bulmathmc.enu.kz

https://doi.org/10.32523/2616-7182

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№1 (126)/2019

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№1(126)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады
Published 4 times a year
Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019
Nur-Sultan, 2019
Нур-Султан, 2019

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 25 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008
Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible Editor-in-Chief: A.Zh. Zhubanysheva
Responsible secretary: A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 25 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008;
tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева
Ответственный секретарь: А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
Собственник:
РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан,
ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТIНIҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №1(126)/2019

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

Темiрғалиев Н., Таугынбаева Ғ.Е., Абикенова Ш.К. Компьютерлiк (есептеуiш) диаметр мәнмәтiнiнде дербес туындылы теңдеулердi дискреттеу 8

Алимбаев А.А. Автоморфизмдер топтарында амальгамалы еркiн көбейтiндiнiң құрылымы 52

Бакурадзе М. Надирадзе формалды топтарының заңдарына орай кейбiр дәл өрнектер 62

Фарайзаде А.П., Шафи А. Полигамдық функциялар үшiн Туран типтi және кейбiр жаңа теңсiздiктер 68

Ермекбаева Ж.Ж., Шакирова Р.Е., Малекова Ж.М. Жыртқыш-олжа жүйесiндегi бiрлесiп қорғану әсерi 72

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №1(126)/2019

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

Temirgaliyev N., Taugynbayeva G.Y., Abikenova Sh.K. Discretization of solutions of partial differential equations in the context of Computational (numerical) diameter 8

Alimbaev A.A. Structure of amalgamated free work in groups automorphisms 52

Bakuradze M. Some explicit expressions concerning the Nadiradze formal group law 62

Farajzadeh A.P., Shafie A. Turańs inequality type for polygamma functions and some new inequalities 68

Yermekbayeva J.J., Shakirova R.E., Malekova Zh.M. The effect of collective protection in the predator-prey system 72

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА, №1(126)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника 8

Алимбаев А.А. Структура амальгамированного свободного произведения в группах автоморфизмов 52

Бакурадзе М. Некоторые точные выражения относительно законов формальных групп Надирадзе 62

Фарайзаде А.П., Шафи А. Неравенства типа Турана для полигамных функций и некоторые новые неравенства 68

Ермекбаева Ж.Ж., Шакирова Р.Е., Малекова Ж.М. Эффект коллективной защиты в системе хищник-жертва 72

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2019, том 126, №1, 8-51 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

Н.Темиргалиев, Г.Е.Таугынбаева, Ш.К.Абикенова

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru, galija_1981tau@mail.ru, shabik_29@mail.ru)

Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника

Аннотация: С 1996 года последовательно развивалась идея Компьютерного (вычислительного) поперечника, цель которого заключается в оптимальной компьютерной обработке математических моделей в реальных условиях искаженных данных.

К(В)П-схема, как нам представляется, определяет уточненную организацию исследований в Теории приближений, Вычислительной математике и Численном анализе.

Данная статья посвящена освещению К(В)П-подхода в теории уравнений в частных производных. На примерах исторически исходных уравнений Лапласа, Пуассона, теплопроводности, волнового и, сравнительно недавнего Клейна-Гордона, приведены теоремы как иллюстративные результаты качества и эффективности К(В)П-постановок.

Представленные материалы могут послужить для продолжения исследований оптимальной дискретизации решений уравнений в частных производных с дальнейшим расширением и углублением предложенного направления.

Ключевые слова: Компьютерный (вычислительный) поперечник (сокращенно – К(В)П), дискретизация решений уравнения в частных производных по точной и неточной информации, предельная погрешность.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2019-126-1-8-51

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 8
§1.Модельные случаи полного К(В)П-исследования уравнений в частных производных 14
§2. Дискретизация решений уравнения Лапласа 18
§3. Дискретизация решений уравнения Пуассона 23
§4. Дискретизация решений уравнения теплопроводности 25
§5. Дискретизация решений волнового уравнения 30
§6. Дискретизация решений уравнения Клейна-Гордона 35
§7. Численное интегрирование интегральных уравнений Обобщенным методом Смоляка 39
§8. Дискретизация в среднем квадратическом относительно вероятностных мер на классах функций 42
§9. Заключительные замечания 46

ВВЕДЕНИЕ

Решения уравнений в частных производных, даже в случае их явного выражения посредством рядов Фурье по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора или сверток с соответствующими ядрами, будучи представленные рядами или интегралами, фактически опять же представляют собой бесконечные объекты. Поэтому возникает задача их приближения конечными объектами, математическая формулировка которой содержится в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника (в сокращении – К(В)П, соответствующую историю, сравнения с подобными исследованиями см. в [1]-[5]).

Настоящая статья посвящена именно этой группе задач.

Исходным в К(В)П-исследовании уравнений в частных производных является следующее определение

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; A, B; F; D_N)_Y \equiv$$

$$\equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; A, B = B^{(1)} \times ... \times B^{(k)}; F = F^{(1)} \times ... \times F^{(k)}; D_N\right)_Y \equiv$$

$$\equiv \min_{N=N_1+...+N_k} \inf_{\left(l^{(N_1,...,N_k)},\varphi_N\right)\in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N_1,...,N_k)}, \varphi_N\right)\right)_Y,$$

где

$$\delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{N_1,...,N_k}, \varphi_N\right)\right)_Y \equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; A, B = B^{(1)} \times ... \times B^{(k)}; F \equiv F^{(1)} \times ... \times F^{(k)}; \left(l^{(N_1,...,N_k)}, \varphi_N\right)\right)_Y \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{f_1 \in F^{(1)}, ..., f_k \in F^{(k)} \\ \left|\gamma_{N_j}^{(\tau)}\right| \le 1\, (\tau = 1, ..., N_j) \\ j=1,...,k}} \|u\left(y; f_1, ..., f_k\right) -$$

$$-\varphi_N\left(l_{N_1}^{(1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(1)}\varepsilon_{N_1}^{(1)}, ...l_{N_1}^{(N_1)}(f_1) + \gamma_{N_1}^{(N_1)}\varepsilon_{N_1}^{(N_1)}, ..., l_{N_k}^{(1)}(f_k) + \gamma_{N_k}^{(1)}\varepsilon_{N_k}^{(1)}, ..., l_{N_k}^{(N_k)}(f_k) + \gamma_{N_k}^{(N_k)}\varepsilon_{N_k}^{(N_k)}; y\right)\Big\|_Y.$$

Здесь *математическая модель* задается посредством оператора $Tf = (Tf)(y) = u(y; f) \equiv u(y; f_1, ..., f_k)$ – решения уравнения в частных производных $A \equiv A\left(y = (y_1, ..., y_n), \frac{\partial u}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial y_n}, ..., \frac{\partial^{\alpha_1+...\alpha_n}u}{\partial y_1^{\alpha_1}...\partial y_n^{\alpha_n}}\right) = 0$ ($\alpha_j\,(j = 1, ..., n)$-неотрицательные целые числа), удовлетворяющего условиям существования и единственности относительно комплекта $B \equiv B^{(1)} \times ... \times B^{(k)}$ начальных, граничных, смешанных и иных условий, заданных посредством функций $f \in F \Leftrightarrow f = (f_1, ..., f_k) \in F^{(1)} \times ... \times F^{(k)}$, действующих из $F \equiv F^{(1)} \times ... \times F^{(k)}$ в Y, где F класс функций и $Y-$нормированное пространство функций, заданных соответственно на Ω_F и Ω_Y. *Числовая информация* $l_{N_1}^{(1)}(f_1), ..., l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); ...; l_{N_k}^{(1)}(f_k), ..., l_{N_k}^{(N_k)}(f_k)$ объема $N = N_1 + ... + N_k\,(N = 1, 2, ...)$ об $f = (f_1, ..., f_k)$ из класса F снимается с линейных функционалов $l^{(N)} = l^{(N_1,...,N_k)} = (l_1, ..., l_N)$ (в общем случае не обязательно линейных). *Алгоритм переработки информации* $\varphi_N(z_1, ..., z_N; y) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C$ есть соответствие, которое при всяком фиксированном $(z_1, ..., z_N) \in C^N$ как функция от y есть элемент Y. Всюду ниже запись $\varphi_N \in Y$ будет означать, что φ_N удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, через $\{\varphi_N\}_Y$ обозначим множество, составленное из всех $\varphi_N \in Y$. И, наконец, определим *вычислительный агрегат* $\varphi_N\left(l_{N_1}^{(1)}(f_1), ..., l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); ...; l_{N_k}^{(1)}(f_k), ..., l_{N_k}^{(N_k)}(f_k); y\right) \equiv \left(l^{(N_1,...,N_k)}, \varphi_N\right) \equiv \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ по *точной информации.* *Вычислительный агрегат по неточной информации* последовательно определяется следующим образом. Сначала точные значения $l_N^{(\tau)}(f)$ заменяются с заданной точностью $\varepsilon_N^{(\tau)} \ge 0$ на приближенные значения $z_\tau \equiv z_\tau(f)$, $\left|z_\tau(f) - l_N^{(\tau)}(f)\right| \le \varepsilon_N^{(\tau)}\,(\tau = 1, ..., N)$. Затем числа $z_\tau \equiv z_\tau(f)$ $(\tau = 1, ..., N)$ перерабатываются посредством алгоритма φ_N до функции $\varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); y)$ из Y, которая и будет составлять *вычислительный агрегат* $\left(l^{(N_1,...,N_k)}, \varphi_N\right) \equiv \left(l^{(N_1,...,N_k)}, \varphi_N\right)_{\varepsilon_N} = \varphi_N(z_1(f), , ..., z_N(f); y)$ *по неточной информации* точности $\varepsilon_N = \left\{\varepsilon_N^{(\tau)}\right\}_{\tau=1}^N$. $D_N \equiv D_{N_1,...,N_k}(F)_Y-$ данный набор комплексов $\left\{\left(l^{(N_1,...,N_k)}, \varphi_N\right)\right\}_{F,Y}$.

В статье рассматриваются следующие конкретизации D_N:

$$D_N = L_N(F) \times \{\varphi_N\}_Y = \{(l_1(f), ..., l_N(f)) : l_\tau(f) - \textit{все возможные линейные}$$

функционалы на линейной оболочке $F\,(\tau=1,2,...,N)\}\times\{\varphi_N\}_Y$,

а также линейные функционалы, определяемые значениями в фиксированных точках

$$D_N=P_N(F)\times\{\varphi_N\}_Y=\{l_1(f)=f\,(\xi_1)\,,...,l_N(f)=f\,(\xi_N):\;f\in F,\;\xi_j\in[0,1]^s\,,j=1,...,N\}\times\{\varphi_N\}_Y$$

и (в случае периодических классов)

$$D_N=\Phi_N(F)\times\{\varphi_N\}_Y=\left\{l_1(f)=\hat f(m^{(1)}),...,l_N(f)=\hat f(m^{(N)}):\;f\in F,\;m^{(1)}\in Z^s,...,m^{(N)}\in Z^s\right\}\times\{\varphi_N\}_Y\,,$$

здесь и далее для функций $f(x)\in L^p(0,1)^s$ через $\hat f(m)$ обозначим тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега функции f

$$\hat f(m)=\int_{[0,1]^s}f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx.$$

Отдельно отметим, что в качестве банаховых пространств Y поряду с пространствами Лебеговского типа $L^\nu(\Omega)$ и пространств дифференцируемых функций типа W,H,B,SW,SH,SB,E также будут привлечены и иные структуры.

В рамках приведенных обозначений и определений, К(В)П-проблема оптимального восстановления решений уравнений в частных производных по неточной информации заключается, в собирательном смысле, в последовательном решении трех задач:

При заданных A,B,F,Y,D_N (фиксированных всюду по последующему контексту):

К(В)П-1: Находится порядок $\asymp\delta_N(0;D_N)_Y\equiv\delta_N\,(0;A,B;F;D_N)_Y$ – *информативная мощность набора вычислительных агрегатов* $D_N\equiv D_{N_1,\dots,N_k}(F)_Y$,

К(В)П-2: Производится построение конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar l^{(N_1,\dots,N_k)},\overline{\varphi}_N\right)$ из $D_N\equiv D_{N_1,\dots,N_k}(F)_Y$, поддерживающего порядок $\asymp\delta_N\,(0;D_N)_Y$, для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности $\bar\varepsilon_N\equiv\bar\varepsilon_N\left(D_N;(\bar l^{(N_1,\dots,N_k)},\bar\varphi_N)\right)_Y\equiv\left(\bar\varepsilon_N^{(1)},...,\bar\varepsilon_N^{(N)}\right)$ с неотрицательными компонентами, – К(В)П-2 – предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)=\left(\bar l^{(N_1,\dots,N_k)},\bar\varphi_N\right)$) такой, что

$$\delta_N\,(0;D_N)_Y\asymp\delta_N\left(\bar\varepsilon_N;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y\equiv$$

$$\equiv\sup\left\{\|u(y;f)-\bar\varphi_N\,(z_1(f),...,z_N(f);y)\|_Y:\;\;f\in F,\;\left|\bar l_\tau(f)-z_\tau(f)\right|\le\bar\varepsilon_N^{(\tau)}\,(\tau=1,...,N)\right\},$$

с одновременным выполнением

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\eta_N\to+\infty):\varlimsup_{N\to+\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar\varepsilon_N;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y}{\delta_N(0;D_N)_Y}=+\infty.$$

К(В)П-3: Устанавливается массивность предельной погрешности $\bar\varepsilon_N\left(D_N;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y$: находится как можно большое множество $M_N\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$ (обычно связанных со структурой исходного $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)$) вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ таких, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\forall\eta_N\uparrow+\infty(0<\eta_N<\eta_{N+1},\;\eta_N\to+\infty):\varlimsup_{N\to+\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar\varepsilon_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right)\right)_Y}{\delta_N(0;D_N)_Y}=+\infty.$$

Записи $\alpha\ll\beta\;(\beta\ge0)$ и $\alpha\asymp\beta\;(\alpha\ge0,\,\beta\ge0)$ соответственно означают $|\alpha|\le c\beta$ и одновременное выполнение $\alpha\ll\beta$ и $\beta\ll\alpha$. В целях сокращения речи будем говорить "*Вычислительный агрегат* $\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\in D_N$ *поддерживает оценку снизу* $\vartheta_N\ll\delta_N\,(0;A,B;F;D_N)_Y$ ", если выполнены неравенства $\delta_N\left(0;A,B;F;\left(\bar l^{(N)},\bar\varphi_N\right)\right)_Y\ll\vartheta_N$ (разумеется, костанты в $\ll$ не зависят от N).

Сразу же отметим, что с усложнением самих уравнений и классов функций, к которым принадлежат определяющие решения правые части уравнений, граничные, начальные, смешанные и т.п. условия, одновременно будут сложнее устроены оптимальные или близкие к оптимальным операторы восстановления, достигая границ обозримости, и, тем самым, ограничивая возможности их практического применения.

Сформулированная в общем виде К(В)П-постановка в данной статье изучается только для классических уравнений математической физики – это уравнения теплопроводности, волновое, Лапласа, Пуассона, а также Клейна-Гордона (в связи с чем отметим, что известные результаты по близкой постановке задачи дискретизации решений уравнений в частных производных по неточной информации обсуждались в статье [2,§11]).

Все результаты окончательны в своих постановках и могут быть отнесены к их фундаментальным описаниям, поскольку речь идет об уравнениях, послуживших становлению и развитию всей теории дифференциальных уравнений, по настоящее время не утративших своего значения.

Приведем определения необходимых классов функций (см.,напр., [6])

1.Классы Соболева $W_q^r(0,1)^s$ $(s=1,\,2,\,...;\ r=0,\,1,2\,...;\ 1\le q\le+\infty)$. Класс Соболева $W_q^r(0,1)^s$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,...,x_s)$, которые в случае целых $r>0$ вместе со своими частными производными порядка r по каждой переменной принадлежат $L^q(0,1)^s$ и выполнено неравенство

$$\|f\|_{W_q^r}\equiv\|f\|_{L^q}+\sum_{j=1}^{s}\left\|\frac{\partial^r}{\partial x_j^r}f\right\|_{L^q}\le 1,$$

где для измеримой функции $g(x)$ положено $\|g\|_p^p=\int\limits_{[0,1]^s}|g(x)|^p\,dx$.

При $q=2$ также будем пользоваться эквивалентным определением: $W_2^r(0,1)^s\,(s=1,2,...;\ r\ge0)$ есть, по определению, множество всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,...,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега которых удовлетворяют условию

$$\|f\|^2_{W_2^r(0,1)^s}=\sum_{m\in Z^s}\left|\hat f(m)\right|^2\cdot\left(\overline{m}_1^{2r}+...+\overline{m}_s^{2r}\right)\le1, r>1$$

где Z^s – множество всех векторов $m=(m_1,...,m_s)$ с целочисленными компонентами.

2.Обобщенные классы Соболева $W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}$. Для данного действительного числа $r\ge1$ всякую непрерывную, неубывающую на $[0,1]$ функцию $\omega_r(\delta)$ такую, что

$$\omega_r(0)=0 \text{ и } \frac{\omega_r(\eta)}{\eta^r}\le C(\omega_r)\cdot\frac{\omega_r\,(\xi)}{\xi^r}$$

при некотором $C(\omega_r)>0$ и всех $0<\xi<\eta\le1$ называют функцией типа модуля гладкости r-го порядка.

В качестве функций типа модуля гладкости r-го порядка можно указать функции вида $\delta^r\log^{r_1}\frac1\delta$, $\delta^r\log^{r_1}\frac1\delta\log\log^{r_2}\frac1\delta$ и т.п., где соответственно $r\ge1, 0<r_1<+\infty, -\infty<r_2<+\infty$.

Класс $W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}$ есть, по определению, множество всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,...,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега $\hat f(m)$ которых удовлетворяют условию

$$\|f\|^2_{W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}}=\sum_{m\in Z^s}\left|\hat f(m)\right|^2\cdot\left(\frac{1}{\omega^2_{r_1}\left(\frac{1}{\overline{m}_1}\right)}+...+\frac{1}{\omega^2_{r_s}\left(\frac{1}{\overline{m}_s}\right)}\right)\le1,$$

где Z^s - множество всех векторов $m=(m_1,...,m_s)$ с целочисленными компонентами, $\overline{m}_j=\max\{1,|m_j|\}, j=1,..,s$.

В частности, при $\omega_{r_j}(\delta)=\delta^{r_j}$ классы $W_2^{\delta^{r_1},...,\delta^{r_s}}$ сводятся к обычным анизотропным классам Соболева $W_2^{r_1,...,r_s}$.

Нам также потребуется понятие среднего модуля гладкости.

Пусть $\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}$ - система функций типа модуля гладкости порядков $r_1,...,r_s$ соответственно. В дальнейшем, не ограничивая общности (в случае необходимости, переходя к $\frac{\left(\omega_{r_j}(\delta)+\delta^r\right)}{\omega_{r_j}(1)+1}$), будем считать, что все функции ω_{r_j} $(j=1,..,s)$ строго возрастают на $[0,1]$ и $\omega_{r_j}(1)=1$.

Обратную к инъективной функции g будем обозначать через g^{-1} .

Рассмотрим функции $\omega_{r_j}^{-1}(\zeta)$, обратные к $\omega_{r_j}(\delta)$, и положим

$$\delta=\tau^{-1}(\zeta)=\prod_{j=1}^{s}\omega_{r_j}^{-1}(\zeta)\,(0\le\zeta\le1)\,.$$

Очевидно, что $\delta=\tau^{-1}(\zeta)$ является строго возрастающей непрерывной функцией на [0,1], причем $\tau^{-1}(0)=0$ и $\tau^{-1}(1)=1$. Функцию $\zeta=\tau(\delta)$, обратную к $\tau^{-1}(\zeta)$, следуя В.И.Коляде [7], будем называть *средней функцией системы* $\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}$.

Если $\omega_{r_1}(\delta)=\delta^{r_1},...,\omega_{r_s}(\delta)=\delta^{r_s}$, то средний модуль гладкости этой системы есть $\omega(\delta)=\delta^{\left(r_1^{-1}+...+r_s^{-1}\right)^{-1}}$.

Отметим, что в случае $\omega_{\nu_1}(\delta)=\cdots=\omega_{\nu_s}(\delta)=\omega_{\nu}(\delta)$ средняя функция этой системы, очевидно, есть функция $\zeta=\tau(\delta)$, обратная к функции $\delta=\tau^{-1}(\zeta)=\left(\omega_{\nu}^{-1}(\zeta)\right)^{s}$.

3. Классы Никольского-Бесова. Пусть $s=1,2,...$ и $k=0,1,2,...,I_k=\left\{m=(m_1,...,m_s)\in Z^s:\ -2^k\le m_j\le 2^k,\ j=1,2,...,s\right\}$, $I_{-1}=\emptyset, Q_k=I_k\backslash I_{k-1}$.

Для набора чисел $\{a(k)\}_{k\in A}$, где A – заданное счетное множество, через $\|a_k\|_{l^{\theta}(A)}$ обозначим $\sup\limits_{k\in A}|a(k)|$ при $\theta=+\infty$ и $\left(\sum\limits_{k\in A}|a(k)|^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$ при $1\le\theta<+\infty$.

Класс Никольского-Бесова $B_{p,\theta}^{r}(0,1)^s(s=1,2,...;r>0;1<p<+\infty;1\le\theta\le+\infty)$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)\in L^p\,(0,1)^s$ таких, что

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{r}}=\left\|2^{kr}\left\|\sum_{m\in Q_k}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)}\right\|_p\right\|_{l^{\theta}(k\ge0,k\in Z)}\le1.$$

4.Классы Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_q^r(0,1)^s\,(r>0,1\le q\le+\infty)$ есть множество всех функций $f(x)$, представимых в виде $(y=(y_1,...,y_s))$

$$f(x)=(\varphi*F_r)\,(x)=\int_{[0,1]^s}\varphi\,(x+y)\,2^s\prod_{j=1}^{s}\sum_{k_j>0,k_j\in Z}(2\pi k_j)^{-r}\cos2\pi\,(k_jy_j-r/4)\,dy,$$

где $\|\varphi\|_{L^q(0,1)^s}\le1.$

5.Классы Никольского с доминирующей смешанной разностью $SH_q^r(0,1)^s$ $(r>0,\ 1\le q\le+\infty)$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)\in L^q\,(0,1)^s$ таких, что для некоторого $l>r$ выполнено соотношение

$$\left\|\Delta_{h_1}^{l}...\Delta_{h_s}^{l}f\,(x_1,...,x_s)\right\|_{L^q(0,1)^s}\le\prod_{j=1}^{s}|h_j|^r\,,$$

где $\Delta_{h_j}f\equiv\Delta_{h_j}^{1}f=f\,(x_1,...,x_{j-1},x_j+h_j,x_{j+1},...,x_s)-f\,(x_1,...,x_s)\,,\Delta_{h_j}^{k}=\Delta_{h_j}\left(\Delta_{h_j}^{k-1}\right).$

Тогда, по определению,

$$\|f\|_{SH_p^r}=\sup_{\substack{h_1,...,h_s\\ h_1\cdot...\cdot h_s\ne0}}\frac{\left\|\Delta_{h_1}^{l}...\Delta_{h_s}^{l}f\,(x_1,...,x_s)\right\|_{L^q(0,1)^s}}{\prod\limits_{j=1}^{s}|h_j|^r}.$$

6.Классы Коробова. $E_s^r(r > 1, s = 1, 2, ...)$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$\left|\hat{f}(m)\right| \leq \left(\prod_{j=1}^{s} \max\{|m_j|; 1\}\right)^{-r},$$

причем

$$\|f\|_{E_s^r} = \sup_{m \in Z^s} \left|\hat{f}(m)\right| \cdot \left(\prod_{j=1}^{s} \max\{|m_j|; 1\}\right)^{-r}.$$

Классы $E_s^\theta(\lambda)$. Пусть $\lambda(m) > 0$ $(m \in Z^s)$ и класс $E_s^\theta(\lambda)$ $(1 \leq \theta \leq +\infty)$ состоит из 1-периодических по каждой переменной суммируемых функций $f(x_1, ..., x_s)$ таких, что

$$\sum_{m \in Z^s} \lambda^{-1}(m) < +\infty$$

и

$$\left\|\lambda(m) \cdot \left|\hat{f}(m)\right|\right\|_{l^\theta(Z^s)} \leq 1.$$

Если

$$\lambda(m) = \prod_{j=1}^{s} \max(|m_j|, 1)^r, \ r > 1,$$

тогда при $\theta = +\infty$ множество $E_s^\infty(\lambda) \equiv E_s^r$ есть класс Коробова, а при $\theta = 2$ множество $E_s^2(\lambda) \equiv SW_2^r$ есть класс Соболева с доминирующей смешанной производной.

7.Классы Ульянова $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ состоит из всех функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, 1-периодических по каждой из $s(s = 1, 2 \dots)$ переменных и таких, что ($\overline{y} = \max\{|y|; 1\}$):

$$\left|\hat{f}(m)\right| \leq \prod_{j=1}^{s} (\overline{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\overline{m}_j^{\alpha_j^{-1}}} \psi_j(\overline{m}_j)(m \in Z^s),$$

где $\beta = (\beta_1, ..., \beta_s) \in R^s$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_s) \in (0, 1]^s, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_s)$ $(\alpha_j > 0$ $(j = 1, ..., s)), \psi = (\psi_1, ...\psi_s)(\psi_j(x)$ - медленно колеблющиеся (относительно степенных функций) положительные функции при всех *j=1,. . . ,s*, т.е. для всех $\delta \neq 0$ существуют пределы $\lim\limits_{y \to +\infty} \psi_j(y) y^\delta$ $(j = 1, ..., s)$ и равны 0 или $+\infty$ в зависимости от того $\delta < 0$ или $\delta > 0$).

Шкала классов $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ представляет собой классификацию функций в широком диапазоне от предельно малой гладкости до аналитических и их подклассов, включая известные классы Коробова [8] $E_s^r \equiv U_s\left(-r, \vec{1}, \vec{1}; \vec{1}\right)$, где $\vec{b} := (b, ..., b) \in Z^s$ и $r = (r_1, r_2, ..., r_s)$, причем $r_j > 1$ при всех $j = 1, ..., s$. Более того, при определенных значениях параметров, класс $U_s(\beta, \theta, \alpha) \equiv U_s\left(\beta, \theta, \alpha; \vec{1}\right)$ с точностью до постоянных сомножителей может быть определен не опосредованными типа формул Фурье, а прямыми ограничениями на саму бесконечно дифференцируемую функцию.

Именно, как это доказано в [9], при всех $\beta \in R^s, \theta \in (0, 1)^s, \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]^s$ класс $U_s(\beta, \theta, \alpha)$ в указанном выше смысле совпадает с классом бесконечно дифференцируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$ таких, что для всех $k = (k_1, ..., k_s) \in Z^s$ $(k_j \geq 0$ $(j = 1, ..., s))$ выполнены неравенства

$$\left\|\frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_s}}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_s^{k_s}} f(x_1, ..., x_s)\right\|_{C[0,1]^s} \leq \prod_{j=1}^{s} \overline{k}_j^{\alpha_j(\beta_j + \overline{k}_j)} \left(\frac{\alpha_j}{e \ln \frac{1}{\theta_j}}\right)^{\alpha_j \overline{k}_j}.$$

В заключение примем обозначения, используемые на протяжении всей статьи (другие случаи по тексту будут оговорены особо):

1. Запись $[x]$ есть целая часть действительного числа x ,
2. Звездочка в сумме $\sum *$ означает, что из суммирования исключен член, индексированный знаком 0,
3. Под $L^{\infty}(\Omega)$ будем понимать пространство существенно ограниченных на измеримом множестве $\Omega \subset R^s$ измеримых функций, либо с уточнением $L^{\infty}(\Omega) \equiv C(\Omega)$ пространство равномерно непрерывных в области Ω функций,
4. Условимся запись $\|g(x,t)\|_{L^{q,\infty}} \equiv \|g(x,t)\|_{L^q(0,1)^s \times L^{\infty}[0,+\infty)}$ понимать как $\left\| \|g(x,t)\|_{L^q(0,1)^s} \right\|_{L^{\infty}[0,+\infty)} = \left\| \|g(x,t)\|_{L^q_x(0,1)^s} \right\|_{L^{\infty}_t[0,+\infty)}$, где $\|g(x,t)\|_{L^q_x(0,1)^s} := \left(\int\limits_{[0,1]^s} |g(x,t)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$ и $\|b(t)\|_{L^{\infty}_t[0,+\infty)} = \sup\limits_{0 \le t < \infty} vrai\, |b(t)|$,
5. Для $m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s$ положим $\overline{m}_j = \max\{|m_j|, 1\}$ **и** $\overline{\overline{m}} = \overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s$.
6. $\Gamma_R \equiv \left\{ m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s : \overline{\overline{m}} \le R \right\}$.

§1. **Модельные случаи полного К(В)П-исследования уравнений в частных производных**

Как это уже отмечалось в [1]-[5], качество постановки задачи проверяется через формулировку теоремы как ответ на поднятую проблему, в которой все имеет значение – от информативности до эстетического вида.

В соответствии с чем здесь приведены два примера из рассматриваемой темы исследований.

1.1 Дискретизация решений уравнения теплопроводности с одной предельной погрешностью. Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \, (x \in R^s, t \ge 0)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = f(x) \ (x \in R^s) .$$

Теорема 1.1 (Н.Наурызбаев, Б.Оразкулова).*Пусть даны числа* $s(s = 1, 2, ..)$ и r *такие, что* $r > 2 + \frac{s}{2}$. *Тогда выполнены утверждения*

К(В)П-1:

$$\delta_N(0; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^{\infty}[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^{\infty}[0,\infty)} \equiv$$

$$\equiv \delta_N(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u(x,0) = f(x) \in W_2^r(0,1)^s; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^{\infty}[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^{\infty}[0,\infty)} \equiv$$

$$\equiv \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^{\infty}[0,\infty)}} \sup_{f \in W_2^r(0,1)^s} \|u(x,t;f) - \varphi_N(l_1(f), ..., l_N(f); x, t)\|_{L^2(0,1)^s \times L^{\infty}[0,\infty)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f \in W_2^r(0,1)^s} \left\| u(x,t;f) - \sum_{\substack{m \in Z^s : \left| m_j \right| \le n \\ (j = 1, ..., n)}} \hat{f}(m) \, e^{-4\pi(m,m)t} \cdot e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^{\infty}[0,\infty)} \asymp N^{-\frac{r}{s}},$$

К(В)П-2:*Для функции* $U_N(x,t;f) = \sum\limits_{\substack{m \in Z^s : |m_j| \le n \\ (j = 1, ..., n)}} \hat{f}(m) \, e^{-4\pi(m,m)t} \cdot e^{2\pi i(m,x)}$, $N = n^s$ *величина* $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s} - \frac{1}{2}}$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N(0; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp$$

$$\asymp \delta_N(\bar{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \equiv$$

$$= \inf_{\left(l^{(N)},\varphi_N\right) \in \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}} \sup_{\substack{f \in W_2^r(0,1)^s \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 \ (\tau = 1,...,N)}} \|u(x,t;f) -$$

$$-\varphi_N(l_1(f) + \gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N, ..., l_N(f) + \gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N; x, t)\Big\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}$$

$$\asymp \sup_{\substack{f \in W_2^r(0,1)^s \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 \\ (\tau = 1,...,N)}} \left\| u(x,t;f) - \sum_{\substack{m \in Z^s : |m_j| \le n \\ (j=1,...,n)}} \left(\hat{f}(m) + \gamma_N^{(j)}\bar{\varepsilon}_N\right) e^{-4\pi(m,m)t} \cdot e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)} \asymp N^{-\frac{r}{s}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N = \eta_N N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}; U_N(x,t;f)\right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}}{\delta_N(0; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}} = +\infty.$$

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат* $(\varphi_N(0,....,0;x,t) \equiv 0$ *на* $[0,1]^s \times [0,+\infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), ..., \hat{f}(m^{(N)}); x, t),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $U_N(x,t;f)$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N = \eta_N N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}; \varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}), ..., \hat{f}(m^{(N)}); x, t)\right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}}{\delta_N(0; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty)}} = +\infty.$$

Тем самым, в случае, когда гладкость функций определяется принадлежностью к многомерным классическим пространствам Соболева, а информация снимается с произвольных линейных функционалов, задача дискретизации уравнения теплопроводности решена в полном объеме. Именно выписаны правильные порядки

$$\delta_N(0; \mathrm{L}_N(W_2^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty(0,1)^s} \asymp N^{-\frac{r}{s}}$$

дискретизации решения в случае, когда используются *точные* значения функционалов. Оптимальные вычислительные агрегаты в К(В)П-2 построены по числовой информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье. В продолжение чего найдена величина погрешности вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}$, сохраняющая порядок восстановления по точной информации, которую можно понимать как идеализированный показатель, но с определяющим ее дополнительным условием: сколь угодно медленное бесконечное увеличение погрешности $\bar{\varepsilon}_N$ ведет к потере этого порядка по точной информации. Затем показано, что с лучшей предельной погрешностью вычислительных агрегатов по тригонометрическим коэффициентам Фурье не существует.

Замечание 1.1. К(В)П-дискретизация решений уравнения теплопроводности по тригонометрическим коэффициентам Фурье в классах Соболева с гильбертовой нормой полностью решена в [10].

1.2 Дискретизация решений волнового уравнения с двумя предельными погрешностями. Исследуется задачи Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}(u = u\,(x,t)\,, 0 \le t < \infty, x \in R^s, s = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

$$u\,(x,0) = \; f_1\,(x) \in \; F^{(1)}, \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = f_2\,(x) \in F^{(2)}(x \in R^s), \tag{2}$$

решение которой описывает, в частности, свободную релятивистскую (псевдо) скалярную частицу массы 1, в случае классов Соболева в метрике $Y = L^{2,\infty}$.

Задача заключается в получении совпадающих с точностью до констант оценок сверху и снизу для величины

$$\delta_N(0; \mathrm{L}_N(F^{(1)}, F^{(2)}) \times \{\varphi_N\}_Y)_Y \equiv$$

$$\equiv \delta_N(0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u\,(x,0) = \; f_1\,(x) \in \; F^{(1)}, \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = f_2\,(x) \in F^{(2)}; \mathrm{L}_N(F^{(1)}, F^{(2)}) \times \{\varphi_N\}_Y)_Y \equiv \tag{3}$$

$$\equiv \min_{N_1+N_2=N} \; \inf_{\left(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N\right) \in \mathrm{L}_N(F^{(1)},F^{(2)}) \times \{\varphi_N\}_Y} \; \sup_{,f_1 \in F^{(1)} f_1 \in F^{(2)}}$$

$$\left\| u(x,t; f_1, f_2) - \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1), ..., l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); l_{N_2}^{(1)}(f_2), ..., l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t) \right\|_Y ,$$

и в указании вычислительного агрегата, т.е. функции вида

$$\Phi\,(x,t; f_1, f_2) = \varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1), ..., l_{N_1}^{(N_1)}(f_1); l_{N_2}^{(1)}(f_2), ..., l_{N_2}^{(N_2)}(f_2); x, t),$$

реализующей оценку сверху. Здесь $u(x,t; f_1, f_2)$ - решение уравнения (1)-(2), L_N -совокупность всех возможных линейных функционалов $l_{N_1}^{(1)}(f_1), ..., l_{N_1}^{(N_1)}(f_1)$ и $l_{N_2}^{(1)}(f_{N_2}), ..., l_{N_2}^{(N_2)}(f_2)$, определенных на линейной оболочке классов $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ соответственно.

Далее предполагается, что $\varphi_N(z_1, ..., z_N; x, t)$ при любых, вообще говоря, комплексных фиксированных значениях $z_j (j = 1, ..., N)$ есть функция от переменных (x,t) , принадлежащая классу $L^{q,\infty}$.

Величину δ_N , зависящую только от L_N , согласно [1]-[5], назовем *информативной мощностью всех возможных линейных функционалов* L_N .

Существенным в задаче (1)-(3) является то, что при заданном общем объеме информации $N = N_1 + N_2$ требуется распределить объемы N_1 и N_2 числовой информации, получаемой соответственно от функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы суммарная погрешность δ_N была возможно малой – неулучшаемой или близкой к неулучшаемой.

Через $u(x,t; f, 0)$ обозначим решение задачи (1)-(2) в случае

$$f(x) \equiv f_1(x) \in W_2^{r_1}(0,1)^s, \;\; f_2(x) \equiv 0, \tag{4}$$

через $u(x,t; 0, f)$ в случае

$$f_1(x) \equiv 0, \; f(x) \equiv f_2(x) \in W_2^{r_2}(0,1)^s, \tag{5}$$

и через $u(x,t; f_1, f_2)$ обозначим решение задачи (1)-(2) в случае

$$f_1(x) \in W_2^{r_1}(0,1)^s, \; f_2(x) \in W_2^{r_2}(0,1)^s. \tag{6}$$

Пусть $l_1, ..., l_N$ - линейные функционалы. Имеет место следующая

Теорема 1.2 (Ш.К.Абикенова [11]). *Пусть заданы целые положительные числа* s , $2 \le q \le \infty$, r_1 *и* r_2 *такие, что* $r_1 > 2 + \frac{s}{2}$ *и* $r_2 > 1 + \frac{s}{2}$. *Тогда*

К(В)П-1: $\delta_N(\overline{0}_N; L_N(W_2^{r_1}(0,1)^s, W_2^{r_2}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \equiv$

$$\equiv \delta_N(\overline{0}_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u\,(x,0) = f_1\,(x) \in \; W_2^{r_1}(0,1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0,1)^s;$$

$$L_N(W_2^{r_1}(0,1)^s, W_2^{r_2}(0,1)^s) \times \{\varphi_N\})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)} \equiv$$

$$\equiv \min_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1\geq 1, N_2\geq 1}} \inf_{\substack{l_{N_1}^{(1)},\ldots,l_{N_1}^{(N_1)}\\ l_{N_2}^{(1)},\ldots,l_{N_2}^{(N_2)},\varphi_N}} \sup_{\substack{f_1\in W_2^{r_1}(0,1)^s\\ f_2\in W_2^{r_2}(0,1)^s}}$$

$$\left\|u\left(x,t;f_1,f_2\right)-\varphi_N\left(l_{N_1}^{(1)}\left(f_1\right),\ldots,l_{N_1}^{(N_1)}\left(f_1\right),l_{N_2}^{(1)}\left(f_2\right),\ldots,l_{N_2}^{(N_2)}\left(f_2\right);x,t\right)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,r_1,r_2}{\asymp}$$

$$\asymp \sup_{\substack{f_1\in W_2^{r_1}(0,1)^s\\ f_2\in W_2^{r_2}(0,1)^s}} \left\|u\left(x,t;f_1,f_2\right)-\bar\varphi_N\left(l_{N_1^{(0)}}^{(1)}\left(f_1\right),\ldots,l_{N_1^{(0)}}^{\left(N_1^{(0)}\right)}\left(f_1\right),l_{N_2^{(0)}}^{(1)}\left(f_2\right),\ldots,l_{N_2^{(0)}}^{\left(N_2^{(0)}\right)}\left(f_2\right);x,t\right)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,r_1,r_2}{\asymp}$$

$$\underset{s,r_1,r_2}{\asymp} N^{-\frac{\min\{r_1;r_2+1\}}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

К(В)П-2: *Для функций*($n=\left[\log_2\left(\sqrt[s]{N}-1\right)\right]-1$)

$$\bar\varphi_{N_1}^{(1)}\left(l_1\left(f\right),...,l_{N_1}\left(f\right);x,t\right)=\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s):\\ |k_j|\leq 2^n\ (j=1,...,s)}} \hat f\left(k_1,...,k_s\right)cos\left(2\pi\sqrt{k_1^2+...+k_s^2}t\right)e^{2\pi i(x_1k_1+...+x_sk_s)},$$

$$\bar\varphi_{N_2}^{(2)}\left(l_1\left(f\right),...,l_{N_2}\left(f\right);x,t\right)=\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\\ |k_j|\leq 2^n\ (j=1,...,s)}} \hat f\left(k_1,...,k_s\right)\frac{\sin\left(2\pi\sqrt{k_1^2+...+k_s^2}t\right)}{\sqrt{k_1^2+...+k_s^2}}e^{2\pi i(x_1k_1+...+x_sk_s)}$$

и

$$\bar\varphi_N\left(x,t;f_1,f_2\right)=\bar\varphi_{N_1}^{(1)}\left(l_1\left(f_1\right),...,l_{N_1}\left(f_1\right);x,t\right)+\bar\varphi_{N_2}^{(2)}\left(l_1\left(f_2\right),...,l_{N_2}\left(f_2\right);x,t\right)$$

N-мерный вектор $\bar\varepsilon_{N_1,N_2}\equiv(\bar\varepsilon_{N_1},\bar\varepsilon_{N_2})=(\varepsilon_{N_1}^{(1)},...,\varepsilon_{N_1}^{(N_1)},\varepsilon_{N_2}^{(1)},...,\varepsilon_{N_2}^{(N_2)})$ *с компонентами* $\bar\varepsilon_{N_1}^{(j_1)}=N_1^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}}$ $(j_1=1,2,...,N_1)$, $\bar\varepsilon_{N_2}^{(j_2)}=\begin{cases} N_2^{-\frac{r_2+1}{s}}, \text{ при, } & s=1\\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s}}(\ln N_2)^{-\frac{1}{2}}, \text{ при } & s=2\\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)}=N_2^{-\frac{r_2}{s}-\frac{1}{2}}, \text{ при } & s>2\end{cases}$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N(\overline{0}_N;L_N(W_2^{r_1}(0,1)^s,W_2^{r_2}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp$$

$$\asymp\delta_N\left(\overline{\varepsilon}_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}}=(\overline{\varepsilon}_{N_1^{(0)}},\overline{\varepsilon}_{N_2^{(0)}});L_N(W_2^{r_1}(0,1)^s,W_2^{r_2}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\equiv$$

$$\equiv\min_{\substack{N_1\in Z_+,N_2\in Z_+:\\ N_1+N_2=N}}\inf_{\substack{m^{(1)},...,m^{(N_1)}\\ n^{(1)},...,n^{(N_2)}\\ \varphi_N}}\sup_{\substack{f_1\in W_2^{r_1}(0,1)^s;\ f_2\in W_2^{r_2}(0,1)^s\\ \left|\gamma_{N_1}^{(j_1)}\right|\leq 1\ (j_1=1,...,N_1)\\ \left|\gamma_{N_2}^{(j_2)}\right|\leq 1\ (j_2=1,...,N_2)}}\|u(x,t;f_1,f_2)-$$

$$-\varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1)+\gamma_{N_1}^{(1)}\bar\varepsilon_{N_1}^{(1)},...,l_{N_1}^{(N_1)}(f_1)+\gamma_{N_1}^{(N_1)}\bar\varepsilon_{N_1}^{(N_1)},l_{N_2}^{(1)}(f_2)+\gamma_{N_2}^{(1)}\bar\varepsilon_{N_2}^{(1)},...,l_{N_2}^{(N_2)}(f_2)+\gamma_{N_2}^{(N_2)}\bar\varepsilon_{N_2}^{(N_2)};x,t)\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{\substack{f_1\in W_2^{r_1}(0,1)^s;\ f_2\in W_2^{r_2}(0,1)^s\\ \left|\gamma_{N_1}^{(j_1)}\right|\leq 1\ (j_1=1,...,N_1)\\ \left|\gamma_{N_2}^{(j_2)}\right|\leq 1\ (j_2=1,...,N_2)}}\Big\|u(x,t;f_1,f_2)-\bar\varphi_N(l_{N_1^{(0)}}^{(1)}(f_1)+\gamma_{N_1^{(0)}}^{(1)}\varepsilon_{N_1^{(0)}}^{(1)}$$

$$,...,l_{N_1^{(0)}}^{\left(N_1^{(0)}\right)}(f_1)+\gamma_{N_1^{(0)}}^{(N_1^{(0)})}\varepsilon_{N_1^{(0)}}^{(N_1^{(0)})},l_{N_2^{(0)}}^{(1)}(f_2)+\gamma_{N_2^{(0)}}^{(1)}\varepsilon_{N_2^{(0)}}^{(1)},...,l_{N_1^{(0)}}^{\left(N_2^{(0)}\right)}(f_2)+\gamma_{N_2^{(0)}}^{(N_2^{(0)})}\varepsilon_{N_2^{(0)}}^{(N_2^{(0)})};x,t)\Big\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{\min\{r_1;r_2+1\}}{s}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}};\bar{\varphi}_N\left(x,t;f_1,f_2\right)\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}}{\delta_N(\bar{0};L_N(W_2^r(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}}=+\infty.$$

где $N_1^{(0)}$ *и* $N_2^{(0)}$ ($N_1^{(0)}+N_2^{(0)}=N$) *одна из пар, реализующих минимум погрешности дискретизации,* $\overline{0}_N$ *-нулевой N-мерный вектор.*

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат* $(\varphi_N(0,....,0;x,t)\equiv 0$ *на* $[0,1]^s\times[0,+\infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),....,\hat{f}(m^{(N)});x,t),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $\bar{\varphi}_N\left(x,t;f_1,f_2\right)$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N;\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),....,\hat{f}(m^{(N)});x,t)\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}}{\delta_N(\bar{0};L_N(W_2^r(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}}=+\infty.$$

Замечание 1.2. Пусть $\min\{r_1,r_2+1\}=r$. Если $r_1=r$, то $r_2+1\geq r$ и всякое повышение гладкости $r_2>r-1$ не отразится на порядке погрешности $\asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$ при дискретизации решений задачи (1)-(6). При этом самый широкий класс упорядоченных пар функций $(f_1,f_2),f_1\in W_2^{r_1}(0,1)^s,f_2\in W_2^{r_2}(0,1)^s$, для которых еще выдерживается указанный оптимальный порядок, получится при $r_1=r_2-1=r$.

Замечание 1.3. Как это показано в [1]-[5], конкретизируя функционалы $l_1,....,l_N$ и функции φ_N, в качестве вычислительных агрегатов $\varphi_N(l_1(f),....,l_N(f);x,t)$ можно получать все возможные N-членные частичные суммы рядов Фурье по всем возможным ортонормированным системам, в их числе и по вейвлет-системам, все возможные N-членные частичные суммы разложении по всем возможным базисам и также разностные схемы, т.е. фактически весь спектр агрегатов, изучаемых в теории приближений и вычислительной математике. Смысл теоремы состоит в том, что в условиях данной теоремы весь перечисленный арсенал не может дать оценку лучше чем $\asymp N^{-\frac{\min\{r_1;r_2+1\}}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$.

§2. Дискретизация решений уравнения Лапласа

К(В)П-исследованию уравнения Лапласа предпошлем обширное цитирование из статьи [12] П. Лакса:

"*Все знают о достигнутом за последние 50 лет невероятном прогрессе в скорости компьютеров и объёме хранимой ими информации, а также об улучшениях в области графики и программного обеспечения. В результате задачи, ранее находившиеся на грани возможностей компьютера, сейчас могут быть решены гораздо быстрее и дешевле, и мы можем подступаться к задачам устрашающей сложности. Но многие люди не подозревают, что в значительной степени этот прогресс обязан не только улучшениям в техническом и программном обеспечении, но и в равной мере новым математическим идеям о том, как решать возникающие вычислительные проблемы.*

Вот несколько удивительных примеров.

...Мультисеточный метод. После дискретизирования эллиптических систем уравнений в частных производных - стандартным примером является задача Дирихле для уравнения Лапласа - возникает проблема численного решения получившейся системы линейных алгебраических уравнений. Эффективный итерационный метод для выполнения этой задачи, называемый мультисеточным методом, был предложен в 1960-х годах Р.П. Федоренко [13] и проанализирован Н.С. Бахваловым [14]; далее его развивал и применял Аки Брандт [15]. Схематически идея состоит в том, чтобы получать информацию о поведении решения на больших расстояниях путём вычислений на грубой сетке. Для получения более детальной информации используются всё более мелкие сетки".

Здесь выясняются аппроксимативные возможности вычислительных агрегатов, построенных по произвольным алгоритмам, примененным к числовой информации заданного объема N, полученного от граничных функций посредством N линейных функционалов, в задаче приближения (в метрике L^q) решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

2.1. Дискретизация решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в бесконечной полосе. Рассматривается задача дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в бесконечной полосе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ (x\in R, y\in[0,b]) \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(x,0)=f(x) \ (x\in R)\,,\\ &u(x,b)=0 \ (x\in R)\,, \end{aligned} \tag{8}$$

где $f(x)$ есть 2π -периодическая функция из класса $B^r_{q,\theta}\left(-\pi,\pi\right)\left(r>\frac{1}{q}\right)$.

Функция

$$u(x,y;f)=\hat f(0)\left(1-\frac{y}{b}\right)+\sum_{m\in Z}{}^{*}\frac{sh\left(|m|\left(b-y\right)\right)}{sh\left(|m|\,b\right)}\hat f(m)e^{imx},$$

является решением уравнения (7) из класса $C^2\left((-\infty,\infty)\times[0,b]\right)\bigcap C\left((-\infty,\infty)\times[0,b]\right)$, удовлетворяющая краевому условию (8).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.1 (М.Берикханова [16]). *Пусть заданы числа* $1\le q\le\nu\le\infty$, $1\le\theta\le\infty$, $r>\frac{1}{q}$ *и* $u(x,y;f)$ *- решение задачи* (7)-(8). *Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\inf_{\xi^{(k)},\varphi_N}\sup_{f\in B^r_{q,\theta}}\left\|u\left(x,y;f\right)-\varphi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right),...,f\left(\xi^{(N)}\right);x,y\right)\right\|_{L^\nu[0,\pi]\times L^\infty[0,b]}\underset{r,q,\theta,\nu}{\asymp}\frac{1}{N^{r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}}.$$

Теорема 2.2 (М.Берикханова [16]). *Пусть заданы числа* $1\le q\le\nu\le\infty$ *и* $r>\frac{1}{q}$ *- целое положительное число и* $u(x,y;f)$ *- решение задачи* (7)-(8). *Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\inf_{\xi^{(k)},\varphi_N}\sup_{f\in W^r_q}\left\|u\left(x,y;f\right)-\varphi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right),...,f\left(\xi^{(N)}\right);x,y\right)\right\|_{L^\nu[0,\pi]\times L^\infty[0,b]}\underset{r,q,\nu}{\asymp}\frac{1}{N^{r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}}.$$

При этом, оптимальный порядок погрешности в теоремах 2.1 и 2.2 реализуется при дискретизации оператором $(N=2^n)$

$$\bar\varphi_N\left(f\left(2\pi\frac{1}{N}\right),...,f\left(2\pi\frac{N}{N}\right);x,y\right)\equiv\left(T^{(3)}_N f\right)\ (x,y)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(2\pi\frac{k}{N}\right)\cdot V_N\left(x-2\pi\frac{k}{N},y\right),$$

где

$$V_N\left(x,y\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)+\sum_{m\in Z\bigcap[-2N,2N]}{}^{*}\ \frac{sh\left(|m|\left(b-y\right)\right)}{sh\left(|m|\,b\right)}\cdot\hat V_N(m)\cdot e^{imx}.$$

2.2. Дискретизация решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,(0<x<\pi,0<y<b) \tag{9}$$

с граничными условиями

$$\begin{array}{ll} u\,(x,0) = f_1(x) & (0 \le x \le \pi) \\ u\,(x,b) = f_2(x) & (0 \le x \le \pi) \\ u\,(0,y) = f_3(x) & (0 \le y \le b) \\ u\,(\pi,y) = f_4(x) & (0 \le y \le b) \end{array} \qquad (10)$$

где $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *– функции из класса* $B^r_{q,\theta}\,(0,\pi)\left(r > \frac{1}{q}\right)$*, а* $f_3(x)$ *и* $f_4(x)$ *– функции из класса* $B^r_{q,\theta}\,(0,b)\left(r > \frac{1}{q}\right)$*, удовлетворяющие условию* $f_i(0) = f_i(\pi) = 0\,(i = 1,2)$ *и* $f_i(0) = f_i(b) = 0\,(i = 3,4)$.

Решение задачи (9)-(10) можно представить в виде

$$u\,(x,y) = u_1\,(x,y) + u_2\,(x,y) + u_3\,(x,y) + u_4\,(x,y)\,,$$

где $u_1\,(x,y)\,, u_2\,(x,y)\,,$ $u_3\,(x,y)\,, u_4\,(x,y)$ - решения уравнения (10), удовлетворяющие, соответственно, следующим системам граничных условий:

$$\begin{array}{llll} u_1\,(x,0) = f_1(x) & u_2\,(x,0) = 0 & u_3\,(x,0) = 0 & u_4\,(x,0) = 0 \\ u_1\,(x,0) = 0 & u_2\,(x,0) = f_2(x) & u_3\,(x,0) = 0 & u_4\,(x,0) = 0 \\ u_1\,(x,0) = 0 & u_2\,(x,0) = 0 & u_3\,(x,0) = f_3(x) & u_4\,(x,0) = 0 \\ u_1\,(x,0) = 0 & u_2\,(x,0) = 0 & u_3\,(x,0) = 0 & u_4\,(x,0) = f_4(x) \end{array}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.3 (М.Берикханова [16]). *Пусть заданы числа* $1 \le q \le \nu \le \infty\,,$ $1 \le \theta \le \infty, r > \frac{1}{q}$ *и* $u\,(x,y;f)$ *- решение задачи* (10)-(11)*. Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\inf_{\xi^{(k)},\varphi_N}\sup_{f\in B^r_{q,\theta}}\left\| u\,(x,y;f) - \varphi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right),...,f\left(\xi^{(N)}\right);x,y\right)\right\|_\nu \underset{r,q,\theta,\nu}{\asymp} \frac{1}{N^{r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)}}.$$

Здесь норма понимается как

$$\left\| u\,(x,y;f) - \varphi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right),...,f\left(\xi^{(N)}\right),x,y\right)\right\|_\nu \equiv$$

$$\equiv \sup_{0\le y\le b}\left\| u_1\,(\cdot,y\,;f_1) - \varphi_N^{(1)}\right\|_{L^\nu[0,\pi]} + \sup_{0\le y\le b}\left\| u_2\,(\cdot,y\,;f_2) - \varphi_N^{(2)}\right\|_{L^\nu[0,\pi]} +$$

$$+\sup_{0\le x\le\pi}\left\| u_3\,(x,\cdot\,;f_3) - \varphi_N^{(3)}\right\|_{L^\nu[0,b]} + \sup_{0\le x\le\pi}\left\| u_4\,(x,\cdot\,;f_4) - \varphi_N^{(4)}\right\|_{L^\nu[0,b]}.$$

Оптимальный порядок погрешности реализуется при дискретизации оператором ($N = 2^n$ *)*

$$\left(T^{(4)}_N f\right)\,(x,y) = \left(T^{(4)}_N f_1\right)_1\,(x,y) + \left(T^{(4)}_N f_2\right)_2\,(x,y) + \left(T^{(4)}_N f_3\right)_3\,(x,y) + \left(T^{(4)}_N f_4\right)_4\,(x,y)\cdot$$

Здесь

$$\left(T^{(4)}_N f_1\right)_1\,(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f_1\left(2\pi\frac{k}{N}\right)\cdot V^{(1)}_N\left(x - 2\pi\frac{k}{N},y\right);$$

$$\left(T^{(4)}_N f_2\right)_2\,(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f_2\left(2\pi\frac{k}{N}\right)\cdot V^{(2)}_N\left(x - 2\pi\frac{k}{N},y\right);$$

$$\left(T^{(4)}_N f_3\right)_3(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f_3\left(b\frac{k}{N}\right)\cdot V^{(3)}_N\left(x,y - b\frac{k}{N}\right);$$

$$\left(T^{(4)}_N f_4\right)_4\,(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f_4\left(b\frac{k}{N}\right)\cdot V^{(4)}_N\left(x,y - b\frac{k}{N}\right);$$

где

$$V_N^{(1)}(x,y)=\sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}}{}^{*}\ \frac{sh(|m|\,(b-y))}{sh\,(|m|\,b)}\hat{V}_N(m)\cdot e^{imx};$$

$$V_N^{(2)}(x,y)=\sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}}{}^{*}\ \frac{sh\,(|m|\,y)}{sh\,(|m|\,b)}\hat{V}_N(m)\cdot e^{imx};$$

$$V_N^{(3)}(x,y)=\sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}}{}^{*}\ \frac{sh(|m|\,(\pi-x))}{sh\,(|m|\,\pi)}\hat{V}_N(m)\cdot e^{\frac{2\pi}{b}imy};$$

$$V_N^{(4)}(x,y)=\sum_{m=-2^{n-2}}^{2^{n-2}}{}^{*}\ \frac{sh\,(|m|\,x)}{sh\,(|m|\,\pi)}\hat{V}_N(m)\cdot e^{\frac{2\pi}{b}imy}.$$

Теорема 2.4 (М.Берикханова [16]). *Пусть заданы числа* $1\le q\le \nu\le\infty$, $r>\frac{1}{q}$ *целое положительное число и* $u(x,y;f)$ *- решение задачи* (9)-(10). *Тогда имеет место двусторонняя оценка*

$$\inf_{\xi^{(k)},\varphi_N}\sup_{f\in W_q^r}\left\|u(x,y;f)-\varphi_N\left(f\left(\xi^{(1)}\right),...,f\left(\xi^{(N)}\right),x,y\right)\right\|_{L_x^\nu[0,\pi]}\underset{r,q,\nu}{\asymp}\frac{1}{N^{r-\left(\frac{1}{q}\,-\,\frac{1}{\nu}\right)}}$$

При этом оптимальный порядок погрешности реализуется при восстановлении оператором $\left(T_N^{(4)}f\right)(x,y)$ *из теоремы 2.3.*

2.3. Дискретизация решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Приведем постановку общей задачи применительно к данной конкретизации. Пусть $u(\alpha,\theta)\equiv u(\alpha,\theta;f)$ есть решение уравнения Лапласа в полярных координатах (см. [17, стр. 236])

$$\frac{\partial^2u}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0, \tag{11}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(\alpha,\theta)\,|_{\alpha=R}=f(\theta), \tag{12}$$

где f некоторая 2π - периодическая функция, обеспечивающая корректность задачи (11)-(12), более того, принадлежность решения $u(\alpha,\theta;f)$ заданному нормированному пространству Y.

Справедлива

Теорема 2.5 (М.Берикханова, К.Е.Шерниязов, Н.Темиргалиев). *Пусть даны числа* $2\le q\le\nu\le\infty$.

a) Пусть r *- целое положительное число. Тогда имеет место двусторонняя оценка* $(N=1,2,...)$

$$\delta_N\left(0;\Delta u=0,u(R,\theta)=f(\theta)\in W_q^r(0,2\pi);L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\nu[0,2\pi]}\underset{s,r}{\asymp}N^{-\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)}.$$

b) Пусть $rq>1$ и $1\le æ\le\infty$ *Тогда имеет место двусторонняя оценка* $(N=1,2,...)$

$$\delta_N\left(0;\Delta u=0,u(R,\theta)=f(\theta)\in B_{q,æ}^r(0,2\pi);L^{(N)}\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\nu[0,2\pi]}\underset{s,r}{\asymp}N^{-\left(r-\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}\right)\right)}.$$

При этом в каждом из случаев a) и b) оценку сверху реализует оператор (N=2^n, n=1,2,. . .)

$$\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);\alpha,\theta)=V_{2^n}(\alpha,\theta;f)=\sum_{k=0}^{n}Q_k(\alpha,\theta;f),$$

где $V_{2^k}(\alpha,\theta;f)$ *- средние Валле-Пуссена функции* $u(\alpha,\theta;f)$ *порядка* 2^k *по переменной* θ *, а* $Q_0=V_{2^0}$, $Q_k=V_{2^k}-V_{2^{k-1}}$ *при всех* $k\geq 1$ *[18, стр. 295-300].*

2.4. Информативная мощность линейных функционалов – значений функции в точках при дискретизации решений задачи Коши для уравнения Лапласа в условиях критерия К. И. Бабенко.

Как известно, задача Коши для уравнения Лапласа в своей общей постановке относится к некорректным (см.[19, стр.333-334]).

К.И.Бабенко получил необходимые и достаточные условия существования и единственности 1-периодического по x решения задачи Коши для уравнения Лапласа

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,(u=u(x,y),0\leq x\leq 1,\ 0\leq y<d)\,,u\,(x,0)=f(x),u_y\,(x,0)=g(x), \tag{13}$$

заключающееся в выполнении неравенства

$$\sum_{m\in Z}*\left|\hat f(m)+\frac{\hat g(m)}{|m|}\right|^2\exp\{2\,|m|\,d\}<\infty.$$

Рассмотрим задачу восстановления решений уравнения (13) по числовой информации, полученной от заданных 1-периодических функций f и g. В соответствии с критерием Бабенко определим классы начальных данных задачи (13):

Пусть $\{\tau_m\}_{m\in Z}$ и $\{t_m\}_{m\in Z}$ – симметричные, действительнозначные последовательности такие, что для всех $0\leq n\leq m, 0<\tau_n\leq\tau_m, 0<t_n\leq t_m$, $\sum\limits_{m\in Z}\tau_m^{-2}<\infty$ и $\sum\limits_{m\in Z}t_m^{-2}<\infty$.

Положим $(\bar m=\max\{|m|\,,1\})$

$$F\left(d,\{\tau_m\}_{m\in Z}\right)=\left\{f:\sum_{m\in Z}\left|\hat f(m)\right|^2e^{4\pi|m|d}\tau_m^2\leq 1\right\}$$

и

$$G\left(d,\{t_m\}_{m\in Z}\right)=\left\{g:\sum_{m\in Z}\left(\frac{|\hat g(m)|}{2\pi\bar m}\right)^2e^{4\pi|m|d}t_m^2\leq 1\right\}.$$

В условиях принятых определений и обозначений имеем (см. М.Берикханова [16]):

Пусть числовая информация в объеме $N\,(N=1,2,...)$ о каждой из функций f и g берется из соответствующих классов $f\in F\left(d,\{\tau_m\}_{m\in Z}\right)$ и $g\in G\left(d,\{|m|\,\tau_m\}_{m\in Z}\right)$. Тогда

$$\tau^{-1}_{\left[\frac{N}{2}\right]}\underset{d}{<<}\inf_{\left(\{\xi_k\}_{k=1}^N,\{\eta_k\}_{k=1}^N\in[0,1];\varphi_{2N}\right)}\ \sup_{\substack{f\in F\left(d,\{\tau_m\}_{m\in Z}\right)\\ g\in G\left(d,\{|m|\,\tau_m\}_{m\in Z}\right)}}\|u(x,y;f,g)-$$

$$-\varphi_{2N}\left(f(\xi_1),...,f(\xi_N),g(\eta_1),...,g(\eta_N);x,y\right)\|_{L^2(0,1)\times L^\infty(0,d)}\underset{d}{<<}\sqrt{\sum_{m\geq\left[\frac{N}{2}\right]}\tau_m^{-2}}.$$

Пусть теперь функции f и g берутся из соответствующих классов $F\left(d,\{\tau_m\}_{m\in Z}\right)$ и $G\left(d,\{|m|\,\tau_m\}_{m\in Z}\right)$ в произвольном объеме $N=N_1+N_2$, $N_2=\left[\frac{c_1}{c_2}N_1\right]$ ($N_1=1,2,...$; c_1 и c_2 - любые положительные числа). Тогда

$$\inf_{\left(\xi_1,...\xi_{N_1},\eta_1,...,\eta_{N_2}\in[0,1];\varphi_N\right)}\ \sup_{\substack{f\in F\left(d,\left\{e^{c_1|m|}\right\}_{m\in Z}\right)\\ g\in G\left(d,\left\{|m|\,e^{c_2|m|}\right\}_{m\in Z}\right)}}\|u(x,y;f,g)-$$

$$-\varphi_N\left(f(\xi_1),...,f(\xi_{N_1}),g(\eta_1),...,g(\eta_{N_2});x,y)\right\|_{L^2(0,1)\times L^\infty(0,d)} \overset{d}{\asymp} e^{-\frac{N}{2}\left(\frac{c_1c_2}{c_1+c_2}\right)},$$

где оптимальный оператор восстановления есть

$$\frac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1} f\left(\frac{n}{N_1}\right)\sum_{|k|\le\left[\frac{N_1}{2}\right],k\in Z}\frac{e^{2\pi ky}+e^{-2\pi ky}}{2}e^{e^{2\pi ik\left(x-\frac{n}{N_1}\right)}}+$$

$$+\frac{1}{N_2}\sum_{n=1}^{N_2} g\left(\frac{n}{N_2}\right)\sum_{|k|\le\left[\frac{N_2}{2}\right],k\in Z}\frac{e^{2\pi ky}+e^{-2\pi ky}}{2}e^{e^{2\pi ik\left(x-\frac{n}{N2}\right)}}.$$

§3. Дискретизация решений уравнения Пуассона

В этом параграфе результат из знаменитой монографии Н.М.Коробова "Теоретико-числовые методы в приближенном анализе", опубликованной в 1963 году в серии "Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики" улучшается "в квадрат раз" и на языке Компьютерного (вычислительного) поперечника показано, что дальше улучшить полученное нельзя (см. [8]).

Именно, в [8, с.187-190] была рассмотрена задача дискретизации решений $u\,(x;f)$ уравнения Пуассона

$$\Delta u=\Delta u\,(x_1,...,x_s)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial\, x_1^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial\, x_s^2}=f \tag{14}$$

по значениям в точках ее правой части. В предположении, что функция $f\,(x) = f\,(x_1,...,x_s)$ нечетна по каждой из s переменных и принадлежит классу Коробова $E_s^r\,(r>1, s=1,2,...)$, в [8] установлена следующая оценка сверху погрешности дискретизации решения

$$u\,(x,f)=\sum_{k=1}^{N} f\left(a\frac{k}{n}\right)\left(-\frac{1}{4\pi^2 N}\sum_{\overline{\overline{m}}\le\sqrt{N}\ln^{-\beta/2}N} e^{2\,\pi\, i\left(k\,,x-a\frac{k}{n}\right)}(m,m)^{-1}\right)+O\left(N^{\left(-\frac{r-1}{2}-\frac{1}{s}\right)}\ln^{r\beta/2+s}N\right), \tag{15}$$

где $a=(a_1,...,a_s)\in Z^s$ - оптимальные коэффициенты по модулю N и индекса β, т.е. такие взаимно простые с N целые числа $a_1=a_1\,(N)\,,...,a_s=a_s\,(N)$, что для некоторых чисел β и $c=c\,(s)>0$ выполнены неравенства

$$\sum_{m_1,...,m_s=-(N-1)}^{N-1}{}^{*}\frac{\chi_{(N)}\,(a_1m_1+...+a_sm_s)}{\overline{\overline{m}}}\le c\frac{\ln^\beta N}{N}, \tag{16}$$

в которых $\chi_{(N)}$ - характеристическая функция решетки $(N)=ZN$.

Для того чтобы исследовать на неулучшаемость этот важный в вычислительной математике и в теории приближений результат, привлечем общую постановку задачи восстановления из [1]-[5].

В связи с задачей дискретизации решений уравнений в частных производных, отметим, что одним из наиболее эффективных методов численного решения таких уравнений является метод конечных разностей и его модификации, простейший вариант которого заключается в имитации частных производных соответствующими конечными разностями с последующим переходом к системе линейных уравнений на полученной сетке.

Однако вычисленными в отдельных точках ξ_k значениями определяющей решение уравнения непрерывной функции $f(x)$ можно распорядиться по-иному, восстанавливая решение $u\,(x;f)$ посредством вычислительного агрегата, наиболее приемлемый для достижения поставленной цели вид которого есть конечная свертка (к чему также относится (15)))

$$\sum_{k=1}^{N} f\,(\xi_k)\,K_N\,(x-\xi_k)$$

где K_N - стандартная функция (ядро).

Именно такой вид в изучаемом здесь случае имеют операторы дискретизации, обеспечивающие оптимальный порядок убывания в степенной шкале величины Компьютерного (вычислительного) поперечника.

Заметим также, что приближения типа φ_N снимают возникающую в разностном методе задачу продолжения решения на остальные точки области по ее значениям в узлах разностной сетки.

Итак, рассмотрим задачу дискретизации решений уравнения Пуассона по значениям в точках правой части f . Данная задача для классов Соболева W_2^r и классов Никольского-Бесова $B_{q,\theta}^r$ рассмотрена в [20]- [21].

Здесь в качестве F возьмем класс Коробова E_s^r . Нетрудно убедиться в том, что если $\hat{f}(0) \neq 0$, то при любом краевом условии существует непрерывная на $[0,1]^s$ функция $w(x)$, зависящая от краевого условия, при этом решение уравнения есть

$$u_w(x,f) = w(x) \cdot \hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s} {}^{*} \frac{\hat{f}(m)}{(m\,,m\,)} e^{2\pi\, i\,(m\,,x)}. \qquad (17)$$

Если же $f(x)$ нечетна по каждой из переменных, то функция

$$u(x,f) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in Z^s} {}^{*} \frac{\hat{f}(m\,)}{(m\,,m\,)} e^{2\,\pi\, i\,(m\,,x)}$$

является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона, удовлетворяющего на $[0,1]^s$ нулевым граничным условиям (см. [8, с. 187]).

Обратно, как легко проверить, всякая функция вида (17) удовлетворяет уравнению (14) на $[0,1]^s$.

Теорема 3.1 (Е.А. Баилов, Н.Темиргалиев [22]). *Пусть даны числа* $s(s = 2,3,...)$, $r > 1$ *и* $2 \leq q \leq \infty$. *Тогда при восстановлении по значениям в точках* P_N *справедливы соотношения:*

a) При $\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s}\right) > 0$

$$\frac{1}{N^{r-\left(1-\frac{1}{q}-\frac{2}{s}\right)}} \overset{s\geq 3}{\underset{s,r}{<<}} \delta_N \left(0; \Delta u = f\,, f \in E_s^r, P_N \times \{\varphi_N\}\right)_{L^q(0,1)^s} \overset{s\geq 2}{\underset{s,r}{<<}} \frac{(\ln\ N)^{\left(r+\frac{2}{s}\right)(s-1)}}{N^{r-\left(1-\frac{1}{q}-\frac{2}{s}\right)}}$$

b) При $\left(1 - \frac{1}{q} - \frac{2}{s}\right) \leq 0$ *или же* $q = 2$, $s(s = 2,3,4)$

$$\frac{1}{N^r} \overset{s\geq 3}{\underset{s,r}{<<}} \delta_N \left(0; \Delta u = f\,, f \in\ E_s^r, P^{(N)} \times \{\varphi_N\}\right)_{L^q(0,1)^s} \overset{s\geq 2}{\underset{s,r}{<<}} \frac{(\ln\ N)^{r(\beta+s)+s}}{N^r},$$

где β *из* (16).

Для получения оценки снизу применяется следующее интегральное представление решения уравнения Пуассона (см., например, [23, с. 241]):

$$\bar{u}(x,f) = \int_{[0,1]^s} f(t_1,...,t_s) \left\{ \left[\left(\sum_{j\,=1}^{s} (x_j - t_j)^2 \right)^{\frac{s\,-2}{2}} \right]^{-1} \right\} dt_1...dt_s.$$

Таким образом, оценка $\frac{r}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s}\right)$ в (15) улучшена почти в квадрат раз и доведена до окончательной $r - \left(1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{s}\right)$ в степенной шкале:

С.С. Кудайбергеновым и С.Г. Сабитовой [24] рассматривалась задача дискретизации решения (16) уравнения Пуассона по значениям в точках правой части f , когда в качестве F взят класс Коробова E_s^r , $Y = L^q\,(0,1)^s$, $2 \leq q < \infty$, используя в качестве сетки $\{\xi_j\}_{j=1}^N$ сетку Смоляка [25] и оператор дискретизации

$$(Jf)\,(x) = w\,(x) \sum_{(\nu_1,...,\nu_s) \in \Omega_{(\nu(0),q)} \subset Z^s_{\nu(0)}} \frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{s}(k_j-1)sgn(\nu_j-\nu_j(0))} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in V_b}*\frac{1}{(m,m)}e^{2\pi i(m,x)}\sum_{(\nu_1,...,\nu_s)\in\Omega_{(\nu(m),q)}\in Z^s_{\nu(m)}}\frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}...$$

$$...\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}(k_j-1)sgn(\nu_j-\nu_j(m))}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)e^{-2\pi i\left(m,\frac{k}{2^{\nu}}\right)},$$

где $b>0$ и

$$V_b=\left\{(m_1,...,m_s):(m_1,...,m_s)\in Z^s,1\le m_1\cdot...\cdot m_s<2^b\right\}.$$

В этих условиях справедлива

Теорема 3.2 (С.С. Кудайбергенов, С.Г. Сабитова [24]). Пусть даны числа $s(s=2,3,...)$, $r>1$ и $2\le p\le\infty$. Тогда

$$\sup_{f\in E_s^r}\|u(x;f)-(Jf)(x)\|_{L^q(0,1)^s}<<\begin{cases}\frac{(lnN)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^r}, & при\ 1-\frac{1}{q}-\frac{2}{s}<0\\ \frac{(lnN)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^{r-\left(1-\frac{1}{q}-\frac{2}{s}\right)}}, & при\ 1-\frac{1}{q}-\frac{2}{s}>0\\ \frac{(lnN)^{r(s-1)+2s-1-\frac{s}{q}}}{N^r}, & при\ 1-\frac{1}{q}-\frac{2}{s}=0\end{cases}$$

Таким образом, в случае $1-\frac{1}{p}-\frac{2}{s}>0$ полученный этот результат совпадает с результатом теоремы 3.1. В остальных двух случаях полученная оценка имеет явный вид, тогда как число β, содержащееся в формулировке теоремы 3.1, требует дополнительных вычислений.

§4. **Дискретизация решений уравнения теплопроводности**

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}\,(t\ge 0,x\in R^s)$$

с начальным условием

$$u(x,0)=f(x)\,(x\in R^s)$$

4.1 Результаты К.Шерниязова [26]. Для решений уравнения теплопроводности Кайратом Шерниязовым вычислена информативная мощность всех функционалов, являющихся значениями начального условия в точках, точная в степенной шкале. Отличительной особенностью этих результатов является обстоятельство, что восстановление производится по модифицированным сеткам Коробова, вследствие чего оператор восстановления Шерниязова (см. ниже (21)) есть конечная линейная комбинация средних арифметических сумм, что упрощает вычисления в сравнении, например, с формулами восстановления по сетке Смоляка.

Теорема 4.1 (К.Шерниязов[26]). *Пусть даны целое положительное число s, число $1\le q\le\infty$. Тогда для любого целого положительного числа N имеют место соотношения:*

1. *при* $r>1$ в случае классов Коробова E_s^r

$$\frac{1}{N^{r-1+\frac{1}{q}}}\overset{1\le q\le\infty}{\underset{s,r}{<<}}\delta_N\left(0;\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u,u(0,x)=f(x)\in E_s^r;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\overset{2\le q\le\infty}{\underset{s,r,q}{<<}}\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1+\frac{1}{q}}}\qquad(18)$$

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u,u(0,x)=f(x)\in E_s^r;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\underset{s,r}{\asymp}\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-\frac{1}{2}}}\ ,\qquad(19)$$

2) при $r>1/2$ для классов Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^r(0,1)^s$

$$\frac{1}{N^{r-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}}\overset{1\le q\le\infty}{\underset{s,r}{<<}}\delta_N\left(0;\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u,u(0,x)=f(x)\in SW_2^r(0,1)^s;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\overset{q=\infty}{\underset{r,s}{<<}}\frac{\ln^{\left(r+\frac{1}{2}\right)(s-1)}N}{N^{r-\frac{1}{2}}},$$

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u, u(0,x)=f(x)\in SW_2^r(0,1)^s;\, P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \underset{s,r}{\asymp} \frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-\frac{1}{2}}}, \tag{20}$$

3) при $2r>s$, $1\le\theta\le\infty$ для класса Бесова $B^r_{2,\theta}(0,1)^s$

$$\frac{1}{N^{\frac{r}{s}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}} \overset{1\le q\le\infty}{\underset{r,s,q,\theta}{<<}} \delta_N\left(0;\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u, u(0,x)=f(x)\in B^r_{2,\theta}(0,1)^s;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \overset{q=\infty}{\underset{r,s}{<<}} \frac{\ln^{\left(\frac{r}{s}+\frac{1}{2}\right)(s-1)}N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}.$$

Верхние оценки в этих соотношениях достигаются при восстановлении оператором

$$\left(T_N^{(0)}f\right)(t,x)=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\,\tau_j>0,\\ \tau_1+\ldots+\tau_s\le n}}\frac{1}{\det A_{n,t}}\sum_{\substack{k\in Z^s:\,-2^{\tau_1}p_{\tau_1+\ldots+\tau_s}\le k_1\le 2^{\tau_1}p_{\tau_1+\ldots+\tau_s}\\ -2^{\tau_j}\le k_j\le 2^{\tau_j}\,(j=2,\ldots,s)}} f\left(\left\{\left(A^{-1}_{n,\tau}\right)'k\right\}\right)\times \tag{21}$$

$$\times\sum_{\substack{m\in Z^s:\,2^{\tau_j-1}\le\max\{1,|m_j|\}<2^{\tau_j}\\ (j=2,\ldots,s)}} e^{2\pi i\left(m,x-\left\{\left(A^{-1}_{n,\tau}\right)'k\right\}-4\pi^2(m,m)t\right)},$$

где целое положительное число n определено по N: $n=n(N)=\max\left\{l\in Z^+: card\left[\bigcup_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<l}}\left\{k\left(A^{-1}_{l,\tau}\right):k\in K(l,\tau)\right\}\right]\le n\right\}$. *Далее, для всех* $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_s)\in Z^s$ *таких, что* $\tau_j>0\ (j=1,2,\ldots,n)$, $\tau_1+\ldots+\tau_s\le n$ *положено*

$$A_{n,\tau}=\begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1}p_{\tau_1+\ldots\tau_s} & -2^{\tau_1+1}a_2^{(\tau_1+\ldots\tau_s)} & \ldots & \ldots-2^{\tau_1+1}a_s^{(\tau_1+\ldots\tau_s)}\\ 0 & 2^{\tau_2+1} & 0 & \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \\ 0 & 0 & 2^{\tau_s+1} & \end{pmatrix},$$

где $p_1,\ldots,p_n$ *- простые числа такие, что*

$$(n-k+1)^{-2}2^{n-k+2s}\le p_k<(n-k+1)^{-2}2^{n-k+2s+1}\ (k=1,\ldots,n),$$

а целые $a_1=1,a_2^{(k)},a_3^{(k)},\ldots,a_s^{(k)}$ *- есть оптимальные коэффициенты по модулю* $p_k\,(k=1,\ldots,n)$ *и индекса* $\beta(s)>0$.

Сравним оценки (18) и (19) К. Шерниязова с соответствующими оценками погрешности восстановления решений уравнения теплопроводности с начальным распределением температуры из классов Коробова E^s_r, представленных в монографии [27] Хуа Ло-Кена и Вань Юаня ($\varepsilon>0$ –любое)

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u, u(0,x)=f(x)\in E^r_s;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\infty(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \underset{s,r,\varepsilon}{<<} N^{-\left((r-1)\frac{r}{2r-1}-\varepsilon\right)}(\ln N)^{(s-1)\left(\frac{r(r-1)}{2r-1}-\varepsilon\right)}, \tag{22}$$

и

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u, u(0,x)=f(x)\in E^r_s;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \underset{s,r,\varepsilon}{<<} N^{-\left(\left(r-\frac{1}{2}\right)\frac{r}{2(2r)-1}-\varepsilon\right)}(\ln N)^{(s-1)\left(\frac{r(2r-1)}{4r-1}-\varepsilon\right)}. \tag{23}$$

Так как при всех $1<r<\infty$ выполнено неравенство $\frac{1}{2}<\frac{r}{2r-1}<1$ и $\lim\limits_{r\to1+0}\frac{r}{2r-1}=1-0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{r}{2r-1}=\frac{1}{2}+0$ то в степенной шкале оценка (22) всегда хуже оценки (18), при возрастании r неограниченно приближаясь к оценке "хуже в квадрат раз".

То же самое имеет место для оценок (23) и (19), с той лишь разницей, что при всех $1<r<\infty:\frac{1}{2}<\frac{2r}{2(2r)-1}<\frac{2}{3}$.

Замечание 4.1. Из сравнений результатов К. Шерниязова с предшествовавшими результатами B.C. Рябенького, А.С. Смоляка, Хуа Ло-Кена и Вань Юаня можно сделать качественный вывод о том, что в вопросах восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных равномерная распределенность сетки само по себе не является решающим фактором оптимального восстановления (по крайней мере в степенной шкале).

4.2. ***Результаты Ш.У.Ажгалиева.*** Шапеном Ажгалиевым изучена следующая конкретизация задачи дискретизации: $\Omega = [0,1]^s$, $\Omega_1 = [0,1]^s \times [0,\infty]$, $Y = L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,\infty]$ $1 \le q \le \infty$, F суть классы Никольского-Бесова $B^r_{2,\theta}(0,1)^s$ и классы Соболева с доминирующей смешанной производной $SW^r_2(0,1)^s$, а множество $D_N = L_N \times \{\varphi_N\}$.

Получены порядково точные информативные мощности всех линейных функционалов в задаче восстановления решений уравнения теплопроводности.

Теорема 4.2 (Ш.У.Ажгалиев [28]). *Пусть даны целое положительное число s, $2 \le q \le \infty$, $2 \le \theta \le \infty$ и $r > s/2$. Тогда имеет место соотношение* $(N = 1,2,...)$

$$\delta_N\left(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x,0) = f(x) \in B^r_{2,\theta}(0,1)^s; L_N \times \{\varphi_N\}\right)_{L^q(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,r,q}{\asymp} N^{-\left(\frac{r}{s} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)\right)}.$$

Теорема 4.3 (Ш.У.Ажгалиев [28]). *Пусть даны целое положительное число s и действительное число $r > s/2$. Тогда имеют место соотношения* $(N = 1,2,...)$

а)

$$\delta_N\left(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x,0) = f(x) \in SW^r_2(0,1)^s; L_N \times \{\varphi_N\}\right)_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,r,q}{\asymp} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}}, \tag{24}$$

б) $\delta_N\left(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x,0) = f(x) \in SW^r_2(0,1)^s; L_N \times \{\varphi_N\}\right)_{L^\infty(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,r,q}{\asymp} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}$.

Замечание 4.2. Верхние оценки во всех теоремах достигаются на функционалах – тригонометрических коэффициентах Фурье (для каждого класса свой спектр коэффициентов).

Замечание 4.3. Отметим, что результат (24) обобщает полученную К.Шерниязовым оценку снизу в (20) при дискретизации решений уравнения тепловодности с начальными температурами из классов $SW^r_2(0,1)^s$ в том смысле, что функционалы по значениям в конечном числе точек заменены на всевозможные линейные.

4.3. ***Результаты Е.Е.Нурмолдина.*** Ериком Нурмолдином изучен случай дискретизации решений уравнения теплопроводности с функциями распределения температур из бесконечно гладких классов $U_2(\beta,\theta,\alpha)$ при следующей конкретизации: $\Omega = [0,1]^2$, $\Omega_1 = [0,1]^2 \times [0,\infty)$, $X = C[0,1]^2$, $Y = L^p[0,1]^2 \times L^\infty[0,\infty)$ $(2 \le p \le \infty)$, $(Tf)(x,t) = u(x,t;f)$, где $u(x,t;f)$ есть решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \qquad \left(t \ge 0,\ (x_1,x_2) \in R^2\right)$$

с начальным условием $u((x_1,x_2),0;f) = f(x_1,x_2)$.

В качестве D_N возьмем множество $\Phi_N \times \{\varphi_N\}$ всех пар $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in \left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}$ таких, что $l^{(N)} = (l_1(f),...,l_N(f))$ составлен из тригонометрических коэффициентов Фурье–Лебега $l_j(f) = \hat{f}\left(m_1^{(j)}, m_2^{(j)}\right)$ функции f для некоторых $\left(m_1^{(j)}, m_2^{(j)}\right) \in Z^s$ $(j = 1,..,N)$. При этом постановка задачи следующая

$$\delta_N\left(0; \tfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x,0) = f(x) \in F; \Phi_N \times \{\varphi_N\}\right)_Y =$$

$$= \inf_{(A_N,\varphi_N)} \sup_{f \in F} \left\| u((x_1,x_2),t;f) - \varphi_N\left(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), ..., \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}); (x_1,x_2),\ t\right)\right\|_Y,$$

где inf берется по всем парам (A_N,φ_N), состоящем из упорядоченного множества $A_N = \{(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}),...,(m_1^{(N)}, m_2^{(N)})\} \subset Z^2$ и функции $\varphi_N(z_1,...,z_N;(x_1,x_2),t)$.

Класс F есть класс $U_2(\beta,\theta,\alpha)$ при $\beta = (0,0)$, $\theta = (\theta_1,\theta_2)$, $\alpha = (1,1)$:

$$U_2((0,0),\ (\theta_1,\theta_2),\ (1,1)) = \left\{f(x_1,x_2) \in [0,1]^2 : \left|\hat{f}(m_1,m_2)\right| \le \theta_1^{|m_1|} \cdot \theta_2^{|m_2|}\right\}.$$

Теорема 4.4 (Е.Е.Нурмолдин [29]). *Пусть* $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, $2 < p < \infty$. *Тогда выполнены соотношения*

$$\delta_N\left(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x,0) = f(x) \in U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1)); \Phi_N \times \{\varphi_N\}\right)_{L^\infty[0,\infty)\times C(0,1)^2} \underset{\theta_1,\theta_2}{\asymp} N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2}N\log_{\theta_1}\theta_2}},$$

$$\delta_N\left(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x,0) = f(x) \in U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1)); \Phi_N \times \{\varphi_N\}\right)_{L^2[0,\infty)\times C(0,1)^2} \underset{\theta_1,\theta_2}{\asymp} N^{\frac{1}{4}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2}N\log_{\theta_1}\theta_2}},$$

$$N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2}N\log_{\theta_1}\theta_2}} \underset{\theta_1,\theta_2}{<<} \delta_N\left(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, u(x,0) = f(x) \in U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1)); \Phi_N \times \{\varphi_N\}\right)_{L^p[0,\infty)\times C(0,1)^2} \underset{\theta_1,\theta_2}{<<}$$

$$\underset{\theta_1,\theta_2}{<<} N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2}N\log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

4.4. ***Результаты Г.Е.Таугынбаевой.*** Галия Таугынбаева провела полный К(В)П-анализ уравнения теплопроводности при восстановлении решения по информации, полученный от тригонометрических коэффициентов Фурье начального температурного распределения в рассматриваемом теле.

Теорема 4.5 (Г.Е.Таугынбаева [30]). *Пусть даны числа* $s\,(s = 1, 2, ...)$ *и* $r > 1$. *Тогда при* $R(N) = \frac{N}{(\ln N)^{s-1}}$ *выполнены соотношения*

К(В)П-1:

$$\delta_N(0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \equiv$$

$$\equiv \delta_N(0; \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, u\,(x,0) = f(x) \in E_s^r; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \equiv$$

$$\equiv \inf_{m^{(1)},...,m^{(N)},\varphi_N} \sup_{f\in E_s^r} \left\| u(x,t;f) - \varphi_N\left(\hat{f}(m^{(1)},...,\hat{f}(m^{(N)};x,t\right)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in E_s^r} \left\| u(x,t;f) - \sum_{m\in\Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \asymp \frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-\frac{1}{2}}},$$

К(В)П-2: *Для вычислительного агрегата* $\bar{\varphi}_N \equiv \sum\limits_{m\in\Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)}$ *величина* $\bar{\varepsilon}_N = \frac{ln^{r(s-1)}N}{N^r}\ (N = 2, 3, ...)$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N\left(0; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \asymp \delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N; \Phi_N \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \equiv$$

$$\equiv \inf_{m^{(1)},...,m^{(N)};\varphi_N} \sup_{\substack{f\,\in\, E_s^r \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1 \\ (\tau = 1, ..., N)}} \left\| u(x,t;f) - \varphi_N\left(\hat{f}(m^{(1)}) + \gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N, ..., \hat{f}(m^{(N)}) + \gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N\right)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\substack{f\,\in\, E_s^r \\ \left|\hat{f}(m) - z_m(f)\right| \le \bar{\varepsilon}_N \\ m\,\in\,\Gamma_{R(N)}}} \left\| u(x,t;f) - \sum_{m\in\Gamma_{R(N)}} z_m(f) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)} \asymp \frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-\frac{1}{2}}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N = \eta_N\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^r}; \sum\limits_{m\in\Gamma_{R(N)}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s}}{\delta_N(0; \mathrm{L}_N(E_s^r(0,1)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s}} = +\infty.$$

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат* $(\varphi_N(0, ..., 0; x, t) \equiv 0$ *на* $[0,1]^s \times [0,\infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),....,\hat{f}(m^{(N)});x,t),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $\bar{\varphi}_N$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N=\eta_N\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^r};\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),....,\hat{f}(m^{(N)});x,t)\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s}}{\delta_N(0;\Phi_N\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s}}=+\infty.$$

Теорема 4.6 (Г.Е.Таугынбаева [30]). *Пусть даны числа* $s(s=1,2,...)$ *и* $r>1$. *Тогда* $R(N)=\frac{N}{(\ln N)^{s-1}}$ *выполнены соотношения*

К(В)П-1:

$$\delta_N(0;\Phi_N\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\equiv$$

$$\equiv\delta_N(0;\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2},u\left(x,0\right)=f(x)\in SW_2^r(0,1)^s;\Phi_N\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\equiv$$

$$\equiv\inf_{m^{(1)},...,m^{(N)};\ \varphi_N}\sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s}\left\|u(x,t;f)-\varphi_N\left(\hat{f}(m^{(1)}),...,\hat{f}(m^{(N)});x,t\right)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{f\in SW_2^r(0,1)^s}\left\|u(x,t;f)-\sum_{m\in\Gamma_{R(N)}}\hat{f}(m)e^{-4\pi^2(m,m)t}e^{2\pi i(m,x)}\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\asymp\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^r},$$

К(В)П-2: *Для функций* $\bar{\varphi}_N=\sum\limits_{m\in\Gamma_{R(N)}}\hat{f}(m)e^{-4\pi^2(m,m)t}e^{2\pi i(m,x)}$ *величина* $\bar{\varepsilon}_N=\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r+\frac{1}{2}}}$ $(N=2,3,...)$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N\left(0;\Phi_N\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\asymp$$

$$\asymp\delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N;\Phi_N\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\equiv$$

$$\equiv\inf_{m^{(1)},...,m^{(N)};\varphi_N}\sup_{\substack{f\in SW_2^r(0,1)^s\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1\\ (\tau=1,...,N)}}\left\|u(x,t;f)-\varphi_N\left(\hat{f}(m^{(1)})+\gamma_N^{(1)}\bar{\varepsilon}_N,...,\hat{f}(m^{(N)})+\gamma_N^{(N)}\bar{\varepsilon}_N;x,t\right)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{\substack{f\in SW_2^r(0,1)^s\\ \left|\hat{f}(m)-z_m(f)\right|\le\bar{\varepsilon}_N\\ m\in\Gamma_{R(N)}}}\left\|u(x,t;f)-\sum_{m\in\Gamma_{R(N)}}z_m(f)e^{-4\pi^2(m,m)t}e^{2\pi i(m,x)}\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\asymp\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^r},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N=\eta_N\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r+1/2}};\sum\limits_{m\in\Gamma_{R(N)}}\hat{f}(m)e^{-4\pi^2(m,m)t}e^{2\pi i(m,x)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s}}{\delta_N(0;\Phi_N\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty(0,1)^s}}=+\infty.$$

К(В)П-3:*Всякий вычислительный агрегат* $(\varphi_N(0,....,0;x,t)\equiv 0$ *на* $[0,1]^s\times[0,\infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),....,\hat{f}(m^{(N)});x,t),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку)* *предельной погрешности* $\bar{\varphi}_N$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N=\eta_N\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r+\frac{1}{2}}};\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),....,\hat{f}(m^{(N)});x,t)\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}}{\delta_N\left(0;\Phi_N\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}}=+\infty.$$

§5. Дискретизация решений волнового уравнения

Рассматривается задача Коши для волнового уравнения (s=1,2,...)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}\left(u=u\left(x,t\right),0\le t<\infty,x\in R^s\right),\tag{25}$$

$$u(x,0)=f_1(x)\in F^{(1)},\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right)=f_2\left(x\right)\in F^{(2)}\left(x\in R^s\right).\tag{26}$$

В изучаемом здесь случае задача (25)-(26) имеет явное решение в виде суммы абсолютно сходящегося кратного функционального ряда, который полностью определяется наборами $\left\{\hat{f}_1(m)\right\}_{m\in Z^s}$ и $\left\{\hat{f}_2(m)\right\}_{m\in Z^s}$ коэффициентов Фурье. Поэтому возникает проблема приближения решения – объекта бесконечного – по конечной числовой информации заданного объема N, полученной от функций f_1 и f_2, математическая формулировка которой содержится в следующей общей задаче восстановления.

Через $u\left(x,t;f,0\right)$ обозначим решение задачи (25)-(26) в случае

$$f(x)\equiv f_1(x)\in F^{(1)}\left(0,1\right)^s,f_2(x)\equiv 0,\tag{27}$$

через $u\left(x,t;0,f\right)$ - в случае

$$f_1(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv f_2(x)\in F^{(2)}\left(0,1\right)^s\tag{28}$$

и через $u\left(x,t;f_1,f_2\right)$ обозначим решение задачи (25)-(26) в случае

$$f_1(x)\in F^{(1)}\left(0,1\right)^s,\ f_2(x)\in F^{(2)}\left(0,1\right)^s.\tag{29}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5.1 (информативная мощность всех возможных линейных функционалов; Ш.К.Абикенова, А.Б.Утесов, Н.Темиргалиев [31]). *Пусть* $\{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}\}$ *и* ω_ν *- система и отдельная функция типа модуля гладкости* $r_1,...,r_s$*-го и* ν*-го порядков соответственно, удовлетворяющие условиям*

$$\sum_{m\in Z^s}\frac{\left(\bar{m}_1^2+...+\bar{m}_s^2\right)^2}{\omega_{r_1}^{-2}(1/\bar{m}_1)+...+\omega_{r_s}^{-2}(1/\bar{m}_s)}<\infty,\ \sum_{m\in Z^s}\frac{\left(\bar{m}_1^2+...+\bar{m}_s^2\right)^2}{\omega_\nu^{-2}(1/\bar{m}_1)+...+\omega_\nu^{-2}(1/\bar{m}_s)}<\infty$$

и такие, что

$$\omega_{k_j}(\eta\cdot\xi)\le C\left(\omega_{k_j}\right)\cdot\omega_{k_j}(\eta)\cdot\omega_{k_j}(\xi)\ \ (k_j=r_j,j=1,...,s\ \ \textit{либо}\ k_j=\nu,j=1,...,s\,)$$

при некотором положительном $C\left(\omega_{k_j}\right)$ *и для всех* $0<\xi<\eta\le 1$.

Пусть также $\tau_1(\delta)$ *и* $\tau_2(\delta)$ *- средние функции систем модулей гладкости* $\{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}\}$ *и* $\{\omega_\nu,...,\omega_\nu\}$ *соответственно.*

Тогда в случае задачи (25)-(26) в условиях (29) при $F^{(1)}=W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s,F^{(2)}=W_2^{\omega_\nu,...,\omega_\nu}(0,1)^s$ *имеют место соотношения (N=2,3,...)*

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N\\ N_1\ge 2,N_2\ge 2}}\ \inf_{\left(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N\right)\in \mathrm{L}_N(W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}},W_2^{\omega_\nu,...,\omega_\nu})\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}}\ \sup_{\substack{f_1\in W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s\\ f_2\in W_2^{\omega_\nu,...,\omega_\nu}(0,1)^s}}$$

$$\left\|u(x,t;f_1,f_2)-\varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1),....,l_{N_1}^{(N_1)}(f_1);l_{N_2}^{(1)}(f_2),....,l_{N_2}^{(N_2)}(f_2);x,t)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)} \underset{s,\omega_{r_1},...,\omega_{r_s},\omega_\nu}{\asymp}$$

$$\underset{s,\omega_{r_1},...,\omega_{r_s},\omega_\nu}{\asymp} \min_{\substack{N_1+N_2=N\\ N_1\geq 2, N_2\geq 2}} \left(\tau_1\left(\frac{1}{N_1}\right)+\tau_2\left(\frac{1}{N_2}\right)N_2^{-\frac{1}{s}}\right),$$

причем оценка сверху

a) в случае задачи (25)- (26) *в условьях* (27) *достигается на следующем агрегате* ($N = 2, 3, \ldots$)

$$\bar{\varphi}_N^{(1)}\left(l_1(f),...,l_N(f);x,t\right)=$$

$$=\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\\ |k_j|\leq n_j\,(j=1,...,s)}} \hat{f}\left(k_1,...,k_s\right)\cos\left(2\pi\sqrt{k_1^2+...+k_s^2}t\right)e^{2\pi i(k_1x_1+...+k_sx_s)},$$

$$n_j=\left[\left(\omega_{r_j}^*\left(\tau_1\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right)^{-1}\right]+1,\ j=1,2,...,s.$$

b) в случае задачи (25)-(26) *в условьях* (28) *на агрегате вида*

$$\bar{\varphi}_N^{(2)}\left(l_1(f),...,l_N(f);x,t\right)=$$

$$=\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s:\\ |k_j|\leq n_j\,(j=1,...,s)}} \hat{f}\left(k_1,...,k_s\right)\frac{\sin\left(2\pi\sqrt{k_1^2+...+k_s^2}t\right)}{\sqrt{k_1^2+...+k_s^2}}e^{2\pi i(k_1x_1+...+k_sx_s)},$$

$$n_j=\left[\left(\omega_{\nu}^*\left(\tau_2\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right)^{-1}\right]+1,\ j=1,2,...,s.$$

Следствие 5.1. *Пусть даны числа* $s\,(s=1,2,...)\,, r_j\geq 1, j=1,...,s$ *и* ν *такие, что* $\frac{5}{r_j}+\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{s}\frac{1}{r_j}<2,\ j=1,...,s,\ \frac{3}{r_j}+\frac{3}{r_l}+\sum\limits_{k=1,k\neq j,k\neq l}^{s}\frac{1}{r_j}<2,\ j,l=1,...,s,\ j\neq l,\ \nu>1+\frac{s}{2}$ *. Тогда в условиях теоремы 5.1 при* $\omega_{r_1}(\delta)=\delta^{r_1},...,\omega_{r_s}(\delta)=\delta^{r_s}$, $\omega_\nu(\delta)=\delta^\nu$ *имеет место соотношение* $N=4,5,...$

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N\\ N_1\geq 1, N_2\geq 1}} \inf_{(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)\in \mathrm{L}_N(W_2^{\delta^{r_1},...,\delta^{r_s}},W_2^{\delta^\nu,...\delta^\nu})\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}} \sup_{\substack{,f_1\in W_2^{\delta^{r_1},...,\delta^{r_s}}(0,1)^s\\ f_2\in W_2^{\delta^\nu,...\delta^\nu}(0,1)^s}}$$

$$\left\|u(x,t;f_1,f_2)-\varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1),....,l_{N_1}^{(N_1)}(f_1);l_{N_2}^{(1)}(f_2),....,l_{N_2}^{(N_2)}(f_2);x,t)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp$$

$$\underset{s,r_1,...,r_s;\nu}{\asymp} N^{-\min\left\{\left(r_1^{-1}+...+r_s^{-1}\right),(\nu+1)s^{-1}\right\}}.$$

Следствие 5.2. *Пусть даны модуль гладкости* $\omega_{r_j}(\delta)=\delta^{r_j}\ln^{k_j}\frac{2}{\delta},\ r_j\geq 1, k_j>0,\ j=1,...,s$ *и* $\omega_\nu(\delta)=\delta^\nu\ln^\lambda\frac{2}{\delta},\nu\geq 1,\lambda>0$ *. Тогда в условиях теоремы 5.1 имеют место соотношения* $N=2,3,...$

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N\\ N_1\geq 1, N_2\geq 1}} \inf_{(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)\in \mathrm{L}_N(W_2^{\delta^{r_1}\ln^{k_1}\frac{2}{\delta},...,\delta^{r_s}\ln^{k_s}\frac{2}{\delta}},W_2^{\delta^\nu\ln^\lambda\frac{2}{\delta},...,\delta^\nu\ln^\lambda\frac{2}{\delta}})\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty t)}}$$

$$\sup_{\substack{f_1\in W_2^{\delta^{r_1}\ln^{k_1}\frac{2}{\delta},\dots,\delta^{r_s}\ln^{k_s}\frac{2}{\delta}}(0,1)^s\\ f_2\in W_2^{\delta^{\nu}\ln^{\lambda}\frac{2}{\delta},\dots,\delta^{\nu}\ln^{\lambda}\frac{2}{\delta}}(0,1)^s}} \left\|u(x,t;f_1,f_2)-\varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1),....,l_{N_1}^{(N_1)}(f_1);l_{N_2}^{(1)}(f_2),....,l_{N_2}^{(N_2)}(f_2);x,t)\right\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp$$

$$\asymp\begin{cases}\dfrac{(\ln N)^{\max\left\{\left(k_1r_1^{-1}+...+k_sr_s^{-1}\right)\left(r_1^{-1}+...+r_s^{-1}\right)^{-1},\lambda\right\}}}{N^{(\nu+1)s^{-1}}}, & \text{если } \left(r_1^{-1}+...+r_s^{-1}\right)^{-1}=(\nu+1)s^{-1},\\ \dfrac{(\ln N)^{\lambda}}{N^{(\nu+1)s^{-1}}}, & \text{если } \left(r_1^{-1}+...+r_s^{-1}\right)^{-1}>(\nu+1)s^{-1},\\ \left(\dfrac{(\ln N)^{\left(k_1r_1^{-1}+...+k_sr_s^{-1}\right)}}{N}\right)^{\left(r_1^{-1}+...+r_s^{-1}\right)^{-1}}, & \text{если } \left(r_1^{-1}+...+r_s^{-1}\right)^{-1}<(\nu+1)s^{-1}.\end{cases}$$

Теорема 5.2 (Е.И.Шангиреев[32]). *Пусть даны числа* $s\,(s=1,2,...)\,,r$ *целое такое, что* $2r>s,\quad 2\le\nu<\infty,p(p=2,3,...)$ *и* $N=p^s$ *Тогда имеет место соотношение*

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u,u(0,x)=f(x)\in W_2^r\,(0,1)^s\,,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\nu(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\underset{s,r,\nu}{\asymp}N^{-\frac{r}{s}+\frac12-\frac1q},$$

Теорема 5.3 (Е.И.Шангиреев[32]). *Пусть даны числа* $s\,(s=1,2,...)\,,1<q\le 2,\ 1\le\theta\le\infty,r$ *такое, что* $qr>s$ *и пусть* $2\le\nu\le\infty$ *. Тогда имеет место соотношение*

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u,u(0,x)=f(x)\in B_{q,\theta}^r\,(0,1)^s\,,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\nu(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\underset{s,r,q}{\asymp}N^{-\frac{r}{s}+\frac12-\frac1q},$$

$(p=2^m\,(m=1,2,...)\,,N=p^s)$ *.Оценки сверху достигаются на операторе восстановления*

$$\bar\varphi_N\left(f\left(\xi_1\right),...,f\left(\xi_N\right);x,t\right)=\frac1N\sum_{\substack{n_j=0\\ j=1,...,s}}^{p-1}f\left(\xi_n\right)\sum_{-\frac p2\le k_j<\frac p2}\cos\left(2\pi\sqrt{k_1^2+...+k_s^2}t\right)e^{2\pi i(k,x-\xi_n)}$$

по равномерной сетке

$$\xi_n=\left(\frac{n_1}{p},...,\frac{n_s}{p}\right),\,n_j=0,1,...,p-1;j=1,...,s.$$

Теорема 5.4 (Е.И.Шангиреев[32]). *Пусть даны числа* $s\,(s=1,2,...)\,,1<q\le 2,\ 1\le\theta\le\infty,r$ *такое, что* $qr>s$ *. Тогда при всяком* $p=2^m(m=1,2,...),N=p^s$ *имеют место*

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u,u(0,x)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in B_{q,\theta}^r\,(0,1)^s\,;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\underset{s,r,q}{<<}$$

$$\underset{s,r,q}{<<}N^{-\frac rs}\cdot\begin{cases}N^{\frac1q-\frac1s-\frac12},\ \text{если } 1<q<\frac{2s}{2+s},\\ \sqrt[s]{\ln N},\ \text{если } q=\frac{2s}{2+s},\\ 1,\text{если } \frac{2s}{2+s}<q<2,\end{cases}$$

и

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u,u(0,x)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in B_{q,\theta}^r\,(0,1)^s\,;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\infty(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\underset{s,r,q}{<<}$$

$$\underset{s,r,q}{<<}N^{-\frac rs}\cdot\begin{cases}N^{\frac1q-\frac1s},\ \text{если} 1<q<s,\\ \sqrt[s]{\ln N},\ \text{если} q=s,\\ 1,\quad \text{если } s<q<2.\end{cases}$$

При $s=2$ *и* $2\le\nu<\infty$

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u,u(0,x)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in B_{q,\theta}^r\,(0,1)^2\,;P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\nu(0,1)^2\times L^\infty[0,+\infty)}\underset{s,r,q}{>>}$$

$$\underset{s,r,q}{>>}N^{-\frac r2}\cdot\begin{cases}N^{\frac1q-\frac1\nu-\frac12-},\text{если} 1<q<\frac{2\nu}{2+\nu},\\ 1,\quad \text{если } \frac{2\nu}{2+\nu}<q\le 2,\end{cases}$$

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u, u(0,x)=0, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in B^r_{q,\theta}\left(0,1\right)^2; P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\infty(0,1)^2\times L^\infty[0,+\infty)}\underset{r}{\asymp}$$

$$\underset{r}{\asymp}N^{-\frac{r}{2}}\cdot\begin{cases}N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}-}, \text{ если} 1<q<2,\\ \sqrt{\ln N}, \text{ если} q=2.\end{cases}$$

В частности,

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u, u(0,x)=0, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in B^r_{q,\theta}\left(0,1\right)^2; P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^2(0,1)^2\times L^\infty[0,+\infty)}\underset{r}{\asymp}N^{-\frac{r}{s}}.$$

Оценки сверху достигаются на операторе восстановления

$$\bar{\varphi}_N\left(f\left(\xi_1\right),...,f\left(\xi_N\right),x,t\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{\substack{n_j=0\\ j=1,...,s}}^{p-1}f\left(\xi_n\right)\left(t+\sum_{\substack{-\frac{p}{2}\le k_j<\frac{p}{2}\\ j=1,\ldots,s}}*\frac{\sin\left(2\pi\sqrt{k_1^2+\ldots+k_s^2}\,t\right)}{\sqrt{k_1^2+\ldots+k_s^2}}e^{2\pi i(k,x-\xi_n)}\right)$$

по равномерной сетке

$$\xi_n=\left(\frac{n_1}{p},...,\frac{n_s}{p}\right),\ n_j=0,1,...,p-1\,;\ j=1,...,s.$$

Е.И.Шангереевом **[32]** в качестве множества $\boldsymbol{F}$ рассмотрены классы Коробова $E^r_s\ (r>1)$.

Теорема 5.5 (Е.И.Шангиреев [32]). *Пусть даны целое положительное число* s *и число* $\beta>s-1$. *Пусть для каждого* $l\,(l=1,2,...)$ *число* p_l *- есть простое число, удовлетворяющее соотношению* $2^{l+3}\le p_l\cdot l^2<2^{l+4}$, *а целые числа* $a_1^{(l)}=1,\,a_2^{(l)},\ldots,a_s^{(l)}$ *- оптимальные коэффициенты по модулю* p_l *индекса* β. *Пусть для всякого целого* $\theta\ge s+1$ *и всякого* $\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_s)$ *из* Z^s *такого, что* $\tau_j>0$ и $\|\tau\|\overset{def}{=}\tau_1+...+\tau_s<\theta$ *матрица* $A_{\theta,\tau}$ *и множества* $K(\theta,\tau)$, $\gamma(\tau)$ *определены соответственно равенствами*

$$A_{\theta,\tau}=\begin{pmatrix}2^{\tau_1+1}p_{\theta-\|\tau\|} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ -2^{\tau_1+1}a_2^{(\theta-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & \ldots & 0\\ -2^{\tau_1+1}a_2^{(\theta-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ -2^{\tau_1+1}a_s^{(\theta-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \ldots & 2^{\tau_s+1}\end{pmatrix},$$

$$K(\theta,\tau)=\{k\in Z^s:\ -2^{\tau_1}p_{\theta-\|\tau\|}\le k_1<2^{\tau_1}p_{\theta-\|\tau\|},\ -2^{\tau_j}\le k_j<2^{\tau_j}\ (j=2,3,...,s)\},$$

$$\gamma(\tau)=\{m=(m_1,...,m_s)\in Z^s:\ 2^{\,\tau_j-1}\le\max\{|m_j|\,,1\}<2^{\tau_j}\ (j=1,...,s)\}.$$

Тогда для любого целого положительного числа N *при* $r>1$ *и* $2\le\nu\le\infty$ *имеют место*

$$N^{-\left(r-1+\frac{1}{\nu}\right)}\underset{r,s,\nu}{<<}\delta_N\left(0;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u, u(0,x)=f(x)\in E^r_s, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0; P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\nu(0,1)^s}\underset{r,s,\nu}{<<}N^{-\left(r-1+\frac{1}{\nu}\right)}\ln^{r(s-1)}N$$

и

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u, u(0,x)=0, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in E^r_s; P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\nu(0,1)^s}\underset{r,s,\nu}{<<}N^{-\left(r-1+\frac{1}{s}+\frac{1}{\nu}\right)}\ln^{\left(r+\frac{1}{2}\right)(s-1)}N,$$

а при s=2

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u, u(0,x)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in E_2^r; P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{L^\nu(0,1)^2}\underset{r,\nu,\omega}{>>}N^{-\left(r-\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu}\right)}.$$

Оператор восстановления есть

$$\bar\varphi_N(f;x,t)=\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j\ge 0,\|\tau\|<n}}\frac{1}{\det A_{n,\tau}}\sum_{k\in K(n,\tau)}f(k(A_{n,\tau}^{-1})')\sum_{m\in\gamma(\tau)}\rho_{m,i}e^{2\pi i(m,x-k(A_{n,\tau}^{-1})')},$$

$$n=\max\{\theta\in Z_+ : card\bigcup_{\tau\in Z^s:\ \tau_j\ge0,\|\tau\|<\theta}\{k(A_{\theta,\tau}^{-1})' : k\in K(\theta,\tau)\}\le N,$$

где для решения задачи (25)-(26) *в условьях* (27) $\rho_{m,1}(t)=\cos\left(2\pi\sqrt{m_1^2+...+m_s^2}\,t\right)$, *а* *для решения задачи* (25)-(26) *в условьях* (28) $\rho_{m,2}(t)=\begin{cases}\frac{\sin\left(2\pi\sqrt{m_1^2+...+m_s^2}\,t\right)}{\sqrt{m_1^2+...+m_s^2}}, & m\ne0\\ t, & m=0\end{cases}$.

Дискретизация решений волнового уравнения с оценками погрешностей в нормах пространств дифференцируемых функций

Теорема 5.6 (Е.И.Шангиреев[32]). *Пусть даны числа* s $(s=1,2...)$, $1<q\le2$, $1\le\theta\le\infty$, $2\le\mu\le\infty$, *целые положительные* r *и* l *такие, что* $l>\frac{s}{\mu}$, $r>\frac{s}{q}+l-\frac{s}{\mu}$. *Тогда имеет место*

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u, u(0,x)=f(x)\in B_{q,\theta}^r(0,1)^s,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0; P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{W_\mu^l(0,1)^s}\underset{s,q,\theta,l,\mu}{\asymp}N^{-\frac{r-l}{s}+\frac{1}{q}-\frac{1}{\mu}}$$

$$(p=2^m\ (m=1,2,...), N=p^s),$$

где

$$\xi_n=\left(\frac{n_1}{p},...,\frac{n_s}{p}\right),\ n_j=0,1,...,p-1;\ j=1,...,s$$

и

$$\overline{\varphi}_N\left(f\left(\xi_1\right),...,f\left(\xi_N\right);x,t\right)=\frac{1}{N}\sum_{\substack{n_j=0\\ j=1,...,s}}^{p-1}f\left(\xi_n\right)\sum_{\substack{-\frac{p}{2}\le k_j<\frac{p}{2}\\ j=1,...,s}}\cos\left(2\pi\sqrt{k_1^2+...+k_s^2}t\right)e^{2\pi i(k,x-\xi_n)}.$$

Теорема 5.7(Е.И.Шангиреев[32]). *Пусть даны числа* s $(s=1,2...)$, $1<q\le2$, $1\le\theta\le\infty$. *Тогда при всяком* $p=2^m\,(m=1,2,...)\,, N=p^s$ *имеют место следующие оценки*

1. для $\frac{s}{2}<l<\frac{s}{2}+1$ *и* $r>\frac{s}{p}+l-\frac{s}{2}$

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u, u(0,x)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in B_{q,\theta}^r(0,1)^2; P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{W_2^l(0,1)^s}\underset{r,s,q,\theta,l}{<<}$$

$$\underset{r,s,q,\theta,l}{<<}N^{-\frac{r}{s}}\cdot\begin{cases}N^{\frac{l}{s}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}-\frac{1}{s}}, \text{ если } 1<q<\frac{2s}{2(1-l)+s}\\ (\ln N)^{\frac{1-l}{s}}, \text{ если } q=\frac{2s}{2(1-l)+s}\\ 1\text{ , если } \frac{2s}{2(1-l)+s}<q\le2\end{cases},$$

2. для $l\ge\frac{s}{2}+1$ и $r>\frac{s}{q}+l-\frac{s}{2}$

$$\delta_N\left(0;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u, u(0,x)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=f(x)\in B_{q,\theta}^r(0,1)^2; P_N\times\{\varphi_N\}\right)_{W_2^l(0,1)^s}\underset{r,s,q,\theta,l}{<<}$$

$$<< N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}-\frac{1}{s}}, \text{если } 1 < q < \frac{2s}{2+s}, \\ \sqrt[s]{\ln N}, \text{если } q = \frac{2s}{2+s}, \\ 1 , \text{если } \frac{2s}{2+s} < q \le 2. \end{cases}$$

3. для $0 < l < 1$ и $r > \frac{s}{q} + l$

$$\delta_N \left(0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0,x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = f(x) \in B^r_{q,\theta}\left(0,1\right)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{W^l_\infty (0,1)^s} \underset{r,s,q,\theta,l}{<<}$$

$$\underset{r,s,q,\theta,l}{<<} N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{l}{s}+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}, \text{если } 1 < q < \frac{s}{1-l}, \\ (\ln N)^{\frac{1-l}{s}}, \text{если } q = \frac{s}{1-l}, \\ 1 , \text{если } \frac{s}{1-l} < q \le 2, \end{cases}$$

4. для $l \ge 1$ и $r > \frac{s}{q} + l$

$$\delta_N \left(0; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(0,x) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = f(x) \in B^r_{q,\theta}\left(0,1\right)^2; P_N \times \{\varphi_N\} \right)_{W^l_\infty (0,1)^s} \underset{r,s,q,\theta,l}{<<}$$

$$\underset{r,s,q,\theta,l}{<<} N^{-\frac{r}{s}} \cdot \begin{cases} N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}, \text{если } 1 < q < s \\ \sqrt[s]{\ln N}, \text{если } q = s \\ 1 , \text{если } s < q \le 2 \end{cases} ,$$

где оценки сверху достигаются на операторе

$$\underset{N}{\varphi}\left(f\left(\xi_1\right), ..., f\left(\xi_N\right); x, t\right) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n_j = 0 \\ j = 1, ..., s}}^{p-1} f\left(\xi_n\right) \left(t + \sum_{\substack{-\frac{p}{2} \le k_j < \frac{p}{2} \\ j = 1, ..., s}} * \frac{\sin\left(2\pi \sqrt{k_1^2 + ... + k_s^2}\, t\right)}{\sqrt{k_1^2 + ... + k_s^2}} e^{2\pi\, i\, (k, x - \xi_n)} \right)$$

$$\xi_n = \left(\frac{n_1}{p}, ..., \frac{n_s}{p} \right), \; n_j = 0, 1, ..., p-1\,; \; j = 1, ..., s.$$

§6. Дискретизация решений уравнения Клейна-Гордона

Рассматривается задача Коши для уравнения Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - u \; \left(u = u\left(x,t\right), 0 \le t < \infty, x \in R^s, \; s = 1, 2, ...\right), \tag{30}$$

$$u(x,0) = f_1(x) \in F^{(1)}, \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = f_2\left(x\right) \in F^{(2)}\left(x \in R^s\right) \tag{31}$$

решение которой описывает, в частности, свободную релятивистскую (псевдо) скалярную частицу массы 1.

В изучаемом здесь случае задача (30)-(31), опять же, как в случае волнового уравнения, имеет явное решение в виде суммы абсолютно сходящегося кратного функционального ряда

$$u\left(x,t; f_1, f_2\right) = \sum_{m \in Z^s} \left(\hat{f}_1\left(m\right) S'(t) + \hat{f}_2 S(t) \right) e^{2\pi i (m,x)},$$

который полностью определяется наборами $\left\{ \hat{f}_1\left(m\right) \right\}_{m \in Z^s}$ и $\left\{ \hat{f}_2\left(m\right) \right\}_{m \in Z^s}$ тригонометрических коэффициентов Фурье-Лебега. Поэтому возникает проблема приближения решения (объекта бесконечного) по конечной числовой информации заданного объема *N,* полученной от функций f_1 и f_2, математическая формулировка которой содержится в общей К(В)П-задаче восстановления.

Для сокращения записи всюду ниже будем использовать обозначение

$$S_m(t)=\frac{\sin\left(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}\right)}{\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}}$$

и, как следствие,

$$S'_m(t)=\cos\left(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}\right).$$

Имеют место следующие теоремы.

6.1. Информативная мощность всех возможных линейных функционалов в классах Никольского. Справедлива

Теорема 6.1 (И.Ибатуллин, Н.Темиргалиев [33]). *Пусть даны целые положительные числа s, положительные числа r_1 и r_2 такие, что*

$$r_1>2+\frac{s}{2}, r_2>1+\frac{s}{2}$$

.

Тогда имеют место соотношения (N= 2,3,...)

К(В)П-1:

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1\geq 1,\ N_2\geq 1}}\ \inf_{\substack{l_{N_1}^{(1)},...,l_{N_1}^{(N_1)},\\ l_{N_2}^{(1)},...,l_{N_2}^{(N_2)}\\ -\text{линейные функционалы},\ \varphi_N}}\ \sup_{\substack{f_1\in H_2^{r_1}(0,1)^s\\ f_2\in H_2^{r_2}(0,1)^s}}\|u(x,t;f_1,f_2)-$$

$$-\varphi_N\left(l_{N_1}^{(1)}(f_1),...,l_{N_1}^{(N_1)}(f_1),l_{N_2}^{(1)}(f_2),...,l_{N_2}^{(N_2)}(f_2)\ ;x,t\right)\Big\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\underset{s,r_1,r_2}{\asymp}$$

$$\underset{s,r_1,r_2}{\asymp}N^{-\ \frac{\min\{r_1;r_2+1\}}{s}}.$$

К(В)П-2*: Для вычислительного агрегата* $\overline{\varphi}_N^{(b)}\left(l_{N_1}^{(1)}(f_1),...,l_{N_1}^{(N_1)}(f_1),l_{N_2}^{(1)}(f_2),...,l_{N_2}^{(N_2)}(f_2)\ ;x,t\right)=$ $\sum\limits_{m\in Z^s:\|m\|\leq 2^{n_1}}\hat{f}(m)\,S'_m(t)e^{2\pi i(m,x)}+\sum\limits_{m\in Z^s:\|m\|\leq 2^{n_2}}\hat{f}(m)\,S_m(t)e^{2\pi i(m,x)}$, $n=\left[\log_2\left(\sqrt[s]{N}-1\right)\right]-1$ *и для N-мерного вектора* $\overline{\varepsilon}_{N_1,N_2}\equiv(\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2})=(\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(1)},...,\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)},\bar{\varepsilon}_{N_2}^{(1)},...,\bar{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)})$ *с компонентами* $\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)}=N^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}}$ $(j_1=1,2,...,N_1)$, $\bar{\varepsilon}_{N_2}^{(j_2)}=N^{-\frac{r_2-1}{s}-\frac{1}{2}}$ $(j_2=1,2,...,N_2)$ *имеет место соотношение*

$$\delta_N(\overline{0}_N;L_N(H_2^{r_1}(0,1)^s,H_2^{r_2}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp$$

$$\asymp\delta_N\left(\overline{\varepsilon}_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}}=(\overline{\varepsilon}_{N_1^{(0)}},\overline{\varepsilon}_{N_2^{(0)}});L_N(H_2^{r_1}(0,1)^s,H_2^{r_2}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\equiv$$

$$\equiv\min_{\substack{N_1\in Z_+,N_2\in Z_+:\\ N_1+N_2=N}}\ \inf_{\substack{m^{(1)},...,m^{(N_1)}\\ n^{(1)},...,n^{(N_2)}\\ \varphi_N}}\ \sup_{\substack{f_1\in H_2^{r_1}(0,1)^s;\ f_2\in H_2^{r_2}(0,1)^s\\ \left|\gamma_N^{(j_1)}\right|\leq 1\ (j_1=1,...,N_1)\\ \left|\gamma_N^{(j_2)}\right|\leq 1\ (j_2=1,...,N_2)}}\|u(x,t\,;f_1,f_2)-$$

$$-\varphi_N(l_{N_1}^{(1)}(f_1)+\gamma_{N_1}^{(1)}\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(1)},...,l_{N_1}^{(N_1)}(f_1)+\gamma_{N_1}^{(N_1)}\bar{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)},l_{N_2}^{(1)}(f_2)+\gamma_{N_2}^{(1)}\bar{\varepsilon}_{N_2}^{(1)},...,l_{N_2}^{(N_2)}(f_2)+\gamma_{N_2}^{(N_2)}\bar{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)};x,t)\Big\|_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{\substack{f_1\in H_2^{r_1}(0,1)^s;\ f_2\in H_2^{r_2}(0,1)^s\\ \left|\gamma_{N_1}^{(j_1)}\right|\leq 1\ (j_1=1,...,N_1)\\ \left|\gamma_{N_2}^{(j_2)}\right|\leq 1\ (j_2=1,...,N_2)}}\Big\|u(x,t\,;f_1,f_2)-\bar{\varphi}_N(l_{N_1^{(0)}}^{(1)}(f_1)+\gamma_{N_1^{(0)}}^{(1)}\varepsilon_{N_1^{(0)}}^{(1)},$$

$$..., l^{(N^1_{(0)})}_{N_1^{(0)}}(f_1) + \gamma^{(N_1^{(0)})}_{N_1^{(0)}} \varepsilon^{(N_1^{(0)})}_{N_1^{(0)}},\ l^{(1)}_{N_2^{(0)}}(f_2) + \gamma^{(1)}_{N_2^{(0)}} \varepsilon^{(1)}_{N_2^{(0)}}, ..., l^{\left(N_2^{(0)}\right)}_{N_2^{(0)}}(f_2) + \gamma^{(N_2^{(0)})}_{N_2^{(0)}} \varepsilon^{(N_2^{(0)})}_{N_2^{(0)}}; x, t)\Big\|_{L^2(0,1)^s \times L^\infty[0,+\infty)} \asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{\min\{r_1;\, r_2+1\}}{s}}.$$

Замечание 6.1. Здесь можно повторить, что как и в случае волнового уравнения, конкретизируя линейные функционалы $l_1, ...l_N$ и функции φ_N, в качестве вычислительных агрегатов $\varphi_N\left(l_1, ...l_N; x, t\right)$ в приведенных теоремах можно получать все возможные N -е частичные суммы рядов Фурье по всем возможным ортонормированным системам, в их числе и по вейвлет-системам, все возможные N -е частичные суммы разложений по всем возможным базисам и также разностные схемы, т.е. фактически весь спектр агрегатов, изучаемых в теории приближений и вычислительной математике. Из теоремы 6.1 следует, что в их условиях невозможно получить оценку лучше, чем $\asymp N^{\frac{\min\{r_1;r_2+1\}}{s}}$.

6.2. Информативная мощность всех возможных линейных функционалов в классах Соболева (Н.Темиргалиев, К.Шерниязов, М.Берикханова [34]).

Теорема 6.2. *Пусть даны числа* s(s=1,2,...), $r_1 > 2+\frac{s}{2}$ *и пусть* $D_N = \Phi_N(W_2^{r_1}(0,1)^s)\times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}$. *Тогда*

К(В)П-1:

$$\delta_N(0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u,\ u\left(x,0\right) = f_1\left(x\right) \in W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = 0\,; \Phi_N(W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)} \asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{r_1}{s}},$$

К(В)П-2: *Для вычислительного агрегата* $\bar\varphi_N\left(x,t;f\right) = \sum\limits_{m\in I_n} \hat f(m)\cos\left(t\sqrt{4\pi^2\left(m,m\right)+1}\right)\ e^{2\pi i(m,x)}\left(B_N = I_n = \left\{m^{(1)};...;m^{(N)}\right\}\subset Z^s\right)$ *последовательность* $\bar\varepsilon_N = N^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}}(N = 1,2,...)$ *является предельной погрешностью: во-первых,*

$$\delta_N(0;\ \Phi_N(W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s) \times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)} \asymp$$

$$\asymp \delta_N(\bar\varepsilon_N = N^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}};\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u,\ u\left(x,0\right) = f_1\left(x\right) \in\ W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = 0;\ \Phi_N(W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s)\times\{\varphi_N\})_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)} \asymp N^{-\frac{r_1}{s}},$$

во-вторых, причем для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\bar\varepsilon_N\eta_N = N^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}}\eta_N;\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u\left(x,0\right) = f_1\left(x\right)\in W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = 0; \bar\varphi_N\left(x,t;f\right)\right)_{L^{q,\infty}}}{\delta_N\left(0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u\left(x,0\right) = f_1\left(x\right)\in W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = 0; \Phi_N(W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^{q,\infty}}\right)_{L^{q,\infty}}} = +\infty$$

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат* $(\varphi_N(0,....,0;x,t)\equiv 0\ \text{на}\left[0,1\right]^s\times[0,+\infty))$

$$\varphi_N(\hat f(m^{(1)}),....,\hat f(m^{(N)});x,t)$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $\bar\varphi_N\left(x,t;f\right)$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar\varepsilon_N = \eta_N N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}};\varphi_N\left(\hat f(m^{(1)}),...,\hat f(m^{(N)});x,t\right)\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}}{\delta_N(0;\mathrm{L}_N(W_2^{r_1}\left(0,1\right)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}} = +\infty.$$

Теорема 6.3. *Пусть даны числа* s (s=1,2,...), $r_2 > 2+\frac{s}{2}$ и пусть $D_N = \Phi_N(W_2^{r_2}(0,1)^s)\times \{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}$. *Тогда*

К(В)П-1:

$$\delta_N(0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u,\ u\left(x,0\right) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = f_2\left(x\right) \in W_2^{r_2}\left(0,1\right)^s\ ; \Phi_N(W_2^{r_2}\left(0,1\right)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)} \asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{r_2+1}{s}},$$

К(В)П-2: *Для вычислительного агрегата* $\bar{\varphi}_N(x,t;f) = \sum\limits_{m\in I_n}\hat{f}(m)\frac{\sin\left(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}\right)}{\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}}e^{2\pi i(m,x)}\left(I_n=\left\{m^{(1)};...;m^{(N)}\right\}\subset Z^s,\ N\asymp 2^{ns}\right)$

последовательность $\bar{\varepsilon}_N\equiv\bar{\varepsilon}_N(s)=\begin{cases} N^{-\frac{r_2+1}{s}}, & при\ \ s=1,\\ N^{-\frac{r_2+1}{s}}(\ln N)^{-\frac{1}{2}}, & при\ \ s=2,\\ N^{-\frac{r_2+1}{s}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)}=N^{-\frac{r_2}{s}-\frac{1}{2}}, & при\ \ s>2\end{cases}\qquad (N=2,3,...)$

является предельной погрешностью: во-первых,

$$\delta_N(0;\Phi_N(W_2^{r_2}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp$$

$$\asymp\delta_N(\bar{\varepsilon}_N(s);\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u-u,\ u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f_2(x)\in W_2^{r_2}(0,1)^s;\asymp$$

$$\Phi_N(W_2^{r_2}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)})_{L^q(0,1)^s\times L^\infty[0,+\infty)}\asymp N^{-\frac{r_2+1}{s}}$$

во-вторых, причем для всякой возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\bar{\varepsilon}_N\eta_N;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u-u,u(x,0)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f_2(x)\in W_2^{r_2}(0,1)^s;\bar{\varphi}_N(f;x,t)\right)_{L^{q,\infty}}}{\delta_N\left(0;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u-u,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u-u,u(x,0)=0,\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f_2(x)\in W_2^{r_2}(0,1)^s;\Phi_N(W_2^{r_1}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^{q,\infty}}\right)_{L^{q,\infty}}}=+\infty.$$

К(В)П-3:*Всякий вычислительный агрегат* $(\varphi_N(0,....,0;x,t)\equiv 0$ *на* $[0,1]^s\times[0,+\infty))$

$$\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),....,\hat{f}(m^{(N)});x,t)$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $\bar{\varphi}_N(x,t;f)$: *для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\bar{\varepsilon}_N;\varphi_N\left(\hat{f}(m^{(1)}),...,\hat{f}(m^{(N)});x,t\right)\right)_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}}{\delta_N(0;\Phi_N(W_2^{r_2}(0,1)^s)\times\{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)})_{L^2(0,1)^s\times L^\infty[0,\infty)}}=+\infty.$$

Из теорем 6.2 и 6.3 следует

Теорема 6.4. *Пусть заданы целое положительное число* s, *числа* r_1 и r_2 *такие, что* $r_1>2+s/2, r_2>1+s/2$. *Тогда имеют место соотношения*

$$\delta_N(\bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}}=(\bar{\varepsilon}_{N_1^{(0)}},\bar{\varepsilon}_{N_2^{(0)}});\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u-u,\ u(x,0)=f_1(x)\in W_2^{r_1}(0,1)^s,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f_2(x)\in W_2^{r_2}(0,1)^s;D_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}})_{L^{2,\infty}}\equiv$$

$$\equiv\min_{\substack{N_1\in Z_+,N_2\in Z_+:\\ N_1+N_2=N}}\ \inf_{\substack{m^{(1)},...,m^{(N_1)}\\ n^{(1)},...,n^{(N_2)}\\ \varphi_N}}\ \sup_{\substack{f_1\in W_2^{r_1}(0,1)^s;\ f_2\in W_2^{r_2}(0,1)^s\\ \left|\gamma_{N_1}^{(j_1)}\right|\le 1\ (j_1=1,...,N_1)\\ \left|\gamma_{N}^{(j_2)}\right|\le 1\ (j_2=1,...,N_2)}}$$

$$\left\|u(\cdot;f_1,f_2)-\varphi_N(\hat{f}_1(m^{(1)})+\gamma_{N_1}^{(1)}\varepsilon_{N_1}^{(1)},...,\hat{f}_1(m^{(N_1)})+\gamma_{N_1}^{(N_1)}\varepsilon_{N_1}^{(N_1)},\right.$$

$$\left.\hat{f}_2(n^{(1)})+\gamma_{N_2}^{(1)}\varepsilon_{N_2}^{(1)},...,\hat{f}_2(n^{(N_2)})+\gamma_{N_2}^{(N_2)}\varepsilon_{N_2}^{(N_2)};\cdot)\right\|_{L^{2,\infty}([0,1]^s\times[0,+\infty))}\asymp$$

$$\asymp\delta_N(D_N;\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u-u,\ u(x,0)=f_1(x)\in W_2^{r_1}(0,1)^s,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f_2(x)\in W_2^{r_2}(0,1)^s;\bar{0}_N)_{L^{2,\infty}}$$

$$\asymp\ N^{-\frac{\min\{r_1,\ r_2+1\}}{s}},$$

где для N_1 и N_2 ($N_1+N_2=N$)

$$\bar{\varepsilon}_{N_1,N_2}\equiv(\bar{\varepsilon}_{N_1},\bar{\varepsilon}_{N_2})=(\varepsilon_{N_1}^{(1)},...,\ \varepsilon_{N_1}^{(N_1)},\varepsilon_{N_2}^{(1)},...,\ \varepsilon_{N_2}^{(N_2)})$$

есть N*-мерный вектор с компонентами*

$$\varepsilon_{N_1}^{(j_1)} = N_1^{-\frac{r_1}{s}-\frac{1}{2}} \quad (j_1 = 1,\, 2, ...,\, N_1),$$

$$\varepsilon_{N_2}^{(j_2)} = \begin{cases} N_2^{-\frac{r_2+1}{s}}, & \text{при } \; s=1 \\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s}} (\ln N_2)^{-\frac{1}{2}}\,, & \text{при } \; s=2 \\ N_2^{-\frac{r_2+1}{s}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)} = N_2^{-\frac{r_2}{s}-\frac{1}{2}}, & \text{при } \; s>2 \end{cases} \quad (j_2 = 1,\, 2, ...,\, N_2),$$

пара $N_1^{(0)}$ *и* $N_2^{(0)}$ $(\, N_1^{(0)} + N_2^{(0)} = N)$ *одна из пар, реализующих минимум погрешности восстановления,* $\overline{0}_N$ *-нулевой N-мерный вектор, причем для всякой возрастающей к* $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\,\eta_N \overline{\varepsilon}_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}};\; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u,\; u\,(x,0) = f_1\,(x) \in W_2^{r_1}\,(0,1)^s\,,\; \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}\,(0,1)^s\,; D_{N_1^{(0)},N_2^{(0)}}\right)_{L^{q,\infty}}}{\delta_N\left(\overline{0}_N,\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u,\; u\,(x,0) = f_1\,(x) \in W_2^{r_1}\,(0,1)^s\,,\; \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}\,(0,1)^s\;;\; D_N\right)_{L^{q,\infty}}} = \infty\,.$$

Теоремы 6.2-6.4 посвящены полному решению задачи дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона, в силу ее линейности разбитой на два случая, - это теоремы 6.2 и 6.3, с последующим их объединением в теореме 6.4.

И здесь тоже, если в [35] дискретизация решений дифференциального уравнения (в данном случае волнового) производится в фиксированный момент времени τ, то в теоремах 6.2-6.3 оптимизация производится по всему промежутку времени, с одновременным установлением предельной погрешности вычисления коэффициентов Фурье, опять же сохраняющих порядок восстановления по точной информации.

В целом, в постановках задачи К(В)П даны полные решения исследуемых задач в случае, когда числовая информация снимается с одного из важнейших источников – тригонометрических коэффициентов Фурье.

§ 7.Численное интегрирование интегральных уравнений обобщенным методом Смоляка

Предметом изучения этого параграфа будет интегральный оператор

$$Tf \equiv h\,(x;f) = \int_{[0,1]^s} K\,(x,y)\, f(y)dy, x \in [0,1]^s\,, \tag{32}$$

в предположении, что ядро оператора $K\,(x,y)$ измеримо по Лебегу в 2s-мерном кубе $[0,1]^{2s}$, и, следовательно, для почти всех $x \in [0,1]^s$ функция $K\,(x,y)$ измерима по y, а для почти всех $y \in [0,1]^s$ измерима по x (см. [36, Глава V, §6, стр.310] .

При данном $\nu^{(0)} = \left(\nu_1^{(0)}, ..., \nu_s^{(0)}\right) \in Z^s,\; \nu_j^{(0)} \geq 0 \;\; (j=1,...,s)$ положим

$$Z_{\nu^{(0)}}^s \equiv \left\{(\nu_1,...,\nu_s) \in Z^s : \nu_j \geq \nu_j^{(0)} \;\, (j=1,...,s)\right\}, 0 \leq \nu_1^{(0)} + ... + \nu_s^{(0)} < q, \Omega\left(\nu^{(0)};q\right) \equiv \left\{(\nu_1,...,\nu_s) \in Z_{\nu_0}^s : \nu_1 + ... + \nu_s \leq q\right\},$$

$A_{\nu_j} = \left\{\left(2t_j + sgn\left(\nu_j - \nu_j^{(0)}\right)\right) 2^{\nu_j - 1} : t_j \in Z\right\},\; A_{\nu_1,...,\nu_s} = A_{\nu_1} \times \cdots \times A_{\nu_s}$. Пусть, как обычно, χ_A - характеристическая функция множества A.

Однозначное представление $m_j = (2\tau_j(m)+1)2^{\mu_j(m)}$ для целого $m_j \neq 0$ продолжим на случай $m_j = 0$, полагая $\tau_j(0) = -\frac{1}{2}$ и $\mu_j(0) = \nu_j^{(0)}$.

Обозначим (см.[37]-[41])

$$\Lambda_{\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}(f) = \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1,...,\nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s : \\ \nu_1 + ... + \nu_s = q-l}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}} \cdots \sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, ..., \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right),$$

и

$$\Delta_{\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}(f) \equiv \hat{f}\,(0) - \Lambda_{\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}(f) = \int_{[0,1]^s} f\,(x)\,dx - \Lambda_{\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}(f) =$$

$$= \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) \sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s) \in Z^s_{\nu_0} \setminus \Omega\left(\nu^{(0)};q\right)} (-1)^{\sum_{j=1}^{s} sgn\left(\nu_j - \nu_j^{(0)}\right)} \chi_{A_{\nu_1,\dots,\nu_s}}(m) =$$

$$= \sum_{\substack{\mu = (\mu_1,\dots,\mu_s) : \text{ целое } \mu_j \ge \nu_j^{(0)} \\ \tau = (\tau_1,\dots,\tau_s) : \quad \tau_j \in Z \\ \text{или } \tau_j = \frac{1}{2} \text{ и } \mu_j = \nu_j^{(0)}, j = 1,\dots,s}} \hat{f}\left((2\tau_1+1)2^{\mu_1},\dots,(2\tau_s+1)2^{\mu_s}\right) \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_s) : \nu_j \ge \nu_j,\ \nu_1+\dots+\nu_s > q \\ \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ или } \nu_j = \mu_j + 1 \\ j = 1,\dots,s}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s} sgn\left(\nu_j - \nu_j^{(0)}\right)}.$$

При n=0 положим по определению $\nu(0) = 0$. Если же для данного целого $n \neq 0$ и целого положительного c выполнено $2^{c-2} < |n| \le 2^{c-1}$, то полагаем $\nu(n) = c$.

При $\nu^{(0)} = \nu(n) \equiv (\nu_1(n),\dots,\nu_s(n))$, $\nu_j(n) \in Z$, $\nu_j(n) \ge 0$ $(j = 1,\dots,s)$ введем обозначения $\Lambda_{n,q}(f) = \Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)\, e^{-2\pi i(n,\cdot)}\right)$ и $\Delta_{n,q}(f) \equiv \Delta_{\Omega(\nu(n);q)}\left(f(\cdot)\, e^{-2\pi i(n,\cdot)}\right)$.

Далее, при $q \ge 1$ положим

$$V_q = \{n \in Z^s : \nu_1(n) + \dots + \nu_s(n) \le q\}$$

и пусть для $n \in Z^s$

$$\hat{K}(x,-n) := \int_{[0,1]^s} K(x,y) e^{-2\pi i(n,y)} dy.$$

В условиях приведенных обозначений и определений справедлива

Теорема 7.1 (А.Шоманова [42]). *Пусть даны числа p, t, σ, r такие, что*

$$p \ge 1, t \ge 1,\ t \ge p,\ t \ge \sigma, \quad \left(1 - \frac{\sigma}{t}\right)\frac{p}{p-1} \le r.$$

Пусть функция K(x,y) определена и непрерывна на $[0,1]^{2s}$. Тогда для всякой периодической по каждой из s переменных функции $f(x_1,\dots,x_s)$ с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье справедливо неравенство

$$\left\| \int_{[0,1]^s} K(x,y) f(y) dy - \sum_{n \in V_q} \hat{K}(x,-n) \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \begin{pmatrix} s-1 \\ l \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_s) \in Z^s_{\nu(n)} : \\ \nu_1+\dots+\nu_s = q-l}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}} \cdots \sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) e^{-2\pi i\left(n_1 \frac{k_1}{2^{\nu_1}} + \dots + n_s \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)} \right\|_{L^t(0,1)^s} \le$$

$$\le \left(vrai\sup_{x \in [0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^s} |K(x,y)|^r dy \right]^{\frac{1}{r}} \right)^{1-\frac{\sigma}{t}} \cdot \left(vrai\sup_{y \in [0,1]^s} \left[\int_{[0,1]^s} |K(x,y)|^\sigma dx \right]^{\frac{1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{t}} \times$$

$$\times \left\| \sum_{n \in V_q} \Delta_{\Omega(\nu(n);q)}\left(f(\cdot)\, e^{-2\pi i(n,\cdot)}\right) \cdot e^{2\pi i(n,x)} + \sum_{n \in Z^s \setminus V_q} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i(n,x)} \right\|_{L^p(0,1)^s}.$$

$t \ge p,\ t \ge \sigma, \quad \left(1 - \frac{\sigma}{t}\right)\frac{p}{p-1} \le r \quad (p, t \ge 1,\ r, \sigma > 0)$,

$$\Delta_{\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}(f) = \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) \sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s) \in Z^s_{\nu_0} \setminus \Omega\left(\nu^{(0)};q\right)} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s} sgn\left(\nu_j - \nu_j^{(0)}\right)} \chi_{A_{\nu_1,\dots,\nu_s}}(m) =$$

$$= \sum_{\substack{\mu=(\mu_1,...,\mu_s):\ \text{целое}\mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau=(\tau_1,...,\tau_s):\quad \tau_j\in Z \\ \text{или}\tau_j=\frac{1}{2}\ \text{и}\ \mu_j=\nu_j^{(0)},\, j=1,...,s}} \hat{f}\left((2\tau_1+1)2^{\mu_1},...,(2\tau_s+1)2^{\mu_s}\right) \sum_{\substack{(\nu_1,...,\nu_s):\nu_j\geq\nu_j,\ \nu_1+...+\nu_s>q \\ \nu_j=\nu_j^{(0)}\ \text{или}\ \nu_j=\mu_j+1 \\ j=1,...,s}} (-1)^{\sum_{j=1}^{s} sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}.$$

Обратимся к следствиям общей теоремы 7.1.

Имеет место

Теорема 7.2 (С.Кудайбергенов [40]). *Пусть дана положительная последовательность* $\{D_s(m)\}_{m\in Z^s}$ *такая, что*

$$\sum_{m\in Z^s} D_s^{-1}(m) < +\infty,$$

и пусть

$$\|f\|_{\ell^\infty(D_s)} = \sup_{m\in Z^s}\left|\hat{f}(m)\right|\cdot D_s(m).$$

Тогда для любого $n\in Z^s$ *и любого* $q>\nu_1(n)+...+\nu_s(n)$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f:\|f\|_{\ell^\infty(D_s)}\leq 1}\left|\hat{f}(n)-\Lambda_{n,q}(f)\right| =$$

$$\sum_{\substack{\mu=(\mu_1,...,\mu_s):\ \text{целое}\ \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau=(\tau_1,...,\tau_s):\quad \tau_j\in Z \\ \text{или}\ \tau_j=\frac{1}{2}\ \text{и}\ \mu_j=\nu_j^{(0)},\, j=1,...,s}} \left| D_s^{-1}\left(n+(2\tau+1)2^{\mu}\right) \sum_{\substack{(\nu_1,...,\nu_s):\nu_j\geq\nu_j,\ \nu_1+...+\nu_s>q \\ \nu_j=\nu_j^{(0)}\ \text{или}\nu_j=\mu_j+1 \\ j=1,...,s}} (-1)^{\sum_{j=1}^{s} sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}\right|.$$

Если же последовательность $\{D_s(m)\}_{m\in Z^s}$ *удовлетворяет условию* $D_s(2|m_1|,...,2|m_s|) << D_s(|m_1|,...,|m_s|)$ *для всех* $m\in Z^s$, *то*

$$\sup_{f:\|f\|_{\ell^\infty(D_s)}\leq 1}\left|\hat{f}(n)-\Lambda_{n,q}(f)\right| \asymp \sum_{\substack{\nu_1+...+\nu_s>q \\ \nu_j\geq\nu_j(n) \\ j=1,...,s}} \sum_{t\in Z^s} D^{-1}\left(\bar{t}\cdot 2^{\nu}\right).$$

В условиях теоремы 7.1 из теоремы 7.2 следует

Теорема 7.3(А.Шоманова [42]) *Имеет место неравенство*

$$\sup_{f:\|f\|_{\ell^\infty(D_s)}\leq 1}\left\|\int_{[0,1]^s} K(x,y)f(y)dy - \sum_{n\in V_q}\hat{K}(x,-n)\sum_{l=0}^{s-1}(-1)^l\begin{pmatrix} s-1 \\ l\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\sum_{\substack{(\nu_1,...,\nu_s)\in Z^s_{\nu(n)}: \\ \nu_1+...+\nu_s=q-l}} \frac{1}{2^{q-l}}\sum_{k_1=1}^{2^{\nu_1}}\cdots\sum_{k_s=1}^{2^{\nu_s}} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)e^{-2\pi i\left(n_1\frac{k_1}{2^{\nu_1}}+...+n_s\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)}\right\|_{L^t(0,1)^s} \leq$$

$$\leq\left(\underset{x\in[0,1]^s}{vrai\sup}\left[\int_{[0,1]^s}|K(x,y)|^r dy\right]^{\frac{1}{r}}\right)^{1-\frac{\sigma}{t}}\cdot\left(\underset{y\in[0,1]^s}{vrai\sup}\left[\int_{[0,1]^s}|K(x,y)|^\sigma dx\right]^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{t}}\times$$

$$\times \left(\sum_{n \in V_q} \sum_{\substack{\mu=(\mu_1,...,\mu_s):\ \text{целое}\mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau=(\tau_1,...,\tau_s):\quad \tau_j \in Z \\ \text{или } \tau_j = \frac{1}{2} \text{ и } \mu_j = \nu_j^{(0)}, j=1,...,s}} \left| D_s^{-1}\left(n+(2\tau+1)2^{\mu}\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sum_{\substack{(\nu_1,...,\nu_s):\nu_j \geq \nu_j,\ \nu_1+\cdots+\nu_s>q \\ \nu_j=\nu_j^{(0)} \text{или} \nu_j=\mu_j+1 \\ j=1,...,s}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s} sgn\left(\nu_j - \nu_j^{(0)}\right)} \right| + \|f\|_{\ell^\infty(D_s)} \sum_{n \in Z^s \setminus V_q} \frac{1}{D_s(n)} \right).$$

§8**. Дискретизация в среднем квадратическом относительно вероятностных мер на классах функций.**

Основным способом оценки качества восстановления является "наихудший случай", когда вычисляется максимальная по классу погрешность. Вместе с тем, сравнение операторов восстановления функций из какого-либо класса по максимальной (по классу) погрешности (уклонению) может оказаться грубым: два оператора могут иметь одинаковые максимальные уклонения, в то же время как для первого оператора оно достигается на функциях, которых в определенном смысле “мало” в классе, а для второго – на “большинстве” функций класса (количественная характеристика размеров подмножеств функций производится на основе лебеговского меровведения). И хотя первый метод дискретизации, очевидно, предпочтительнее, при оценке качества приближения по значению максимального уклонения эти два метода неразличимы.

Таким образом, постановка этой задачи заключается в оценках снизу и сверху величины

$$\int_F \sup_{0 \leq \alpha \leq R} \left\| u(\alpha, \cdot, f) - \varphi_N\left(l_1(f), ..., l_N(f), \alpha, \cdot\right) \right\|_Y^2 d\mu_F(f),$$

$\mu_F(f)$ есть вероятностная мера, определенная на F.

Пусть $\{\Gamma\}_k$ есть последовательность попарно не пересекающихся конечных множеств $\Gamma_k \subset Z$, объединение которых есть все Z. Через d_k обозначим количество точек в Γ_k .

Пусть $\nu_{-1} = 0$ и $\nu_k = d_0 + ... + d_k$, $a_{j(m)}$ есть фиксированное упорядочение Γ_k . Тогда каждый набор $Y = \{y_m\}_{m \in Z}$ комплексных чисел, с учетом равенства $y_m = a_{j(m)} + ib_{j(m)}$, будем считать представленным в виде последовательности $Y = (a_1, b_1, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k}, ...)$.

Далее, пусть для каждого k на $2d_k$ –мерном евклидовом пространстве R^{2d_k} задана неотрицательная непрерывная функция ψ_k такая, что $\psi_k(0) = 0$.

Определим классы $H(\Gamma_k, \psi_k)$ как множество всех наборов $Y = \{y_m\}_{m \in Z}$ таких, что для каждого $k\, (k = 0, 1, 2, ...)$ выполнено неравенство

$$\psi_k\left(a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k}\right) \leq 1,$$

т.е.

$$H(\Gamma_k, \psi_k) = \left\{(a_1, b_1, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k}, ...) : \psi_k\left(a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k}\right) \leq 1\right\}.$$

Положим

$$H \overset{def}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} H(\Gamma_k, \psi_k).$$

Пусть

$$D_k = \left\{ \left(a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k} \right) \in R^{2d_k} : \psi_k \left(a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k} \right) \leq 1 \right\}.$$

Тогда

$$H = D_0 \times D_1 \times ... \times D_k \times ...$$

Цилиндрические множества $T_k(E_k)$ определим следующим образом:

$$T_k(E_k) = \left\{ (a_1, b_1, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k}, ...) \in H : \left(a_{\nu_{k-1}+1}, b_{\nu_{k-1}+1}, ..., a_{\nu_k}, b_{\nu_k} \right) \in E_k \right\},$$

где $E_k \subset D_k \left(E_k \in F \left(D_k \right) \right)$.

Пусть $F\left(H\right)$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая все цилиндрические множества.

Теорема А (см. [43]). *Каждая из возможных вероятностных мер μ на измеримом пространстве $(H, \mathcal{F}(H))$ однозначно определяется заданием последовательности мер μ_k на $(D_k, \mathcal{F}(D_k))$ таких, что для всех k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $E_k \in \mathcal{F}(D_k))$ имеет место равенство*

$$\mu(T_k(E_k)) = \mu_k(_k)$$

.

Следуя этой теореме, введем вероятностную меру на классах Коробова $E^r(0, 2\pi)$ и Никольского $H_2^r(0, 2\pi)$.

По определению класса $E^r(0, 2\pi)$ $(r > 1)$

$$f(x) \in E^r(0, 2\pi) \Leftrightarrow \left| \hat{f}(m) \right| \leq \frac{1}{\bar{m}^r} \equiv \rho_m \left(m \in Z \right),$$

где $f\ (x)$ - $2\,\pi$ - периодическая функция.

Пусть для каждого $m \in Z$ функция

$$\lambda_m \left(\tau \right) : [0, \rho_m] \rightarrow [0, 1]$$

непрерывна, неубывает на $[0, \rho_m]$ и удовлетворяет условиям $\lambda_m \left(0 \right) = 0$ и $\lambda_m \left(\rho_m \right) = 1$.

Для любого α через $K(\,\alpha\,)$ обозначим замкнутый круг комплексной плоскости с центром в точке нуль и радиусом α :

$$K(\alpha) = \left\{ z = \tau e^{i\varphi} : 0 \leq \tau \leq \alpha, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\} = \left\{ z \in C : |z| \leq \alpha \right\}.$$

Тогда

$$f(x) \in E^r(0, 2\pi) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{m \in Z} \hat{f}(m)\, e^{im\theta}, \hat{f}(m) \in K\left(\rho_m\right).$$

Следовательно, отображение

$$E^r \ni f \rightarrow \left(\hat{f}(0), \hat{f}(1), \hat{f}(-1), ... \right) \in K\left(\rho_0\right) \times K\left(\rho_1\right) \times K\left(\rho_{-1}\right) \times ...$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие

$$E^r(0, 2\pi) \leftrightarrow K\left(\rho_0\right) \times K\left(\rho_1\right) \times K\left(\rho_{-1}\right) \times ...$$

Отсюда, в силу теоремы о задании меры на прямом произведении счетного числа пространств с мерой (см. [44, стр 152-156]), чтобы ввести меру на $E^r(0, 2\pi)$, достаточно ввести вероятностные меры μ_m в каждом $K\left(\rho_m\right)\left(m \in Z\right)$. В качестве μ_m возьмем плоскую меру Лебега в круге $K\left(\rho_m\right)$ такую, что если

$$0 \leq \rho_m^{(1)} < \rho_m^{(2)} \leq \rho_m u 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi,$$

то

$$\mu_m\left(\tau e^{i\varphi}:\rho_m^{(1)}\le\tau\le\rho_m^{(2)},\varphi_1<\varphi\le\varphi_2\right)=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2\pi}\left(\lambda_m\left(\rho_m^{(2)}\right)-\lambda_m\left(\rho_m^{(1)}\right)\right). \qquad (33)$$

В частности,

$$\mu m\left(K\left(\rho_m\right)\right)=\frac{2\pi}{2\pi}(\lambda_m(\rho_m)-\lambda_m(0))=1.$$

Меру μ_m в $K\left(\rho_m\right)$ с условием (33) обозначим μ_m^λ.

Тогда искомая мера в самом классе $E^r(0,2\pi)$ определяется следующим образом. Пусть даны целое положительное n и целые $m^{(1)},\ldots,m^{(n)}$. Для плоских μ_m^λ- измеримых множеств

$$E^{(1)}\subset K\left(\rho_{m^{(1)}}\right),\ldots,E^{(n)}\subset K\left(\rho_{m^{(n)}}\right)$$

рассмотрим цилиндрические множества

$$T\left(E^{(1)},...,E^{(n)}\right)=\left\{f\in E^r:\hat{f}\left(m^{(1)}\right)\in E^{(1)},...,\hat{f}\left(m^{(n)}\right)\in E^{(n)}\right\}\in E^r.$$

Тогда, согласно теореме А, равенствами

$$\mu^\lambda\left(T\left(E^{(1)},...,E^{(n)}\right)\right)=\prod_{j=1}^n\mu_{m^{(j)}}^\lambda\left(E^{(j)}\right). \qquad (34)$$

однозначно определяется вероятностная мера μ^λ на наименьшей σ- алгебре подмножеств E^r, содержащей все цилиндрические множества $T\left(E^{(1)},...,E^{(n)}\right)$.

Далее, приведем определение вероятностной меры, заданной на $H_2^r(0,2\pi)$.

Пусть

$$\rho(\tau)=\left\{m\in Z:\ 2^{\tau-1}\le\overline{m}<2^\tau\right\}\equiv\left\{2^{\tau-1},-2^{\tau-1},2^{\tau-1}+1,-2^{\tau-1}-1,...,2^\tau-1,\ -2^\tau+1\right\}$$

при $\tau=2,3,...$ и

$$\rho(1)=\{0,\ 1,\ -1\}$$

подмножества Z ("двоичные пачки") и пусть $n_\tau=|\rho(\tau)|$. Тогда по эквивалентному определению класса $H_2^r(0,2\pi)$ (см. напр. [45])

$$f\in H_2^r(0,2\pi)\ \Leftrightarrow\ \sum_{m\in\rho(\tau)}\left|\hat{f}(m)\right|^2\le 2^{-2\tau r}.$$

Введем следующие обозначения для $f\in H_2^r(0,2\pi)$:

$$z^{(\tau)}(f)\equiv(\hat{f}(2^{\tau-1}),\ \hat{f}(-2^{\tau-1}),\hat{f}(2^{\tau-1}+1),\hat{f}(-2^{\tau-1}-1),...,\hat{f}(2^\tau-1),\ \hat{f}(-2^\tau+1))$$

при $\tau=2,3,...$ и

$$z^{(1)}(f)\equiv(\hat{f}(0),\ \hat{f}(1),\hat{f}(-1)).$$

Если шар в C^{n_τ} (или в R^{2n_τ}) радиуса $2^{-\tau r}$ с центром в начале координат обозначить через D_τ, т.е.

$$D_\tau=\left\{z^{(\tau)}=\left({z_1}^{(\tau)},{z_2}^{(\tau)},...,{z_{n_\tau}}^{(\tau)}\right)\in C^{n_\tau}:\ \left|{z_1}^{(\tau)}\right|^2+\left|{z_2}^{(\tau)}\right|^2+...+\left|{z_{n_\tau}}^{(\tau)}\right|^2\le 2^{-2\tau r}\right\},$$

то приведенное выше определение класса $H_2^r(0,2\pi)$ перепишется в виде

$$f\in H_2^r(0,2\pi)\Leftrightarrow z^{(\tau)}(f)\in D_\tau\ \ (\forall\tau=1,\ 2,...).$$

Отсюда, учитывая введенные обозначения, и теорему Рисса-Фишера, можно установить следующее взаимно однозначное соответствие:

$$H_2^r(0,2\pi)\ni f(x)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \underbrace{(\hat{f}(0),\ \hat{f}(1),\ \hat{f}(-1)}_{z^{(1)}(f)}, \underbrace{\hat{f}(2), \hat{f}(-2), \hat{f}(3), \hat{f}(-3)}_{z^{(2)}(f)}, ..., \underbrace{\hat{f}(2^{\tau-1}), \hat{f}(-2^{\tau-1}), ..., \hat{f}(2^{\tau}-1), \hat{f}(-2^{\tau}+1)}_{z^{(\tau)}(f)}, ...) \equiv$$

$$\equiv \left(z^{(1)}(f), z^{(2)}(f), ..., z^{(\tau)}(f), ...\right) \in D_1 \times D_2 \times ... \times D_\tau \times ....$$

Пусть для каждого $\tau = 1, 2, ...$ мера μ_τ абсолютно непрерывная вероятностная мера на $D\tau$:

$$\mu_\tau(E_\tau) = \int_{\mathrm{E}_\tau} p_\tau\left(z_1^{(\tau)}, ..., z_{n_\tau}^{(\tau)}\right) dx_1^{(\tau)} dy_1^{(\tau)}, ..., dx_{n_\tau}^{(\tau)} dy_{n_\tau}^{(\tau)} \ ,$$

где $E_\tau \subset D_\tau$ - измеримое множество,

$$z_k^{(\tau)} = x_k^{(\tau)} + iy_k^{(\tau)} \qquad (k = 1, ..., n_\tau),$$

а плотность

$$p_\tau(z^{(\tau)}) = p_\tau(x_1^{(\tau)}, y_1^{(\tau)}, ..., x_{n_\tau}^{(\tau)}, y_{n_\tau}^{(\tau)}) = p_\tau((x_1^{(\tau)})^2 + (y_1^{(\tau)})^2 + ... + (x_{n_\tau}^{(\tau)})^2 + (y_{n_\tau}^{(\tau)})^2)$$

- радиально зависит от $\left(x_1^{(\tau)}, y_1^{(\tau)}, ..., x_{n_\tau}^{(\tau)}, y_{n_\tau}^{(\tau)}\right) \in D_\tau$. Пусть даны целые положительные k и числа $\tau_1, ..., \tau_k$ ($\tau_i \neq \tau_j$ при $i \neq j$). Для измеримых множеств $E_{\tau_k} \subset D_{\tau_k}$ рассмотрим цилиндрические множества

$$T(E_{\tau_1}, ..., E_{\tau_k}) = \left\{f \in H_2^r(0, 2\pi) : z^{(\tau_1)}(f) \in E_{\tau_1}, ..., z^{(\tau_k)}(f) \in E_{\tau_k}\right\} \tag{35}$$

Положим

$$\mu(T(E_{\tau_1}, ..., E_{\tau_k})) \overset{def}{=} \prod_{i=1}^{k} \int_{E_{\tau_i}} p_{\tau_i}(z^{(\tau_i)})\, dx^{(\tau_i)} dy^{(\tau_i)}. \tag{36}$$

Множество цилиндрических множеств вида (35) образует полукольцо.

Тогда по теореме А о продолжении меры можно считать, что в наименьшей σ - алгебре $\mathcal{F}(H2^r)$, содержащей все цилиндрические множества вида (35), задана мера μ .

В следующих теоремах получены двусторонние оценки для среднеквадратической погрешности дискретизации решения задачи (11)-(12) относительно введенных мер. В обеих теоремах

$$(T_N f)(\alpha, \theta) = \sum_{i=1}^{N} f\left(2\pi\frac{i}{N}\right) K_N\left(\alpha, \theta - 2\pi\frac{i}{N}\right),$$

$$K_N(\alpha, t) = \frac{1}{N}\left(1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{[N/2]-1} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^n \cdot \cos nt\right) \ .$$

Теорема 8.1. *Пусть* $u(\alpha, \theta; f)$ *- решение задачи* (11)-(12), $r > 1$ *и* μ *есть вероятностная мера* (34), *определенная на* E^r . *Тогда*

$$\int_{E^r(0,2\pi)} \sup_{\alpha} \| u(\alpha, \cdot; f) - (T_N f)(\alpha, \cdot) \|_{L^2(0,2\pi)}^2 d\mu^\lambda(f) \asymp \sum_{m \in Z \setminus \left(-\left[\frac{N}{2}\right], \left[\frac{N}{2}\right]\right)} \int_0^{\rho_m} \tau^2 \lambda_m'(\tau)\, d\tau.$$

Доказательство теоремы 8.1 основывается следующих леммах.

Лемма 8.1. *В классе* $E^r(0, 2\pi)$ *выполняются равенства*:

$$\int\limits_{E^r(0,2\pi)} \hat{f}(m)\, d\mu^\lambda(f) = 0,$$

$$\int_{E^r(0,2\pi)} \hat{f}(m)\, \overline{\hat{f}(m')}\, \mu^\lambda(f) = \begin{cases} 0, \ \text{если}\ m \neq m' \\ \int_0^{\rho_m} \tau^2 \lambda_m'(\tau)\, d\tau, \ \text{если}\ m = m'. \end{cases}$$

Лемма 8.2 ([16]). *Пусть* N *– целое положительное число. Тогда для любых* $u_1, u_2 \in Z\setminus\{0\}$ *и* $m_1, m_2 \in \{-[N/2]+1, ..., -1, 0, 1, ..., [N/2]-1\}$ *таких, что* $(u_1, m_1) \neq (u_2, m_2)$, *выполняется*

$$u_1 N + m_1 \neq u_2 N + m_2$$

и имеет место включение

$$\bigcup_{m\in Z\bigcap\left(-\left[\frac{N}{2}\right],\left[\frac{N}{2}\right]\right)} \bigcup_{u\in Z\setminus\{0\}} \{uN+m\} \subset Z\setminus\left(-\left[\frac{N}{2}\right],\left[\frac{N}{2}\right]\right).$$

Следствие 8.1. *Пусть* $\lambda_m(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau(1-\rho_m^2)}{\rho_m^2}, & при\ \tau \in \left[0, \rho_m^2\right] \\ \frac{\rho_m\left(\tau-\rho_m^2\right)}{1-\rho_m} + 1 - \rho_m^2, & при\ \tau \in \left[\rho_m^2, \rho_m\right] \end{cases}$.

Тогда

$$\int_{E^r(0,2\pi)} \sup_\alpha \| u(\alpha, \cdot; f) - (T_N f)(\alpha, \cdot)\|^2_{L^2(0,2\pi)} d\mu^\lambda(f) \asymp C(r) \frac{1}{N^{2\left(2r-\frac{1}{2}\right)}}.$$

Из утверждения

Лемма 8.3. *В классе* $H_2^r(0, 2\pi)$ $(r > \frac{1}{2})$ *выполняются равенства:*

$$\int_{H_2^r(0,2\pi)} \hat{f}(m)\overline{\hat{f}(n)} d\mu(f) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \int_{D_\tau}\left(x^2_{j_\tau(m)} + y^2_{j_\tau(m)}\right) p_\tau(x,y)dxdy, & m = n \in \rho_\tau, \end{cases}$$

где $j_\tau(m)$ *- порядковый номер элемента* $m \in \rho(\tau)$ *при упорядочивании*

$$\rho(\tau) \equiv \left\{2^{\tau-1},\ -2^{\tau-1}, ...,\ 2^\tau - 1,\ -2^\tau + 1\right\}.$$

следует

Теорема 8.2. *Пусть* $u(\alpha, \theta; f)$ *- решение задачи* (11)-(12), $r > \frac{1}{2}$ *и* μ*-есть вероятностная мера* (34). *Тогда имеет место следующая двусторонняя оценка (*$N = 2^n,\ n = 1, 2, ...$*)*

$$\int_{H_2^r(0,2\pi)} \sup_\alpha \|u(\alpha, \cdot; f) - (T_N f)(\alpha, \cdot)\|^2_{L^2(0,2\pi)} d\mu(f) \asymp \sum_{\tau=n}^{\infty} \int_{D_\tau} \left(x_1^2 + y_1^2 + ... + x^2_{n_\tau} + y^2_{n_\tau}\right) p_\tau(x,y)dxdy.$$

§9. Заключительные замечания

Данная статья носит иллюстративный характер по К(В)П-исследованию уравнений в частных производных.

В модельной ситуации – это классические уравнения математической физики с начальными и граничными условиями из, опять же, классических и с доминирующей смешанной гладкостью классов Соболева, Никольского-Бесова и Коробова, заданных на единичных кубах соответствующей размерности, полностью или частично решены К(В)П-задачи, во всех случаях К(В)П-1 обязательно, а К(В)П-2 и -3 частично.

Как нам представляется, общая постановка К(В)П-задачи и приведенные результаты показывают содержательность предлагаемого направления исследований с непредсказуемым, и тем интересным, дальнейшим развитием, с попутными запросами к смежным областям Математики и Компьютерных наук.

Так, например, мощным аппаратом исследований в математике и, как здесь показано, в применениях является гармонический анализ, чем вызваны исследования на единичных кубах. Сведение уравнений в частных производных с областей на случаи единичных кубов требует дальнейших исследований в теории продолжений функций с областей на объемлющие их параллелепипеды с сохранением класса, – самостоятельного раздела теории вложений [18], [46]-[49].

Также можно отметить, что теория уравнений в частных производных с представлением решений по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора дает большой потенциал развития данного направления исследований.

Авторы надеятся, что молодые научные силы Казахстана, в особенности в объявленный 2019 Год молодежи, заинтересуются и продолжат представленный перспективный круг задач.

Список литературы

1 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Изв.ВУЗов. Математика. -2019.- Т63. -№1. -С.89-75.

2 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124, №3. -С. 8-88.

3 Темиргалиев Н., Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -1997. -С. 90-144.

4 Темиргалиев Н., Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье//Вестник Евразийского национального университетаим. Л.Н. Гумилева, Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. -2010. -С.1-194.

5 Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований//Электронное издание. Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана. -2012. -С.1-256.

6 Темиргалиев Н. Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т.125. -№4. -С.8-68.

7 Коляда В.И. О вложении некоторых классов функций многих переменных // Сиб. мат. журнал. - 1973. -№ 4.- С. 766-790.

8 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. -М.: Физматгиз, 1963.

9 Ульянов П.Л. О классах бесконечно дифференцируемых функций//Матем. сб. -1990. -Т.181. -№5. - С.589-609.

10 Оразкулова Б. Полное К(В)П (Компьютерный (вычислительный) поперечник) исследование уравнении в частных производных: магистрская диссертация по специальности 6М060100 – "Математика". ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. -Астана. -2016.

11 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е., Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника// Изв.ВУЗов. Математика. -2013. - №8. -С.86–93.

12 Лакс П. Математика и вычисления // В Сб. "Математика: границы и перспективы" - М.,ФАЗИС, 2005. -С. 175-192.

13 Федоренко Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // ЖВМ и МФ. -1964. -Т.4. -№3. - С.559-564.

14 Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // ЖВМ и МФ - 1966. - Т.6. -№5. –С. 861-883.

15 Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Math. Comp.- 1977. - V.31. - P.333.

16 Берикханова М.Е. Об информативных мощностях всевозможных линейных функционалов при дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. -Алматы. -2007.

17 Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. -Москва: Гос.изд.тех.-теорет.лит., 1953. -360 стр.

18 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. -М.: Наука, 1977.

19 Бабенко К.И. Основы численного анализа. -М.:Регулярная и хаотическая динамика, 2002.

20 Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье (Продолжение 1) // Вестник Евразийского национального университета. - 2002. - № 3-4.- С.222-272.

21 Баилов Е.А. Приближенное интегрирование и восстановления функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. КазГУ. -Алматы. -1998.

22 Баилов Е.А., Темиргалиев Н. О дискретизации решений уравнения Пуассона // ЖВМ и МФ. - 2006. -Т.46. -№ 9. - С. 1594-1604.

23 Михлин Н.С. Курс математической физики. -М.: Наука, 1968.

24 Кудайбергенов С.С., Сабитова С.Г. О дискретизации решений уравнения Пуассона накласса Коробова//Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2013.-Т53. -№7. -С.1082–1093.

25 Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. - 1963.-Т148. -№5. -С.1042–1045..
26 Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решений уравнений теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: дисс. ... канд. физ.-мат. наук, КазГУ. -Алматы. -1998.
27 Hua Loo Keng, Wang Yuan Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1981.
28 Ажгалиев Ш.У. О дискретизации решений уравнений теплопроводности // Матем. Заметки.- 2007.- Т. 82. Вып.2.- С. 177-182.
29 Нурмолдин Е. Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из U_2 − классов Ульянова // Сиб. журн. вычисл. математики, РАН. Сиб.отд-ние. -2005.- Т.8. -№ 4.- С. 337-351.
30 Таугынбаева Г.Е. О предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении: PhD диссертация. -Алматы, 2014.
31 Абикенова Ш.К., Темиргалиев Н., Утесов А. О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем. Заметки. -2012. -Т.91. -№ 3. -С. 459-463.
32 Шангиреев Е.И. О восстановлении решений волнового уравнения: дисс. ... канд. физ.-мат. наукю - Караганда, 2002.
33 Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н. Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в метрике $L^{2,\infty}$ // Дифференциальные уравнения.- 2008.- Т.44. -№4. -С.491-506.
34 Темиргалиев Н., Шерниязов К., Берикханова М., Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье// Современные проблемы математики, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН.-2013.-Вып. 17: Математика и информатика, 2. К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы.-С.179–207.
35 Выск Н.Д., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным// Матем. заметки. - 2007. -Т.81. -№6. - С.803–815.
36 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.:Наука, 1976.
37 Wasilkowski G., Wozniakowski H. Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems // J. Complexity. - 1995. - №11. -P.1-56.
38 Темиргалиев Н. Классы $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ и квадратурные формулы//Докл.РАН. -2003. -Т.393. -№5. -С.605-608.
39 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования // Изв.РАН, сер.матем. -2009. -Т.73. -№ 2. -С.183-224.
40 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления// Изв.ВУЗов, матем. -2010. -№3. -С.52-71.
41 Наурызбаев Н. Ж., Темиргалиев Н.,О порядке дискрепанса сетки Смоляка// Матем. заметки. -2009. - Т85. -№6. -С.947–950.
42 Шоманова А.А. О приближении интегрального оператора в L^t - метрике //Вест. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2010.N2.C363-366.
43 Темиргалиев Н. Т. О построении вероятностных мер на функциональных классах //Тр. МИАН. -1997. -№218. -С.397–402.
44 Халмош П. Теория меры. -М.:ИЛ. -1953.
45 Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространство дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения. Матем. анализ. (Итоги науки и техники). -М.:ИНИТИ. -1988. - Т.26. - С. 5-157.
46 Долженко Е.П., Ульянов П. Л. О некоторых вопросах теории функций // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. -1980. -№1. -С. 3–13.
47 Дзядык В. К. , Шевчук И. А. ,Продолжение функций, являющихся на произвольном множестве прямой следами функций с заданным вторым модулем непрерывности// Изв. АН СССР. Сер. матем. -1983. -Т47. -№2. -С.248–267.
48 Дзядык В. К. О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике L^p , Матем. сб. -1956. -Т. 40(82). -№ 2. -С. 239–242.
49 Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными// УМН. 1979. -Т. 34. № 1(205). -С. 17-65.

Н. Темірғалиев, Ғ.Е.Тауғынбаева, Ш.К.Абикенова
Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты,
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнмәтінінде дербес туындылы теңдеулерді дискреттеу

Аннотация. 1996 жылдан бастап мақсаты дәл емес мәліметпен берілген математикалық моделге тиімді компьютерлік өңдеу жасау болып табылатын Компьютерлік (есептеуіш) диаметр идеясы біртіндеп дамыды.

К(Е)Д-схемасы, біздің ойымызша, Жуықтау теориясы, Есептеу математикасы және Сандық анализде жүргізілетін зерттеулердің нақтыланған жоспарын (ұйымдастыруын) анықтайды.

Бұл мақала К(Е)Д-тәсілдің дербес туындылы теңдеулер теориясындағы қолданысына арналған. Лаплас, Пуассон, жылуөткізгіштік, толқындық сияқты тарихи негіздегі теңдеулермен қатар салыстырмалы түрде бертінгі Клейна-Гордон теңдеуі зерттеліп, алынған теоремалар иллюстративті нәтижелер ретінде К(Е)Д-қойылымының сапасы мен тиімділігін көрсетеді.

Ұсынылып отырған материалдар дербес туындылы теңдеулер шешімін оптималді дискретизациялауда зерттеуді берілген бағытты кеңейте және тереңдете отырып жалғастыру үшін қолданылады.

Түйін сөздер: Компьютерлік (есетеуіш) диаметр (қысқаша К(Е)Д), дәл және дәл емес мәліметтер бойынша дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін дисретизациялар, шектік қателік.

N. Temirgaliyev, G.E. Taugynbaeva, Sh.K. Abikenova

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Discretization of solutions of partial differential equations in the context of the Computational (numerical) diameter

Abstract: Since 1996, the idea of a Computational (numerical) diameter has been consistently developed, the goal of which is to optimally computer process models of mathematical models in real conditions of distorted data.

The C(N)D-scheme, in our opinion, determines the refined organization of research in Approximation theory, Computational mathematics, and Numerical analysis.

The paper is devoted to the coverage of the C(N)D -approach in the theory of partial differential equations. The examples of the historically original Laplace, Poisson, heat conduction, wave and, relatively recently Klein-Gordon equations give theorems as illustrative results of the quality and efficiency of C(N)D-productions.

The presented materials can serve to continue the study of the optimal discretization of solutions of partial differential equations with further expansion and deepening of the proposed direction.

Keywords: Computer (computational) diameter (abbreviated C(N)D), discretization of solutions of partial differential equations by accurate and inaccurate information, limit error.

References

1 Temirgaliev N., Zhubanysheva A.Zh. Computational (Numerical) diameter in a context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ), N 1, 89-97(2019).

2 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 124(3), 8-88 (2018).

3 Temirgaliev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e [Number-theoretic methods and probability-theoretic approach to the problems of analysis. Theory of investments and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University[Vestnik Evrazijskogo universiteta], (3), 90–144(1997).[in Russian].

4 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series.], Vest. ENU im. L. N. Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L. N. Gumilyov Eurasian National University], 1-194 (2010).

5 Temirgaliyev N. Nepreryvnaja i diskretnaja matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravlenij issledovanij [Continuous and discrete mathematics in organic unity in the context of research directions], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV [Electronic edition. IThMandSC], Astana, 1-256(2012).

6 Temirgaliyev N. Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series, 125(4), 8-68 (2018).

7 Koljada V.I. O vlozhenii nekotoryh klassov funkcij mnogih peremennyh[On the embedding of some classes of functions of several variables], Sib. mat. zhurnal[Siberian Mathematical Journal], (4), 766-790(1973). [in Russian]

8 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize[Number theoretic methods in approximate analysis] (Fizmatgiz, Moscow, 1963). [in Russian]

9 Ul'yanov P.L. On classes of infinitely differentiable functions, Mat. Sb., 181(5), 589–609(1990).
10 Orazkulova B. Polnoe K(V)P (Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik) issledovanie uravnenii v chastnyh proizvodnyh [Complete C(N)D (Computational (Numerical) Diameter) equation research in partial derivatives]: magistrskaja dissertacija po special'nosti 6M060100 – "Matematika" [master's thesis on 6M060100 - "Mathematics" specialty]. L.N.Gumilyov Eurasian National University. Astana. 2016.
11 Temirgaliev N. , Abikenova Sh. K. , Zhubanysheva A. Zh. , Taugynbaeva G. E. Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ), **57**(8), 75-80(2013).
12 Laks P. Matematika i vychislenija[Mathematics and Computing] In Matematika: granicy i perspektivy [Mathematics: boundaries and perspectives] (FAZIS, Moscow, 2005, 175-192).
13 Fedorenko R.P. The speed of convergence of one iterative process, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 4(3), 559–564(1964).
14 Bakhvalov N.S. On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 6(5), 861–883(1966).
15 Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems, Math. Comp., **31**, 333(1977).
16 Berikhanova M.E. Ob informativnyh moshhnostjah vsevozmozhnyh linejnyh funkcionalov pri diskretizacii reshenij zadachi Dirihle dlja uravnenija Laplasa [On the informative powers of all possible linear functionals with discretization of solutions of the Dirichlet problem for the Laplace equation]: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. [diss. ... Cand. Phys.-Mat. sciences] Almaty. 2007.
17 Petrovskij I.G. Lekcii ob uravnenijah s chastnymi proizvodnymi [Lectures on partial differential equations] (Gos.izd.teh.-teoret.lit., Moskow, 1953, 360 p.).
18 Nikol'skij S.M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozhenija[Approximation of functions of several variables and embedding theorems] (Nauka, Moscow, 1977).
19 Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza[Basics of numerical analysis] (Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika[Regular and chaotic dynamics], Moscow, 2002).
20 Temirgaliev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham Analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e (Prodolzhenie 1)[Theoretical-numerical methods and probabilistic theoretic approach to the problems of Analysis. The theory of investments and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series (Continued 1)], Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta [Bulletin of the Eurasian National University], (3-4), 222-272(2002).
21 Bailov E.A. Priblizhennoe integrirovanie i vosstanovlenija funkcij iz anizotropnyh klassov i vosstanovlenie reshenij uravnenija Puassona [Approximate integration and recovery of functions from anisotropic classes and recovery of solutions of the Poisson equation]: diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk. KazGU [diss. . . . cand. phys.-mat. sciences]. Almaty. 1998.
22 Bailov E. A. , Temirgaliev N. Discretization of the solutions to Poisson's equation, Computational mathematics and mathematical physics, 46(9), 1515-1525(2006).
23 Mihlin N.S. Kurs matematicheskoj fiziki[Course of mathematical physics] (Nauka, Moscow, 1968).
24 Kudaibergenov S.S., Sabitova S.G. Discretization of solutions to Poisson's equation in the Korobov class, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **53**(7), 1082–1093(2013).
25 Smolyak S.A. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 148(5), 1042–1045(1963).
26 Shernijazov K. Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravnenija teploprovodnosti s funkcijami raspredelenija nachal'nyh temperatur iz klassov E, SW i V: Kandidatskaja dissertacija [Approximate recovery of functions and solutions of the heat equation with distribution functions of initial temperatures from classes E, SW and B: Candidate dissertation.], Almaty, 1998.[in Russian].
27 Hua Loo Keng, Wang Yuan Application of Number Theory to Numerical Analysis (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981).
28 Azhgaliev Sh. On the discretization of solutions of the heat equation, Mathematical Notes, **82**(2), 153-158(2007).
29 Nurmoldin E. E. Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the Ul'yanov U2-classes, Sib. Zh. Vychisl. Mat., **8**(4), 337-351(2005).
30 Taugynbaeva G.E. O predel'noj pogreshnosti netochnoj informacii pri optimal'nom vosstanovlenii: PhD-dissertacija po special'nosti 6D060100-Matematika[On the marginal error of inaccurate information with optimal recovery: PhD-dissertation on the specialty 6D060100-Mathematics. Kazakh National University named after al-Farabi]. Kazahskij nacional'nyj universitet imeni al'-Farabi, Almaty. 2013.[in Russian].
31 Abikenova Sh. K., Temirgaliev N., Utesov A. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes, Mathematical Notes, 91(3), 121-125 (2012).
32 Shangireev E.I. O vosstanovlenii reshenij volnovogo uravnenija[On the recovery of solutions of the wave equation]: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk.[diss. ... cand. phys.-mat. science] Karaganda, 2002.
33 Ibatulin I. , Temirgaliev N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretithation of the solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of L2, 8 , Differential equation, 44(4), 510-526 (2008).

34 Temirgaliev N., Sherniyazov K.E., Berikhanova M.E. Exact Orders of Computational (Numerical) Diameters in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein–Gordon Equation from Fourier Coefficients//Sovrem. Probl. Mat., 17, 179–207 (2013).
35 Vysk N.D., Osipenko K.Yu. Optimal Reconstruction of the Solution of the Wave Equation from Inaccurate Initial Data, Mat. Zametki, 81(6), 803–815(2007).
36 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis] (Nauka, Moscow, 1976).
37 Wasilkowski G., Wozniakowski H. Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems, J. Complexity, (11), 1-56(1995).
38 Temirgaliev N. Classes $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ and quadrature formulas, Dockland mathematics, **68**(3), 414-415 (2003).
39 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration, Izvestiya: Mathematics, 73(2), 393-434(2009).
40 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. Applications of Smolyak quadrature formulas to the numerical integration of Fourier coefficients and in function recovery problems, Russian Mathematics (Iz VUZ), **54**(3), 45-62(2010).
41 Nauryzbayev N., Temirgaliyev N. An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration, Found Comput Math, 12, 139-172(2012).
42 Shomanova A.A. O priblizhenii integral'nogo operatora v L^t - metrike [On the approximation of an integral operator in the L^t - metric], Vest. ENU im. L.N. Gumileva [Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University], 2010.N2.S363-366.
43 Temirgaliev N. On the Construction of Probability Measures on Functional Classes, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 218, 396-401(199).
44 Halmosh P. Teorija mery [Theory of Measure] (IL, Moscow, 1953).
45 Kudrjavcev L.D., Nikol'skij S.M. Prostranstvo differenciruemyh funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozhenija. Matem. analiz. (Itogi nauki i tehniki) [The space of differentiable functions of many variables and embedding theorems. Mat analysis. (Results of science and technology)]. Moscow:INITI, 26, 5-157(1988).
46 Dolzhenko E.P., Ul'janov P. L. O nekotoryh voprosah teorii funkcij [On Some Questions of the Theory of Functions], Vestn. MGU. Ser. matem., meh.[Vestn. Moscow State University. Ser. Math.], (1), 3–13(1980).
47 Dzyadyk V.K., Shevchuk I.A. Extension of functions that are traces on an arbitrary subset of the line of functions with given second modulus of continuity, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 47(2), 248–267(1983).
48 Dzjadyk V.K. O prodolzhenii funkcij, udovletvorjajushhih usloviju Lipshica v metrike Lp [On the extension of functions that satisfy the Lipschitz condition in the Lp metric], Matem. sb. [Mat. Sat], 40(82)(2), 239–242(1956).
49 Vodop'yanov S. K., Gol'dstein V. M., Reshetnyak Yu. G. On geometric properties of functions with generalized first derivatives, Russian Math. Surveys, 34(1(205)), 19-74(1979).

Сведения об авторах:

Темиргалиев Н. – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Таугынбаева Г.Е. – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Абикенова Ш.К. – кандидат физико-математических наук, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан.

Temirgaliyev N. – -Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Taugynbayeva G. E. – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Abikenova Sh. K. – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 7.02.2019

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Тех- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады. Мақаламен бірге авторлар редакцияға ілеспе хат жолдаулары қажет.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***. Authors also need to submit a cover letter.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.* А также авторам необходимо представить в редакцию Сопроводительне письмо.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*

Бас редактор: Н. Темірғалиев

Жауапты редактор: А. Ж. Жұбанышева
Жауапты хатшы: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2019. 1(126)- Астана: ЕҰУ. 80-б.
Шартты б.т. - 16. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Нұр-Сұлтан қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: +7 (7172) 70-95-00(ішкі 31-410)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды