)} d\mu\,(f) \right)^{1/2} \underset{s,r}{\ll} N^{-\frac{r}{s}} \varepsilon_n,$$

где $n = [\log_2 N/s]\,, A_n = \left[-2^{n-1}, 2^{n-1}\right)^s \bigcap Z^s, N' = 2^{ns}, \left\{\zeta^{(k)}\right\}_{k=1}^{N'}$ - равномерная сетка.

Если же на последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{+\infty}$ наложить дополнительные условия $\varepsilon_n = O\,(\varepsilon_{n+1})$ $(n \to +\infty)$, то справедливы соотношения ($N = 1, 2, \dots$)

$$\tilde{\delta}_N \underset{s,r}{\asymp} N^{\frac{-r}{s}} \varepsilon_n.$$

Замечание. Смысл теоремы 11 заключается в следующем: для любой наперед заданной последовательности $\{\Delta_N\}_{N=1}^{\infty}\,, \Delta_N = o\left(N^{-r_1/s}\right)$ $(N \to +\infty)$, на функциональном классе $H_2^r\,(0,1)^s$ всегда можно построить такую меру, что для погрешности дискретизации решений уравнения Клейна – Гордона в среднем квадратичном относительно этой меры имеет место оценка $\tilde{\delta}_N = O\,(\Delta_N)$ $(N \to +\infty)$. Впервые было это свойство обнаружено в работе [23], в которой показано, что в одномерном классе Коробова E_1^r погрешности квадратурной формулы с равными весами и равномерной сеткой в среднем квадратичном относительно вероятностной меры, построенной по наперед заданной убывающей к нулю последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{+\infty}$ могут убывать со скоростью $\ll \varepsilon_n$.

13. Средние квадратические погрешности дискретизации решений уравнения Лапласа. Ограничимся определением вероятностной меры, на классе $H_2^r(0, 2\pi)$. Пусть

$$\rho(\tau) = \left\{m \in Z:\; 2^{\tau-1} \le \overline{m} < 2^{\tau}\right\} \equiv \left\{2^{\tau-1}, -2^{\tau-1}, 2^{\tau-1} + 1, -2^{\tau-1} - 1\,, ...,\; 2^{\tau} - 1,\; -2^{\tau} + 1\right\}$$

при $\tau = 2,\, 3, ...$ и

$$\rho(1) = \{0,\, 1, -1\}$$

подмножества Z («двоичные пачки») и пусть $n_\tau = |\rho(\tau)|$. Тогда по эквивалентному определению класса $H_2^r(0,2\pi)$ (см. напр. [42])

$$f \in H_2^r(0,2\pi) \Leftrightarrow \sum_{m\in\rho(\tau)} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \leq 2^{-2\tau r}.$$

Введем следующие обозначения для $f \in H_2^r(0,2\pi)$:

$$z^{(\tau)}(f) \equiv (\hat{f}(2^{\tau-1}),\ \hat{f}(-2^{\tau-1}), \hat{f}(2^{\tau-1}+1), \hat{f}(-2^{\tau-1}-1), ..., \hat{f}(2^{\tau}-1),\ \hat{f}(-2^{\tau}+1))$$

при $\tau = 2,\ 3, ...$ и

$$z^{(1)}(f) \equiv (\hat{f}(0),\ \hat{f}(1), \hat{f}(-1)).$$

Если шар в C^{n_τ} (или в R^{2n_τ}) радиуса $2^{-\tau r}$ с центром в начале координат обозначить через D_τ, т.е.

$$D_\tau = \left\{ z^{(\tau)} = \left(z_1^{(\tau)}, z_2^{(\tau)}, ..., z_{n_\tau}^{(\tau)}\right) \in C^{n_\tau}:\ \left|z_1^{(\tau)}\right|^2 + \left|z_2^{(\tau)}\right|^2 + \cdots + \left|z_{n_\tau}^{(\tau)}\right|^2 \leq 2^{-2\tau\, r} \right\},$$

то приведенное выше определение класса $H_2^r(0,2\pi)$ перепишется в виде

$$f \in H_2^r(0,2\pi) \Leftrightarrow z^{(\tau)}(f) \in D_\tau\ (\forall \tau = 1,\ 2, ...)\,.$$

Отсюда, учитывая введенные обозначения, и теорему Рисса-Фишера, можно установить следующее взаимно однозначное соответствие:

$$H_2^r(0,2\pi) \ni f(x) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \underbrace{(\hat{f}(0),\ \hat{f}(1),\ \hat{f}(-1)}_{z^{(1)}(f)}, \underbrace{\hat{f}(2), \hat{f}(-2), \hat{f}(3), \hat{f}(-3)}_{z^{(2)}(f)}, ..., \underbrace{\hat{f}(2^{\tau-1}), \hat{f}(-2^{\tau-1}), ..., \hat{f}(2^{\tau}-1), \hat{f}(-2^{\tau}+1)}_{z^{(\tau)}(f)}, ...) \equiv$$

$$\equiv \left(z^{(1)}(f),\, z^{(2)}(f),\, ..., z^{(\tau)}(f), ...\right) \in D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_\tau \times \cdots$$

Пусть для каждого $\tau = 1, 2, ...$ мера μ_τ абсолютно непрерывная вероятностная мера на $D\tau$:

$$\mu_\tau(\mathrm{E}_\tau) = \int_{\mathrm{E}_\tau} p_\tau\left(z_1^{(\tau)}, z_2^{(\tau)}..., z_{n_\tau}^{(\tau)}\right) dx_1^{(\tau)} dy_1^{(\tau)}, ..., dx_{n_\tau}^{(\tau)} dy_{n_\tau}^{(\tau)}$$

где $\mathrm{E}_\tau \subset D_\tau$ - измеримое множество,

$$z_k^{(\tau)} = x_k^{(\tau)} + iy_k^{(\tau)} \quad (k = 1, ..., n_\tau),$$

а плотность

$$p_\tau(z^{(\tau)}) = p_\tau(x_1^{(\tau)}, y_1^{(\tau)}..., x_{n_\tau}^{(\tau)}, y_{n_\tau}^{(\tau)}) = p_\tau((x_1^{(\tau)})^2 + (y_1^{(\tau)})^2 + ... + (x_{n_\tau}^{(\tau)})^2 + (y_{n_\tau}^{(\tau)})^2)$$

- радиально зависит от $\left(x_1^{(\tau)}, y_1^{(\tau)}, ..., x_{n_\tau}^{(\tau)}, y_{n_\tau}^{(\tau)}\right) \in D_\tau$. Пусть даны целые положительные k и числа $\tau_1, ..., \tau_k$ ($\tau_i \neq \tau_j$ при $i \neq j$). Для измеримых множеств $\mathrm{E}_{\tau_k} \subset D_{\tau_k}$ рассмотрим цилиндрические множества

$$T(\mathrm{E}_{\tau_1}, ...,\ \mathrm{E}_{\tau_k}) = \left\{ f \in H_2^r(0,2\pi) : z^{(\tau_1)}(f) \in \mathrm{E}_{\tau_1}, ..., z^{(\tau_k)}(f) \in \mathrm{E}_{\tau_k} \right\} \tag{18}$$

Положим

$$\mu(T(\mathrm{E}_{\tau_1}, ..., \mathrm{E}_{\tau_k})) \overset{def}{=} \prod_{i=1}^{k} \int_{E_{\tau_i}} p_{\tau_i}(z^{(\tau_i)})\, dx^{(\tau_i)} dy^{(\tau_i)}. \tag{19}$$

Множество цилиндрических множеств вида (18) образует полукольцо. Тогда по теореме о продолжении меры можно считать, что в наименьшей σ - алгебре $\mathcal{F}(H_2^r)$, содержащей все цилиндрические множества вида (18), задана мера μ.

Теорема 12 (М.Е. Берикханова, К.Е. Шерниязов, Н. Темиргалиев [43]). *Пусть* $u(\alpha, \theta; f)$ *- решение уравнения Лапласа в полярных координатах*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \tag{20}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(\alpha,\theta)\,|_{\alpha=R}=f(\theta), \tag{21}$$

где f *принадлежит классу* $H_2^r(0,2\pi)$. *Пусть* $r>1$ *и* μ^λ *есть вероятностная мера (19), определенная на* E^r. *Тогда*

$$\int\limits_{E^r(0,2\pi)} \sup_\alpha \|\,u(\alpha,\,\cdot;f)-(T_Nf)(\alpha,\,\cdot)\,\|^2_{L^2(0,2\pi)}\,d\mu^\lambda(f)\asymp \sum_{m\in Z\setminus\left(-\left[\frac{N}{2}\right],\left[\frac{N}{2}\right]\right)}\int\limits_0^{\rho_m}\tau^2\lambda'_m(\tau)\,d\tau.$$

В следующих теоремах найдены двусторонние оценки для среднеквадратической погрешности дискретизации решения $u(\alpha,\,\theta\,;f)$ задачи (20)-(21) относительно введенных мер.

Теорема 13 (М. Е. Берикханова, К. Е. Шерниязов, Н. Темиргалиев [43]). *Пусть* $r>1$ *и* μ^λ *есть вероятностная мера, определенная на* E^r. *Тогда*

$$\int\limits_{E^r(0,2\pi)} \sup_\alpha \|\,u(\alpha,\,\cdot;f)-(T_Nf)(\alpha,\,\cdot)\,\|^2_{L^2(0,2\pi)}\,d\mu^\lambda(f)\asymp \sum_{m\in Z\setminus\left(-\left[\frac{N}{2}\right],\left[\frac{N}{2}\right]\right)}\int\limits_0^{\rho_m}\tau^2\lambda'_m(\tau)\,d\tau.$$

Теорема 14 (М. Е. Берикханова, К. Е. Шерниязов, Н. Темиргалиев [43]).*Пусть* $r>\frac{1}{2}$ *и* μ *-есть вероятностная мера на* $H_2^r(0,2\pi)$. *Тогда* ($N=2^n$)

$$\int\limits_{H_2^r(0,2\pi)} \sup_\alpha \|u(\alpha,\cdot;f)-(T_Nf)(\alpha,\cdot)\|^2_{L^2(0,2\pi)}\,d\mu(f)\asymp\sum_{\tau=n}^{\infty}\int_{D_\tau}\left(x_1^2+y_1^2+...+x_{n_\tau}^2+y_{n_\tau}^2\right)p_\tau(x,y)dxdy.$$

В обеих теоремах $(T_Nf)(\alpha,\theta)$ -есть оператор

$$(T_Nf)(\alpha,\theta)=\sum_{i=1}^{N}f\left(2\pi\frac{i}{N}\right)K_N\left(\alpha,\theta-2\pi\frac{i}{N}\right),$$

где ($[\dots]$ – целая часть)

$$K_N(\alpha,t)=\frac{1}{N}\left(1+2\cdot\sum_{n=1}^{[N/2]-1}\left(\frac{\alpha}{R}\right)^n\cdot\cos nt\right).$$

14. Подход в среднем к задачам анализа в контексте К(В)П- исследований. Полагаются заданными класс F и нормированное пространство Y (или $Y\equiv C$, где C здесь и далее – поле комплексных чисел) функций с множеством определения Ω_F и Ω_Y соответственно,оператор T, действующий из F в Y, $l_1,...,l_N$ – набор функционалов $l^{(N)}$ (не обязательно линейных), посредством которых каждой функции f из F ставится в соответствие конечная последовательность $l_1(f),...,l_N(f)$ *–числовая информация об* f *объема N.* Через $L=L_N$ будем обозначать множество, составленное из всех возможных наборов из N линейных фуркционалов $(l_1,...,l_N)$. *Алгоритм переработки приближенной информации* $z_1(f),...,z_N(f)$ *об* f, полученной от функционалов $l_1(f),...,l_N(f)$ с точностью ε_N есть, по определению, числовая функция $\varphi_N(z_1,...,z_N;\cdot)$, которая при любом фиксированном $(z_1,...,z_N)\in C^N$ является принадлежащей Y функцией переменной $(\cdot)\in\Omega_Y$ (множество, составленное из всех таких φ_N обозначим через $\{\varphi_N\}_Y$). Затем, после подстановки $z_1=z_1(f),...,z_N=z_N(f)$, $|l_\tau(f)-z_\tau(f)|\le\varepsilon_N\,(\tau=1,...,N)$ функция $\varphi_N(z_1(f),...,z_N(f);\cdot)$ приобретает статус *вычислительного агрегата* для приближенного вычисления в метрике Y оператора $Tf\equiv u(\cdot;f)$.

К этому всему известному (см.[45-46]) добавляем:пусть на классе F задана вероятностная мера μ и пусть

$$\delta_N\left(0;Tf;F;\mu,\psi;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y:\equiv\psi^{-1}\left(\int\limits_F\psi\left(\|Tf\left(\cdot\right)-\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);\cdot\right)\|_{\ Y}\right)d\mu(f)\right),$$

где $\psi(t)$- четная, возрастающая на $[0,+\infty)$ неограниченная непрерывная функция с условием $\psi(0)=0$ (в частности, $\psi=|t|\,(1\le p<\infty)$ порождает Лебегово пространство L^p).

Компьютерный (вычислительный) поперечник в среднем есть комплекс из трех задач при заданных T,F,μ,ψ,Y,D_N :

К(В)П-1: Находится порядок $\succ\prec\inf\limits_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\in D_N}\psi^{-1}\left(\int_F\psi\left(\|Tf\left(\cdot\right)-\varphi_N\left(l_1(f),...,l_N(f);\cdot\right)\|_{\ Y}\right)d\mu(f)\right)\equiv$

$\equiv\ \delta_N\left(0;T;F;\mu;\psi;D_N\right)_Y\ \equiv\ \delta_N\left(0;D_N\right)_Y$ *–информативная (в ψ – среднем) мощность набора вычислительных агрегатов* $D_N\equiv D_N\left(F\right)_Y$;

К(В)П-2: *Производится построение оптимального вычислительного агрегата* $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$ *из* $D_N\ \equiv\ D_N\left(F\right)_Y$ *, поддерживающего порядок* $\succ\prec\ \ \delta_N\left(0;D_N\right)_Y$ *, для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности* $\bar\varepsilon_N\ \equiv\ \left(\bar\varepsilon_N^{(1)},...,\bar\varepsilon_N^{(N)}\right)\ =\ \bar\varepsilon_N\left(D_N;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y$ *– К(В)П-2 – предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату* $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$ *), такой, что*

$$\delta_N\left(0;Tf;F;\mu,\psi;D_N\right)_Y\succ\prec\delta_N\left(\bar\varepsilon_N;Tf;F;\mu,\psi;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y\equiv$$

$$\equiv\sup_{\substack{|\gamma_\tau|\le1\\(\tau=1,...,N)}}\psi^{-1}\left(\int\limits_F\psi\left(\left\|Tf\left(\,\cdot\,\right)-\bar\varphi_N\left(\bar l_1(f)+\gamma_1\bar\varepsilon_N^{(1)},...,\bar l_N(f)+\gamma_N\bar\varepsilon_N^{(N)};\cdot\right)\right\|_Y\right)d\mu\right),$$

с одновременным выполнением

$$\forall\eta_N\uparrow\ +\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to\ +\infty):\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar\varepsilon_N;Tf;F;\mu,\psi;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi\right)\right)_Y}{\delta_N\left(0;Tf;F;\mu,\psi;D_N\right)_Y}=+\infty.$$

К(В)П-3: *Устанавливается массовость предельной погрешности* $\bar\varepsilon_N\ \equiv\ \bar\varepsilon_N\left(D_N,\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)$ *: находится как можно большее множество* $D_N\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$ *(обычно связанных со структурой исходного* $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$ *) вычислительных агрегатов* $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\ \equiv\ \varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);\cdot\right)$*, построенных по всевозможным (не обязательно линейным) функционалам* $l_1,...,l_N$ *, таких, что для каждого из них выполнено соотношение*

$$\forall\eta_N\uparrow\ +\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\ \eta_N\to\ +\infty):\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar\varepsilon_N;Tf;F;\mu,\psi;\left(l^{(N)},\varphi\right)\right)_Y}{\delta_N\left(0;Tf;F;\mu,\psi;D_N\right)_Y}=+\infty.$$

В случае $\varepsilon_N\equiv0$ речь будет идти о задаче восстановления по точной информации, в остальных – это $\varepsilon_N>0$, по неточной.

15. Перспективы. Оценки качества вычислительных агрегатов в среднем относительно вероятностных мер на классах функций подвергавшаяся скептицизму в СССР тема (А.В. Сульдин, С.М. Воронин, Н. Темиргалиев) получила большое развитие в дальнем зарубежье, в основном по гауссовской мере.

Разумеется, более естественными являются средние относительно вероятностных мер, определенных на классах функций в п.4 (и классов из [51; §1]. Тем самым, получаем большое количество постановок задач в среднем, в том числе по темам и из данной статьи.

Список литературы

1 Воронин С.М., Скалыга В.И. О квадратурных формулах // Докл. АН СССР. - 1984. - Т. 246. - № 5. - С. 1038-1041.

2 Sn Von Neuman I. Various techniques used in connection with random digits Monte Carlo method // Nath. Bur. Stand., Math.series. - 1951. - № 2. - P. 36-38.

3 Сульдин А.В. Мера Винера и ее приложения к приближенным методам // Изв. ВУЗов. Математика-I: -1959. - № 6. - С. 145-158; II: - 1960. - № 5. - С.165-179.

4 Гренандер У., Фрайбергер В. Краткий курс вычислительной вероятности и статистики. - М.: Наука, 1978.

5 Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. - М.: Мир, 1979.

6 Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974.

7 Темиргалиев Н. О построении вероятностных мер на функциональных классах // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. - 1997. - Т. 218. - С. 397-402.

8 Халмош П. Теория меры. - М.: ИЛ, 1953.

9 Банах С. Интеграл Лебега в абстрактном пространстве// в кн. Сакс С. Теория интеграла. - М.: ИЛ, 1949. - С. 463-477.

10 Воронин С.М., Темиргалиев Н. Об одном приложении меры Банаха к квадратурным формулам // Матем. заметки. - 1986. -Вып. 1. - Т. 39. - С. 52-59.

11 Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. - М.: ВИНИТИ. - 1988. - Т. 26. - С. 5-158.

12 Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Труды Матем. ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР. - 1989. - Т. 187. -Ч. 13. - С. 143-161.

13 Аманов Т.И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. - Алма-Ата: Гылым, 1976.

14 Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестник Евразийского университета. - 1997. - № 3. - С. 90-144.

15 Темиргалиев Н. О некоторых задачах численного интегрирования // Вестник АН Каз.ССР. - 1983. - № 12. - С. 15-18.

16 Майоров В.Е. Интегральные и колмогоровские поперечники в классах дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. - 1991. - Т. 318. - № 5. - С.1082-1085.

17 Дильдабекова Ш.К. Построение вероятностной меры на шаре тригонометрических полиномов в L^p // Тезисы международной конференции «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии»» (Алматы, 26-28)» октября. - 2000. - С. 75.

18 Осколков К.И. Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Матем. сб. - 1977. - Т. 103(145). - № 4(8). - С. 563-589.

19 Нурмолдин Е.Е. Построение вероятностной меры на функциональном классе $Lip\,(\alpha,p)$ // Тезисы международной конференции «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии»» (Алматы, 26-28)» октября. - 2000. - С. 94-95.

20 Temirgaliev N. On an application of infinitely divisible distributions to quadrature problems //Analysis math. - 1988. - V.14. - № 3. - P. 253-258.

21 Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. - М.: Мир, 1991.

22 Арнольд В.И. и др. Ченцов Николай Николаевич // Успехи матем. наук. - 1993. - Т. 48. -Вып. 2. -С. 165-168.

23 Темиргалиев Н. Об одном примере из теории меры // Доклады расширенных заседаний ИПМ им.И.Н. Векуа. - 1985. - Т. 1. - № 2. - С. 140-143.

24 Васильковский Г. В., Возняковский Г. Обзор сложности в средней ситуации для линейных многомерных проблем // Известия вузов. Математика. - 2009. - №4. - С. 3-19.

25 Smale S. On the efficiency of algorithms of analysis // Bull.Amer.Math.Soc. - 1985. - V.13. - № 2. - P. 87-121.

26 Traub J.F., Wasilkovski G.W, Wozniakovski H. Information-Based Complexity. - New York: Academic Press, 1988.

27 Темиргалиев Н. Средние квадратические погрешности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях // Изв.ВУЗов. Математика. - 1990. - № 8. - С. 90-93.

28 Альжанова Н. Наилучшие квадратурные формулы относительно меры Орнштейна-Уленбека // Вестник КазГУ. -1997. - № 9. - С. 12-22.

29 Альжанова Н. О квадратурных формулах // Тезисы международной конференции "‘Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы "‘Казахстан в третьем тысячелетии"’"’. - Алматы, 2001. - С. 61-62.

30 Альжанова Н. Наилучшие квадратурные формулы относительно условной меры Винера // Вестник Евразийского университета. - 1998. - № 6. - С. 18-29.

31 Воронин С.М., Темиргалиев Н. О математическом ожидании погрешности метода интегрирования Монте-Карло// Изв.АН Каз.ССР. Сер.физ.-мат. - 1985. - № 1. - С. 22-25.

32 Воронин С.М., Темиргалиев Н. Об одном подходе к оценке качества интегрирования методом Монте-Карло// Изв.АН Каз.ССР.Сер.физ.-мат.1987. № 1. С. 16-20.
33 Темиргалиев Н. Восстановление в среднем квадратическом относительно меры Банаха решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона// Международная конференция «Функциональные пространства. Теория приближений, нелинейный анализ», посвящ. 90-летию академика С.М.Никольского, Москва, 27 апреля – 3 мая 1995 г., Тез. Докл. -С. 269-270.
34 Воронин С.М., Темиргалиев Н. О некоторых применениях меры Банаха // Изв.АН Каз.ССР. Сер.физ.-мат. - 1985. - № 1. - С. 22-25.
35 Майоров В.Е. Колмогоровские (n, δ)-поперечники пространств гладких функций //Матем. сб. - 1993. - Т. 184. - № 7.
36 Maiorov V. Average n-widths of the Wiener space in the L_∞ -norm //Complex. -1993. 9. -P. 222-230.
37 Creutzig J., Dereich S., Muller-Gronbach T.,Ritter K. Infinite-Dimensional Quadrature and Approximation of Distributions //Found. Comput. Math. -2009. -P. 391-429.
38 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.: Наука, 1987.
39 Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное уравнение. - М.: Наука, 1979.
40 Воронин С.М., Темиргалиев Н. О вычислении функционала// Изв.АН Каз.ССР. Сер.физ.-мат. -1987. -№3. -С.23–26.
41 Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н. Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в метрике $L^{2,\infty}$ //Дифференциальные уравнения. -2008. -Т. 44. -№ 4. -С. 491–506.
42 Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространство дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения. Матем. анализ. (Итоги науки и техники). -М.: ВИНИТИ, 1988. - Т.26. -С.5–157.
43 Берикханова М.Е., Шерниязов К.Е., Темиргалиев Н. Информативная мощность всевозможных линейных функционалов и среднеквадратическая погрешность при дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа (в печати).
44 Темиргалиев Н. Несколько слов воспоминаний о моем друге и учителе Сергее Воронине //Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. -2016. -Т. 115. -№6. -С. 46-64.
45 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. - №3. -С. 8-88
46 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. -№1. -С. 89-97.
47 Воронин С.М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 34-41.
48 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем.сб. 1990. Т.181. № 4. С. 490-505.
49 Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 169-173.
50 Жубанышева А. Ж., Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул // ЖВМ иМФ. 2009. Т. 49. № 1. С. 14-25.
51 Темиргалиев Н. Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т.125. -№4. -С.8-68.

Н. Темірғалиев

Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты,
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Біріңғай терминдер жағдайында детерминирленген және кездейсоқ есептеулерді салыстыру проблемасындағы С.М. Воронин концепциясы

Аннотация: Мақала С.М. Воронин ұсынған функциялық класстарда ықтималдық өлшем енгізу арқылы детерминирленген және детерминирленбеген есептеу әдістерінің сапасын теориялық және практикалық аспектіде бір тілде бағалау мәселесіне арналған.

Түйін сөздер: есептеу алгоритмдері, детеминирленген әдістер, кездейсоқ (детеминирленбеген) әдістер, функциялар класстарындағы ықтималды өлшем, Монте-Карло әдісі, квази Монте-Карло әдісі, функционалдық класстардағы ықтималдық өлшемге қатысты есептеу агрегаттарының орташа қателіктері.

N. Temirgaliyev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

The concept of S.M.Voronin in the problem of comparisons of deterministic and random computation in the same terms

Abstract: The paper was devoted to propose of S.M.Voronin to evaluate the quality of deterministic and non-deterministic calculation methods in theoretical and practical aspects through probabilistic measures on functional classes in the same language .

Keywords: computational algorithms, deterministic methods, random (non-deterministic) methods, probabilistic measure on function classes, Monte-Carlo method, the method of quasi Monte-Carlo, average errors of computational aggregates, concerning probabilistic measures on functional classes.

Список литературы

1 Voronin S.M.. Skalyga V.I. O kvadraturnykh formulakh [On quadrature formulas], Dokl. AN SSSR [Dokl. USSR Academy of Sciences], 246(5), 1038-1041(1984).

2 Sn Von Neuman I. Various techniques used in connection with random digits Monte Carlo method, Nath. Bur. Stand., Math.series, (2), 36-38(1951).

3 Suldin A.V. Mera Vinera i eye prilozheniya k priblizhennym metodam [Wiener's measure and its applications to approximate methods], Izv. VUZov[Izv. Universities]. Matematika-I: (6), 145-158(1959); II: (5), 165-179(1960).

4 Grenander U.. Frayberger V. Kratkiy kurs vychislitelnoy veroyatnosti i statistiki [A short course in computational probability and statistics]. (Nauka, Moscow, 1978).

5 Go Kh.-S. Gaussovskiye mery v banakhovykh prostranstvakh [Gaussian measures in Banach spaces]. (Mir, Moscow, 1979).

6 Kolmogorov A.N. Basic concepts of probability theory[Osnovnyye ponyatiya teorii veroyatnostey]. (Nauka, Moscow, 1974).

7 Temirgaliyev N. O postroyenii veroyatnostnykh mer na funktsionalnykh klassakh[On the construction of probability measures on functional classes], Trudy Matem. in-ta im. V.A. Steklova RAN [Proceedings of a mathematical institute V.A. Steklov RAS.],218, 397-402(1997).

8 Khalmosh P. Teoriya mery [Measure theory] (IL, Moscow, 1953).

9 Banakh S. Integral Lebega v abstraktnom prostranstve [The Lebesgue integral in abstract space]// v kn. Saks S. Teoriya integrala [in the book. Saks S. Theory of the integral]. Moscow, IL. 1949. P. 463-477.

10 Voronin S.M., Temirgaliev N. Application of Banach measure to quadrature formulas, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 39(1), 30-34(1986).

11 Kudryavtsev L.D., Nikolsky S.M. Spaces of differentiable functions of many variables and embedding theorems [Spaces of differentiable functions of several variables and imbedding theorems], Itogi Nauki i Tekhniki. Modern problems of mathematics[Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.], Moscow, VINITI, 26, 5-158(1988).

12 Lizorkin P.I.. Nikolskiy S.M. Prostranstva funktsiy smeshannoy gladkosti s dekompozitsionnoy tochki zreniya[Spaces of functions of mixed smoothness with decomposition point of view], Trudy Matem. in-ta im.V.A.Steklova AN SSSR[Transactions of Mat. Institute of them.V.A. Steklov Academy of Sciences of the USSR], 187(13), 143-161.

13 Amanov T.I. Prostranstva differenciruemyh funkcij s dominiruyushchej smeshannoj proizvodnoj[Spaces of differentiable functions with a dominant mixed derivative]. (Gylym, Alma-Ata, 1976).

14 1 Temirgaliev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e [Number-theoretic methods and probabilitytheoretic approach to the problems of analysis. Theory of investments and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University[Vestnik Evrazijskogo universiteta], (3), 90–144(1997).

15 Temirgaliev N. O nekotoryh zadachah chislennogo integrirovaniya[About some problems of numerical integration], Vestnik AN Kaz.SSR[Bulletin AN Kaz.SSR], (12), 15-18(1983).

16 Majorov V.E. Integral'nye i kolmogorovskie poperechniki v klassah differenciruemyh funkcij[Integral and Kolmogorov diameters in classes of differentiable functions], Dokl. AN SSSR[Docl. of Academy of Sciences USSR], 318(5), 1082-1085(1991).

17 Dil'dabekova SH.K. Postroenie veroyatnostnoj mery na share trigonometricheskih polinomov v L^p [Construction of a probability measure on a ball of trigonometric polynomials in L^p], Tezisy mezhdunarodnoj konferencii "'Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya matematiki v ramkah programmy "'Kazahstan v tret'em tysyacheletiiii (Almaty, 26-28)) oktyabrya"'"'[Abstracts of the international conference ? Current status and prospects for the development of mathematics in in the framework of the program ? Kazakhstan in the third millennium (Almaty, 26-28)) October]. 2000. P. 75.

18 Oskolkov K.I. Approximation properties of summable functions on sets of full measure, Mathematics of the USSR-Sbornik, 32(4), 489-514(1977).
19 Nurmoldin E.E. Postroenie veroyatnostnoj mery na funkcional'nom klasse $Lip\,(\alpha,p)$ [Construction of a probability measure on the functional class $Lip\,(\alpha,p)$], Tezisy mezhdunarodnoj konferencii "'Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya matematiki v ramkah programmy "'Kazahstan v tret'em tysyacheletiiii (Almaty, 26-28)) oktyabrya"' [Abstracts International Conference ? Current State and Prospects for the Development of Mathematics in the Framework ?Kazakhstan programs in the third millennium (Almaty, 26-28)) October]. 2000. P. 94-95.
20 Temirgaliev N. On an application of infinitely divisible distributions to quadrature problems, Analysis math., 14(3), 253-258(1988).
21 Skhrejver A. Teoriya linejnogo i celochislennogo programmirovaniya[Theory of linear and integer programming]. (Mir, Moscow, 1991).
22 Arnol'd,Vladimir I et al. Nikolai Nikolaevich Chentsov (obituary)// Russian Mathematical Surveys,48(2), 161-168(1993).
23 Temirgaliev N. Ob odnom primere iz teorii mery[About one example from measure theory], Doklady rasshirennyh zasedanij IPM im.I.N. Vekua[Reports of extended meetings of the IPM named after I.N. Vekua], 1(2), 140-143(1985).
24 Vasil'kovskij G. V., Voznyakovskij G. Obzor slozhnosti v srednej situacii dlya linejnyh mnogomernyh problem[Overview of complexity in the average situation for linear multidimensional problems], Izvestiya vuzov. Matematika[Proceedings of universities. Maths], 4, 3-19(2009).
25 Smale S. On the efficiency of algorithms of analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 13(2), 87-121(1985).
26 Traub J.F., Wasilkovski G.W, Wozniakovski H. Information-Based Complexity. (Academic Press, New York, 1988).
27 Temirgaliev N. Mean-square errors for numerical integration algorithms that are connected with the theory of divisors in cyclotomic fields, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 8, 90–93(1990).
28 Al'zhanova N. Nailuchshie kvadraturnye formuly otnositel'no mery Ornshtejna-Ulenbeka[Best quadrature formulas with respect to the Ornstein-Uhlenbeck measure], Vestnik KazGU [Bulletin KazGU], 9, 12-22(1997).
29 Al'zhanova N. O kvadraturnyh formulah[On quadrature formulas], Tezisy mezhdunarodnoj konferencii "'Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya matematiki v ramkah programmy "'Kazahstan v tret'em tysyacheletii"'"'[Theses of the international conference "' Modern state and prospects of development of mathematics in the framework of the program "' Kazakhstan in the third Millennium "' "]. Almaty, 2001. P. 61-62.
30 Al'zhanova N. Nailuchshie kvadraturnye formuly otnositel'no uslovnoj mery Vinera[The best quadrature formulas for the conditional Wiener measure], Vestnik Evrazijskogo universiteta imeni L.N. Gumoileva [Bulletin Eurasian National Universty], (6), 18-29(1998).
31 Voronin S.M., Temirgaliev N. O matematicheskom ozhidanii pogreshnosti metoda integrirovaniya Monte-Karlo[On the mathematical expectation of the error of the integration method Monte Carlo], Izv.AN Kaz.SSR. Ser.fiz.-mat. [Izv.AN Kaz.SSR. Ser.phys.-mat.], (1), 22-25(1985).
32 Voronin S.M., Temirgaliev N. Ob odnom podhode k ocenke kachestva integrirovaniya metodom Monte-Karlo[On an approach to assessing the quality of integration by the Monte method Carlo], Izv.AN Kaz.SSR.Ser.fiz.-mat.[Izv. AN Kaz.SSR. Ser.Phys.-Mat.], (1), 16-20(1987).
33 Temirgaliev N. Vosstanovlenie v srednem kvadraticheskom otnositel'no mery Banaha reshenij zadachi Dirihle dlya uravneniya Puassona[Restoration in the mean-square with respect to the Banach measure of the solution of the problem Dirichlet for the Poisson equation], Mezhdunarodnaya konferenciya "'Funkcional'nye prostranstva. Teoriya priblizhenij, nelinejnyj analizz, posvyashch. 90-letiyu akademika S.M.Nikol'skogo, Moskva, 27 aprelya – 3 maya 1995 g., Tez. Dokl.[International Conference "'Functional Spaces. Approximation Theory, Nonlinear Analysis, ded. 90th anniversary of academician S.M. Nikolsky, Moscow, April 27 - May 3, 1995, Thes. Doc.] P. 269-270.
34 Voronin S.M., Temirgaliev N. O nekotoryh primeneniyah mery Banaha[About some applications of the Banach measure], Izv.AN Kaz.SSR. Ser.fiz.-mat.[Izv. AN Kaz.SSR. Ser.phys.- mat.], (1), 22-25(1985).
35 Maiorov V.E. Kolmogorov's $(n,\,\delta)$ -width of space of smooth functions, Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics,79(2), 265-279(1994).
36 Maiorov V. Average n-widths of the Wiener space in the L_∞ -norm, Complex, 9, 222-230(1993).
37 Creutzig J., Dereich S., Muller-Gronbach T.,Ritter K. Infinite-Dimensional Quadrature and Approximation of Distributions, Found. Comput. Math., 391-429(2009).
38 Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Chislennye metody [Numerical methods] (Binom, Moscow, 2007). [in Russian].
39 Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe uravnenie[The optimal equation]. (Nauka, Moscow, 1979).
40 Voronin S.M., Temirgaliev N. O vychislenii funkcionala[About the calculation of the functional], Izv.AN Kaz.SSR. Ser.fiz.-mat.[Izv. AN Kaz.SSR. Ser.phys.-mat.], (3), 23–26(1987).
41 Ibatulin I. , Temirgaliev N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretithation of the solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of L2, 8 , Differential equation, 44(4), 510-526(2008).

42 Kudryavcev L.D., Nikol'skij S.M. Prostranstvo differenciruemyh funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya. Matem. analiz. (Itogi nauki i tekhniki)[The space of differentiable functions of many variables and embedding theorems. Mat. analysis. (Results of science and technology)]. (VINITI, Moscow, 1988. T.26. P.5–157).

43 Berikkhanova M.E., SHerniyazov K.E., Temirgaliev N. Informativnaya moshchnost' vsevozmozhnyh linejnyh funkcionalov i srednekvadraticheskaya pogreshnost' pri diskretizacii reshenij zadachi Dirihle dlya uravneniya Laplasa (v pechati)[Informative power of all kinds linear functionals and standard error for the discretization of solutions to the problem Dirichlet for the Laplace equation (in press)].

44 Temirgaliev N. Neskol'ko slov vospominanij o moem druge i uchitele Sergee Voronine[A few words of memoirs about my friend and teacher Sergei Voronin], Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta imeni L.N. Gumileva[Bulletin Eurasian National University named after L.N. Gumilyov], 115(6), 46-64(2016).

45 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 124(3), 8-88 (2018).

46 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ), N 1, 89-97(2019).

47 Voronin S. M. , Temirgaliev N. Quadrature formulas associated with divisors of the field of Gaussian numbers, Mat. zametki, 46(2), 597-602 (1989).

48 Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik, 69(2), 527-542(1990).

49 Bailov E. A. , Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables, Dockland Mathematics, 2007, pp. 681-685

50 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 55(9), 1432–1443(2015).

51 Temirgaliyev N. Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 125(4), 8-68 (2018).

Сведения об авторах:

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан.

Temirgaliyev N. – -Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 7.08.2019

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2019. 3(128)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 61-б.
Шартты б.т. - 3,88. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды