

<https://doi.org/10.32523/2616-7182>

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326



Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№1 (126)/2019

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

bulmathmc.enu.kz



ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№1(126)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019

Nur-Sultan, 2019

Нур-Султан, 2019

БАС РЕДАКТОРЫ
ф.-м.ғ.д., проф
Темірғалиев Н. (Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары **Жұбанышева А.Ж.**, PhD
(Қазақстан)
Бас редактордың орынбасары **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD
(Қазақстан)

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Алимхан Килан	PhD, проф. (Жапония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Қытай)
Бекенов М.И.	ф.-м.ғ.к., доцент (Қазақстан)
Голубов Б.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Зунг Динь	ф.-м.ғ.д., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Иванов В.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Иосевич А.	PhD, проф. (АҚШ)
Калиев И.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Кобельков Г.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Курина Г.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Марков В.В.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Мейрманов А.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Смелянский Р.Л.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Умирбаев У.У.	ф.-м.ғ.д., проф. (АҚШ)
Холщевникова Н.Н.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. докторы, проф. (Германия)

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева
Жауапты хатшы: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: ҚР БЖҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.

Тиражы: 25 дана

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,
тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410).

EDITOR-IN-CHIEF
Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences
Temirgaliyev N. (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Zhubanysheva A.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Nauryzbayev N.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Editorial board

Abakumov E.V.	PhD, Prof. (France)
Alexeyeva L.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Alexander Iosevich	PhD, Prof. (USA)
Alimhan Keylan	PhD, Prof. (Japan)
Bekzhan Turdybek	PhD, Prof. (China)
Bekenov M.I.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assoc.Prof. (Kazakhstan)
Golubov B.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Dũng Dinh	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Vietnam)
Ibrayev A.G.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Kazakhstan)
Ivanov V.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kaliev I.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kobel'kov G.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kurina G.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Markov V.V.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Meirmanov A.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Smelyansky R.L.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Umirbaev U.U.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(USA)
Kholshechnikova N.N.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Schmeisser Hans-Juergen	Dr. habil., Prof. (Germany)

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: A.Zh. Zhubanysheva

Responsible secretary: A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.

Circulation: 25 copies

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;

tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
профессор, д.ф.-м.н.
Темиргалиев Н. (Казахстан)

Зам. главного редактора **Жубанышева А.Ж.**, PhD (Казахстан)

Зам. главного редактора **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD (Казахстан)

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Алимхан Килян	PhD, проф. (Япония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Китай)
Бекенов М.И	к.ф.-м.н., доцент (Казахстан)
Голубов Б.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Зунг Динь	д.ф.-м.н., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Иванов В.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Иосевич А.	PhD, проф. (США)
Калиев И.А.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Кобельков Г.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Курина Г.А.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Марков В.В.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Мейрманов А.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Смелянский Р.Л.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Умирбаев У.У.	д.ф.-м.н., проф. (США)
Холщевникова Н.Н.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. доктор, проф. (Германия)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева
Ответственный секретарь: А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
Собственник:
РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА	
<i>Темірғалиев Н., Тауғынбаева Ғ.Е., Абикенова Ш.К.</i> Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнмәтінінде дербес туындылы теңдеулерді дискреттеу	8
<i>Алимбаев А.А.</i> Автоморфизмдер топтарында амальгамалы еркін көбейтіндінің құрылымы	52
<i>Бакурадзе М.</i> Надирадзе формалды топтарының заңдарына орай кейбір дәл өрнектер	62
<i>Фарайзаде А.П., Шафи А.</i> Полигамдық функциялар үшін Туран типті және кейбір жаңа теңсіздіктер	68
<i>Ермекбаева Ж.Ж., Шакирова Р.Е., Малеева Ж.М.</i> Жыртқыш-олжа жүйесіндегі бірлесіп қорғану әсері	72

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

<i>Temirgaliyev N., Taugynbayeva G.Y., Abikenova Sh.K.</i> Discretization of solutions of partial differential equations in the context of Computational (numerical) diameter	8
<i>Alimbaev A.A.</i> Structure of amalgamated free work in groups automorphisms	52
<i>Bakuradze M.</i> Some explicit expressions concerning the Nadiradze formal group law	62
<i>Farajzadeh A.P., Shafie A.</i> Turán's inequality type for polygamma functions and some new inequalities	68
<i>Yermekbayeva J.J., Shakirova R.E., Malekova Zh.M.</i> The effect of collective protection in the predator-prey system	72

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
МЕХАНИКА, №1(126)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

<i>Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абиженова Ш.К.</i> Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника	8
<i>Алимбаев А.А.</i> Структура амальгамированного свободного произведения в группах автоморфизмов	52
<i>Бакурадзе М.</i> Некоторые точные выражения относительно законов формальных групп	62
<i>Надирадзе</i>	
<i>Фарайзаде А.П., Шафи А.</i> Неравенства типа Турана для полигамных функций и некоторые новые неравенства	68
<i>Ермекбаева Ж.Ж., Шакирова Р.Е., Малекова Ж.М.</i> Эффект коллективной защиты в системе хищник-жертва	72

МРНТИ: 27.23.25

A.P. Farajzadeh, A. Shafie

*Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, 67149, Iran
(E-mail: farajzadehali@gmail.com, shafie.allahkaram@gmail.com)*

Turan's inequality type for polygamma functions and some new inequalities

Abstract: Turan's inequality is known as

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq P_n^2(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots,$$

where P_n denotes the Legendre polynomial of degree n . In this note, we show that Turan's inequality is still true when the Legendre polynomial of degree n replace by

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{(-1)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-tx}t^n}{1 - e^{-t}} dt$$

polygamma function of order n . In fact, we prove more than Turan's type inequality that zero is the greatest lower bound of the sequence

$$\{\Psi_n^2(x) - \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x)\}.$$

Moreover, some new inequalities for polygamma function of order n are established.

Key words: Turan-type inequality, polygamma functions.

AMS Mathematics Subject Classification 33B15, 26B35.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-68-71>

Introduction

In 1950, Turan [1] proved the inequality

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq P_n^2(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots,$$

where P_n denotes the Legendre polynomial of degree n . This inequality has attracted much attention, so that numerous inequalities of the same type were published for other special functions. In The gamma Γ and Ψ (or diagamma) functions are defined by

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}, \quad \Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

for all real number $x > 0$. It was first defined and studied by Leonard Euler (1707-1783), and it is of fundamental importance to many areas of science, like probability theory, mathematical physics, number theory and special functions. It also appears in the study of many important series and integrals. For its basic properties and some historical remarks. In the literature the derivatives $\Psi', \Psi'', \Psi''', \dots$ are known as polygamma functions defined as the n -th derivative of the function. We denote by $\Psi_n(x) = \Psi^{(n)}(x)$. The polygamma functions defined as the n -th derivative of the function Ψ which have the following integral representations:

$$(-1)^{n+1}\Psi_n(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}t^n}{1 - e^{-t}} dt, \quad \Psi(x) = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{1 - e^{-t}} dt. \quad (1)$$

for $n = 1, 2, 3, \dots$ where $\gamma \approx 0.5772156649015328606$ is the Euler-Mascheroni constant. See these and other properties of these functions for instance [2, p. 260]. In continue we prove that

$$0 \leq \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x) - \Psi_n^2(x) = \nabla_n(x)$$

(In what follows we maintain this notation.) Is it possible to replace the lower bound 0 by a positive constant? It is our aim to give an affirmative answer to this question.

Preliminaries

From (1) it is easily to see that the following lemma holds

Lemma 1. (i) $\Psi(x)$ is strictly increasing on $(0, \infty)$.
(ii) For any n , $\Psi_n(x)$ is strictly decreasing and positive on $(0, \infty)$.
If n is an even integer then Ψ_n is increasing and negative.

Corollary 1. For any $x, y \in (0, \infty)$ and $n \in N$, the following inequality

$$\Psi_n^2(x+y) \leq \Psi_n(x)\Psi_n(y)$$

holds.

Theorem 1. The $\Psi(x)$ is log-convex on n and x that is for any $x, y \in (0, \infty), m, n \in N$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \geq 1$, the following inequality

$$\Psi_{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq |\Psi_m(x)|^{\frac{1}{p}} |\Psi_n(y)|^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

holds where $\frac{m}{p} + \frac{n}{q}$ is an integer.

Proof. By Hölder inequality we have

$$\begin{aligned} \Psi_{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &\leq (-1)^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q} + 1} \Psi_{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}}\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \\ &= \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}} e^{-(\frac{x}{p} + \frac{y}{q})t}}{1 - e^{-t}} dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{t^{\frac{m}{p}} e^{-\frac{x}{p}t}}{(1 - e^{-t})^{\frac{1}{p}}}\right) \left(\frac{t^{\frac{n}{q}} e^{-\frac{y}{q}t}}{(1 - e^{-t})^{\frac{1}{q}}}\right) dt \\ &\leq \left|\int_0^\infty \frac{t^m e^{-xt}}{1 - e^{-t}}\right|^{1/p} \left|\int_0^\infty \frac{t^n e^{-yt}}{1 - e^{-t}}\right|^{1/q} \\ &= |\Psi_m(x)|^{\frac{1}{p}} |\Psi_n(y)|^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

and the proof is completed.

Setting in the previous Theorem 1 $x = y, p = q = 2, m \mapsto n - 1, n \mapsto n + 1$, we get the following corollary.

Corollary 2 (Turan's inequality). If $x > 0, n \geq 2$, then

$$\Psi_n^2(x) \leq \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x).$$

Corollary 3. The $\Psi(x)$ is log-convex on n that is for any $x \in (0, \infty), m, n \in N$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \geq 1$, the following inequality holds

$$\Psi_{\frac{m}{p} + \frac{n}{q}}(x) \leq |\Psi_m(x)|^{\frac{1}{p}} |\Psi_n(x)|^{\frac{1}{q}}, \quad (3)$$

where $\frac{m}{p} + \frac{n}{q}$ is an integer.

Corollary 4. The function $\Psi_n(x)$ is log-convex on x that is for $x, y > 0, n \in N$ and $\frac{m}{p} + \frac{n}{q} = 1, p \geq 1$ the following inequalities

$$\Psi_n\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq |\Psi_n(px)|^{1/p} |\Psi_n(qy)|^{1/q}$$

or

$$\Psi_n(x+y) \leq |\Psi_n(px)|^{1/p} |\Psi_n(qy)|^{1/q}$$

holds.

Corollary 5. If $x, y \geq 1$, $n \in \mathbb{N}, p \geq 1$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, then

$$\Psi_n\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \leq |\Psi_n(xy)| \leq |\Psi_n(x)|^{1/p} |\Psi_n(y)|^{1/q}.$$

Lemma 2 ([3]). The function $\Psi(x) - \ln x + \frac{\alpha}{x}$ is completely monotonic on $(0, \infty)$ iff $\alpha \geq 1$ and $\ln x - \frac{\alpha}{x} - \Psi(x)$ is completely monotonic on $(0, +\infty)$ if and only if $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Corollary 6. For all $x \in (0, +\infty), n \in \mathbb{N}$ we have

$$\frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{2x^{n+1}} < (-1)^{n+1}\Psi_n(x) < \frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Proof. Let $\alpha = 1$, since $\Psi(x) - \ln x + \frac{\alpha}{x}$ is completely monotonic on $(0, \infty)$ we have

$$0 \leq (-1)^n \left(\Psi(x) - \ln x + \frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \left[\Psi_n(x) - \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{x^n} + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\right]$$

which implies that

$$0 < (-1)^n \Psi_n(x) + \frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{x^{n+1}}$$

so

$$(-1)^{n+1}\Psi_n(x) < \frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Now we let $\alpha = \frac{1}{2}$ by the same proof we obtain

$$\frac{(n-1)!}{x^n} + \frac{n!}{2x^{n+1}} > (-1)^{n+1}\Psi_n(x)$$

and the proof is completed.

Theorem 2. If $x > 0, n \geq 2$, then

$$\frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} \leq \nabla_n(x) = \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x) - \Psi_n^2(x) \leq \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} + \left(\frac{2x}{n-1} + \frac{x^2}{n(n-1)}\right).$$

So the set of the values of $\nabla_n(x)$ belong $(0, \infty)$ and

$$\nabla_n(x) \sim \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} \text{ as } x \rightarrow 0.$$

Proof. The property $\lim_{x \rightarrow \infty} \nabla_n(x) = 0$ we derive from Corollary 1. It is easy to make sure

$$\nabla_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(t-\tau)^2 e^{-x(t+\tau)}}{(1-e^{-t})(1-e^{-\tau})} dt d\tau.$$

Using the inequalities

$$1 \leq \frac{1}{1-e^{-t}} \leq 1 + \frac{1}{t},$$

we get

$$\nabla_n(x) \geq \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (t-\tau)^2 (t \times \tau)^{n-1} e^{x(t+\tau)} dt d\tau = \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}}$$

and

$$\begin{aligned} \nabla_n(x) &\leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (t-\tau)^2 (t \times \tau)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) e^{x(t+\tau)} dt d\tau \\ &= \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} + \frac{2(n-2)!n!}{x^{2n+1}} + \frac{(n-2)!(n-1)!}{x^2 n} = \frac{(n-1)!n!}{x^{2n+2}} \left(1 + \frac{2x}{n-1} + \frac{x^2}{n(n-1)}\right). \end{aligned}$$

Note that with the help of finer estimates of the following equality

$$\nabla_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(t-\tau)^2 e^{-x(t+\tau)}}{(1-e^{-t})(1-e^{-\tau})} dt d\tau,$$

one can obtain exact boundaries for $\nabla_n(x)$.

References

- 1 Turan P. On the zeros of the polynomials of Legendre//Casopis Pest. Mat. Fys. -1950. Vol. 75. -P. 113-122.
- 2 Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Tables, Dover, New York,1965.
- 3 Turan P. Three classes of logarithmically completely monotonic functions involving gamma and psi functions, Integral Transforms and Special Functions. -2007. 18. -P. 503-509.

А.П. Фарайзаде, А. Шафи

Математика Факультеті, Рази университеті, Керманшах, 67149, Иран

Полигамдық функциялар үшін Туран типті және кейбір жаңа теңсіздіктер

Аннотация. n -нші ретті $P_n(x)$ Лежандр полиномдары үшін

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq P_n^2(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Туран теңсіздігі орындалады. Мақалада n -нші ретті $\Psi_n(x)$ Лежандр полиномдары үшін де Туран теңсіздігінің

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{(-1)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} t^n}{1 - e^{-t}} dt$$

орындалатындығы көрсетілді. Сонымен қатар,

$$\{\Psi_n^2(x) - \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x)\}$$

тізбегінің төменгі шекараларының үлкені нөл болатындығы дәлелденді.

Және де n -нші ретті полигамдық функциялары үшін кейбір жаңа теңсіздіктер дәлелденді.

Ключевые слова: Туран типті теңсіздіктер, полигамдық функциялар.

А.П. Фарайзаде, А. Шафи

Факультет математики, Университет Рази, Керманшах, 67149, Иран

Неравенства типа Турана для полигамных функций и некоторые новые неравенства

Аннотация. Для полиномов Лежандра P_n порядка n выполнены неравенства Турана

$$P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) \leq P_n^2(x), \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

В работе показано, что неравенство Турана справедливо для полигамных функций порядка n

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{(-1)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-tx} t^n}{1 - e^{-t}} dt.$$

Более того, доказано, что ноль есть наибольшая нижняя граница последовательности

$$\{\Psi_n^2(x) - \Psi_{n-1}(x)\Psi_{n+1}(x)\}.$$

Также установлены некоторые новые неравенства для полигамных функций порядка n .

Ключевые слова: неравенства типа Турана, полигамные функции.

References

- 1 Turan P. On the zeros of the polynomials of Legendre, Casopis Pest. Mat. Fys., 75, 113-122(1950).
- 2 Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Tables, Dover, New York,1965.
- 3 Turan P. Three classes of logarithmically completely monotonic functions involving gamma and psi functions, Integral Transforms and Special Functions, 18, 503-509(2007).

Авторлар туралы мәліметтер:

Фарайзаде А.П. – Профессор, Математика Факультеті, Рази университеті, Керманшах, 67149, Иран.

Шафи А. – PhD студент, Математика Факультеті, Рази университеті, Керманшах, 67149, Иран.

Farajzadeh A.P. – Professor, Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, 67149, Iran.

Shafie A. – PhD student, Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, 67149, Iran.

Редакцияға 07.03.2019 қабылданды

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлы *bulmathmc.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады. Мақаламен бірге авторлар редакцияға ілеспе хат жолдаулары қажет.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теоремадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Киров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz. Сайт: bulmathmc.enu.kz.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website *bulmathmc.enu.kz*. Authors also need to submit a cover letter.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages (from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. Address: 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилиевой файл можно скачать со сайта журнала *bul-mathmc.enu.kz*. А также авторам необходимо представить в редакцию Сопроводительное письмо.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубризатора МРНТИ (Международный рубризатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz. Сайт: bulmathmc.enu.kz.

Бас редактор:

Н. Темірғалиев

Жауапты редактор:

А. Ж. Жұбанышева

Жауапты хатшы:

А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2019. 1(126)- Астана: ЕҰУ. 80-б.
Шартты б.т. - 16. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7 (7172) 70-95-00(ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды