bulmathmc.enu.kz

https://doi.org/10.32523/2616-7182

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№2 (127)/2019

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№2(127)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады
Published 4 times a year
Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019
Nur-Sultan, 2019
Нур-Султан, 2019

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 349 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 30 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-428).

EDITOR-IN-CHIEF
Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences
Temirgaliyev N. (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief	**Zhubanysheva A.Zh.,** PhD (Kazakhstan)
Deputy Editor-in-Chief	**Nauryzbayev N.Zh.,** PhD (Kazakhstan)

Editorial board

Abakumov E.V.	PhD, Prof. (France)
Alexeyeva L.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Alexander Iosevich	PhD, Prof. (USA)
Alimhan Keylan	PhD, Prof. (Japan)
Bekzhan Turdybek	PhD, Prof. (China)
Bekenov M.I.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assoc.Prof. (Kazakhstan)
Goginava U.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Georgia)
Golubov B.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Dũng Dinh	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Vietnam)
Ibrayev A.G.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Kazakhstan)
Ivanov V.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kaliev I.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kobel'kov G.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kurina G.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Markov V.V.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Meirmanov A.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Smelyansky R.L.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Umirbaev U.U.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(USA)
Kholshchevnikova N.N.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Schmeisser Hans-Juergen	Dr. habil., Prof. (Germany)

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 349, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: A.Zh. Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 30 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;
tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-428).

© L.N. Gumilyov Eurasian National University

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 349
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 30 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТIНIҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛIК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №2(127)/2019

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-КОМПЬЮТЕРЛIК ҒЫЛЫМДАР

МЕХАНИКА

**BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №2(127)/2019**

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

MECHANICS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. компьютерные науки. МЕХАНИКА, №2(122)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-компьютерные науки

МЕХАНИКА

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2019, том 127, №2, 46-57 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.27**

А.Н. Нурлыбаев [1] , И.М. Ковалева [2]

[1] *Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан*
[2] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
(E-mail: irina-math@bk.ru)

Комбинаторные методы в алгебре n-номов и их применения

Аннотация: Показана эффективность комбинаторных методов в алгебре n-номов с последующим применением полученных результатов к задачам, решения которых вызывают определенные трудности при использовании формул обычной (биномной) алгебры (что полностью подтверждают пророческие слова создателя теории инвариантов Д. Сильвестра (John James Sylvester): "*The part in some sense greater than the whole:general proposition must be proved easier than any partial case –Часть в некотором смысле больше целого: общее утверждение должно доказываться легче, чем любой ее частный случай*". Дается оригинальный лаконичный комбинаторный вывод формул сокращенного умножения степеней n-номов, т.е. n-членных сумм $a_1 + \cdots + a_n$, позволяющие многие труднорешаемые известными до этого способами задачи перевести в разряд ординарных задач средствами алгебры n-номов. Особая роль формулы кубов n-членных сумм в упрощении выкладок заключается в том, что она, к примеру, в частном случае 3-х переменных, когда $a+b+c=0$, упрощается до вида $a^3+b^3+c^3=3abc$, и это есть главный момент в ***элиминации*** сложности решения трудных задач. Самое интересное, что это условное (т.е. при наличии дополнительных ограничений) тождество допускает обобщение на n слагаемых: если $a_1 + \cdots + a_n = 0$, то $a_1^3 + \cdots + a_n^3 = 3 \sum\limits_{1\leq i<j<k\leq n} a_i a_j a_k$. Эффект упрощения наглядно продемонстрирован на многих примерах, где вместо традиционного возведения в куб $(a_1 + \cdots + a_n)^3$ используется формула "*Сумма кубов равна утроенной сумме троек* $a_i a_j a_k (1 \leq i < j < k \leq n)$ ", что особенно удобно при решении уравнений с кубическими иррациональностями и в доказательствах кубических соотношений.

Ключевые слова: бином, трином, тетраном, пентаном, n-ном, комбинаторика, симметрические функции, задачи повышенной трудности.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-127-46-57

Начнем с цитаты в качестве эпиграфа: "*Алгоритмика по самой своей природе комбинаторна, а среди всех основных математических дисциплин алгебра является, несомненно, самой комбинаторной*",Ф. Сержераер, "Алгебраическая алгоритмика".

Подтверждением тому является следующее наблюдение. Целая положительная степень n-нома, т.е. n-членной суммы $a_1 + \cdots + a_n$, в силу равенства

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k = \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} a_{j_1} \ldots a_{j_k}$$

состоит из $L_k(n) := n^k$ членов (здесь и всюду ниже запись $A := B$ означает " В обозначено через А "), каждая *перегруппировка* которой приводит к новым формулам, доказательство которых сводится к установлению комбинаторных равенств, – и в этом состоит суть данного метода: если через $R_k(n)$ обозначить количество членов перегруппированной правой части, то равенство $n^k = R_k(n)$ обеспечивает справедливость искомой формулы.

Приведем простейшие тождества алгебры n-номов, во многих отношениях полезных, при этом ниже акцент делается на формулы с кубами, органически связанных с аппаратом эллиптических кривых, описываемых кубическими уравнениями (заметим, что эллиптические кривые находят применения не только в алгебре и анализе, но и в криптографии).

В качестве первого примера приведем комбинаторное доказательство длиной в треть одной строки известного тождества:

Теорема 1[1]. *Квадрат n-нома равен сумме n квадратов слагаемых плюс удвоенная сумма их попарных произведений:*

$$(a_1 \ + \ \cdots \ + \ a_n)^2 \ = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j,$$

где правая част равенства состоит из "чистых" квадратов $a_i^2 (i \ = \ 1, \ldots, n)$ *и произведений* $a_i \, a_j \ (1 \le i < j \le n)$ *, слагаемых другого вида быть не может.*

Доказательство:

$$R_2\,(n) = n + 2C_n^2 = n^2 =: L_2\,(n)\,.$$

Конечно, полученная формула допускает дальнейшие, в том или ином смысле полезные преобразования. Так, например, имеется иная, а именно лексикографическая форма записи n-нома: при $n=5$ имеем квадрат пентанома

$$(a + b + c \ + d \ + e)^2 \ == \ a^2 + b^{\ 2} + c^2 + d^2 + e^{\ 2} + 2[a(b + c + d + e) + b(c + d + e) + c(d + e) + de].$$

Далее, положив $e = 0$, получим квадрат тетранома ($n = 4$):

$$(a + b + c \ + d)^2 \ = \ a^2 \ + b^2 \ + c^{\ 2} + \ d^2 \ + \ 2[a(b + c \ + d) \ + \ b(c + \ d) + \ cd].$$

Если же $d \ = \ \mathrm{e} \ = \ 0$, то имеем квадрат тринома:

$$(a + b + c)^2 \ = a^{\ 2} + b^2 \ + c^{\ 2} + \ 2[a(b + c) \ + \ bc].$$

Наконец, если $\mathrm{c} \ = \ d \ = \ \mathrm{e} \ = \ 0$, то получим квадрат бинома:

$$(a + b)^2 \ = \ a^2 \ + b^2 \ + \ 2ab.$$

Заметим, что последняя запись выразительнее (информативнее), чем школьная запись

$$(a + b)^2 \ = a^2 \ + 2ab + b^2.$$

Следующая формула занимает ведущую роль в данной статье.

Теорема 2[1]. *Куб n-нома равен сумме n кубов слагаемых плюс утроенная сумма произведений квадрата одного члена на другой, плюс шестикратная сумма тройных произведений разных членов (кубичные члены могут быть трех типов: 1) "чистые" кубы* a_i^3 *; 2)* $a_i^2 a_j (a_i a_j^2)$ *; 3)* $a_i a_j a_k$ $(i < j < k)$*)*

$$(a_1 \ + \ \cdots \ + \ a_n)^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i^3 + 3 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j (a_i + a_j) + 6 \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k.$$

Доказательство:

$$R_3\,(n) = n + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n + 6C_{n+1}^3 = n + n^3 - n = n^3 := L_3\,(n)\,.$$

Следствие. Куб тетранома $(n \ = \ 4)$ *равен*

$(a + b + c + \ d)^3 \ = a^{\ 3} + b^3 \ + c^3 \ + \ d^3 + + 3[ab(a + b) \ + \ ac(a + \ c) + \ ad(a + \ d) + bc(b + c) + bd(b \ + d) + cd(c \ + d)] \ + \ + 6[ab(c \ + \ d) \ + \ (a + \ b)cd]$.

Заметим, что выражение в квадратных скобках после числа "3" (см. вторую строку последней формулы) допускает упрощение, удобное для запоминания, а именно

$$[a^2(b \ + c \ + \ d) \ + b^2(a \ + c \ + \ d) \ + \ c^2(a \ + b \ + \ d) \ + \ d^2(a \ + b \ + \ c)].$$

Далее, если $d = \ 0$, то имеем куб тринома $(n \ = \ 3)$:

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 + 3[a^2(b+c) + b^2(a+c)+ c^2(a+b)] + 6abc.$$

Наконец, при c $= d = 0$ имеем куб бинома:

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) = a^3+3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Подчеркнем, что последняя (школьная) запись

$$a^3+3a^2b+ 3ab^2+b^3$$

менее выразительна (информативна), чем запись

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

через элементарные симметрические функции

$$\sigma_1(a,b) = a+b$$

и

$$\sigma_2(a,b) = ab,$$

позволяющая в случае надобности применить элегантный аппарат теории симметрических функций:

$$a^3+b^3+3\sigma_1(a,b)\cdot\sigma_2(a,b).$$

Следующее оригинальное тождество и его следствия облегчают решение многих задач элементарной математики (обычно называемых "повышенной трудности"). Его частный случай ($n=3$) есть без доказательства в учебниках алгебры Н.Я. Виленкина[2] и М.Н. Башмакова [3] (короткое введение в комбинаторику в целях обеспечения нужд теории вероятностей и математической статистики имеется также в М.К. Потапов и др. [4-5]).

Теорема 3[1]. *Сумма n кубов равна произведению суммы n слагаемых на их обобщенный неполный квадрат разностей* $Q_n = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j$ *плюс утроенная сумма тройных произведений:*

$$a_1^3+...+a_n^3 = (a_1+...+a_n)\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j\right) + 3\sum_{1\le i<j<k\le n} a_ia_ja_k.$$

Следствие. Если $a_1 + \cdots + a_n = 0$ *,то*

$$a_1^3+...+a_n^3 = 3\sum_{1\le i<j<k\le n} a_ia_ja_k.$$

Так, если $a + b + c + d = 0$, то при $n = 4$ приходим к "минимизированной" записи $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3[ab(c + d) + (a + b)cd]$, откуда при $d=0$ получим $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Доказательство этого факта относят к задачам повышенной трудности (см., напр., №29 из [6]), хотя оно тривиально вытекает из теоремы 3 при $n=3$.

При $n=5$ и $a+b+c+d+ =0$ имеем

$$a^3+b^3+c^3+d^3+{}^3 = 3[ab(c+d+)+(a+b)c(d+)+(b+c)de],$$

и далее для любого n.

Замечание. Обобщенный неполный квадрат

$$Q_n = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j$$

при $n = 2,\ 3$ неотрицателен для любых действительных a, b, cR: неполный квадрат бинома

$Q_2 = a^2+b^2-ab = \frac{(a-b)^2+a^2+b^2}{2} \ge 0 (n=2)$ и тринома

$$Q_3 = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2} \ge 0 (n=3).$$

Но при $n > 3$, в частности, при $n = 4$,

$Q_4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a(b + c + d) - b(c + d) - cd$ не всегда положителен, что следует из следующего утверждения.

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$Q_n = \frac{\sum\limits_{i<j}(a_i - a_j)^2 - (n-3)\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{2}.$$

Следствие. При $n = 2$ имеем

$$Q_2 = \frac{(a-b)^2 + a^2 + b^2}{2},$$

при $n = 3$

$$Q_3 = \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2},$$

при $n = 4$

$$Q_4 = [(a \;-- b)^2 + (a-c)^2 \; + (a-d)^2 + (b-c)^2 \; + (b-d)^2 \; + (c-d)^2 - (a^2 + b^2 \; + c^2 \; + d^2)]/2.$$

В частности, при $a = b = c = d \neq 0$ имеем $Q_4 < 0$.

Далее, из теорем 3 и 4 вытекает

Теорема 5. *Сумма кубов трех чисел равна утроенному произведению их первых степеней тогда и только тогда, когда сумма первых степеней есть нуль:*

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a + b + c = 0.$$

Пример. Доказать, что если $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0,$ то $x + y + z = 3\sqrt[3]{xyz}.$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b, \sqrt[3]{z} = c.$ Тогда $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc,$ т.е. доказательство сразу следует из Теоремы 5.

Детальный анализ знака Q_n предоставляем в виде занимательного упражнения читателю, в их числе доказательство утверждения "*Если же есть доминирующий член* $a_i >> a_j (i \neq j)$, *то значение* Q_n *положительно*".

Можно было бы привести формулы для биквадрата и более высоких степеней n-номов [1], но здесь ограничимся теоремами 1 – 4 и их следствиями, позволяющими эффективно решать многие задачи повышенной трудности.

Проиллюстрируем это на конкретных задачах из [6-7].

Пример 1, №29 г) из [6]: Записать в виде произведения (Разложить на множители)

$$(x^{\,2} + \; y^2)^3 \; + \; (z^{\,2} - x^2)^3 \; - (y^{\,2} + \; z^2)^3.$$

Решение. Обозначим а $= x^2 + y^2$, $b = z^2 - x^2$ и с $= -y^2 - z^2$. Очевидно, что а $+ b + c = 0$ и, потому, в силу теоремы 3 и ее следствия имеем

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3(x^2 + y^2)(x^2 - z^2)(y^2 + z^2),$$

т.е. для аппарата триномной ($n = 3$) алгебры эта задача решается мгновенно, без каких-либо вычислений (возведений в куб и пр.) Все просто, лаконично и элементарно (если не сказать "фантастично!"), что ярко демонстрирует мощь формулы суммы кубов.

Пример 2, №29 д) из [6]: Разложить на множители $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

Решение. Непосредственный способ через разложение куба тринома нерационален ввиду его громоздкости, поэтому, как и в примере 1, производим замену $a = x + y + z,$ $b = -x, c = -y, d = -z.$ Имеем $a + b + c + d = 0,$ и опять по следствию из теоремы 3, получаем

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3[ab(c + d) + (a + b)cd] = 3(x + y)(y + z)(x + z).$$

Пример 3, №29 е) из [6]: Разложить на множители $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Решение автоматически следует из теоремы 3:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)Q_3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Пример 4, №195а) из [7]: Разложить на множители $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

Решение. Положим $x=a-b, y=b-c, z=c-a,$ тогда $x+y+z=0$, и по следствию из теоремы 3 имеем

$$x^3+y^3+z^3=3xyz=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Последний пример допускает элегантное обобщение на произвольное число n кубов.

Рассмотрим задачу о разложении на множители суммы n кубов "циклических разностей"

$S_n := (a_1-a_2)^3+(a_2-a_3)^3+\cdots+(a_{n-1}-a_n)^3+(a_n-a_1)^3.$

Справедлива следующая

Теорема 6. Имеет место следующее разложение на множители суммы n кубов "циклических разностей"

$$S_n=3\sum_{i=1}^{n-3}(a_i-a_{i+1})(a_{i+1}-a_{i+2})(a_{i+2}-a_{i+3})+\ldots+(a_{n-2}-a_{n-1})(a_{n-1}-a_n)(a_n-a_1).$$

Справедливость теоремы следует из того, что сумма n циклических разностей равна нулю, откуда в силу теоремы 3 и вытекает утверждение теоремы 6.

Если $n=3$, то получаем пример 4:

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$ При $n=4$:

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-d)^3+(d-a)^3=3(a-c)[(a-b)(b-a)-(c-d)(d-a)]$ и далее для всех $n>4$.

Таким образом, использование теоремы 3 позволяет эффективно вычислять S_n при любом n , хотя с помощью биномной алгебры вычисление уже $S_3 (n=3)$ относят к задачам повышенной трудности.

Рассмотрим максимальное обобщение примера 2(№29 д) из [2]):Разложить на множители $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

Покажем, что даже максимальное обобщение с $n=3$ на произвольное целое $n\geq 3$

$D_n := (x_1+\cdots+x_n)^3-x_1^3-\cdots-x_n^3$ для $n+1$ слагаемых легко решается при помощи суммы n кубов.

Именно, имеет место (дальше символы $L(n)$ и $R(n)$ будут применяться в собственных пояснениях)

Теорема 7. Справедливо разложение

$$D_n=3[(x_1+x_2)(x_1+x_3+\cdots+x_n)(x_2+\cdots+x_n)+\sum_{i=3}^{n}x_i\left(\sum_{j=i+1}^{n-1}x_j\right)\sum_{k=2}^{n}x_k].$$

Доказательство. Общее число членов $L(n)$ в D_n равно

$$L\left(n\right)=n^3-n.$$

Произведем подсчет числа членов $R(n)$ в квадратных скобках:

$R(n)=2(n-1)^2+(n-2)(n-3)+(n-3)(n-4)+\cdots+2\cdot 1.$ Нетрудно видеть, что сумма в фигурных скобках равна $\sum\limits_{i=1}^{n-3}2C_{i+1}^2=2C_{n-1}^3$.

Отсюда

$$R(n)=2(n-1)\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-3)}{6}\right]=\frac{C_{n+1}^3}{3}=\frac{n^3-n}{3}.$$

Умножая R_n на коэффициент 3, получим, что общее число членов справа равно

$$L(n)=\frac{3(n^3-n)}{3}=n^3-n,$$

что доказывает Теорему 7.

Следствие. При $n=$ 3 имеем

$D_3 = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(x + z)(y + z),$ при $n = 4$

$D_4 = (x + y + z + u)^3 - x^3 - y^3 - z^3 - u^3 = 3[(x + y)(x + z + u)(y + z + u) + zu(z + u),$ при $n = 5$

$D_5 = (x + y + z + u + t)^3 - x^3 - y^3 - z^3 - u^3 - t^3 = = 3[(x + y)(x + z + u + t)(y + z + u + t) + ut(u + t),$ и далее для каждого целого $n > 5$.

Замечание. При $n = 2$ имеем

$$D_3 = (x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y) = 3_1(x, y)_2(x, y).$$

Теорема 8. Если x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 + px + q = 0$, то

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q.$$

Доказательство. Запишем систему Виета (F.Viete, 1540 – 1603):

$x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = p, x_1x_2x_3 = -q.$ Тогда по следствию из теоремы 3 имеем

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(x_1x_2x_3) = -3q.$$

Пример(№296 из [6]): "Вывести формулу Кардано (J.Cardano, 1545) для одного из корней уравнения $x^3 + px + q = 0$, а именно для корня x_1,

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}},$$

где $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ – дискриминант.

Решение. Воспользуемся тождеством суммы трех кубов:

$x^3 + a^3 + b^3 - - 3abx = (x + a + b)(x^2 + a^2 + b^2 - - xa - - xb - ab),$ где $a^3 + b^3 = q$ и $3ab = -p$.

Тогда из равенства x+a+b= 0 следует x=-a- b.

Имеем $a^3 + b^3 = q$ и $a^3b^3 = -\frac{p^3}{27}$, откуда получаем искомое равенство

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}}, \; b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}}.$$

Обычно эту формулу Тартальи (N.Tartaglia), неточно называемую по имени опубликовавшего ее Кардано, выводят подстановкой $x = a + b$ в $x^3 + px + q = 0$, но данный вывод короче и нагляднее.

Замечание. В случае отрицательного дискриминанта $(D < 0)$ использование формулы Тартальи требует знания комплексного анализа, чем не владели математики XVI века, называвшие этот случай *"casus irreducibilis"*.

Пример. Найти корни уравнения $x^3 - 39x + 70 = 0$.

Здесь $p = -39, q = 70$ и $D = 35^2 + \frac{(-39)^2}{27} < 0,$
т.е. находимся в случае *casus irreducibilis.*

Данное уравнение имеет целые корни -7, 2, 5, что следует из системы Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = -39,$$
$$x_1x_2x_3 = -70.$$

Из Основной теоремы алгебры вытекает, что произвольное кубическое уравнение может иметь либо один вещественный и два комплексных сопряженных корня, либо три различных вещественных корня(если ее дискриминант $D < 0$), как в только что приведенном примере, что смущало математиков XVI века.

Отметим, что исчерпывающее решение неприводимого случая было получено только в XX веке применением алгоритма теории Галуа (E.Galois).

Применяя Теорему 8, вычислим сумму кубов корней уравнения: $-7^3 + 5^3 + 2^3 = -210 = -3q$.

Рассмотренные выше задачи являются задачами повышенной трудности для обычной биномной ($n = 2$) алгебры A_2, при использовании же аппарата триномной A_3 и тетраномной A_4 алгебр они становятся уже ординарными по трудности (зачастую тривиальными) задачами алгебр. Школьная биномная алгебра A_2 является наиболее слабой по выразительной мощи алгеброй, т.к. верно концентрическое вложение алгебр $A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \ldots \subset A_n$ где A_n- алгебра $n-$ номов.

Приведем решения еще нескольких трудных задач, легко получаемые с помощью сумм кубов.

1. *Задача Бертрана*(J. Bertrand, 1822 – 1900, FrenchMathn). Доказать, что

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

Решение. Положим

$= \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}, b= \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}, c=-4.$

Имеем $a+b-4=0$. Применим формулу суммы трех кубов: $a^3+b^3-64=-12ab$, или, возвращаясь к радикалам:

$$20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}-64=-12\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}.$$

После равносильных преобразований приходим к числовому равенству,

$$-24=-12\sqrt[3]{8}=-24,$$

Что доказывает справедливость исходного равенства.

2. *Вторая задача Бертрана.* Доказать, что

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$$

Можно условие этой, как и первой, задачи Бертрана усложнить, не задавая правую часть и потребовав доказать, что суммы двух радикалов слева определяют рациональное число и найти его.

Решение. Итак,

$$x=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}},$$

надо доказать, что x есть число рациональное и найти его значение.

Возведя обе части последнего неравенства в куб, после элементарных преобразований получаем уравнение

$$x^3+5x-12=0=(x-3)(x^2+3x+4),$$

имеющее единственный вещественный корень $x=3$ (два других корня - комплексные). Проверим, что сумма данных двух радикалов a и b дает число 3:

$$x=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}=a+b=3.$$

Исходя из искомого равенства $a+b-3=0$ проведем следующие тождественные преобразования: применяя формулу суммы трех кубов получаем $a^3+b^3-27=-9ab$. Подставляя вместо a и b соответствующие радикалы, после преобразований имеем равенство $12-27=-9\cdot 5/3=15, 15=15$, т.е. приходим к верному числовому равенству, что дает решение поставленной задачи.

Задача Бертрана относится к трудной теме представлений рациональных чисел комбинацией иррациональностей.

Формула суммы кубов во многих случаях существенно облегчает решения уравнений, в которых внешние радикалы есть кубические иррациональности.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

Решение. Пусть

$$a=\sqrt[3]{x+1}, b=\sqrt[3]{3x+1}, c=-\sqrt[3]{x-1}.$$

Имеем $a+b+c=0$. Тогда

$$a^3+b^3+c^3=3abc : x+1+3x+1-x+1=-3\sqrt[3]{(x-1)(3x+1)(1-x)}.$$

Возведя обе части в куб, получим $(x+1)^3=(x+1)(3x+1)(1-x)$, откуда находим единственный корень $x=-1$, т.к. корни производного уравнения $4x^2=0$ – посторонние корни.

Отметим, что во всех рассматриваемых здесь примерах применение формулы суммы кубов ***существенно предпочтительнее использования громоздкой формулы куба суммы*** в стандартных способах решения кубических уравнений (и иррациональностей).

Таким образом, формула суммы n кубов и ее следствия позволяют эффективно решать многие трудно решаемые традиционными способами задачи (hard solving problems).

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}-4=0.$

Решение. По аналогии с предыдущим примером, применение формулы суммы трех кубов приводит к уравнению

$$9-\sqrt{x+1}+7\sqrt{x+1}-64=-12\sqrt[3]{(9-\sqrt{x+1})(7+\sqrt{x+1})}.$$

После элементарных тождественных преобразований имеем уравнение $(x+2)^2=4(x+1)$, допускающее одно решение $x=0$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}-\sqrt[3]{18}=0.$

Решение. Имеем уравнение

$$30=-\sqrt[3]{18(54^2-x)},$$

приводящееся к уравнению

$$27000=-18(2916-x)$$

с решением $x=4416$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3-3}=\,-1.$

Решение. Имеем

$$x^3-37-x^3+1=-3\sqrt[3]{x^3-37}.$$

После преобразований $12=\sqrt[3]{x^3-37}$ возведем в куб: $x^6-37x^3-1728=0$. После замены $t=x^3$ получим $t^2-37t-1728=0$. Отсюда $t_1=-27(x_1=-3), t_2=64(x_2\;=\;4)$.

Разумеется, такого сорта примеры можно неограниченно продолжить.

В заключение приведем пример использования формулы суммы кубов в задачах на доказательство.

Пример 5. Доказать, что если сумма трех чисел $m+n+k$ делится нацело на 6, то и сумма их кубов $m^3+n^3+k^3$ также делится нацело на 6.

Можно решить эту задачу многими способами, но самое короткое, ясное и лаконичное доказательство использует формулу суммы трех кубов. По формуле суммы кубов

$$m+n+k=(m+n+k)(m^2+n^2+k^2-mn-mk-nk)+3mnk.$$

По заданному условию, 6 делит $m+n+k,$ надо доказать, что 6 делит $3mnk$, или 2 делит mnk (после сокращения на 3).

Так как 6 делит $m+n+k$, то $m+n+k$ четно, а это возможно, если все три слагаемых четны, либо два слагаемых нечетны, а одно четно, стало быть, mnk – четное, что в силу наличия множителя 3 завершает доказательство.

Пример[8, №274]. Упростить выражение

$D=(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3.$

Решение. Обозначим

$$x=a+b+c, y=c-a-b, z=a-b-c, t=b-a-c.$$

Тогда

$$D = x^3 + y^3 + z^3 + t^3$$

и

$$x + \ y + \ z + \ t \ = \ 0.$$

Тогда по формуле суммы четырех кубов (см. Теорему 3)

$$D = 3[xy(z+t) + (x+y)zt]$$

и

$$xy = c^2 - (a+b)^2, x+y = 2c, z+t = -2c, zt = -[(a-b)^2 - c^2].$$

В этом случае

$$D = 6[c^2 - (a+b)^2 + (a-b)^2 - c^2] = 24abc.$$

Тождество, верное при соблюдении некоторого условия, назовем *условным тождеством.* Например, выше показано, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$, что является примером условного тождества, как и его обобщение:

$$a_1^3 + \ldots + a_n^3 = 3 \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_i a_j a_k$$

при $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Именно это условное тождество позволило эффективно решать трудные для биномной алгебры задачи в рассмотренных выше примерах. Поэтому представляет интерес поиск условных тождеств. Здесь же приведем лишь некоторые условные тождества триномной алгебры, существенно обогащающие выразительную мощь алгебры A_3.

Пусть $a+b+c=0$, тогда верны следующие условные тождества:

$$1.a^4 + b^4 + {}^4 = 1/2\left(a^2 + b^2 + {}^2\right)^2;$$

$$1\prime.a^6 + b^6 + {}^6 = 1/4(a^2 + b^2 + {}^2)^3 + 3(abc)^2;$$

$$1\prime\prime.a^8 + b^8 + {}^8 = (a^4 + b^4 + {}^4)^2 - 2(a^4b^4 + a^{44} + b^{44});$$

2. $a^5 + b^5 + {}^5 = 5/2abc(a^2 + b^2 + {}^2) = 5/6(a^3 + b^3 + {}^3)(a^2 + b^2 + {}^2)$, из чего следует $a^3 + b^3 + {}^3 = 3abc$;

$$3.a^7 + b^7 + {}^7 = 7/10(a^2 + b^2 + {}^2)(a^5 + b^5 + {}^5) = 7/12(a^2 + b^2 + {}^2)^2(a^3 + b^3 + {}^3).$$

Доказательства их (кроме 1, $1\prime$ и $1\prime\prime$) далеко не тривиальны и представляют собой прекрасный тренинг, и, чтобы не лишать восторга от их переоткрытия, доказательства не приводим, как и доказательства неравенства

$$a^4 + b^4 + {}^4 \ge abc(a+b+c)$$

и его обобщения

$$a_1^{n+1} + \ldots + a_{n-1}^{n+1} + a_n^{n+1} \ge (a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n)a_1a_2 \cdots a_n.$$

Вычислительный аппарат алгебры как в программах средних школ, так и вузов крайне скуден. Так, мало кто знает о гибридных (арифметико-геометрической, арифметико-арифметической и др.) прогрессиях, о прогрессиях высших порядков и т.д. Хотя классик отмечал: "*Заниматься алгеброй - значит, по существу, вычислять*", а на обложке фолианта "Конкретная математика" (Грэхем Р., Кнут Д. и Паташник О.) на бетоне выдавлена греческая буква - знак суммы (великий знак Алгоритмики) не только для компактной записи, но и для упорядочения вычислений.

Условные тождества для четных степеней $a^{2k} + b^{2k} + c^{2k}$ нетрудно получить, если известны тождества для $a^k + b^k + {}^k (k = 1, 2, \ldots)$, в то время как для суммы нечетных степеней $a^{2k+1}+b^{2k+1}+^{2k+1}$ существенно сложнее получить соответствующие тождества, требующие новых идей и подходов.

Таким образом,традиционное решение разобранных выше примеров потребовало бы много страниц убористого текста, но использование оригинальной формулы суммы кубов позволило избежать эти трудности в их решениях и перевести в разряд ординарных задач.

Невольно вспоминаются мудрые советы величайших умов человечества

1. При изучении наук примеры важнее правил, примеры учат (exempla docent) –SirI. Newton,
2. Все должно быть изложено так просто, как это только возможно, но не проще (не в ущерб строгости) –A. Einstein,
3. Формулы умнее нас –Henri Poincare.

Заключение. Данная статья есть развитие точки зрения известных математиков (авторов учебников для вузов и школ) Н.Я. Виленкина [2] и М.И. Башмакова [3]: "Содержательная, идейная сторона учебников алгебры 7 – 9 классов может быть существенно усилена при сохранении доступности курса." Эти авторы впервые ввели в учебники понятие куба тринома, но доказательство разложения суммы куба у них отсутствует.

Здесь же мы рассматриваем максимальное обобщение понятия тринома – n-ном (алгебру n-номов). Ведь лавинообразный эффект от сокращения (упрощения) достигается на формулах для степеней n-номов ($n \in N$), а не биномов (n= 2). Уже алгебра триномов (n= 3) намного обогащает аппарат упрощения, что подтверждено здесь нами и упомянутыми учебниками.

Комбинаторика позволяет естественным образом получить известное тождество Лагранжа (Lagrange) для квадрата скалярного произведения векторов (следствие его есть неравенство Коши-Шварца) и проясняет суть хрестоматийных формул алгебры. Так, сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии есть $S_n = \ (a_1 \ + \ a_n)n/2$, но в то же время "в тени" остается эквивалентная "более мощная" формула (d – разность прогрессии) $S_n = a_1 n \ + \ dC_n^2$, допускающая вычисление более сложных сумм: формулы суммы $n-$ частичных сумм арифметической (геометрической) прогрессии и их гибрида – арифметико-геометрической прогрессии, а также прогрессий высших порядков.Really, Arithmetic-Geometric Progressionis VIP (Very Important Progression)!

Все это составляет продвинутый аппарат авангардного раздела математики – алгоритмики (анализа и построения эффективных алгоритмов), важность комбинаторики для которой акцентирована в эпиграфе статьи: "Алгоритмика по самой своей природе комбинаторна . . . "

Список литературы

1 Нурлыбаев А.Н. К комбинаторной сути тождеств и неравенств алгебры // Материалы III Межд. научной конф. Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке. -Алматы, 2005. -Т. 3. -С. 237-242.

2 Виленкин Н.Я. и др. Алгебра 8 (углубленное изучение). -М.: Просвещение, 2000. -256 с.

3 Башмаков М.И. Алгебра 7, 8, 9. -М.: Просвещение, 2003, 2004, 2005.

4 Темірӏалиев Н. Әубакір Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X-XI кластар. -Алматы: Жазушы, 2002. - 382 б.

5 Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, для X-XI классов. -Алматы: Жазушы, 2002. – 423 с.

6 Ивлев Б.М. и др. Задачи повышенной трудности. -М.: Просвещение, 1990.

7 Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. -М.: Просвещение, 1987.

8 Кутепов А.К., Рубанов А.Т. Задачник по алгебре и элементарным функциям. -М.: Высшая школа, 1969. -288 с.

А.Н. Нұрлыбаев [1] **, И.М. Ковалева** [2]

[1] *Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан*
[2] *әл-Фараби атындағыҚазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан*

$n-$ номдық алгебрадағы комбинаторлық әдістер және олардың қолданулары

Аннотация: Инварианттар теориясының негізін қалаушы Д. Силвестердің (John James Sylvester) "The part in some sense greater than the whole:general proposition must be proved easier than any partial case - Бөлік белгілі бір мағынада бүтіннен үлкен: жалпы тұжырым оның дербес жағдайына қарағанда жеңіл дәлелденуі керек" сөздерін толығымен растайтын әдеттегі (биномдық) алгебраның формулаларын пайдаланған кезде белгілі бір қиындық тудыратын мәселелерге n -номдар алгебрасында комбинаторлық әдістерді қолданудың тиімділігі көрсетілген. n -номдар – n -мүшелі $a_1 + \cdots + a_n$ қосындылары дәрежелерінің қысқаша көбейту формулаларын дәлелдеудің оригиналды қысқаша комбинаторлық дәлелдеулері берілген. Бұл қорытындылар бұған дейін белгілі әдістермен қиын шешілетін есептерді n -номдар алгебрасының әдістері арқылы қарапайым есептер қатарына әкеледі. $n-$ мүшелі қосындылардың кубтарының формулаларын қолдануын ықшамдаудың маңызды бөлігі, мысалы 3 айнымалы жағдайда $a+b+c=0$ болғанда $a^3+b^3+c^3=3abc$ түріне дейін ықшамдалады және бұл күрделі есептер шешуінің қиындығын эллиминациялаудың басты бөлігі. Ең бастысы, бұл шартты (яғни қосымша шарт болғанда) теңдік n қосынды жағдайына жалпыланады: егер $a_1+\cdots+a_n=0$, болса, онда $a_1^3+\cdots+a_n^3=3\sum\limits_{1\le i<j<k\le n} a_ia_ja_k$. Жеңілдету әсері көптеген мысалдармен көрсетілген, онда әдеттегі куб дәрежеге $(a_1+\cdots+a_n)^3$ шығарудың орнына "*Кубтардың қосындысы ушеселенген үштіктердің* $a_ia_ja_k(1\le i<j<k\le n)$ *қосындысына тең*" формуласы қолданылады. Бұл әсіресе кубтық иррационалдықтары бар теңдеулер мен кубтық араәтынастарды дәлелдеуде қолданылады.

Түйін сөздер: бином, трином, тетраном, пентаном, n-ном, комбинаторика, симметриялық функциялар, жоғары қиындықтардағы есептер.

A.N. Nurlybaev [1] **, I.M. Kovaleva** [2]

[1] *Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

Combinatorial Methods in $n-$ nomial Algebra and Their Application

Аннотация: The effectiveness of the application of the algebra of n-nomials to problems, whose solution causes a certain difficulty when using the formulas of ordinary (binomial) algebra, is shown. This fully confirms the prophetic words of the father of the theory of invariants D. Sylvester (John James Sylvester): "The part in some sense greater than the whole: general proposition must be proved easier than any partial case". The original concise combinatorial derivation of the formulas of abbreviated multiplication of $n-$ nomials – $n-$ term expressions $a_1+\cdots+a_n$ is given, which allows to translate many problems, that previously were difficult to solve by known methods, into the category of ordinary problems by means of the algebra of $n-$ nomials. A special role to simplify the application of the formula for the sum of n cubes is that in the particular case of 3 variables when $a+b+c=0$, it is simplified to the form $a^3+b^3+c^3=3abc$, and this is the main point to **eliminate** the complexity of solving difficult problems. The most interesting thing is that this conditional identity admits a generalization to n terms. So, if $a_1+\cdots+a_n=0$, then $a_1^3+\cdots+a_n^3=3\sum\limits_{1\le i<j<k\le n} a_ia_ja_k$. The simplification effect is clearly demonstrated in many examples, where instead of the traditional cube formula $(a_1+\cdots+a_n)^3$ the following formula is used: *the sum of cubes is tripled sum of* $a_ia_ja_k(1\le i<j<k\le n)$, this is especially convenient when solving equations with cubic irrationalities and proofs of cubic ratios.

Ключевые слова: binomial, trinomial, tetranomial, pentanomial, $n-$ nomial, combinatorics, symmetric functions, hard solving problems.

References

1 Nurlybaev A.N. K kombinatornoj suti tozhdestv i neravenstv algebry[On the combinatorial essence of identities and inequalities of algebra], Materialy III Mezhd. nauchnoj konf. Matematicheskoe modelirovanie i informacionnye tehnologii v obrazovanii i nauke [Materials III Int. scientific conference Mathematical modeling and information technologies in education and science], Almaty, 2005. Vol. 3. P. 237-242.
2 Vilenkin N.Ja. and others. Algebra 8 (uglublennoe izuchenie)[Algebra 8 (in-depth study)] (Prosveshhenie[Education], 2000, 256 p.).
3 Bashmakov M.I. Algebra 7, 8, 9. [Algebra 7, 8, 9] (Prosveshhenie[Education], 2003, 2004, 2005).
4 Temirgaliyev N. , Aubakir B. , Bailov Y. , Potapov K. , SHerniyazov K. Algebra zhane analiz bastamalary [Algebra and the beginning of the analysis], X-XI classes, (Zhazushy, Almaty, 2002, 382 p.).
5 Temirgaliyev N. , Aubakir B. , BailovY. , Potapov K. , SHerniyazov K. Algebra zhane analiz bastamalary [Algebra and the beginning of the analysis], X-XI classes, (Zhazushy, Almaty, 2002, 423 p.)
6 Ivlev B.M. i dr. Zadachi povyshennoj trudnosti [Tasks increased difficulty] (Prosveshhenie[Education], 1990).
7 Babinskaja I.L. Zadachi matematicheskih olimpiad [Tasks of mathematical olympiads] (Prosveshhenie[Education], 1987).
8 Kutepov A.K., Rubanov A.T. Zadachnik po algebre i jelementarnym funkcijam[Questbook on algebra and elementary functions] (Vysshaja shkola[High School], 1969, 288p.)

Авторлар туралы мәліметтер:

Нұрлыбаев А. - ф.-м.ғ.к., Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университетінің профессоры (ҚазҰПУ), Достық даңғылы, 13, Алматы, Қазақстан.

Ковалева И. - ф.-м.ғ.к., әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-нің (ҚазҰУ) доценті, әл-Фараби даңғылы, 71, Алматы, Қазақстан.

Nurlybaev A. - Ph.D., Professor of the Kazakh National Pedagogical University named after Abai (KazNPU), 13, Dostyk Ave., Almaty, Kazakhstan.

Kovaleva I. - Ph.D., associate professor of Al-Farabi Kazakh National University (KazNU), al-Farabi Ave., 71, Almaty, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 11.02.2019

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Правила представления работ в журнал *"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компъютерные науки. Механика"*

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы.
- 2019. 2(127)- Нұр-Сұлтан: ЕҰУ. 70-б.
Шартты б.т. - 3,88. Таралымы - 30 дана.

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7(7172) 70-95-00 (ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды