

<https://doi.org/10.32523/2616-7182>

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326



Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№3 (128)/2019

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Серия

bulmathmc.enu.kz



ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№3(128)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019
Nur-Sultan, 2019
Нур-Султан, 2019

БАС РЕДАКТОРЫ
ф.-м.ғ.д., проф
Темірғалиев Н. (Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары **Жұбаньшева А.Ж.**, PhD
(Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD
(Қазақстан)

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Алимхан Килян	PhD, проф. (Жапония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Қытай)
Бекенов М.И.	ф.-м.ғ.к., доцент (Қазақстан)
Гогинава У.	ф.-м.ғ.д., проф. (Грузия)
Голубов Б.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Зунг Динь	ф.-м.ғ.д., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Иванов В.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Иосевич А.	PhD, проф. (АҚШ)
Кобельков Г.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Курина Г.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Марков В.В.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Мейрманов А.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Смелянский Р.Л.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Умирбаев У.У.	ф.-м.ғ.д., проф. (АҚШ)
Холщевникова Н.Н.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. докторы, проф. (Германия)

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 349 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбаньшева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БЖҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу қуәлігі.
Тиражы: 25 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-428).

EDITOR-IN-CHIEF
Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences
Temirgaliyev N. (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Zhubanysheva A.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Nauryzbayev N.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Editorial board

Abakumov E.V.	PhD, Prof. (France)
Alexeyeva L.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Alexander Iosevich	PhD, Prof. (USA)
Alimhan Keylan	PhD, Prof. (Japan)
Bekzhan Turdybek	PhD, Prof. (China)
Bekenov M.I.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assoc.Prof. (Kazakhstan)
Goginava U.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Georgia)
Golubov B.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Dũng Dinh	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Vietnam)
Ibrayev A.G.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Kazakhstan)
Ivanov V.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kobel'kov G.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kurina G.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Markov V.V.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Meirmanov A.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Smelyansky R.L.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Umirbaev U.U.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(USA)
Kholshechnikova N.N.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Schmeisser Hans-Juergen	Dr. habil., Prof. (Germany)

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 349, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible Editor-in-Chief: A.Zh. Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.

Circulation: 25 copies

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;

tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-428).

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
профессор, д.ф.-м.н.
Темиргалиев Н. (Казахстан)

Зам. главного редактора **Жубанышева А.Ж.**, PhD (Казахстан)

Зам. главного редактора **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD (Казахстан)

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Алимхан Килян	PhD, проф. (Япония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Китай)
Бекенов М.И	к.ф.-м.н., доцент (Казахстан)
Гогинава У.	д.ф.-м.н., проф. (Грузия)
Голубов Б.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Зунг Динь	д.ф.-м.н., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Иванов В.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Иосевич А.	PhD, проф. (США)
Кобельков Г.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Курина Г.А.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Марков В.В.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Мейрманов А.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Смелянский Р.Л.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Умирбаев У.У.	д.ф.-м.н., проф. (США)
Холщевникова Н.Н.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. доктор, проф. (Германия)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 349
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-428).

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР

<i>Темірғалиев Н.</i> Біріңғай терминдер жағдайында детерминирленген және кездейсоқ есептеулерді салыстыру проблемасындағы С.М. Воронин концепциясы	8
<i>Щёголев С.А.</i> Сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесін екідиагоналды түрге келтіру туралы	34
<i>Каюмов И.</i> Кейбір біржапырақты функциялар кластарының коэффициенттерін салыстыру туралы	46
<i>Дүйсенғалиева Б.Ә., Наурызбекова А.С.</i> Рангі 2 тең дифференциалды көпмүшеліктер алгебрасының триангулярлы емес дифференциалдауының мысалы	53

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

<i>Temirgaliyev N.</i> The Concept of S.M.Voronin in the Problem of Comparisons in the Same Terms of Deterministic and Random Computation	8
<i>Shchogolev S.A.</i> On the Reduction of the Linear System of the Differential Equations to the Bi-Diagonal Kind	34
<i>Kayumov I.</i> Comparison Theorems For Certain Classes of Univalent Functions 2	46
<i>Duisengaliyeva B.A., Naurazbekova A.S.</i> An Example of a Non-triangulable Derivation of a Differential Polynomial Algebra of Rank 2	53

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-компьютерные науки

<i>Темиргалиев Н.</i> Концепция С.М.Воронина в проблеме сравнений детерминированных и случайных вычислений в одних и тех же терминах	8
<i>Щёголев С.А.</i> О сведении линейной системы дифференциальных уравнений к двухдиагональному виду	34
<i>Каюмов И.Р.</i> О сравнении коэффициентов некоторых классов однолистных функций	46
<i>Дуйсенгалиева Б.А., Наурызбекова А.С.</i> Пример нетриангулируемого дифференцирования алгебры дифференциальных многочленов ранга 2	53

МРНТИ: 27.17.19

Б.А. Дуйсенғалиева, А.С. Науразбекова

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: bibinur.88@mail.ru, altyngul.82@mail.ru)

Пример не триангулируемого дифференцирования алгебры дифференциальных многочленов ранга 2

Аннотация: Построен пример не триангулируемого дифференцирования алгебры дифференциальных многочленов $k\{x, y\}$ от двух переменных x, y с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ над полем k нулевой характеристики в случае $m \geq 2$.

Ключевые слова: Алгебра дифференциальных многочленов, локально-нильпотентное дифференцирование, триангулируемость, автоморфизм.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-128-3-53-57>

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1968 году Р. Ренчлер [1] доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики являются триангулируемыми. Аналог этого результата для свободных алгебр Пуассона был доказан в работе [2]. Рассмотрим дифференцирование ∂ алгебры многочленов $k[x, y, z]$ от трех переменных x, y, z над полем k нулевой характеристики, определенное правилом

$$\partial : x \mapsto 2y, \quad y \mapsto z, \quad z \mapsto 0.$$

Тогда $w = y^2 - xz$ принадлежит ядру дифференцирования ∂ и дифференцирование

$$D = w\partial$$

является локально-нильпотентным. Х. Басс [3] показал не триангулируемость дифференцирования $D = w\partial$.

Рассмотрим дифференциальные алгебры с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Основные понятия дифференциальных алгебр можно найти в [4–6]. Дифференциальные алгебры называются *обыкновенными*, если $m = 1$, и *частными*, если $m \geq 2$. Дифференцирование D непосредственно дает пример не триангулируемого дифференцирования алгебры дифференциальных многочленов $k\{x, y, z\}$ над полем k нулевой характеристики.

В работе [7], используя связь между алгебрами многочленов, дифференциальными алгебрами и алгебрами Новикова, построен пример не триангулируемого дифференцирования свободной алгебры Новикова от трех переменных над полем нулевой характеристики. Этот пример является аналогом дифференцирования D для алгебр Новикова.

Данная работа посвящена исследованию дифференцирований алгебры дифференциальных многочленов от двух переменных с двумя и более коммутирующими дифференцированиями. В частности, построен пример не триангулируемого локально-нильпотентного дифференцирования этой алгебры.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведены определения и некоторые понятия алгебры дифференциальных многочленов. В разделе 3 показано, что дифференцирование $D_1 = w^{\delta_2}\partial_x + w^{\delta_1}\partial_y$, где $w = x^{\delta_1} - y^{\delta_2}$, является не триангулируемым

дифференцированием алгебры дифференциальных многочленов от двух переменных над полем нулевой характеристики в случае $m \geq 2$.

2. АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть R – произвольное коммутативное кольцо с единицей. Отображение $d : R \rightarrow R$ называется *дифференцированием* кольца R , если для всех $s, t \in R$ выполняются условия

$$d(s + t) = d(s) + d(t),$$

$$d(st) = d(s)t + sd(t).$$

Пусть $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ – основное множество дифференциальных операторов.

Кольцо R называется *дифференциальным кольцом* или Δ -*кольцом*, если $\delta_1, \dots, \delta_m$ являются коммутирующими дифференцированиями кольца R , т.е. $\delta_i : R \rightarrow R$ – дифференцирования и $\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i$ для всех i, j .

Пусть Θ – свободный коммутативный моноид на множестве дифференциальных операторов $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$. Элементы

$$\theta = \delta_1^{i_1} \dots \delta_m^{i_m}$$

моноида Θ называются *производными операторами*. Порядком θ называется число $|\theta| = i_1 + \dots + i_m$. Положим также $\gamma(\theta) = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, где \mathbb{Z}_+ – множество всех неотрицательных целых чисел.

Пусть R – произвольное дифференциальное кольцо и пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – множество символов. Рассмотрим множество символов $X^\Theta = \{x_i^\theta \mid 1 \leq i \leq n, \theta \in \Theta\}$ и алгебру многочленов $R[X^\Theta]$ на множестве символов X^Θ . Полагая

$$\delta_i(x_j^\theta) = x_j^{\theta \delta_i}$$

для всех $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \theta \in \Theta$, превратим алгебру $R[X^\Theta]$ в дифференциальную алгебру. Дифференциальная алгебра $R[X^\Theta]$ обозначается через $R\{X\}$ и называется *алгеброй дифференциальных многочленов* над R от множества переменных X [4].

Пусть M – свободный коммутативный моноид от множества переменных x_i^θ , где $1 \leq i \leq n$ и $\theta \in \Theta$. Элементы M назовем также *дифференциальными мономами* в алфавите X . Дифференциальные мономы образуют базис алгебры $R\{x_1, \dots, x_n\}$, т.е. любой элемент $a \in R\{x_1, \dots, x_n\}$ однозначно записывается в виде

$$a = \sum_{u \in M} r_u u$$

с конечным числом ненулевых $r_u \in R$.

Для любого $x_i^\theta \in X^\Theta$ положим

$$\deg(x_i^\theta) = 1, \quad d(x_i^\theta) = |\theta|,$$

где $1 \leq i \leq n$. Если $u = a_1 \dots a_s \in M$, где $a_1, \dots, a_s \in X^\Theta$, то положим

$$\deg(u) = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_s), \quad d(u) = d(a_1) + \dots + d(a_s),$$

т.е. через $\deg(u)$ обозначим стандартную функцию степени монома u по переменным x_1, \dots, x_n , а через $d(u)$ обозначим дифференциальную степень монома u по дифференцированиям $\delta_1, \dots, \delta_m$.

Также для любого монома $u \in M$ определим общую степень

$$tdeg(u) = \deg(u) + d(u).$$

Каждый ненулевой элемент $c \in R\{x_1, \dots, x_n\}$ однозначно представляется в виде

$$c = c_{i_1} + c_{i_2} + \dots + c_{i_s}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_s, \quad 0 \neq c_{i_j} \in C_{i_j},$$

где C_{i_j} является R -оболочкой мономов u_{i_j} таких, что $tdeg(u_{i_j}) = i_j$. Элемент c_{i_s} назовем *старшей однородной частью* элемента c по отношению к общей степени $tdeg$ и будем обозначать его через \bar{c} . Таким образом, общая степень $tdeg$ определяет градуировку

$$R\{x_1, \dots, x_n\} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_+} C_i$$

алгебры $R\{x_1, \dots, x_n\}$. Для любого элемента $f \in R\{x_1, \dots, x_n\}$ положим $tdeg(f) = tdeg(\bar{f})$.

Не сложно заметить, что для любых $f, g \in R\{x_1, \dots, x_n\}$

$$tdeg(fg) = tdeg(f) + tdeg(g), \quad (1)$$

$$tdeg(f^\theta) = tdeg(f) + |\theta|. \quad (2)$$

Следствие 1. Пусть f, g – однородные элементы алгебры $R\{x_1, \dots, x_n\}$ относительно общей степени $tdeg$. Тогда fg и f^θ также являются однородными относительно $tdeg$.

3. ПРИМЕР НЕ ТРИАНГУЛИРУЕМОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть k – произвольное дифференциальное поле характеристики 0 и $A = k\{x, y\}$ – алгебра дифференциальных многочленов от двух переменных x, y с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ над полем k .

Для элементов g_1, g_2 алгебры A обозначим через

$$D = g_1\partial_x + g_2\partial_y$$

дифференцирование алгебры A такое, что $D(x) = g_1$ и $D(y) = g_2$.

Лемма 1. Пусть $D = g_1\partial_x + g_2\partial_y$ – дифференцирование алгебры A такое, что g_1, g_2 – однородные элементы относительно $tdeg$ и $tdeg(g_1) = tdeg(g_2) = s > 0$, и пусть u – моном алгебры A с $tdeg(u) = t > 0$. Тогда $D(u)$ является однородным относительно $tdeg$ и

$$tdeg(D(u)) = s + t - 1.$$

Proof. Докажем справедливость утверждения леммы индукцией по $tdeg(u)$. Пусть $u = u_1u_2$, где $tdeg(u_1) = t_1 > 0$, $tdeg(u_2) = t_2 > 0$ и $t_1 + t_2 = t$. По предположению индукции $D(u_1)$ и $D(u_2)$ являются однородными относительно $tdeg$ и $tdeg(D(u_1)) = s + t_1 - 1$, $tdeg(D(u_2)) = s + t_2 - 1$. Далее, по определению дифференцирования, имеем

$$D(u) = D(u_1u_2) = D(u_1)u_2 + u_1D(u_2).$$

Согласно (1)

$$tdeg(D(u_1)u_2) = tdeg(D(u_1)) + tdeg(u_2) = (s + t_1 - 1) + t_2 = s + t - 1,$$

$$tdeg(u_1D(u_2)) = tdeg(u_1) + tdeg(D(u_2)) = t_1 + (s + t_2 - 1) = s + t - 1.$$

Следовательно, $tdeg(D(u)) = s + t - 1$. Из однородности $D(u_1)$, $D(u_2)$ следует однородность $D(u)$. \square

Следствие 2. Пусть $D = g_1\partial_x + g_2\partial_y$ – дифференцирование алгебры A такое, что g_1, g_2 – однородные элементы относительно $tdeg$ и $tdeg(g_1) = tdeg(g_2) = s > 0$, и пусть f – однородный элемент алгебры A с $tdeg(f) = t > 0$. Тогда если $D(f) \neq 0$, то

$$tdeg(D(f)) = s + t - 1.$$

Автоморфизм $\varphi : A \rightarrow A$ называется *автоморфизмом дифференциальной алгебры*, если для всех $\delta_i \in \Delta$ и $f \in A$ выполняется $\varphi(f^{\delta_i}) = \varphi(f)^{\delta_i}$. Через $\varphi = (f_1, f_2)$ обозначим автоморфизм алгебры A такой, что $\varphi(x) = f_1$, $\varphi(y) = f_2$.

Дифференцирование D алгебры A вида

$$D = a_1(y)\partial_x + a_2\partial_y,$$

где $a_1(y) \in k\{y\}$ и $a_2 \in k$, называется *треугольным*.

Дифференцирование D алгебры A называется *триангулируемым*, если существует автоморфизм φ алгебры A такой, что $\varphi^{-1}D\varphi$ является треугольным.

Теорема 1. Пусть $A = k\{x, y\}$ – алгебра дифференциальных многочленов от двух переменных x, y с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ над полем k нулевой характеристики, и пусть $m \geq 2$. Тогда дифференцирование

$$D_1 = w^{\delta_2} \partial_x + w^{\delta_1} \partial_y,$$

где $w = x^{\delta_1} - y^{\delta_2}$, алгебры $A = k\{x, y\}$ не является триангулируемым.

Proof. Докажем утверждение теоремы от противного. Пусть дифференцирование D_1 является триангулируемым. Тогда найдется автоморфизм φ алгебры A такой, что $\varphi^{-1}D_1\varphi$ является треугольным, т.е.

$$\varphi^{-1}D_1\varphi = D = a_1(y)\partial_x + a_2\partial_y,$$

где $a_1(y) \in k\{y\}$ и $a_2 \in k$. Тогда

$$D(y^{\delta_1}) = (a_1(y)\partial_x + a_2\partial_y)(y^{\delta_1}) = a_2^{\delta_1} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(\varphi^{-1}D_1\varphi)(y^{\delta_1}) = \varphi^{-1}(D_1(\varphi(y^{\delta_1}))) = 0.$$

Так как φ – автоморфизм, то

$$D_1(\varphi(y^{\delta_1})) = 0. \quad (3)$$

Пусть

$$\varphi(y) = ax + by + c + h_{i_1} + \dots + h_{i_s},$$

где $a, b, c \in k$ и h_{i_j} – однородный элемент общей степени i_j , $1 < i_1 < \dots < i_s$. Так как φ – автоморфизм, то a и b одновременно не равны нулю, т.е. $(a, b) \neq (0, 0)$. По определению автоморфизма дифференциальной алгебры имеем

$$\varphi(y^{\delta_1}) = (ax + by + c + h_{i_1} + \dots + h_{i_s})^{\delta_1} = ax^{\delta_1} + by^{\delta_1} + h_{i_1}^{\delta_1} + \dots + h_{i_s}^{\delta_1}.$$

По следствию 1 $h_{i_j}^{\delta_1}$ является однородным относительно $tdeg$ и согласно (2)

$$tdeg(h_{i_j}^{\delta_1}) = tdeg(h_{i_j}) + 1 = i_j + 1.$$

Применив дифференцирование D_1 к элементу $\varphi(y^{\delta_1})$, получим

$$D_1(\varphi(y^{\delta_1})) = D_1(ax^{\delta_1} + by^{\delta_1} + h_{i_1}^{\delta_1} + \dots + h_{i_s}^{\delta_1}) = aw^{\delta_1\delta_2} + bw^{\delta_1^2} + D_1(h_{i_1}^{\delta_1}) + \dots + D_1(h_{i_s}^{\delta_1}).$$

Учитывая, что $(a, b) \neq (0, 0)$, вычислим общую степень элемента $aw^{\delta_1\delta_2} + bw^{\delta_1^2}$:

$$tdeg(aw^{\delta_1\delta_2} + bw^{\delta_1^2}) = tdeg(ax^{\delta_1^2\delta_2} - ay^{\delta_1\delta_2^2} + bx^{\delta_1^3} - by^{\delta_1^2\delta_2}) = 4.$$

По следствию 2 имеем

$$tdeg(D_1(h_{i_j}^{\delta_1})) = 3 + tdeg(h_{i_j}^{\delta_1}) - 1 = 3 + tdeg(h_{i_j}) + 1 - 1 = tdeg(h_{i_j}) + 3 = i_j + 3.$$

Так как $i_j > 1$, то $tdeg(D_1(h_{i_j}^{\delta_1})) > tdeg(aw^{\delta_1\delta_2} + bw^{\delta_1^2})$ для всех $1 < j < s$. Отсюда следует, что

$$D_1(\varphi(y^{\delta_1})) = aw^{\delta_1\delta_2} + bw^{\delta_1^2} + D_1(h_{i_1}^{\delta_1}) + \dots + D_1(h_{i_s}^{\delta_1}) \neq 0.$$

Тем самым полученное противоречие к (3) доказывает теорему. \square

Список литературы

- 1 Rentschler R. Operations du groupe additif sur le plan // C.R. Acad. Sci. Paris – 1968. – Vol. 267. – P. 384–387.
- 2 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra – 2009. – Vol. 322. № 9. – P. 3318 – 3330.
- 3 Bass H. A non-triangular action of G_a on A^3 // J. of Pure and Appl. Algebra – 1984. – Vol. 33. № 1. – P. 1–5.
- 4 Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic Groups. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973.
- 5 Ritt J.F. Differential Algebra. Dover Publications, Inc., New York, 1966.
- 6 Van der Put M., Singer M.F. Galois theory of linear differential equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 328. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- 7 Дүйсенғалиева Б.А., Умирбаев У.У. Дикий автоморфизм свободной алгебры Новикова // Сибирские электронные математические известия – 2018. – Т. 15. – С. 1671–1679. doi: 10.33048/semi.2018.15.138. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v15/p1671-1679.pdf>. (дата обращения: 21.09.2018).

Б.Ә. Дүйсенғалиева, А.С. Науразбекова

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Рангі 2 тең дифференциалды көпмүшеліктер алгебрасының триангулярлы емес дифференциалдауының мысалы

Аннотация: Сипаттамасы нөлге тең k өрісіндегі $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ коммутативті дифференциалдаулар жиынымен анықталған x, y екі айнымалысынан тәуелді $k\{x, y\}$ дифференциалды көпмүшеліктер алгебрасының $m \geq 2$ жағдайында триангулярлы емес дифференциалдауының мысалы тұрғызылған.

Түйін сөздер: Дифференциалды көпмүшеліктер алгебрасы, локальді-нильпотентті дифференциалдау, триангулярлық, автоморфизм.

Б.А. Duisengaliyeva, A.S. Naurazbekova

L. N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

An example of a non-triangulable derivation of a differential polynomial algebra of rank 2

Abstract: We constructed an example of a non-triangulable derivation of the differential polynomial algebra $k\{x, y\}$ in two variables x, y with a set of commuting derivations $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ over a field k of characteristic zero in the case of $m \geq 2$.

Keywords: Differential polynomial algebra, locally nilpotent derivation, triangulability, automorphism.

References

- 1 Rentschler R. Operations du groupe additif sur le plan // C.R. Acad. Sci. Paris – 1968. – Vol. 267. – P. 384–387.
- 2 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra – 2009. – Vol. 322. № 9. – P. 3318 – 3330.
- 3 Bass H. A non-triangular action of G_a on A^3 // J. of Pure and Appl. Algebra – 1984. – Vol. 33. № 1. – P. 1–5.
- 4 Kolchin E.R. Differential Algebra and Algebraic Groups. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973.
- 5 Ritt J.F. Differential Algebra. Dover Publications, Inc., New York, 1966.
- 6 Van der Put M., Singer M.F. Galois theory of linear differential equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 328. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- 7 Duisengaliyeva B.A., Umirbaev U.U. A wild automorphism of a free Novikov algebra, Siberian Electronic Mathematical Reports, 15, 1671-1679 (2018). doi: 10.33048/semi.2018.15.138. Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v15/p1671-1679.pdf>. [in Russian]. (accessed 21.09.2018).

Сведения об авторах:

Дүйсенғалиева Б.А. – преподаватель кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана 13, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Науразбекова А.С. – PhD, и.о. доцента кафедры Алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана 13, Нұр-Сұлтан, Қазақстан.

Duisengaliyeva B.A. – Lecturer of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Naurazbekova A. S. – PhD, Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry L. N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 9.07.2019

**«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика.
Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға
қойылатын талаптар**

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды *bulmathmc.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теоремадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz. Сайт: bulmathmc.enu.kz.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website *bulmathmc.enu.kz*.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages (from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). *E-mail:* *vest_math@enu.kz*. *Сайт:* *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Компьютерные науки. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилиевой файл можно скачать со сайта журнала *bul-mathmc.enu.kz*.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубризатора МРНТИ (Международный рубризатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz. Сайт: bulmathmc.enu.kz.

Бас редактор:

Н. Темірғалиев

Жауапты редактор:

А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2019. 3(128)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 61-б.
Шартты б.т. - 3,88. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды