

ISSN (Print) 2616-7182
ISSN (Online) 2663-1326



EURASIAN
NATIONAL
UNIVERSITY

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№4 (125)/2018

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

bulmathmc.enu.kz



ISSN (Print) 2616-7182
ISSN (Online) 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of the L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№4(125)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2018
Astana, 2018

БАС РЕДАКТОРЫ
ф.-м.ғ.д., проф
Темірғалиев Н. (Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары **Жұбанышева А.Ж.**, PhD
(Қазақстан)
Бас редактордың орынбасары **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD
(Қазақстан)

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Алимхан Килян	PhD, проф. (Жапония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Қытай)
Бекенов М.И.	ф.-м.ғ.к., доцент (Қазақстан)
Голубов Б.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Зунг Динь	ф.-м.ғ.д., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Иванов В.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Калиев И.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Кобельков Г.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Курина Г.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Марков В.В.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Мейрманов А.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Смелянский Р.Л.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Умирбаев У.У.	ф.-м.ғ.д., проф. (АҚШ)
Холщевникова Н.Н.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. докторы, проф. (Германия)

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген
А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: ҚР БЖҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу қуәлігі.

Тиражы: 25 дана

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,
тел: (7172)709-500 (ішкі 31-428).

EDITOR-IN-CHIEF
Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences
Temirgaliyev N. (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Zhubanysheva A.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Nauryzbayev N.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Editorial board

Abakumov E.V.	PhD, Prof. (France)
Alexeyeva L.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Alimhan Keylan	PhD, Prof. (Japan)
Bekzhan Turdybek	PhD, Prof. (China)
Bekenov M.I.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assoc.Prof. (Kazakhstan)
Golubov B.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Dũng Dinh	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Vietnam)
Ibrayev A.G.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Kazakhstan)
Ivanov V.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kaliev I.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kobel'kov G.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kurina G.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Markov V.V.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Meirmanov A.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Smelyansky R.L.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Umirbaev U.U.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(USA)
Kholshchevnikova N.N.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Schmeisser Hans-Juergen	Dr. habil., Prof. (Germany)

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Astana, Kazakhstan, 010008
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible secretary, computer layout:
A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.

Circulation: 25 copies

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;

tel: (7172) 709-500 (ext.31-428).

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
профессор, д.ф.-м.н.
Темиргалиев Н. (Казахстан)

Зам. главного редактора **Жубанышева А.Ж.**, PhD (Казахстан)

Зам. главного редактора **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD (Казахстан)

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Алимхан Килян	PhD, проф. (Япония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Китай)
Бекенов М.И	к.ф.-м.н., доцент (Казахстан)
Голубов Б.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Зунг Динь	д.ф.-м.н., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Иванов В.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Калиев И.А.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Кобельков Г.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Курина Г.А.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Марков В.В.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Мейрманов А.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Смелянский Р.Л.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Умирбаев У.У.	д.ф.-м.н., проф. (США)
Холщевникова Н.Н.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. доктор, проф. (Германия)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz

Ответственный секретарь, компьютерная верстка
А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.

Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,

тел.: (7172)709-500 (вн.31-428).

**Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ,
№4(125)/2018**

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА	
<i>Темірғалиев Н.</i> Компьютерлік (есептеуіш) диаметр және функциялар теориясының ішкі мәселелері мәнмәтініндегі жуықтау және енгізу теориясы	8
<i>Кобельков Г.М.</i> Интегро-дифференциалдық теңдеулерді сандық шешудің бір әдісі жөнінде	69
<i>Малыхин В.И., Нұртазина Қ.Б.</i> Айқынсыздық жағдайдағы инвестициялық процесстерді математикалық талдау	75
<i>Оспанова А.Б., Тулеуов Б.И.</i> Raspberry Pi микрокомпьютерін Қазақстанды цифрландыруда тиімді пайдалану мүмкіндіктері	95
<i>Солодов А.П.</i> Синустар бойынша қатар қосындысының нөл маңайындағы асимптотикалық өзгерісі	108
<i>Холщевникова Н.Н.</i> Қосындылаудың регулярлық әдісі үшін жалғыздық жиыны	113
<i>Фарайзаде А.П., Шафи А.</i> Векторлық кеңістіктердегі Куратовский проблемасы туралы	117
МЕХАНИКА	
<i>Афонина Н.Е., Смахов Г.Д., Хмелевский А.Н.</i> Метанның жоғары температуралы тұтануы мен жануы	120

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE	
<i>Temirgaliyev N.</i> Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions	8
<i>Kobel'kov G.M.</i> On a Method for the Numerical Solution of Integro-Differential Equations	69
<i>Malykhin V.I., Nurtazina K.B.</i> Mathematical Analysis of Investment Processes In Uncertainty	75
<i>Ospanova A., Tuleuov B.</i> Perspectives of Use of Microcomputer Raspberry Pi in Effective Kazakhstan Digitalization	95
<i>Solodov A.P.</i> Asymptotic Behavior of the Sum of Sines Series in the Zero Neighborhood	108
<i>Kholshchevnikova N.N.</i> Sets of Uniqueness for Regular Methods of Summation	113
<i>Farajzadeh A.P., Shafie A.</i> On Kuratowski's Problem in Vector Spaces	117
MECHANICS	
<i>Afonina N.E., Smekhov G.D., Hmelevskii A.N.</i> High-temperature Ignition and Combustion of Methane	120

**ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
МЕХАНИКА, №4(125)/2018**

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

<i>Темиргалиев Н.</i> Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций	8
<i>Кобельков Г.М.</i> Об одном методе численного решения интегро-дифференциальных уравнений	69
<i>Мальгин В.И., Нуртазина К.Б.</i> Математический анализ инвестиционных процессов в условиях неопределенности	75
<i>Оспанова А.Б., Тулеуов Б.И.</i> Перспективы использования микрокомпьютера Raspberry Pi в эффективной цифровизации Казахстана	95
<i>Солодов А.П.</i> Асимптотическое поведение суммы ряда по синусам в окрестности нуля	108
<i>Холщевникова Н.Н.</i> Множества единственности для регулярных методов суммирования	113
<i>Фарайзаде А.П., Шафи А.</i> О проблеме Куратовского в векторных пространствах	117

МЕХАНИКА

<i>Афонина Н.Е., Сметов Г.Д., Хмелевский А.Н.</i> Высокотемпературное воспламенение и горение метана	120
--	-----

МРНТИ: 27.41.19

Г.М. Кобельков

*Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука Российской академии
наук, Москва, Россия
(E-mail: kobelkov@dodo.inm.ras.ru)*

Об одном методе численного решения интегро-дифференциальных уравнений

Аннотация: Статья посвящена новому методу численного решения интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, состоящем в том, что решение соответствующей системы ЛАУ проводится применением итерационного метода, в котором аналог интегрального оператора берется с нижнего слоя, а дифференциального – с верхнего.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, дифференциальный оператор, системы линейных алгебраических уравнений, метод конечных разностей, итерационный оператор.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182-2018-125-4-69-74>

Обычно [1,2], при численном решении интегро-дифференциальных уравнений дифференциальный оператор аппроксимируется методом конечных разностей (методом конечных элементов), а интегральный оператор заменяется соответствующей квадратурной формулой. Это приводит к необходимости решения системы уравнений с полной матрицей и, как следствие, большому числу арифметических операций. Другой способ решения системы ЛАУ заключается в применении итерационного метода, в котором аналог интегрального оператора берется с нижнего слоя, а дифференциального – с верхнего.

В настоящей работе для некоторого подкласса интегро-дифференциальных уравнений предложен другой подход к решению системы линейных уравнений, который требует существенно меньшего числа операций.

1. Вначале изложим идею метода на простейшей краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения:

$$-u'' + \int_0^1 u(x) dx = f, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (1)$$

Аппроксимируем (1) следующим образом. Разобьем отрезок $[0, 1]$ сеткой с шагом $h = 1/N$ и будем искать приближенное решение задачи в узлах сетки. Заменяя вторую производную в (1) второй разделенной разностью, а интеграл – квадратурной формулой трапеций, получим

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \sum_{j=1}^{N-1} hu_j = f_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

$$u_0 = u_N = 0.$$

Обозначим через \mathbf{u} вектор неизвестных: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})^T$. Тогда матрица системы (2) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 2/h^2 + h & -1/h^2 + h & h & h & \dots & h \\ -1/h^2 + h & 2/h^2 + h & -1/h^2 + h & h & \dots & h \\ h & -1/h^2 + h & 2/h^2 + h & -1/h^2 + h & \dots & h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h & \dots & h & -1/h^2 + h & 2/h^2 + h & -1/h^2 + h \\ h & h & \dots & h & -1/h^2 + h & 2/h^2 + h \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица системы является заполненной, и для решения системы уравнений с этой матрицей потребуется $O(N^3)$ арифметических операций.

Опишем другой алгоритм решения системы уравнений (2). Введем новую неизвестную $c = \sum_{j=1}^{N-1} hu_j$. Тогда (2) примет вид

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + c = f_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} u_j - c/h = 0, \quad u_0 = u_N = 0.$$

Относительно вектора неизвестных $(\mathbf{u}, c)^T$ система (3) может быть записана следующим образом

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{N-1})^T$,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2/h^2 & -1/h^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1/h^2 & 2/h^2 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{N-1}, \quad A_{12} = A_{21}^T, \quad A_{22} = -1/h.$$

Таким образом, матрица A является симметричной и $A_{11} > 0$, $A_{22} < 0$, т.е. A является оператором с седловой точкой.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (4) поступим следующим образом. Применим к обеим частям первого уравнения (4) оператор A_{11}^{-1} . Тогда $\mathbf{u} = A_{11}^{-1}(\mathbf{f} - A_{12}c)$. Подставляя полученное выражение во второе уравнение (4), получим уравнение для c :

$$(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})c = A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{f}. \tag{5}$$

Оператор $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}$ левой части уравнения (5) является симметричной, положительно определенной матрицей и носит название "дополнение по Шуру" (см., например, [2]).

Опишем алгоритм решения задачи (4):

1. Находим вектор $\mathbf{y} = A_{11}^{-1}\mathbf{f}$, решая систему линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{y} = \mathbf{f}$ методом прогонки.
2. Вычисляем правую часть (4): $a \equiv A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{f} = A_{21}\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{N-1} y_j$.
3. Положим $\mathbf{b} = A_{12}1 = (1, \dots, 1)^T$ и найдем вектор \mathbf{z} , решая систему $A_{11}\mathbf{z} = \mathbf{b}$ методом

прогонки. Таким образом, мы находим $\mathbf{z} = A_{11}^{-1}A_{12}\mathbf{1}$.

4. Вычисляем

$$d = (A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})\mathbf{1} = A_{21}\mathbf{z} - A_{22}\mathbf{1} = \sum_{j=1}^{N-1} z_j + 1/h.$$

5. Величина c вычисляется по формуле $c = a/d$.

6. Решение \mathbf{u} находится из первого уравнения (4) методом прогонки.

Нетрудно видеть, что предлагаемый алгоритм требует для своей реализации $O(N)$ арифметических операций, т.е. является оптимальным по порядку.

Примечание 1. Заметим, что систему уравнений (2) можно было преобразовать к виду (3) не обязательно так, как это делалось выше. Например, можно было бы ввести новую переменную c по формуле: $c = \sum_{j=1}^{N-1} hu_j$, и это уравнение добавить в систему без изменений (ранее это уравнение добавлялось в систему после деления на h). Тогда преобразованная система примет вид (3), A_{11} и A_{12} останутся прежними, но $A_{22} = -1$ и $A_{21} = (h, \dots, h)$. Таким образом, в этом случае $A_{12} \neq A_{21}^T$, т.е. матрицы A и $A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22}$ не являются симметричными. Тем не менее, алгоритм решения задачи (4) остается неизменным.

Примечание 2. Система уравнений (2) может быть легко решена (приближенно) с использованием быстро сходящегося итерационного процесса

$$-\frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} + \sum_{j=1}^{N-1} hu_j^k = f_n, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

$$u_0^{k+1} = u_N^{k+1} = 0.$$

Однако рассматриваемая задача является модельной, и если перед интегральным оператором поставить большой коэффициент, то скорость сходимости замедлится или метод вообще не будет сходиться.

2. Рассмотрим теперь обобщение задачи (1):

$$-u''(x) + \int_0^1 k(x)g(y)u(y)dy = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (6)$$

По аналогии с предыдущим случае введем на $[0, 1]$ равномерную сетку с шагом $h = 1/N$ и аппроксимируем вторую производную в (6) разделенной разностью, а интеграл – квадратурной формулой трапеций. Получим

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + k_n \sum_{j=1}^{N-1} hg_j u_j = f_n, \quad n = 1, \dots, N-1; \quad (7)$$

$$u_0 = u_N = 0.$$

Здесь

$$k_n = k(nh), \quad g_j = g(jh), \quad f_n = f(nh).$$

Нетрудно видеть, что задача (7) аппроксимирует исходную задачу (6) с порядком $O(h^2)$. В дальнейшем будем предполагать, что решение (7) существует и единственно. Введем новую переменную $c = \sum_{j=1}^{N-1} hg_j u_j$. Тогда система (7) преобразуется к виду

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{N-1})$, матрица A_{11} – та же, что и в предыдущем случае, но

$$A_{21} = (k_1, \dots, k_{N-1}), \quad A_{12} = (g_1, \dots, g_{N-1})^T, \quad A_{22} = -1/h.$$

Алгоритм решения задачи (8) дословно совпадает с алгоритмом решения задачи (5).

3. Перейдем к случаю общего интегрального оператора. А именно, рассмотрим краевую задачу

$$-u''(x) + \int_0^1 K(x, y)u(y) dy = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (9)$$

Аппроксимируем (9) таким же образом как и выше – заменим вторую производную на сетке второй разделенной разностью, а интеграл – квадратурной формулой трапеций. Имеем

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \sum_{j=1}^{N-1} hK(ih, jh)u_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N - 1; \quad (10)$$

$$u_0 = u_N = 0.$$

Обозначим $k_{ij} = K(ih, jh)$ и аппроксимируем сеточное ядро (k_{ij}) следующим образом. Заметим, что k_{ij} являются элементами квадратной матрицы G . Представим G в виде ортогональной суммы матриц ранга 1:

$$G = \sum_{m=1}^{N-1} \lambda_m \mathbf{k}_m \mathbf{g}_m^T, \quad \text{где}$$

$\mathbf{k}_m, m = 1, \dots, N - 1$ – единичные собственные вектор-столбцы матрицы $G^T G$, а \mathbf{g}_m – единичные собственные вектор-столбцы матрицы GG^T . Предположим, что коэффициенты разложения упорядочены по убыванию модулей. Если это не так, то переставим члены ряда, чтобы это условие выполнялось. В большинстве практических задач матрица G может быть приближена с достаточной точностью двумя-тремя членами разложения. Таким образом, мы приходим к необходимости рассмотрения следующей задачи

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \sum_{m=1}^l \sum_{j=1}^{N-1} h\lambda_m k_{mi} g_{mj} u_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (11)$$

$$u_0 = u_N = 0,$$

которая является аппроксимацией с порядком $O(h^2)$ интегро-дифференциальной задачи

$$-u''(x) + \sum_{m=1}^l \int_0^1 k_m(x) g_m(y) u(y) dy = f(x), \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

По аналогии с рассмотренным выше, введем вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_l)^T$, где $c_m = \sum_{j=1}^{N-1} h\sqrt{\lambda_m} g_{mj} u_j$. Тогда система ЛАУ (11) запишется в виде

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{N-1})^T$, $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_l^T$, матрица A_{11} – та же, что и в предыдущем случае,

но A_{21} – матрица размерности $l \times (N - 1)$, A_{12} – матрица размерности $(N - 1) \times l$:

$$A_{21} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} k_{11} & \sqrt{\lambda_1} k_{12} & \dots & \sqrt{\lambda_1} k_{1,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\lambda_l} k_{l1} & \sqrt{\lambda_l} k_{l2} & \dots & \sqrt{\lambda_l} k_{l,N-1} \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} g_{11} & \sqrt{\lambda_2} g_{12} & \dots & \sqrt{\lambda_l} g_{1l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{\lambda_1} g_{N-1,1} & \sqrt{\lambda_2} g_{N-1,2} & \dots & \sqrt{\lambda_l} g_{N-1,l} \end{pmatrix}^T.$$

Матрица A_{22} размером $l \times l$ является диагональной с элементами на диагонали, равными $-1/h$.

Переходя к дополнению по Шуру, система (12), как и выше, преобразуется к виду

$$(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})\mathbf{c} = A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{f}. \quad (13)$$

Алгоритм решения задачи (13) состоит в следующем.

1. Найдем правую часть (13)

$$\mathbf{d} = A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{f}.$$

Это требует $O(N)$ арифметических операций.

2. Возьмем вектора

$$\mathbf{c}_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T,$$

где единица стоит на k -м месте, и вычислим

$$\mathbf{d}_k = (A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} - A_{22})\mathbf{c}_k, \quad k = 1, \dots, l.$$

Вычисление всех \mathbf{d}_k можно выполнить за $O(lN)$ операций.

3. Вектора \mathbf{d}_k образуют базис в пространстве векторов размерности l , поэтому имеет место представление

$$\mathbf{d} \equiv A_{21}A_{11}^{-1}\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \mathbf{f}_j. \quad (14)$$

Соотношение (14) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_k , которая может быть решена за $O(l^3)$ операций. После чего решение (13) будет иметь вид

$$\mathbf{c} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)^T.$$

Нахождение \mathbf{u} при известном \mathbf{c} потребует $O(N)$ операций. Таким образом, общее количество арифметических операций для решения системы уравнений (12) по порядку будет равно $O(lN + l^3)$, т.е. при малых l этот метод требует существенно меньшего числа операций по сравнению с прямым решением системы (12) методом Гаусса.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00838).

Список литературы

- 1 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.– Физматлит, Лаборатория базовых знаний, 2000.
- 2 Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления.– М.: Наука, 1984.

Г.М. Кобельков

М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Г.И. Марчук атындағы Ресей ғылым академиясының Есептеу математикасы институты, Мәскеу, Ресей

Интегро-дифференциалдық теңдеулерді сандық шешудің бір әдісі жөнінде

Аннотация: Интегралдық оператордың аналогы төменгі қабаттан, ал дифференциалдық оператордың — жоғарғы қабаттан алынатын сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің сәйкес итерациалық әдістің қолданудан тұратын интегро-дифференциалдық және интегралдық теңдеулерді сандық шешуге арналған

Түйін сөздер: интегро-дифференциалдық теңдеулер, интегралдық теңдеулер, дифференциалдық оператор, сызықты алгебралық теңдеулер жүйелері, ақырлы айырымдар әдісі, итерация әдісі.

G.M. Kobel'kov

*Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Marchuk Institute of Numerical Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

On A Method for the Numerical Solution of Integro-Differential Equations

Abstract: The article is devoted to a new method for the numerical solution of integro-differential and integral equations, consisting in the fact that the solution of the corresponding linear algebraic systems is carried out using an iterative method, in which the analogue of the integral operator is taken from the bottom layer and the differential one from the top layer.

Keywords: integro-differential equations, integral equations, differential operator, systems of linear algebraic equations, finite difference method, iterative operator.

References

- 1 Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical methods [Numerical methods] (Fizmatlit, Laboratory of Basic Knowledge, 2000).
- 2 Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matrices and calculations [Matrices and calculations] (Nauka, Moscow, 1984).

Сведения об авторах:

Г.М. Кобельков – Доктор физико-математических наук, Профессор, Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука Российской академии наук, Москва, Россия.

G.M. Kobel'kov – Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Marchuk Institute of Numerical Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Поступила в редакцию 01.11.2018

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды *bulmathmc.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теоремадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz. Сайт: bulmathmc.enu.kz.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website *bulmathmc.enu.kz*.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages (from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "... see [3, § 7, Lemma 6]"; "... see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). *E-mail:* *vest_math@enu.kz*. *Сайт:* *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилиевой файл можно скачать со сайта журнала *bul-mathmc.enu.kz*.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz. Сайт: bulmathmc.enu.kz.

Редакторы: Н. Темірғалиев

Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2018. 4(125)- Астана: ЕҰУ. 128-б.
Шартты б.т. - 16. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: (8-717-2) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды