

Мақала
ETAMP: 27.25.19

К(Е)Д–ҚОЙЫЛЫМЫНДА АНИЗОТРОПТЫ ЖАЛПЫЛАНҒАН СОБОЛЕВ КЛАСЫ ФУНКЦИЯЛАРЫН ОПТИМАЛДЫ ЖУЫҚТАУ

А.Б. Утесов , Г.И. Утесова *

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Әлия Молдағұлова даңғылы 34, Ақтөбе, Қазақстан

*corresponding author: ugi_a@mail.ru

Аннотация. Мақалада анизотропты жалпыланған $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}$ Соболев класынан алынған функцияларды жуықтау есебі Компьютерлік (есептеуіш) диаметр тұрғысынан толық шешілген. Периодты функцияларды олардың тригонометриялық Фурье коэффициенттерінің кему жылдамдығы бойынша классификациялау негізінде алынған анизотропты жалпыланған $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}$ Соболев класы дәрежелік шкаладағы анизотропты $W_2^{r_1, \dots, r_s}$ Соболев класымен салыстырғанда дәл әрі терең шкаладағы класс болып табылады. Жұмыста зерттелінді класс функцияларын сызықтық функционалдар түріндегі мәліметтер бойынша құрылған есептеу агрегаттарымен жуықтау қателігінің тұрақтыға дейінгі дәлдікпен жоғарыдан және төменнен бағалаулары алынған. Және де, тригонометриялық Фурье коэффициенттері негізінде оптималды есептеу агрегаты құрылып, түрі айқын жазылған. Сонымен қатар, төменнен бағалаудағы $(l^{(N)}, \varphi_N)$ есептеу агрегаттар жиыны барлық мүмкін ортонормаланған жүйелерге сәйкес Фурье қатарларының дербес қосындыларын, арнайы ұйытқыларды, ортодиаметрлерді, сызықтық диаметрлерді, вейвлеттер мен гриди алгоритмдерді қамтығандықтан жектілікті кең жиын болып табылады. Мақалада қойылған есептің екінші бөліміне сәйкес тригонометриялық Фурье коэффициенттері түріндегі сызықтық мәліметтердің оптималділікті жоғалтпайтын және реті бойынша жақсартылматын $\bar{\varepsilon}_N$ қателігі анықталды. Ал үшінші бөлігі бойынша Фурье коэффициенттері негізінде құрылған барлық есептеу агрегаттарының шектік қателігі анықталған $\bar{\varepsilon}_N$ шамасынан аспайтындығы дәлелденді.

Түйін сөздер: Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, сызықтық функционалдар, есептеу агрегаты, функцияларды оптималды жуықтау, шектік қателік, анизотропты жалпыланған Соболев класы

DOI: <https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/3.2>

2000 Mathematics Subject Classification: 41A30; 41A45

1. Кіріспе

Функцияларды жуықтау есебі әртүрлі қойылымдарда зерттелген (толығырақ [1]–[5] еңбектер мен ондағы библиографияларды қараңыз). Бұл жұмыста анизотропты жалпыланған Соболев класы функцияларын оптималды жуықтау есебі «Компьютерлік (есептеуіш) диаметр» (қысқаша К(Е)Д) қойылымында шешілген. Бірінен кейін бірі тізбектей шығарылатын,

әрқайсысы өз алдына жеке мәселе болып табылатын $K(E)D-1$, - 2 және - 3 есептерінің жинақталған $K(E)D$ қойылымы туралы толыққанды мәліметті [6] мақаласынан табуға болады.

$K(E)D-1$ есебі – бұрыннан белгілі «оптималды жуықтау қателігінің дәл ретін табу» есептерінің жалпылауы болып табылады. Ал $K(E)D-2$ есебінің екінші бөлігі және $K(E)D-3$ есептері жуықтаулар теориясында бұрын-соңды қарастырылмаған – жаңа есептер. $K(E)D-2$ есебінде оптималды жуықтау қателігінің дәл ретін жүзеге асыратын есептеу агрегатының шектік қателігі анықталады, ал $K(E)D-3$ есебінде екінші есепте анықталған шектік қателіктің ауқымдылығы, яғни шектік қателіктері осы шамадан аспайтын есептеу агрегаттарының жиыны анықталады.

Енді $K(E)D$ есебінің қысқаша қойылымына тоқталайық. D_N, T, F, Y берілсін (анықтамалары төменде келтіріледі). Барлық сатыларға ортақ және негізгі болатын

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N, T, F, Y) = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N), T, F, Y), \quad (1)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} & \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N), T, F, Y) = \\ & = \sup_{f \in F} \sup_{|\gamma_N^{(1)}| \leq 1, \dots, |\gamma_N^{(N)}| \leq 1} \left\| (Tf)(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N; \cdot) \right\|_Y \end{aligned}$$

және ε_N - теріс емес мүшелі тізбек, $F - \Omega_F$ жиынында анықталған функциялар жиыны, $Y - \Omega_Y$ жиынында анықталған функциялардың нормаланған кеңістігі, $T - F$ класын Y кеңістігіне бейнелейтін оператор, $l^{(N)} \equiv l^{(N)}(f) = (l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f)) - F$ класының f функциясы туралы $l_N^{(1)} : F \mapsto C, \dots, l_N^{(N)} : F \mapsto C$ функционалдарынан алынған сандық мәлімет, φ_N - әрбір бекітілген $(z_1, \dots, z_N) \in C^N$ үшін тек y айнымалысынан тәуелді болып, Y кеңістігінде жататын $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; y) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C$ функциясы, $D_N - (l^{(N)}, \varphi_N)$ жұптарынан құралған жиын.

y айнымалысына тәуелді сандық $\varphi_N(l_N^{(1)}(f), \dots, l_N^{(N)}(f); y)$ функциясы ретіндегі $(l^{(N)}, \varphi_N)$ жұбы бұдан әрі есептеу агрегаты деп аталады.

Және де, оң $\{a_n\}_{n \geq 1}$ және $\{b_n\}_{n \geq 1}$ тізбектері үшін $a_n \asymp b_n$ жазуы n -нен тәуелсіз қайсыбір $A > 0$ және $B > 0$ шамалары мен барлық n үшін $Aa_n \leq b_n \leq Ba_n$ теңсіздіктерінің орындалатынын білдіреді.

$K(E)D-1$. $\asymp \delta_N(0; D_N, T, F, Y)$ шамасының дәл реті анықталады, яғни $\delta_N(0; D_N, T, F, Y) \asymp \psi_N$ қатынасы орындалатындай қандай да бір $\{\psi_N\}_{N \geq 1}$ оң тізбегі табылады және

$$\delta_N(0; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N), T, F, Y) \asymp \psi_N$$

болатын $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N) \equiv \bar{\varphi}_N(\bar{l}_N^{(1)}(f), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f); \cdot)$ есептеу агрегаты құрылады (осы жағдайда $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ есептеу агрегатын оптималды деп те атайды);

$K(E)D-2$. $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ есептеу агрегаты үшін $\delta_N(\bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N), T, F, Y) \asymp \psi_N$ қатынасы және $+\infty$ -ке өсіп ұмтылатын кез келген оң η_N тізбегі үшін

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N), F, Y)}{\psi_N} = +\infty$$

теңдігі орындалатындай $\bar{\varepsilon}_N > 0$ тізбегінің $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ есептеу агрегатының шектік қателігі бар болу және оны анықтау есебі зерттеледі;

$K(E)D-3$. Шектік қателіктің ауқымдылығы анықталады: $+\infty$ -ке өсіп ұмтылатын кез келген η_N оң тізбегі үшін

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N), F, Y)}{\psi_N} = +\infty$$

теңдігі орындалатындай $(l^{(N)}, \varphi_N)$ есептеу агрегаттарының жиыны құрылады.

(1) өрнегіндегі F класын, Y кеңістігін, $T : F \mapsto Y$ бейнелеуін және D_N жиынын нақтылай отырып, К(Е)Д –қойылымындағы оптималды жуықтаудың әртүрлі есептеріне келеміз (мысалы, [7]-[11] жұмыстарын қараңыз).

Анизотропты жалпыланған Соболев класы анықтамасы. Әрбір $r > 0$ санына $[0, 1]$ сегментінде кемімейтін және үзіліссіз ω_r функциясы сәйкес қойылған болсын. Егер $\omega_r(0) = 0$ болып, қайсыбір $C_0(r) \geq 0$ шамасы мен барлық $0 < \delta < \mu \leq 1$ үшін $\frac{\omega_r(\mu)}{\mu^r} \leq C_0(r) \frac{\omega_r(\delta)}{\delta^r}$ теңсіздігі орындалса, онда ω_r функциясы *r-ретті тегістік модулі типті функция* деп аталады.

$r_1 > 0, \dots, r_s > 0 (s = 2, 3, \dots)$ -ретті тегістік модулі типті $\omega_{r_1}(\delta), \dots, \omega_{r_s}(\delta)$ функциялары берілсін. Сонда әрбір айнмалысы бойынша бірпериодты, $[0, 1]^s$ бірлік кубында Лебег мағынасында интегралданатын,

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m,x)}, m \in Z^s$$

тригонометриялық Фурье-Лебег коэффициенттері

$$\sum_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)|^2 \left(\omega_{r_1}^{-2} \left(\frac{1}{\max\{1, |m_1|\}} \right) + \dots + \omega_{r_s}^{-2} \left(\frac{1}{\max\{1, |m_s|\}} \right) \right) \leq 1$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ функцияларының жиыны анизотропты жалпыланған Соболев класы деп аталады да, $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s$ символымен белгіленеді.

Осы уақытқа дейін анизотропты жалпыланған Соболев класы [12] жұмысында функциялар мен жылжуөткізгіштік теңдеуінің шешімдерін гильберттік метрикада оптималды жуықтау есептерінде қарастырылғанын айта кетейік. Сондай-ақ, [13] мақаласында алғашқы шарттары $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s$ класына тиесілі толқындық теңдеу шешімдері оптималды дискреттелген.

2. Негізгі нәтижелер

Мақалада L_N арқылы сызықтық $l_N^{(1)} : W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s \mapsto C, \dots, l_N^{(N)} : W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s \mapsto C$ функционалдарына сәйкес $(l^{(N)}, \varphi_N)$ есептеу агрегаттарының жиыны белгіленіп,

$$Tf = f, F = W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}(0, 1)^s, Y = L^q(0, 1)^s, D_N = L_N$$

нақтылануларында анизотропты жалпыланған Соболев класына тиесілі f функцияларын L_N жиынынан алынған есептеу агрегаттарымен $L^q, 2 \leq q \leq \infty, L^\infty(0, 1)^s \equiv C[0, 1]^s$ – метрикасында оптималды жуықтау есебі зерттеледі.

Жұмыстың маңыздылығы – оптималды жуықтаудың ψ_N дәл ретін және $\bar{\varepsilon}_N$ шектік қателігін табуда В.И. Коляда [14] жұмысында енгізген, үзіліссіздік модулінің орташа функциясы деген атауға ие $\Omega_{r_1, \dots, r_s}(\delta), \delta \in [0, 1]$ функциясының қолданылуы. Бұл функция $[0, 1]$ сегментінде қатаң өсетін, $\omega_{r_1}(\delta), \dots, \omega_{r_s}(\delta)$ тегістік модулі типті функциялары арқылы анықталады: егер

$$\bar{\omega}_{r_1}(\delta) = \omega_{r_1}(\delta)/\omega_{r_1}(1), \dots, \bar{\omega}_{r_s}(\delta) = \omega_{r_s}(\delta)/\omega_{r_s}(1)$$

және

$$\bar{\Omega}_{r_1, \dots, r_s}(\delta) = \prod_{i=1}^s \bar{\omega}_{r_i}^*(\delta)$$

болса, онда әрбір $\delta \in [0, 1]$ нүктесіне $\Omega_{r_1, \dots, r_s}(\delta) = \bar{\Omega}_{r_1, \dots, r_s}^*(\delta)$ саны сәйкес қойылады, мұнда g^* арқылы g функциясына кері функция белгіленген.

Енді негізгі нәтижелерді келтірейік.

Теорема 1. $s = 2, 3, \dots, 2 \leq q \leq \infty$ сандары және $[0, 1]$ сегментінде қатаң өспелі, қайсыбір $C_1(r_i) > 0 (i = 1, \dots, s)$ шамасы мен барлық $0 \leq \delta, \eta \leq 1$ үшін

$$\omega_{r_i}(\delta\eta) \leq C_1(r_i)\omega_{r_i}(\delta)\omega_{r_i}(\eta) \quad (2)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын r_i ретті тегістік модулі типті ω_{r_i} функциясы берілсін. Егер

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \Omega_{r_1, \dots, r_s}^2 \left(\frac{1}{2^\tau} \right) \cdot 2^\tau < \infty \quad (3)$$

және әрбір $K = 1, 2, \dots$ үшін

$$N_i \equiv N_i(K) = [1/\bar{\omega}_{r_i}^*(\Omega_{r_1, \dots, r_s}(1/K))], A_K = \{m \in Z^s : |m_1| \leq N_1, \dots, |m_s| \leq N_s\}$$

болса, онда барлық $N \equiv N(K) = \prod_{i=1}^s (2N_i + 1)$ үшін

$$\delta_N(0; L_N, Tf = f, W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}, L^q) \asymp \delta_N(0; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N), Tf = f, W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}, L^q) \asymp$$

$$\asymp \frac{N^{1/2}}{N^{1/q}} \Omega_{r_1, \dots, r_s} \left(\frac{1}{N} \right),$$

қатынастары орындалады, мұндағы $[a]$ саны a санының бүтін бөлігін білдіреді, $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ есептеу агрегаты A_K жиынының қайсыбір $\{\tilde{m}^{(1)}, \dots, \tilde{m}^{(N)}\}$ реттелуі бойынша

$$\bar{l}_N^{(1)}(f) = \hat{f}(\tilde{m}^{(1)}), \dots, \bar{l}_N^{(N)}(f) = \hat{f}(\tilde{m}^{(N)}), \bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x) = \sum_{\nu=1}^N z_\nu e^{2\pi i(\tilde{m}^{(\nu)}, x)}$$

теңдіктерімен анықталған.

Теорема 2. Оптималды $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ есептеу агрегаты үшін $\bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \Omega_{r_1, \dots, r_s} \left(\frac{1}{N} \right)$ тізбегі шектік қателік болады.

Теорема 3. Әрбір $N = N(K)$ үшін Φ_N символымен $l_N^{(1)}(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N^{(N)}(f) = \hat{f}(m^{(N)})$ Фурье коэффициенттеріне сәйкес $(l^{(N)}, \varphi_N)$ есептеу агрегаттарының жиыны белгіленсін. Онда кез келген $(l^{(N)}, \varphi_N) \in \Phi_N$ үшін

$$\overline{\lim}_{K \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N, (l^{(N)}, \varphi_N), Tf = f, W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}, L^q)}{\delta_N(0; L_N, Tf = f, W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}, L^q)} = +\infty$$

теңдігі орындалады.

Ескерту. (2) шартын тригонометриялық Фурье қатарларының абсолютті жинақтылығын зерттеуде П.Л.Ульянов [15] енгізген. Бұл шартты дәрежелік функциялармен қоса параметрлері $r > 0, \gamma > 0, M \geq \max\{e^2, 2e^{\gamma/r}\}$ болатын

$$\omega_r(\delta) = \begin{cases} \delta^r \ln^\gamma(M/\delta), & \text{егер } \delta \in (0, 1], \\ 0, & \text{егер } \delta = 0 \end{cases}$$

функциялары да қанағаттандырады.

Егер әрбір $i = 1, 2, \dots, s$ үшін параметрлері $r_i > 0, \alpha_i \geq 0, M_i \geq \max\{e^2, 2e^{\alpha_i/r_i}\}$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын

$$\tilde{\omega}_{r_i}(\delta) = \begin{cases} \delta^{r_i} \ln^{\alpha_i}(M_i/\delta), & \text{егер } \delta \in (0, 1], \\ 0, & \text{егер } \delta = 0 \end{cases}$$

функциялары және $\lambda \equiv (\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_s})^{-1}$ болса, онда

$$\tilde{\omega}_{r_i}^*\left(\frac{1}{N}\right) \asymp N^{-\frac{1}{r_i}} (\ln(2N))^{-\frac{\alpha_i}{r_i}}, \tilde{\Omega}_{r_1, \dots, r_s}\left(\frac{1}{N}\right) \asymp N^{-\lambda} (\ln(2N))^{\lambda(\frac{\alpha_1}{r_1} + \dots + \frac{\alpha_s}{r_s})} \quad (4)$$

қатынастары орындалып, (3) шарты $\lambda > 1/2$ шартына эквивалентті болады.

[16] мақаласында $r_\tau > 0, \beta_\tau \in R(\tau = 1, \dots, s)$ сандары үшін әрбір айнымалысы бойынша бір периодты, $[0, 1]^s$ бірлік кубында Лебег бойынша интегралданатын, $\hat{f}(m)$ тригонометриялық Фурье – Лебег коэффициенттері

$$\sum_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)|^2 (\bar{m}_1^{2r_1} \ln^{2\beta_1}(\bar{m}_1 + 1) + \dots + \bar{m}_s^{2r_s} \ln^{2\beta_s}(\bar{m}_s + 1)) \leq 1, (\bar{m}_\tau = \max \{1, |m_\tau|\})$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ функцияларының $W_2^{r;\beta} = W_2^{r_1, \dots, r_s; \beta_1, \dots, \beta_s}(0, 1)^s$ класы енгізілген. $\beta_1 \leq 0, \dots, \beta_s \leq 0$ мәндерінде $W_2^{\tilde{\omega}_r} \equiv W_2^{\tilde{\omega}_{r_1}, \dots, \tilde{\omega}_{r_s}}(0, 1)^s$ класы функцияларын қандай да бір тұрақты шамаға көбейту арқылы $W_2^{r;\beta}$ класын алуға болады. Сондықтан жоғарыдағы үш теоремадан, (4) қатынастары мен (3) шартының $\lambda > 1/2$ шартына эквивалентті болатынын ескерсек, $W_2^{r;\beta}$ класы функцияларын оптималды жуықтау есебіне байланысты келесі тұжырымдар шығады.

Салдар 1. $s = 2, 3, \dots, 2 \leq q \leq \infty, r_1 > 0, \dots, r_s > 0, \beta_1 \leq 0, \dots, \beta_s \leq 0$ сандары берілсін және $\lambda > 1/2$ шарты орындалсын. Егер әрбір $K = 2, 3, \dots$ үшін

$$N_i \equiv N_i(K) = [K^{\lambda/r_i} (\ln K)^{-\lambda(\beta_1/r_1 + \dots + \beta_s/r_s)/r_i} (\ln K)^{\beta_i/r_i}]$$

болса, онда барлық $N \equiv N(K) = \prod_{i=1}^s (2N_i + 1)$ үшін

$$\delta_N(0; L_N, Tf = f, W_2^{r;\beta}, L^q) \asymp \delta_N(0; (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N), Tf = f, W_2^{r;\beta}, L^q) \asymp$$

$$\asymp \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{\lambda(\ln N)^{\lambda(\beta_1/r_1 + \dots + \beta_s/r_s)}}}.$$

Салдар 2. $f \in W_2^{r;\beta}$ жағдайында оптималды $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ есептеу агрегаты үшін

$$\bar{\varepsilon}_N = \frac{1}{N^{\lambda+1/2} (\ln N)^{\lambda(\beta_1/r_1 + \dots + \beta_s/r_s)}}$$

тізбегі шектік қателік болады.

Салдар 3. Әрбір $(l^{(N)}, \varphi_N) \in \Phi_N$ үшін

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(\eta_N \bar{\varepsilon}_N, (l^{(N)}, \varphi_N), Tf = f, W_2^{r;\beta}, L^q)}{\delta_N(0; L_N, Tf = f, W_2^{r;\beta}, L^q)} = +\infty$$

теңдігі орындалады.

3. Қорытынды

К(Е)Д - 2 және К(Е)Д - 3 есептерін шешуге арналған зерттеу жұмыстарында (функциялар мен олардың туындылары және интегралдарын оптималды жуықтау есептерінде, математикалық физиканың классикалық теңдеулерін оптималды дискреттеу есептерінде) осы уақытқа дейін анизотропты жалпыланған Соболев класы қарастырылмаған. Сондықтан бұл мақала нәтижелері жуықтаулар теориясында, сандық анализ, есептеу математикасы бағыттарында алынған жаңа ғылыми нәтижелер қатарынан орын алатыны сөзсіз.

Авторлар үлесі. Авторлардың үлесі тең.

Әдебиеттер тізімі

- 1 Dinh Dung, Temlyakov V.N., Tino Ullrich. Hyperbolic Cross Approximation. arXiv:1601.03978v1[math.NA]. -2016. -154 p.
- 2 Temlyakov V. Multivariate Approximation. -Cambridge: Cambridge University Press, 2018. -551 p.
- 3 Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems // Journal of Complexity. -2022. -Vol. 71. -P. 101653.

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2025, Том 152, №3
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2025, Том 152, №3

- 4 Ажгалиев Ш. У., Темиргалиев Н. Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω // Матем. сб. -2007. -Т. 198. № 11ю -С. 3–20.
- 5 Темиргалиев Н. , Жубанышева А. Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления // Изв. вузов. Матем. -2019. № 1. -С. 89–97.
- 6 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, вычислительная математика и численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник ЕНУ имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 124. №3. -С. 8 – 88.
- 7 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. -2015. -Т. 55. № 9. -С. 1474–1485.
- 8 Темиргалиев Н., Жубанышева А. Ж. Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения // Изв. вузов. Матем. – 2017. № 3. -С. 89–95.
- 9 Utesov A.B., Bazarkhanova A.A. On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit // Differential Equations. -2021. -Vol. 57 (12). -P. 1726-1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168
- 10 Utesov A.B. Optimal Recovery of Functions from Numerical Information on Them and Limiting Error of the Optimal Computing Unit // Mathematical Notes. -2022. -Vol. 111(5). -P. 759 – 767. DOI: 10.1134/S0001434622050108
- 11 Taugynbayeva G., Azhgaliev Sh., Zhubanysheva A., Temirgaliyev N. Full C(N)D – study of computational capabilities of Lagrange polynomials // Mathematics and Computers in Simulation. -2025. -Vol. 227. -P. 189-208.
- 12 Утесов А.Б. Задача восстановления функций и интегралов на обобщенных классах и решения уравнения теплопроводности: дисс. кандидата физ.- мат. наук. Алматы, 2001.
- 13 Abikenova Sh., Utesov A., Temirgaliev N. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Clases // Mathematical notes. -2012. -Vol. 91(3). -P. 430-434.
- 14 Kolyada V.I. The embedding of certain classes of functions of several variables //Siberian Mathematical Journal. -1973. -Vol. 14:4. -P. 530 - 546.
- 15 Ul'yanov P.L. Absolute convergence of trigonometric Fourier series // Doklady Mathematics. – 1992. -Vol. 45. No 1. -P. 83-88.
- 16 Утесов А.Б. Оптимальное восстановление функций из анизотропных классов Соболева в степенно-логарифмической шкале // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика. -2021. -Т. 136. № 3. -С. 37-41.

Optimal C(N)D-recovery of functions from the anisotropic generalized Sobolev class

A.B.Utessov, G.I.Utessova

K.Zhubanov Aktobe Regional University, A. Moldagulova ave., 34, Aktobe, 030000, Kazakhstan

Abstract. In this paper, the problem of recovering functions from an anisotropic generalized Sobolev class in the context of the computational (numerical) diameter is completely solved. The anisotropic generalized Sobolev class $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}$, which arises from the classification of periodic functions according to the rate of decay of their trigonometric Fourier coefficients, represents a finer scale of function characteristics than the anisotropic Sobolev class $W_2^{r_1, \dots, r_s}$ in the power scale. The paper presents two-sided estimates, up to multiplicative constants, for the approximation error of functions from the considered class by computational aggregates constructed from information given in the form of linear functionals. In addition, based on trigonometric Fourier coefficients, the optimal computational aggregate is explicitly constructed. It is noted that the set of computational aggregates $(l^{(N)}, \varphi_N)$ used in the lower bounds is sufficiently wide, containing all partial sums of Fourier series with respect to various orthonormal systems, all possible finite convolutions with special kernels, as well as all finite approximation sums used in orthogonal widths, linear widths, and greedy algorithms. Furthermore, in the second part of the paper, the limiting error $\bar{\varepsilon}_N$ of numerical information in the form of trigonometric Fourier coefficients is obtained, which preserves the optimality of the computational aggregate and cannot be improved in order. In the third part, it is proved that all computational aggregates constructed using trigonometric Fourier coefficients do not have a limiting error greater than $\bar{\varepsilon}_N$.

Keywords: Computational (numerical) diameter, linear functionals, computational aggregate, optimal recovery of functions, limiting error, anisotropic generalized Sobolev class.

Оптимальное восстановление функций из обобщенного анизотропного класса Соболева в контексте К(В)П

А.Б.Утесов, Г.И.Утесова

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, пр. А. Молдагуловой, 34, Актобе, 030000, Казахстан

Аннотация. В статье полностью решена задача восстановления функций из анизотропного обобщенного класса Соболева $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}$ в контексте компьютерного (вычислительного) перечника. Анизотропный обобщенный класс Соболева $W_2^{\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_s}}$ как результат классификации периодических функций по скорости убывания их тригонометрических коэффициентов Фурье является более тонкой шкалой характеристики функций по сравнению с анизотропным классом Соболева $W_2^{r_1, \dots, r_s}$ в степенной шкале. В работе получены двусторонние оценки с точностью до константы для погрешности приближения функций из рассматриваемого класса вычислительными агрегатами, построенными по информации, заданной линейными функционалами. Кроме того, на основе тригонометрических коэффициентов Фурье в явном виде построен оптимальный вычислительный агрегат, обеспечивающий наилучшее приближение. Отметим, что множество вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$ в оценке снизу является достаточно широким множеством, содержащим все частичные суммы рядов Фурье по всевозможным ортонормированным системам, всевозможные конечные свертки со специальными ядрами, а также все конечные суммы приближения, использующиеся в ортоперечниках, линейных перечниках и жадных алгоритмах. В статье согласно второй части поставленной задачи найдена погрешность $\bar{\varepsilon}_N$ числовой информации вида тригонометрических коэффициентов Фурье, сохраняющая оптимальность вычислительного агрегата и неупрощаемая по порядку. В третьей части доказано, что все построенные по тригонометрическим коэффициентам Фурье вычислительные агрегаты не имеют большей предельной погрешности чем $\bar{\varepsilon}_N$.

Ключевые слова: Компьютерный (вычислительный) перечник, линейные функционалы, вычислительный агрегат, оптимальное восстановление функций, предельная ошибка, анизотропный обобщенный класс Соболева.

References

- 1 Dinh Dung, Temlyakov V.N., Tino Ullrich. Hyperbolic Cross Approximation. arXiv:1601.03978v1[math.NA]. 2016. 154 p.
- 2 Temlyakov V. Multivariate Approximation. Cambridge: Cambridge University Press. 2018. 551 p.
- 3 Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems, Journal of Complexity. 2022. Vol. 71. P. 101653.
- 4 Azhgaliev Sh. U., Temirgaliev N. Informativeness of all the Linear Functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω , Mathematical sb. 2007. Vol. 198. No 11. P. 1535-1551.
- 5 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Computational (Numerical) diameter in the context of general theory of a recovery, Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2019. No 1. P. 89-97. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-1-89-97>
- 6 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Teoriya priblizhenij, vychislitel'naya matematika i chislennyj analiz v novoi koncepcii v svete Kompyuternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter], Vestnik ENU im. L.N.Gumileva, seriya Matematika. Informatika. Mekhanika. 2018. Vol. 124. No 3. P. 8-88. [in Russian]
- 7 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical physics. 2015. Vol. 55(9). P. 1432-1443.
- 8 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Order Estimates of the Norms of Derivatives of Functions with Zero Values on Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics. 2017. Vol. 61(3). P. 77-82.
- 9 Utesov A.B., Bazarkhanova A.A. On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit, Differential Equations. 2021. Vol. 57 (12). P. 1726-1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168
- 10 Utesov A.B. Optimal Recovery of Functions from Numerical Information on Them and Limiting Error of the Optimal Computing Unit, Mathematical Notes. 2022. Vol. 111(5). P. 759- 767. DOI: 10.1134/S0001434622050108

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ хабаршысы. Математика, компьютерлік ғылымдар, механика сериясы, 2025, Том 152, №3
Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия Математика, компьютерные науки, механика, 2025, Том 152, №3

- 11 Taugynbayeva G., Azhgaliev Sh., Zhubanysheva A., Temirgaliyev N. Full C(N)D – study of computational capabilities of Lagrange polynomials, Mathematics and Computers in Simulation. 2025. Vol. 227. P. 189-208.
- 12 Utesov A.B. Zadacha vosstanovleniya funktsiy i integralov na obobshennykh klassakh i resheniya uravneniya teploprovodnosti [The problem of restoration of the functions and integrals on the generalized classes and solutions of the heat conduction equation]: PhD dissertation in physics and mathematics. Almaty, 2001. [in Russian]
- 13 Abikenova Sh., Utesov A., Temirgaliev N. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes, Mathematical notes. 2012. Vol. 91(3). P. 430-434.
- 14 Kolyada V.I. The embedding of certain classes of functions of several variables, Siberian Mathematical Journal. 1973. Vol. 14:4. P. 530-546.
- 15 Ul'yanov P.L. Absolute convergence of trigonometric Fourier series, Doklady Mathematics, 1992. Vol. 45:1. P. 83-88.
- 16 Utesov A.B. Optimal'noe vosstanovlenie funktsiy iz anizotropnykh klassov Soboleva v stepenno – logarifmicheskoy shkale [Optimal recovery of functions from anisotropic Sobolev classes on a power- logarithmic scale], Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, Computer Science, Mechanics Series. 2021. Vol. 136. No 3. P. 37-41. [in Russian] DOI:<https://doi.org/10.32523/2616-7182>.

Авторлар туралы мәлімет:

Утесов Әділжан Базарханұлы – физика-математика ғылымдарының кандидаты, Қ. Жұбанов Ақтөбе өңірлік университетінің "Математика" кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Ә. Молдағұлова даңғ., 34, 030000 Ақтөбе, Қазақстан.

Утесова Гүлжан Ізтұрғанқызы – Қ. Жұбанов Ақтөбе өңірлік университетінің "Информатика және ақпараттық технологиялар" кафедрасының аға оқытушысы, Ә. Молдағұлова даңғ., 34, 030000 Ақтөбе, Қазақстан.

Utessov Adilzhan Bazarkhanovich – candidate of physic- mathematical science, associate professor of the Mathematic department, Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, A.Moldagulova ave., 34, Aktobe, 030000, Kazakhstan.

Utessova Gulzhan Izturganovna - senior lecturer at the Department of Informatics and Information Technology, Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, 34, A. Moldagulova ave., 34, Aktobe, 030000, Kazakhstan.

Қабылданған күні: 08.08.2025. Өңдеуден кейін: 30.08.2025.

Мақұлданған күні: 27.09.2025. Онлайн қолжетімді: 30.09.2025.



Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).