bulmathmc.enu.kz

---

https://doi.org/10.32523/2616-7182

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

EURASIAN
NATIONAL
UNIVERSITY

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№1 (126)/2019

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№1(126)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады
Published 4 times a year
Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019
Nur-Sultan, 2019
Нур-Султан, 2019

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева
Жауапты хатшы: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 25 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: A.Zh. Zhubanysheva
Responsible secretary: A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 25 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;
tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
Собственник:
РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТIНIҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №1(126)/2019

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №1(126)/2019

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА, №1(126)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетiнiң хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2019, том 126, №1, 52-61 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.17.19**

А.А. Алимбаев

Костанайский государственный педагогический университет имени У. Султангазина,
Костанай, 110000, Казахстан
(E-mail: alialimbayev@gmail.com)

Структура амальгамированного свободного произведения в группах автоморфизмов

Аннотация: Определен один класс многообразий алгебр, где группа ручных автоморфизмов свободных двупорожденных алгебр допускает структуру амальгамированного свободного произведения над произвольной областью целостности. Доказана сократимость ручных автоморфизмов свободных двупорожденных алгебр этих многообразий над евклидовыми кольцами. Доказано, что обобщение автоморфизма Нагаты является диким автоморфизмом свободных алгебр этих многообразий от двух переменных над евклидовыми кольцами.

Ключевые слова: автоморфизм, ручной автоморфизм, свободное произведение групп, евклидова область.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-52-61

1. Введение В работах [1, 2] доказано, что все автоморфизмы алгебры многочленов $K[x,y]$ от двух переменных над произвольным полем являются ручными. Группа автоморфизмов алгебры $K[x,y]$ допускает структуру амальгамированного свободного произведения, то есть

$$Aut(K[x,y]) \cong A *_C B,$$

где A – подгруппа аффинных автоморфизмов, B – подгруппа треугольных автоморфизмов и $C = A \cap B$. Этот результат дает исчерпывающие описания группы автоморфизмов двупорожденных алгебр многочленов и по существу был доказан в работе В. ван дер Калка 1953 года [2]. Впервые точная формулировка была дана И.Р. Шафаревичем [3]. В работе Д. Райта [4] доказан аналог этого результата для ручных автоморфизмов двупорожденных алгебр многочленов над произвольной областью целостности.

Хорошо известно, что автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр ранга два над произвольными полями [5, 6] и свободных алгебр Пуассона ранга два над полями нулевой характеристики [7] также являются ручными. Более того, группы автоморфизмов алгебры многочленов $K[x,y]$, свободной ассоциативной алгебры $K\langle x,y\rangle$ и группа автоморфизмов свободной алгебры Пуассона $P\langle x,y\rangle$ изоморфны [5–7], то есть все они допускают структуру амальгамированного свободного произведения.

Известный автоморфизм Нагаты (см. [8])

$$\sigma = (x + 2y(zx - y^2) + z(zx - y^2)^2, y + z(zx - y^2), z)$$

алгебры многочленов $K[x,y,z]$ над полем K характеристики 0 не является ручным, то есть является диким [9–11]. Свободные ассоциативные алгебры от трех переменных над полем нулевой характеристики также имеют дикие автоморфизмы [12]. Автоморфизм Нагаты дает пример дикого автоморфизма свободных алгебр Пуассона от трех переменных.

В 1964 году П. Кон [13] доказал, что автоморфизмы конечно порожденных свободных алгебр Ли над полями являются ручными. В 1968 году Дж. Левин [14] обобщил этот результат для свободных алгебр любого однородного шрайерово многообразия алгебр. Напомним, что шрайеровыми являются многообразия всех неассоциативных алгебр [15], коммутативных и антикоммутативных алгебр [16], алгебр Ли [17, 18] и супералгебр Ли

[19, 20]. Следовательно, автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр, свободных коммутативных и антикоммутативных алгебр конечного ранга над полями также являются ручными.

Группы автоморфизмов конечно порожденных свободных алгебр над кольцами главных идеалов были исследованы в работах [21,22]. Один из результатов (Теорема 3, [22]) гласит, что автоморфизмы свободных неассоциативных алгебр над кольцами главных идеалов являются ручными. Однако в работе [23] приведен пример дикого автоморфизма

$$\eta = (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2))$$

свободной неассоциативной алгебры и свободной коммутативной алгебры ранга два над евклидовыми кольцами. Этот автоморфизм является обобщением автоморфизма Нагаты и индуцирует автоморфизм Нагаты [8] алгебры $K[x, y, z]$. Нагата доказал [8], что σ является диким автоморфизмом алгебры $K[z][x, y]$ над $K[z]$. По этой причине автоморфизм η индуцирует дикий автоморфизм свободных алгебр любого многообразия алгебр, содержащего алгебру многочленов. В этой работе мы дадим еще один класс многообразий алгебр, для которых η дает также дикий автоморфизм.

Данная работа посвящена описанию широкого класса многообразий алгебр, где группа ручных автоморфизмов свободных двупорожденных алгебр допускает структуру амальгамированного свободного произведения.

Пусть Φ – произвольная область целостности. Пусть $\mathfrak{M}$ - произвольное однородное многообразие алгебр и пусть $\mathfrak{M}_\Phi\langle x_1, x_2\rangle$ – свободная алгебра этого многообразие от переменных x_1, x_2 над Φ. Через deg обозначим стандартную функцию степени на $\mathfrak{M}_\Phi\langle x_1, x_2\rangle$, то есть $\deg(x_i) = 1$ для $i = 1, 2$.

Многообразие $\mathfrak{M}$ назовем $*$ - *многообразием*, если выполняются следующие два условия:

(1) алгебра $\mathfrak{M}_\Phi\langle x_1, x_2\rangle$ является свободным Φ-модулем с базой состоящей из неассоциативных слов;

(2) для любого ненулевого $h \in \mathfrak{M}_\Phi\langle x_1, x_2\rangle$ с ненулевой линейной частью и для любых однородных $f, g \in \mathfrak{M}_\Phi\langle x\rangle$ с условием $f(h) \neq 0, g(h) \neq 0$ и $\deg(f) > \deg(g)$ имеем

$$\deg(f(h)) > \deg(g(h)) \text{ и } \deg(f(h)) \geq \deg(f) + \deg(h) - 1.$$

Примерами $*$-многообразий алгебр являются:

1. Многообразие ассоциативно коммутативных алгебр,
2. Многообразие ассоциативных алгебр,
3. Многообразие альтернативных алгебр является $*$ – многообразием так как любая двупорожденная альтернативная алгебра является ассоциативной (по теореме Артина [24]),
4. Многообразие йордановых алгебр (по теореме А.И. Ширшова [25]),
5. Многообразие всех алгебр (А.И. Жуков [26], А.Г. Курош [15]),
6. Многообразие всех коммутативных алгебр (А.И. Ширшов [16]).
7. Многообразие алгебр Лейбница (Ж.-Л. Лодей и Т.Пирашвили [27]).

В §2 этой работы доказано, что группы ручных автоморфизмов свободных алгебр $*$ – многообразий от двух переменных являются амальгамированными свободными произведениями аффинных и треугольных групп автоморфизмов над произвольной областью целостности. В §3 доказана сократимость ручных автоморфизмов свободных алгебр $*$ – многообразий от двух переменных над евклидовыми кольцами. Доказано, что обобщение автоморфизма Нагаты η, построенное в работе [23], является диким автоморфизмом свободных алгебр $*$ – многообразий от двух переменных над евклидовыми кольцами.

Автор благодарит своего научного руководителя, профессора У. Умирбаева за постановку задачи и за полезные советы при написании данной работы.

2. Амальгамированное свободное произведение. Пусть Φ – произвольная область целостности. Множество всех обратимых элементов Φ обозначим через Φ^*. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное $*$-многообразие алгебр над Φ и $A = \mathfrak{M}_\Phi\langle x_1, x_2\rangle$ – свободная алгебра этого многообразия от двух переменных x_1, x_2. Обозначим через $\phi = (f_1, f_2)$ автоморфизм алгебры A такой, что $\phi(x_i) = f_i$, $1 \leq i \leq 2$.

Автоморфизмы вида

$$(\alpha x_1 + f(x_2), x_2), \ \ (x_1, \beta x_2 + g(x_1)),$$

где $\alpha, \beta \in \Phi^*$ называются *элементарными.* Пусть $Aut(A)$ – группа всех автоморфизмов алгебры A. Подгруппа $T(A)$ группы $Aut(A)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *подгруппой ручных автоморфизмов.* Автоморфизм $\varphi \in Aut(A)$ называется *ручным,* если $\varphi \in T(A)$, иначе φ называется *диким.*

Если

$$\varphi = (f_1, f_2), \ \psi = (g_1, g_2),$$

то произведение в $Aut(A)$ определяется по формуле

$$\varphi \circ \psi = (g_1(f_1, f_2), g_2(f_1, f_2)).$$

Автоморфизм λ алгебры A называется *аффинным,* если

$$\lambda = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1, a_2x_1 + b_2x_2 + c_2),$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \in \Phi^*, \ a_i, b_i, c_i \in \Phi.$$

Группу аффинных автоморфизмов алгебры A обозначим через $Af_2(\Phi)$.

Автоморфизм μ алгебры A называется *треугольным,* если

$$\mu = (ax_1 + h(x_2), bx_2 + b_1),$$

где $a, b \in \Phi^*, \ b_1 \in \Phi, \ h(x_2) \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x_2 \rangle$. Через $Tr_2(A)$ обозначим группу треугольных автоморфизмов алгебры $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$.

Пусть G – произвольная группа, G_0, G_1, G_2 – подгруппы группы G, причем $G_0 = G_1 \cap G_2$. Группа G называется *свободным произведением подгрупп* G_1 *и* G_2 *с объединенной подгруппой* G_0 и обозначается $G = G_1 *_{G_0} G_2$, если

(a) G порождается подгруппами G_1 и G_2;

(b) Определяющие соотношения группы G состоят только из определяющих соотношений подгрупп G_1 и G_2.

Если S_1 – система левых представителей G_1 по G_0, S_2 – система левых представителей G_2 по G_0, то группа G является свободным произведением подгрупп G_1 и G_2 с объединенной подгруппой G_0 (см. например [28]) в том и только в том случае, когда каждый $g \in G$ однозначно представляется в виде

$$g = g_1 \dots g_k c,$$

где $g_i \in S_1 \cup S_2, \ i = 1, \dots, k, \ \ g_i, g_{i+1}$ одновременно не принадлежат S_1 или S_2, $c \in G_0$.

Пусть A_0 – произвольная фиксированная система представителей (включающая единицу) левых смежных классов группы $Af_2(\Phi)$ по подгруппе $H = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$.

Пусть I идеал алгебры $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_2 \rangle$ порожденный элементом x_2^2. Множество автоморфизмов

$$B_0 = \{\tau = (x_1 + g(x_2), x_2) | g(x_2) \in I\}$$

является системой представителей левых смежных классов $Tr_2(A)$ по подгруппе $H = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$.

Лемма 1. *Любой ручной автоморфизм* ϕ *алгебры* A *разлагается в произведение вида*

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ \tau_k \circ \lambda \tag{1}$$

где $\sigma_i \in A_0, \sigma_2, \dots, \sigma_k \neq id, \tau_i \in B_0, \tau_1, \dots, \tau_k \neq id, \lambda \in Af_2(\Phi)$

Доказательство. Любой ручной автоморфизм ϕ представляется в виде

$$\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n,$$

где $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ - элементарные автоморфизмы. Любой элементарный автоморфизм имеет вид

$$\lambda_1 \circ \tau \circ \lambda_2$$

где $\tau \in B_0, \lambda_1, \lambda_2 \in Af_2(\Phi)$. Следовательно, имеем

$$\phi = \lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \tau_2 \circ \lambda_3 \circ \cdots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1},$$

где $\tau_i \in B_0, \lambda_i \in Af_2(\Phi)$.

Докажем индукцией по n, что ϕ представляется в виде произведения (1) с $k \leq n$.

Известно, что автоморфизм $\lambda_1 \in Af_2(\Phi)$ записывается в виде $\lambda_1 = \sigma_1 \circ \gamma_1$, где $\sigma_1 \in A_0, \gamma_1 \in Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$. Тогда

$$\lambda_1 \circ \tau_1 = \sigma_1 \circ \gamma_1 \circ \tau_1 = \sigma_1 \circ \tau_1' \circ \gamma_1,$$

где $\tau_1' = \gamma_1 \circ \tau_1 \circ \gamma_1{}^{-1} \in B_0$. Имеем

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1' \circ (\gamma_1 \circ \lambda_2) \circ \tau_2 \circ \lambda_3 \circ \cdots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1}.$$

По индуктивному предположению, произведение

$$(\gamma_1 \circ \lambda_2) \circ \tau_2 \circ \lambda_3 \circ \cdots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1}$$

записывается в виде

$$\sigma_2 \circ \tau_2' \circ \sigma_3 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k' \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma, k \leq n.$$

Следовательно,

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1' \circ \sigma_2 \circ \tau_2' \circ \sigma_3 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k' \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma.$$

Если $\sigma_2 \neq id$, то полученное представление имеет вид (1), где $\lambda = \sigma_{k+1} \circ \gamma \in Af_2(\Phi)$. Рассмотрим случай $\sigma_2 = id$. Так как $\tau_1' \circ \tau_2' = \tau_2'' \in B_0$, то

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1' \circ \tau_2' \circ \sigma_3 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k' \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma = \sigma_1 \circ \tau_2'' \circ \ \sigma_3 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k' \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma.$$

Поскольку $k-1 < n$, то, по индуктивному предположению, ϕ записывается в виде (1). Лемма 1 доказана.

Если $\phi = (f_1, f_2)$, то положим

$$\deg(\phi) = \max\{\deg(f_1), \deg(f_2)\}.$$

Для каждого $1 \leq i \leq n$ положим

$$\phi_i = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \sigma_i \circ \tau_i = (\phi_i(x_1), \phi_i(x_2)). \tag{2}$$

Лемма 2. *Для каждого автоморфизма* ϕ_i *из (2) имеет место неравенство*

$$1 < \deg\phi_1 < \deg\phi_2 < \ldots < \deg\phi_k, \ \deg(\phi_i(x_2)) < \deg(\phi_i(x_1)) = \deg(\phi_i).$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по k. Пусть $k = 1$ и

$$\tau_1 = (x_1 + g_1(x_2), x_2).$$

Тогда

$$\phi_1 = \sigma_1 \circ \tau_1 = (\sigma_1(x_1) + g_1(\sigma_1(x_2)), \sigma_1(x_2)) = (\phi_1(x_1), \phi_1(x_2)).$$

Так как $\sigma_1(x_1), \sigma_1(x_2) \in A_0$ и по определению $*$−многообразие, имеем

$$\deg(g_1(\sigma_1(x_2))) > \deg(\sigma_1(x_2)) = 1.$$

Следовательно,

$$1 = \deg(\phi_1(x_2)) < \deg(\phi_1(x_1)) \text{ и } \deg(\phi_1) = \deg(\phi_1(x_1)).$$

Допустим, что утверждение верно для всех автоморфизмов ϕ_i, $1 \leq i \leq k-1$. Положим

$$\phi_{k-1} = (\phi_{k-1}(x_1), \phi_{k-1}(x_2)) = (p, q).$$

По предположению индукции $\deg(q) < \deg(p)$ и

$$\deg(\phi_{k-1}) = \deg(\phi_{k-1}(x_1)) = \deg(p).$$

Пусть

$$\sigma_k = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1, a_2x_1 + b_2x_2 + c_2),$$

где a_2 не равен нулю. Если $a_2 = 0$, то $\sigma_k \notin A_0$. Следовательно, имеем

$$\phi_{k-1} \circ \sigma_k = (a_1p + b_1q + c_1, a_2p + b_2q + c_2)$$

Получим, что $\deg(\phi_{k-1} \circ \sigma_k) = \deg(\phi_{k-1}) = \deg(p)$.
Пусть

$$\tau_k = (x_1 + g_k(x_2), x_2), 0 \neq g_k(x_2) \in I.$$

То имеем

$$\phi_{k-1} \circ \sigma_k \circ \tau_k = (a_1p + b_1q + c_1 + g_k(a_2p + b_2q + c_2), a_2p + b_2q + c_2) = (\phi_k(x_1), \phi_k(x_2)).$$

В силу того, что $a_2 \neq 0$ и $\deg(g_k) \geq 2$, то, по определению $*$-многообразия, имеем

$$\deg(g_k(a_2p + b_2q + c_2)) \geq \deg(g_k) + \deg(a_2p + b_2q + c_2) - 1 = \deg(g_k) + \deg(p) - 1 > \deg(p).$$

Следовательно, $\deg(\phi_k(x_1)) > \deg(\phi_k(x_2))$ и $\deg(\phi_k(x_1)) = \deg(\phi_k) > \deg(\phi_{k-1})$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Разложение (1) автоморфизма* ϕ *из леммы 3 является однозначным.*

Доказательство. Достаточна показать, что

$$\sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma \neq id$$

где $k \geq 1, \sigma_i \in A_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \neq id, \tau_i \in B_0, \tau_1, \ldots, \tau_{k-1} \neq id, \gamma \in Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$. Допустим, что

$$\sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k \circ \sigma_{k+1} \circ \gamma = id.$$

Отсюда получаем

$$\tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k = {\sigma_1}^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ {\sigma_{k+1}}^{-1}. \tag{3}$$

Положим

$$\phi = \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k.$$

Тогда, по лемме 2, $\deg(\phi) > 1$. Так как $\lambda = {\sigma_1}^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ {\sigma_{k+1}}^{-1} \in Af_2(\Phi)$, то $\deg(\lambda) = 1$ и $\deg(\phi) > \deg(\lambda)$. Это противоречит (3). Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{M}$*-произвольное* $*$*-многообразие алгебр и* $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ *- свободная алгебра этого многообразие от двух переменных* x_1, x_2 *над* Φ. *Тогда группа ручных автоморфизмов алгебры* A *является свободным произведением подгрупп аффинных автоморфизмов* $Af_2(\Phi)$ *и треугольных автоморфизмов* $Tr_2(A)$ *с объединенной подгруппой* $H = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$, *т.е.*

$$T(A) = Af_2(\Phi) *_H Tr_2(A).$$

Доказательство. Так как A_0, B_0 системы левых смежных классов $Af_2(\Phi)$ и $Tr_2(A)$ по подгруппе $Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$, то по лемме 1 любой ручной автоморфизм представим в виде (1). По лемме 3 такое представление является однозначным. Согласно [28], имеем

$$Aut(\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle) = Af_2(\Phi) *_H Tr_2(A).$$

где $H = Af_2(\Phi) \cap Tr_2(A)$. Теорема 1 доказана.

О сократимости ручных автоморфизмов

Обозначим через $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множество неотрицательных целых чисел. Целостное кольцо Φ, не являющееся полем, называется *евклидовым* [29], если существует функция $|\cdot| : \Phi \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ (называемая нормой), удовлетворяющая следующим условиям:

E1) для любых $a, b \in \Phi \backslash \{0\}$, $|ab| \geq |a|$, причем равенство имеет место только тогда, когда элемент b обратим;

E2) для любых $a, b \in \Phi$, где $b \neq 0$, существуют такие $q, r \in \Phi$, что $a = bq + r$ и либо $r = 0$, либо $|r| < |b|$.

Положим $e = |1| \in \mathbb{Z}_+$, где $1 \in \Phi$—единица кольца Φ. Имеем $|a| = e$ тогда и только тогда, когда $a \in \Phi^*$.

Основными примерами евклидовых колец являются кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел с абсолютным значением целых чисел и кольцо $K[x]$ многочленов над полем K со степенью многочленов. Следовательно, $e = 1$ в кольце $\mathbb{Z}$ и $e = 0$ в кольце $K[x]$.

Пусть $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ – свободная алгебра $*$-многообразия $\mathfrak{M}$ от двух переменных x_1, x_2 над евклидовым кольцом Φ. Обозначим через X^* множество всех неассоциативных слов алфавита X. Каждое неассоциативное слово u, где $\deg(u) \geq 2$, имеет единственное представление в виде $u = u_1 u_2$, где u_1 и u_2 неассоциативные слова меньшей длины и

$$\deg(u) = \deg(u_1) + \deg(u_2).$$

Положим, что $x_1 > x_2$. Пусть u и v два произвольных элемента из X^*. Мы говорим, что $u < v$ если $\deg(u) < \deg(v)$. Если $\deg(u) = \deg(v) \geq 2$, $u = u_1 u_2$, $v = v_1 v_2$, тогда $u < v$ если $u_1 < v_1$ или $u_1 = v_1$ и $u_2 < v_2$.

Так как алгебра $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ является свободным Φ-модулем с фиксированным базисом W состоящим из неассоциативных слов, то каждый ненулевой элемент $f \in A$ записывается однозначно в виде

$$f = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n, \ 0 \neq \alpha_i \in \Phi, w_1 > w_2 > \ldots > w_n \in W$$

Слово w_1 называется старшим словом (мономом) f, а α_1 называется старшим коэффициентом f. Обозначим их через $lm(f)$ и $lc(f)$ соответственно. Через $f' = \alpha_1 w_1$ обозначим старший член элемента f. Через $\overline{f}$ обычно будем обозначать старшую однородную часть f по отношению к функции степени $\deg$.

Пусть f — произвольный элемент из $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$. Положим

$$D(f) = (lm(f), |lc(f)|)$$

и назовем $D(f)$ показателем элемента f.

Пусть $\varphi = (f_1, f_2)$ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$. Тогда показателем автоморфизма φ назовем

$$D(\varphi) = (u, v, |lc(f_1)| + |lc(f_2)|) \in W^2 \times Z_+,$$

где $\{u, v\} = \{lm(f_1), lm(f_2)\}$ и $u \geq v$.

Заметим, что D — инвариантно относительно перестановки компонент автоморфизма, т.е.

$$D(f_1, f_2) = D(f_2, f_1).$$

Имеем

$$D(id) = (x_1, x_2, 2e),$$

где $id = (x_1, x_2)$ — тождественный автоморфизм. Более того, $D(f_1, f_2) = (x_1, x_2, 2e)$ тогда и только тогда, когда элементы f_1, f_2 имеют следующий вид:

$$f_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1, \ f_2 = \beta_2 x_2 + \gamma_2, \tag{4}$$

или

$$f_1 = \beta_3 x_2 + \gamma_3, \ f_2 = \alpha_2 x_1 + \beta_4 x_2 + \gamma_4, \tag{5}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3 \in \Phi^*$ и $\beta_1, \beta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Phi$.

Обозначим через $\preceq$ лексикографический порядок на множестве $W^2 \times Z_+$. Заметим, что множество $W^2 \times Z_+$ линейно упорядочено относительно $\preceq$.

Элементарным преобразованием системы элементов (f_1, f_2) называется замена одного элемента f_i на элемент вида $\alpha f_i + g$, где $\alpha \in \Phi^*, g \in \langle f_j | j \neq i \rangle$.

Запись

$$(f_1, f_2) \to (g_1, g_2)$$

означает, что система элементов (g_1, g_2) получена из системы элементов (f_1, f_2) одним элементарным преобразованием.

Если (f_1, f_2) – ручной автоморфизм алгебры A, то существует последовательность элементарных преобразований вида

$$(x_1, x_2) = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)}) \to (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}) \to \ldots \to (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}) = (f_1, f_2).$$

Автоморфизм $\theta = (f_1, f_2)$ называется *элементарно D-сократимым* (или *θ допускает элементарное D-сокращение*), если существует автоморфизм ψ такой, что $\theta \to \psi$ и $D(\psi) \prec D(\theta)$. Будем говорить, что *автоморфизм ψ является элементарным D-сокращением автоморфизма θ.*

Лемма 4. *Пусть* $\pi = (h_1, h_2)$ *— автоморфизм алгебры* $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ *. Если старшие слова элементов* h_1, h_2 *– линейно зависимы, то автоморфизм* π *является элементарно* D*-сократимым.*

Доказательство. Так как $lm(h_1) = lm(h_2)$, то без ограничения общности предположим, что $|lc(h_1)| \geq |lc(h_2)|$. По E1) существуют $q, r \in \Phi$ такие, что $lc(h_1) = lc(h_2)q + r$ и либо $r = 0$, либо $|r| < |lc(h_2)|$. Рассмотрим элементарное преобразование

$$\pi = (h_1, h_2) \to (h_1 - qh_2, h_2) = \delta.$$

Имеем $D(h_1) \succ D(h_1 - qh_2)$. Следовательно, $D(\pi) \succ D(\delta)$ и автоморфизм π является элементарно D-сократимым. Лемма 4 доказана.

Характеризацию ручных автоморфизмов алгебры $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\phi = (f_1, f_2)$ *— ручной автоморфизм алгебры* $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2 \rangle$ *. Если*

$$D(\phi) \succ (x_1, x_2, 2e),$$

то автоморфизм ϕ *является элементарно* D*-сократимым.*

Доказательство. По лемме 1 автоморфизм ϕ записывается в виде (1). Рассмотрим случай когда $\lambda = id$. Тогда

$$\phi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k = (f, g).$$

Положим

$$\psi = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k = (p, q).$$

Если $\tau_k = (x_1 + g_k(x_2), x_2)$, то

$$\phi = (p + g_k(q), q) = (f, g).$$

Так как $\deg(\tau_i) = n_i$, то по лемме 2 имеем

$$\deg(\psi) < \deg(\phi), \text{ следовательно } D(\psi) \prec D(\phi).$$

Поскольку

$$\phi \to \psi,$$

то автоморфизм ϕ является элементарно D-сократимым.

Допустим, что

$$\lambda = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1, a_2x_1 + b_2x_2 + c_2) \neq id.$$

Положим

$$\omega = \sigma_1 \circ \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \sigma_k \circ \tau_k = (p + g_k(q), q) = (r, s).$$

Тогда $\deg(r) > \deg(s)$ по лемме 2. Следовательно,

$$\phi = \omega \circ \lambda = (a_1r + b_1s + c_1, a_2r + b_2s + c_2) = (f_1, f_2).$$

Более того,

$$r' = (g_k(s))'.$$

Если $a_1, a_2 \neq 0$, то $lm(f_1) = lm(f_2)$ и по лемме 1 автоморфизм ϕ элементарно D-сократим.

Если $a_1 = 0$, то $f_1' = b_1s'$, $f_2' = a_2r' = a_2(g_k(s))'$ и $b_1, a_2 \in \Phi^*$. Тогда имеем, что автоморфизм

$$\psi = (f_1, f_2 - a_2g_k({b_1}^{-1}f_1))$$

является элементарным D-сокращением ϕ.

Если $a_2 = 0$, то этот случай симметричен предыдущему. Теорема 2 доказана.

Непосредственный анализ доказательства теоремы 2 дает

Следствие 1. Пусть $\pi = (h_1, h_2)$ – ручной автоморфизм алгебры A и $lm(h_1) < lm(h_2)$. Тогда найдется $t \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x \rangle$ такое, что

$$\overline{h_2} = \overline{t(h_1)}.$$

Следствие 2. Ручные и дикие автоморфизмы алгебры $\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2\rangle$ над конструктивным евклидовым кольцом Φ алгоритмически распознаваемы.

Доказательство. Проведем индукцию по показателю $D(\phi)$ автоморфизма $\phi \in Aut(\mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2\rangle)$. Если $D(\phi) = (x_1, x_2, 2e)$, то ϕ имеет вид (4) или (5). Следовательно, автоморфизм ϕ является линейным. Так как любая обратимая матрица над евклидовым кольцом является произведением элементарных и диагональных матриц [29], то линейные автоморфизмы являются ручными.

Если автоморфизм ϕ не является элементарно D-сократимым, то ϕ является диким по теореме 2. Пусть $\phi = (f_1, f_2)$ ручной. Если $lm(f_1) = lm(f_2)$ то по лемме 1 автоморфизм ϕ элементарно D-сократим. Поэтому без ограничение общности можно считать, что $lm(f_1) < lm(f_2)$. По следствию 1 найдется $t \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x\rangle$ такое, что $\overline{f_2} = \overline{t(f_1)}$. Тогда по условия $*$-многообразие имеем

$$\deg(f_2) = \deg(t(f_1)) \geq \deg(f_1) + \deg(t) - 1.$$

Это неравенство позволяет оценить степень многочлена t с условием $\overline{f_2} = \overline{t(f_1)}$. Если $\overline{f_2} \in \overline{\langle f_1\rangle}$, то можно построить $T \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x\rangle$ такое, что $\overline{f_2} = \overline{T(f_1)}$. Тогда автоморфизм $\psi = (f_1, f_2 - T(f_1))$ является элементарным D-сокращением автоморфизма ϕ. Имеем $D(\psi) \prec D(\phi)$. Очевидно, ϕ является ручным тогда и только тогда, когда ψ является ручным автоморфизмом. Индукция по D завершает доказательство.

В работе [23] было построено обобщение автоморфизма Нагаты

$$\eta = (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2)),$$

где $0 \neq z \in \Phi \setminus \Phi^*$.

Следствие 3. Автоморфизм Нагаты

$$\eta = (x_1 + x_2(zx_1 - x_2^2) + (zx_1 - x_2^2)x_2 + z(zx_1 - x_2^2)^2, x_2 + z(zx_1 - x_2^2))$$

как автоморфизм алгебры $A = \mathfrak{M}_\Phi \langle x_1, x_2\rangle$ над Φ является диким.

Доказательство. Достаточно показать, что η не является элементарно D-сократимым. Допустим, что $\eta = (f_1, f_2)$ является элементарно D-сократимым.

Пусть $(x^2)^2 \neq 0$. Имеем

$$\overline{f_1} = z(x_2^2)^2, \quad \overline{f_2} = -zx_2^2.$$

Если η является ручным, то по следствию 1 найдется $t \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x\rangle$ такое, что $\overline{f_1} = \overline{t(f_2)}$. Отсюда по следствию 2 следует, что $\overline{f_1} \in \overline{\langle f_2\rangle}$.

В подалгебре $\langle f_2\rangle$ только произведение $\overline{f_2 f_2} = z^2(x_2^2)^2$ имеет степень 4 по x_1, x_2. Так как $\overline{f_1} = z(x_2^2)^2$ линейно не выражается через $z^2(x_2^2)^2$, то $\overline{f_1}$ не принадлежит подалгебре $\overline{\langle f_2\rangle}$. Следовательно, автоморфизм η не является элементарно D-сократимым и не является ручным по теореме 2.

Рассмотрим случай когда $(x^2)^2 = 0$. Тогда

$$\overline{f_1} = -(x_2x_2^2 + x_2^2x_2 + z^2x_1x_2^2 + z^2x_2^2x_1), \quad \overline{f_2} = -zx_2^2.$$

Если η является ручным, то по следствию 1 найдется $t \in \mathfrak{M}_\Phi \langle x\rangle$ такое, что $\overline{f_1} = \overline{t(f_2)}$. В подалгебре $\langle f_2\rangle$ только произведение

$$\overline{f_2 f_2} = -z(x_2x_2^2 + x_2^2x_2 + z^2x_1x_2^2 + z^2x_2^2x_1)$$

имеет степень 3 по x_1, x_2. Так как $\overline{f_1} = -(x_2x_2^2 + x_2^2x_2 + z^2x_1x_2^2 + z^2x_2^2x_1)$ линейно не выражается через $-z(x_2x_2^2+x_2^2x_2+z^2x_1x_2^2+z^2x_2^2x_1)$, то $\overline{f_1}$ не принадлежит подалгебре $\overline{\langle f_2\rangle}$. Следовательно, автоморфизм η не является элементарно D-сократимым и не является ручным по теореме 2.

Список литературы

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. reine angew. Math. – 1942. – Vol.184. –P.161–174.

2 Van der Kulk W. On Polynomial Rings in Two Variables // Nieuw Archief voor Wisk. – 1953. – Vol. 1. -№ 3. – P.33 – 41.

3 Shafarevich I.R. On some infinite-dimensional groups // Rend. Mat. e Appl. –1966. –Vol.25. –P.208–212.

4 Wright D. The amalgamated free product structure of $GL_2(k[x_1, ..., x_n])$ // J. Pure Appl. Algebra –1978. –Vol.12. –P. 235–251.

5 Макар-Лиманов Л. Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих // Функциональный анализ и его приложения. –1970. –Т.4. –С.107–108.

6 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a Free Associatove Algebra of Rank 2, I, II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol.160. -P.393–401; – 1972. –Vol.171. –P.309–315.

7 Makar-Limanov L., Turusbekova U., Umirbaev U.U. Automorphisms and derivations of Poisson algebras in two variables // Journal of Algebra –2009. –Vol.322. № 9. –P.3318–3330.

8 Nagata M. On the automorphism group of k[x, y] (Lect. in Math.) // Kinokuniya. –Tokio: Kyoto Univ., 1972.

9 Умирбаев У.У., Шестаков И.П. Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов // Доклады РАН –2002. –Т.386. № 6. –С.745–748.

10 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The Nagata automorphism is wild // Proc. Natl. Acad. Sci. USA–2003. –Vol.100. № 22. –P.12561–12563.

11 Shestakov I.P. and Umirbaev U.U. Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables // J. Amer. Math. Soc. – 2004. –Vol.17. –P.197–227.

12 Umirbaev U.U. The Anick automorphism of free associative algebras // J. Reine Angew. Math.–2007. –Vol.605.–P.165–178.

13 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. –1964. –Vol.56. –P.618–632.

14 Lewin J. On Schreier varities of linear algebras // Trans. Amer. Math. Soc. –1968. –Vol.132. –P.553–562.

15 Курош А.Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб.–1947. –Т.20(62). –С.239–262.

16 Ширшов А.И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Матем. сб. –1954. –Т.34(76). –С.81–88.

17 Ширшов А.И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Матем. сб. –1953. –Т.33(75). –С.441–452.

18 Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. –1956. –Vol.64. –P.195–216.

19 Михалев А.А. Подалгебры свободных цветных суперaлгебр Ли // Матем. заметки. –1985. –Т.37. –С.653–661.

20 Штерн А.С. Свободные суперaлгебры Ли // Сиб. мат. журн. –1986. –Т.27. № 1. –С.170–174.

21 Кряжовских Г.В., Кукин Г.П. О подкольцах свободных колец // Сиб. мат. журн. –1989. –Т.30. № 6. –С.87–97.

22 Кряжовских Г.В., Кукин Г.П. Алгоритмические свойства свободных колец // Сиб. мат. журн. –1991. Т.32. № 6. –С.87–99.

23 Алимбаев А.А., Умирбаев У.У. Автоморфизм Нагаты свободных неассоциативных алгебр ранга два над евклидовыми кольцами // Сиб. электрон. матем. изв. –2017. –Т.14. –С.1279–1288. doi: 10.17377/semi.2017.14.108. –URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p1279–1288.pdf.

24 Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. –М.: Наука, –1978.–431 стр.

25 Ширшов А.И. О специальных J –кольцах // Матем. сб. –1956. –Т.38, No.80. –С.149–166.

26 Жуков А.И. Неассоциативные свободные разложения алгебр с конечным числом образующих // Матем. сб. –1950. –Т.26(68). № 3. –С.471–478.

27 Loday J.-l., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology // Math. Ann. –1993. –Vol.296. –P.139-158.

28 Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. Пер. с англ. –М.: Наука, –1974.–455 стр.

29 Винберг Э.Б. Курс алгебры.–М.: Факториал Пресс, –2001. – 544 стр.

А.А. Алимбаев

Ө. Сұлтангазин атындағы Қостанай мемлекеттік педагогикалық университеті, Тәуелсіздік көшесі 118, Қостанай, Қазақстан

Автоморфизмдер топтарында амальгамалы еркін көбейтіндінің құрылымы

Аннотация: Алгебралар көпбейнесінің бір классы анықталды, мұнда кез келген тұтастық облыс үстінде екі элементтен туындалған еркін алгебраның қолды афтоморфизмдерінің тобы амальгамалы еркін көбейтіндісің құрылымы ретінде бола алады. Осы алгебралар көпбейнесінің евклидтік сақина үстінде екі элементтен туындалған еркін алгебраларының қолды автоморфизмдері қысқартылатыны дәлелденді. Нагата автоморфизмінің жалпылануы осы алгебралар көпбейнесінің евклидтік сақина үстінде екі элементтен туындалған еркін алгебраларының жабайы автоморфизм болатыны дәлелденді.

Түйін сөздер: автоморфизм, қолды автоморфизм, топтардың еркін көбейтіндісі, евклидтік облыс.

A.A. Alimbaev

Kostanay State Pedagogical University named after U.Sultangazin, Tauelsizdik street 118, Kostanay, Kazakhstan

Structure of amalgamated free work in groups automorphisms

Abstract: One class of varieties of algebras is defined, where the group of tame automorphisms of free two-generated algebras admits the structure of an amalgamated free product over an arbitrary integrity domain. Proved the reducibility of tame automorphisms of free two-generated algebras of these varieties over Euclidean domains. It is proved that the generalization of Nagata automorphism is a wild automorphism of free algebras of these varieties from two variables over Euclidean domains.

Keywords: automorphism, tame automorphism, free product of groups, euclidean domain.

References

1 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math., **184**, 161–174(1942).
2 Van der Kulk W. n polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wiskunde, **1**, 33–41(1953).
3 Shafarevich I.R. On some infinite-dimensional groups, Rend. Mat. e Appl., **25**, 208–212(1966).
4 Wright D. The amalgamated free product structure of GL2(k[x1, . . . , xn]), J. Pure Appl. Algebra, **12**, 235–251(1978).
5 Makar-Limanov L. The automorphisms of the free algebra of two generators, Funksional. Anal. i Prilozhen., **4**(3), 107–108(1970).
6 Czerniakiewicz A.G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II, Trans. Amer. Math. Soc., **160**, 393–401(1971).
7 Makar-Limanov L., Turusbekova U. and Umirbaev U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables, J. Algebra, **322**(9), 3318–3330(2009).
8 Nagata M., On the automorphism group of k[x, y], Lect. in Math., Kyoto Univ. (Kinokuniya, Tokyo, 1972).
9 Umirbaev U.U., Shestakov I.P. Subalgebras and automorphisms of polynomial rings, Dokl. Akad. Nauk, **386**(6), 745–748(2002).
10 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The Nagata automorphism is wild, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **100**(22), 12561–12563(2003).
11 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables, J. Amer. Math. Soc., **17**, 197–227(2004).
12 Umirbaev U.U. The Anick automorphism of free associative algebras, J. Reine Angew. Math., **605**, 165–178(2007).
13 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras, Proc. London Math. Soc., **14**, 618–632(1964).
14 Lewin J. On Schreier varities of linear algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **132**, 553–562(1968).
15 Kurosh A.G. Nonassociative free algebras and free products of algebras, Mat. Sb., **20**, 239–262(1947).
16 Shirshov A.I. Subalgebras of free commutative and free anticommutative algebras, Mat. Sb. (N.S.), **34(76)**, 81–88(1954).
17 Shirshov A.I. Subalgebras of free Lie algebras, Mat. Sb. (N.S.), **33(75)**, 441–452(1953).
18 Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe, Math. Z., **64**, 195–216(1956).
19 Mikhalev A.A. Subalgebras of free colored Lie superalgebras, Mat. Zametki, **37**(5), 653–661(1985).
20 Shtern A.S. Free Lie superalgebras, Sibirsk. Mat. Zh., **27**(1), 170–174(1986).
21 Kryazhovskikh G.V., Kukin G.P. On subrings of free rings, Siberian Math. J., **30**(6), 87–97(1989).
22 Kryazhovskikh G.V., Kukin G.P. Algorithmic properties of free rings, Siberian Math. J., **32**(6), 87–99(1991).
23 Alimbaev A.A., Umirbaev U.U. The Nagata automorphism of free nonassociative algebras of rank two over Euclidean domains, Sib. Elektron. Mat. Izv., 14, 1279–1288(2017). doi: 10.17377/semi.2017.14.108. Available at: http://semr.math.nsc.ru/v14/p1279–1288.pdf.
24 Zhevlakov K., Slin'ko A., Shestakov I., Shirshov A. Rings close to associative (Nauka, Moscow, 1978).
25 Shirshov A.I. On special J-rings, Mat. Sb. (N.S.), **38(80)**(2), 149–166(1956).
26 Zhukov A.I. Nonassociative free decompositions of algebras with a finite number of generators, Mat. Sb. (N.S.), **26(68)**(3), 471–478(1950).
27 Loday J.-l., Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology, Math. Ann., **296**, 139-158(1993).
28 Magnus W., Karass A., Solitar D. Kombinatornaya teoriya grupp (Nauka, Moscow, 1974, 455 p.).
29 Vinberg E.B. A Course in Algebra (Amer. Math. Soc., 2003).

Сведения об авторе:

Алимбаев А.А. – докторант Евразийского национального университета имени Л. Гумилева, старший преподаватель кафедры физико-математических дисциплин Костанайского государственного педагогического университета имени У. Султангазина, улица Тауелсіздік 118, Костанай, Казахстан.

Alimbaev A. A. - PhD of the L.N.Gumilyov Eurasian National University, senior lecturer of the Department of physico-mathematical disciplines Kostanay State Pedagogical University named after U.Sultangazin, Tauelsizdik street 118, Kostanay, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 28.01.2019

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады. Мақаламен бірге авторлар редакцияға ілеспе хат жолдаулары қажет.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal *"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"*

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***. Authors also need to submit a cover letter.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_ math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.* А также авторам необходимо представить в редакцию Сопроводительне письмо.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_ math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Бас редактор:	Н. Темірғалиев
Жауапты редактор:	А. Ж. Жұбанышева
Жауапты хатшы:	А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2019. 1(126)- Астана: ЕҰУ. 80-б.
Шартты б.т. - 16. Таралымы - 25 дана.

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7 (7172) 70-95-00(ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды