Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2025, Vol. 151, №2, P. 28-36.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

Статья
МРНТИ: 27.25.19

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ[1]

А.Арыстангаликызы
Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, пр. А.Молдагуловой 34, Актобе, Казахстан
arystangalikyzya@gmail.com

Аннотация. В статье изучается дискретизация решений задачи Коши для волнового уравнения с начальными данными из классов Коробова в равномерной метрике. В исследуемой постановке задача Коши имеет явное представление решения в виде суммы абсолютно сходящегося тригонометрического ряда Фурье, в общем случае полностью определяемого бесконечным набором коэффициентов Фурье начальных данных. В связи с этим, возникает вопрос приближения решения – бесконечного объекта по конечной числовой информации заданного объема N, полученной вычислительным агрегатом, построенным по значеням коэффициентов Фурье начальных данных. Исследование проводится в рамках Компьютерного (вычислительного) поперечника, смысл которого заключается в построении оптимальных вычислительных агрегатов при искаженных данных. При известных оптимальных порядках убывания погрешностей по неискаженным точным данным установлены неулучшаемые предельные порядки неточной информации, сохраняющие правильные порядки убывания погрешностей по точной информации с указанием оптимальных вычислительных агрегатов. Показано, что найденная предельная погрешность является наибольшей возможной для всех вычислительных агрегатов, обеспечивающих оптимальный порядок приближения по точной информации и построенных по произвольному конечному спектру тригонометрических коэффициентов Фурье.

Ключевые слова: волновое уравнение, задача Коши, оптимальный вычислительный агрегат, приближение по неточным данным, Компьютерный (вычислительный) поперечник, предельная погрешность, классы Коробова.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2025/2.3

2000 Mathematics Subject Classification: 41A99; 65D99

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье исследуется дискретизация решений задачи Коши $u(x,t;f)$ для волнового уравнения $(s=1,2,...)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}(u=u(x,t),0\le t<1,x\equiv(x_1,...,x_s)\in R^s), \quad (1)$$

[1]Зерттеу Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігі Ғылым комитетімен қаржыландырылған (грант №AP23483557)

с начальными условиями

$$u(x,0) = f(x) \in E_s^r, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 (x \in R^s). \tag{2}$$

Задача приближения рассматривается в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П), смысл которого состоит в построении оптимальных вычислительных агрегатов в условиях искажённых данных, что заключено в центральном определении (все необходимые обозначения, определения и исторические сведения см., например, в [1]-[2])

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)};\varphi_N)\in D_N} \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y, \tag{3}$$

где

$$\delta_N(\varepsilon_N) \equiv \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; (l^{(N)}; \varphi_N))_Y \equiv$$

$$\equiv \sup_{\substack{f\in F, \\ \left\{\gamma_N^{(\tau)}\right\}_{\tau=1}^N, \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1, \\ (\tau=1,...,N)}} \|Tf(\cdot) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)}; ..., l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)}; \cdot)\|_Y. \tag{4}$$

К(В)П состоит в последовательном решении следующих трех задач:

К(В)П-1: Находится порядок $\asymp$ $\delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$, – информативная мощность набора вычислительных агрегатов $D_N \equiv D_N(F)_Y$.

Здесь изучается задача восстановления по точной информации, в зависимости от вида функционалов и алгоритмов переработки полученной от них числовой информации.

К(В)П-2: Производится построение конкретного вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N)$ из $D_N \equiv D_N(F)_Y$, поддерживающего порядок $\delta_N(0; D_N)_Y$, для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности $\widetilde{\varepsilon}_N \equiv \widetilde{\varepsilon}_N \left(D_N; (\bar{l}^{(N)}; \overline{\varphi}_N)\right)_Y \equiv \left(\widetilde{\varepsilon}_N^{(1)}, ..., \widetilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)$ с неотрицательными компонентами, – К(В)П-2 – предельной погрешности (соответствующей вычислительному агрегату $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$), такой, что

$$\delta_N(0; D_N)_Y \asymp \sup\{\|Tf(\cdot) - \overline{\varphi}_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)\|_Y : f \in F, |\bar{l}_\tau(f) - z_\tau(f)| \le \varepsilon_N^{(\tau)} (\tau = 1, ..., N)\},$$

с одновременным выполнением

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \to +\infty) :$$
$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \delta_N(\eta_N \widetilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

В этой второй части задачи К(В)П в оптимальном вычислительном агрегате, как оказывается значения информационных функционалов можно заменить на близкие им значения с сохранением оптимальности, поиск наибольших таких расхождений образует самостоятельную задачу нахождения предельных погрешностей.

К(В)П-3: Устанавливается массивность предельной погрешности

$$\widetilde{\varepsilon}_N \left(D_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)\right)_Y :$$

находится как можно большое множество $D_N \left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$ (обычно связанных со структурой исходного $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$) вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$, построенных по всевозможным (не обязательно линейным) функционалам $l_1, ..., l_N$, таким, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \to +\infty) :$$
$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \delta_N(\eta_N \widetilde{\varepsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y / \delta_N(0; D_N)_Y = +\infty.$$

Здесь исследуется вопрос о существовании другого вычислительного агрегата со структурой, аналогичной структуре полученного оптимального вычислительного агрегата, но с большей по порядку предельной погрешностью.

Записи $A_N \ll B_N$ и $A_N \asymp B_N$ соответственно означают $A_N \le cB_N$ и одновременное выполнение $A_N \ll B_N$ и $B_N \ll A_N$, где $\{A_N\}$ и $\{B_N\}$ неотрицательные последовательности, постоянная $c > 0$ не зависит от N .

Приведем некоторые результаты, полученные в аналогичном исследуемому случаю направлении (определения классов и соответствующие обозначения даны в соответствующих статьях).

Е. Шангиреевым [3] для волнового уравнения в случае восстановление по значениям в точках получены следующие двусторонние оценки при $r > s/2$ и для $s = 1, 2, ...$:

$$\delta_N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; P^{(N)} \times \{\varphi_N\}; M_2^r(0,1)^s \right)_{L^{q,\infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$$

и

$$\delta_N \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, u(x,0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x); P^{(N)} \times \{\varphi_N\}; J_q^r(0,1)^s \right)_{L^{q,\infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},$$

где $M_2^r(0,1)^s$ есть любой из классов Соболева $W_2^r(0,1)^s$, $J_q^r(0,1)^s$ естт Никольского-Бесова $B_{q,\theta}^r(0,1)^s$, $1 \le \theta < \infty$ и $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}$.

В работах [4]-[5] рассматривалась задача оптимального восстановления решения волнового уравнения по приближённым значениям коэффициентов Фурье функции, задающей начальную форму струны, а также были получены её обобщения на задачи восстановления операторов, определённых в весовых пространствах l_2 , по приближённым значениям координат векторов. Ш.Абикеновой и Н.Темиргалиевой [6] получил двухсторонние оценки приближения решения волнового уравнения в классе Коробова по точным данным. В статье [7] рассматривается дискретизация решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщённых классов $W_2^{\omega_{r_1},...,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ Соболева и оцениваются погрешности дискретизации.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Определение 1 [8]**.** Для положительного $R = 2^n$ $(n = 1, 2, ...)$ под $\Gamma_R \equiv \Gamma_R^{(s)}$ будем понимать множество (так называемый гиперболический крест)

$$\Gamma_R = \{m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s : \overline{\overline{m}} = \prod_{j=1}^{s} \overline{m}_j \le R\},$$

где $\overline{m}_j = \max\{1, |m_j|\}$ и $\overline{\overline{m}} = \overline{m}_1 \cdot ... \cdot \overline{m}_s$.

Определение 2 [8]**.** Пусть s -целое положительное число и $r > 0$. Классом Коробова E_s^r называют множсетво всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, ..., x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(y) e^{-2\pi i (m,y)} dy (m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s)$$

которых удовлетровяют условию

$$|\hat{f}(m)| \le (\overline{m}_1 \cdot ... \cdot \overline{m}_s)^{-r} = (\overline{\overline{m}})^{-r}.$$

Лемма A. [8] Пусть s целое положительное число и $r > 1$. Если функция f принадлежит E_s^r , то ее ряд Фурье абсолютно сходится.

Лемма B. [9] Пусть дано целое положительное число s . Если для 1-периодических по каждой переменной функций $f(x_1, ..., x_s)$ ряд $\sum_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)| (\overline{m}, \overline{m})$, сходится, то задача Коши для волнового уравнения (1) с начальным условиями (2) имеет классическое решение $u(x,t;f)$ представимое в виде

$$u(x,t;f) = \sum_{m\in Z^s} \hat{f}(m) cos(2\pi\sqrt{m_1^2+...+m_s^2}t)e^{2\pi i(m,x)}. \qquad (5)$$

Под $(\cdot,\cdot)$ здесь и всюду ниже обозначается скалярные произведения векторов.

Определение 3. Под классом $L^{q,\infty} \equiv L^{q,\infty}((0,1)^s \times [0,+\infty))$ будем понимать множество всех функций $g : R^s \times [0,+\infty) \to C$ таких, что для каждого $t \in [0,+\infty)$ функция $g_t(x) = g(x,t)$ как функция аргумента $x \in R^s$ является измеримой периодической с периодом 1 по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{q,\infty}} = \sup_{t\geq 0}\left(\int_{[0,1]^s}|g(x,t)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Лемма C. [9] Пусть даны числа $s(s=1,2,...)$, $r>3$ и $2\leq q\leq\infty$. Тогда

$$\sup_{f\in E_s^r}\|u(\cdot;f,0)-\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),...,\hat{f}(m^{(N)});x,t)\|_{L^{\infty,\infty}} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}.$$

Лемма D. [3] Пусть даны числа s, $s=1,2,...$ и $R>1$. Тогда

$$\sum_{\overline{m}_1...\overline{m}_s\leq R} 1 \asymp R(lnR)^{s-1}.$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть даны числа $s(s=1,2,...)$ и $r>3$. Тогда в случае задачи (1)-(2) справедливы следующие утверждения. **К(В)П-1.**

$$\sup_{f\in E_s^r}\|u(\cdot;f,0)-\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)}),...,\hat{f}(m^{(N)});x,t)\|_{L^{\infty,\infty}} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1}}.$$

К(В)П-2. Для оператора востановления $(N \asymp 2^n\cdot n^{s-1})$

$$\left(\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N\right) = \overline{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)}),...,\hat{f}(m^{(N)});x,t) = \sum_{m\in\Gamma_n}\hat{f}(m)cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)}$$

величина $\widetilde{\varepsilon}_N \asymp \frac{ln^{r(s-1)}N}{N^r}$ является предельной погрешностью: во-первых,

$$\delta_N(0) \asymp \delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N) \asymp \frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}},$$

во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{+\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N((\bar{l}^{(N)},\overline{\varphi}_N);\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u;E_s^r;\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N=\eta_N ln^{r(s-1)}N/N^r)_{L^{\infty,\infty}}}{\delta_N(D_N;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u;E_s^r;\widetilde{\varepsilon}_N=ln^{r(s-1)}N/N^r)_{L^{\infty,\infty}}} = +\infty.$$

К(В)П-3. Для всякого вычислительного агрегата $(l^{(N)},\varphi_N)$ из D_N и для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{+\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N((l^{(N)},\varphi_N);\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u;E_s^r;\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N=\eta_N ln^{r(s-1)}N/N^r)_{L^{\infty,\infty}}}{\delta_N(D_N;\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\Delta u;E_s^r;\widetilde{\varepsilon}_N=ln^{r(s-1)}N/N^r)_{L^{\infty,\infty}}} = +\infty.$$

Доказательство. Часть К(В)П-1 полностью решена в [9]. Перейдем к доказательству оценку сверху в К(В)П-2. И пусть функция f принадлежит классу E_s^r и даны числа $\gamma_N^{(m)}$ такое, что $\left|\gamma_N^{(m)}\right| \leq 1 (m\in\Gamma_n)$.

$$\bar{l}_m(f)=\hat{f}(m), z_m=\bar{l}_m(f)+\widetilde{\varepsilon}_N\gamma_N^{(m)}, |\gamma_N^{(m)}|\le 1 (m\in\Gamma_n),$$

$$\overline{\varphi}_N(z_1,...,z_N;x,t)=\overline{\varphi}_N\left(\left\{\bar{l}_m(f)+\widetilde{\varepsilon}_N\gamma_N^{(m)}\right\}_{m\in\Gamma_n};x,t\right)=\sum_{m\in\Gamma_n} z_m cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)} \quad (6)$$

Тогда, имеем

$$\|u-\overline{\varphi}_N\|_{L^{\infty,\infty}}=\left\|u(x,t;f)-\overline{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)})+\widetilde{\varepsilon}_N^{(1)}\gamma_N^{(1)},...,\hat{f}(m^{(N)})+\widetilde{\varepsilon}_N^{(N)}\gamma_N^{(N)};x,t)\right\|_{L^{\infty,\infty}}=$$

$$=\left\|\sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m)cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)}-\sum_{m\in\Gamma_n}(\hat{f}(m)+\widetilde{\varepsilon}_N\gamma_N^{(m)})cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)}\right\|_{L^{\infty,\infty}}\le$$

$$\le\left\|\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_n}\hat{f}(m)cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)}\right\|_{L^{\infty,\infty}}+\widetilde{\varepsilon}_N\left\|\sum_{m\in\Gamma_n}\gamma_N^{(m)}\cdot cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)}\right\|_{L^{\infty,\infty}}\le$$

$$\le I_1+\widetilde{\varepsilon}_N I_2,$$

где

$$I_1=\left\|\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_n}\hat{f}(m)cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)}\right\|_{L^{\infty,\infty}}$$

и

$$I_2=\left\|\sum_{m\in\Gamma_n}\gamma_N^{(m)}\cdot cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)}\right\|_{L^{\infty,\infty}}.$$

Далее, в силу Лемма С

$$I_1\ll\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}}.$$

Теперь оценим I_2

$$I_2=\sup_{x\in[0,1]^s}\sup_{t\ge 0}\left|\sum_{m\in\Gamma_n}\gamma_N^{(m)}\cdot cos(2\pi\sqrt{(m,m)}t)e^{2\pi i(m,x)}\right|\le\sup_{x\in[0,1]^s}\sup_{t\ge 0}\sum_{m\in\Gamma_n}1\asymp\sum_{m\in\Gamma_n}1\asymp 2^n\cdot n^{s-1}\asymp N.$$

В итоге

$$I_1+\widetilde{\varepsilon}_N I_2\ll\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}}+\widetilde{\varepsilon}_N\cdot N\ll\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}}.$$

Таким образом, в силу произвольности $f\in E_s^r$, $\left|\gamma_N^{(m)}\right|\le 1(m\in\Gamma_n)$ и Леммы С получаем

$$\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}}\ll\delta_N(0)=\inf_{m_1,...,m_N;\varphi_N}\sup_{f\in E_s^r}\left\|u(x,t;f)-\overline{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)}),...,\hat{f}(m^{(N)});x,t)\right\|_{L^{\infty,\infty}}\ll$$

$$\ll\inf_{m_1,...,m_N;\varphi_N}\sup_{\substack{f\in E_s^r,\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1,\\ (\tau=1,...,N)}}\left\|u(x,t;f)-\overline{\varphi}_N(\hat{f}(m^{(1)})+\widetilde{\varepsilon}_N^{(1)}\gamma_N^{(1)},...,\hat{f}(m^{(N)})+\widetilde{\varepsilon}_N^{(N)}\gamma_N^{(N)};x,t)\right\|_{L^{\infty,\infty}}\asymp$$

$$\asymp\delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N)\ll\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}},$$

или, что то же самое,

$$\delta_N(0)\asymp\delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N)\asymp\frac{ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}}.$$

К(В)П-3 и вместе с тем К(В)П-2 докажем одновременно.

Пусть дана возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность $\{\eta_N\}$ и пусть $\eta_N^*=c\min\{\eta_N,\ln N\}$, где постоянная $C=C(r,s)\in(0,1]$ подобрана так, что для каждого $N\ge 2$ выполняется неравенство

$$0\le\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N\le 1.$$

Далее положим
$$g_N(x)=\sum_{m\in\Gamma_n}\tau_N^{(m)}e^{2\pi i(m,x)}. \qquad (7)$$
Здесь
$$\tau_N^{(m)}=\min\left\{\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N;\frac{1}{(\overline{\overline{m}})^r}\right\}=\min\left\{\eta_N^*\frac{(lnN)^{r(s-1)}}{N^r};\frac{1}{(\overline{\overline{m}})^r}\right\}. \qquad (8)$$
Сначала покажем, что для (7) выполняются следующие соотношения:
$$|\hat{g}_N(m)|\leq\frac{1}{(\overline{\overline{m}})^r}, m\in Z^s \qquad (9)$$
и
$$\|g_N\|_{L^\infty}\gg(\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}}\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}} \qquad (10)$$
для некоторой неотрицательной последовательности η_N^* , стремящеися к $+\infty$.

С учетом Лемма D имеем
$$\|g_N\|_{L^\infty}=\sup_{x\in[0,1]^s}\left|\sum_{m\in\Gamma_n}\tau_N^{(m)}e^{2\pi i(m,x)}\right|\geq\sum_{1\leq\overline{\overline{m}}\leq(\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N)^{-1/r}}\tau_N^{(m)}\asymp$$
$$\asymp(\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N)\cdot(\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N)^{-1/r}\cdot(\ln(\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N)^{-1/r})^{(s-1)}\asymp((\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N)^{1/r})^{(r-1)}\cdot(\ln N)^{(s-1)}\asymp$$
$$\asymp(\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}}\frac{\ln^{(s-1)(r-1)}N}{N^{r-1}}\cdot(\ln N)^{(s-1)}\asymp(\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}}\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}}.$$
Для произвольного множества объема N
$$B_N=\{m^{(1)},...,m^{(N)}\}\subset Z^s$$
положим
$$l_1(f)=\hat{f}(m^{(1)}),...,l_N(f)=\hat{f}(m^{(N)}).$$
Согласно (7) и (8) имеем при $k=1,...,N$
$$l_k(g_N)=\hat{g}_N(m^{(k)})=\tau_N^{(m^{(k)})}=\begin{cases}\min\left\{(\overline{\overline{m}})^r;\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N\right\}, & \text{если} \quad m^{(k)}\in\Gamma_n,\\ 0, & \text{если} \quad m^{(k)}\notin\Gamma_n.\end{cases}$$
Тогда для $m^{(k)}\in\Gamma_n$ имеют место неравенства $|l_k(g_N)|\leq\eta_N^*\widetilde{\varepsilon}_N\leq\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N$. Отсюда, полагая для k , $k=1,...,N$,
$$\overline{\gamma}_N^{(k)}=\begin{cases}-\frac{\hat{g}_N(m^{(k)})}{\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N}, & \text{если} \quad m^{(k)}\in\Gamma_n,\\ 0, & \text{если} \quad m^{(k)}\notin\Gamma_n,\end{cases}$$
имеем $|\overline{\gamma}_N^{(k)}|\leq 1$, $\hat{g}_N(m^{(k)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N\overline{\gamma}_N^{(k)}=0$ $(k=1,...,N)$.

Стало быть,
$$\varphi_N(\hat{g}_N(m^{(1)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N\overline{\gamma}_N^{(1)},...,\hat{g}_N(m^{(N)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N\overline{\gamma}_N^{(N)};x)=\varphi_N(0,...,0;x)=0.$$
Поэтому в силу (8) и (10), для всякой пары $(l^{(N)}\varphi_N))$ из D_N имеем
$$\left\|u(x,t;f)-\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N^{(1)}\gamma_N^{(1)},...,\hat{f}(m^{(N)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N^{(N)}\gamma_N^{(N)};x,t)\right\|_{L^{\infty,\infty}}=$$
$$=\sup_{t\geq 0}\left\|u(x,t;f)-\varphi_N(\hat{f}(m^{(1)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N^{(1)}\gamma_N^{(1)},...,\hat{f}(m^{(N)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N^{(N)}\gamma_N^{(N)};x,t)\right\|_{L^\infty}\geq$$
$$\geq\left\|u(x,0;g_N)-\varphi_N(\hat{g}_N(m^{(1)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N^{(1)}\gamma_N^{(1)},...,\hat{g}_N(m^{(N)})+\eta_N\widetilde{\varepsilon}_N^{(N)}\gamma_N^{(N)};x,t)\right\|_{L^\infty}=$$
$$=\|u(x,0;g_N)-\varphi_N(0,...,0;x,0)\|_{L^\infty}=\|u(x,0;g_N)\|_{L^\infty}=$$
$$=\|g_N\|_{L^\infty}\gg(\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}}\frac{\ln^{r(s-1)}N}{N^{r-1}}.$$

Наконец, в силу произвольности $m^{(1)}, ..., m^{(N)}$ и φ_N отсюда следует

$$\delta_N\left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; \eta_N \widetilde{\varepsilon}_N\right)_{L^{\infty,\infty}} = \inf_{(l^{(N)}\varphi_N)\in D_N} \delta_N\left((l^{(N)}\varphi_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; \eta_N \widetilde{\varepsilon}_N\right)_{L^{\infty,\infty}} \gg$$

$$\gg (\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}.$$

В итоге для всякого N выполнено неравенство

$$\frac{\delta_N(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; \eta_N \widetilde{\varepsilon}_N)_{L^{\infty,\infty}}}{\delta_N(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u; 0)_{L^{\infty,\infty}}} \gg \frac{(\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}} \ln^{r(s-1)} N/N^{r-1}}{\ln^{r(s-1)} N/N^{r-1}} = (\eta_N^*)^{\frac{r-1}{r}}.$$

Теорема доказана полностью.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована задача дискретизации решений волнового уравнения в классах Коробова по неточной информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье начального условия. На основе оптимального восстановления решения задачи Коши в К(В)П-1, в полном объеме исследованы задачи К(В)П-2 и К(В)П-3. Полученные результаты обеспечивают математическую основу для построения эффективных вычислительных агрегатов и могут быть применены в численных методах для волновых уравнений, а также в теории приближений и для анализа погрешностей дискретизаций.

Список литературы

1 Temirgaliev N., ZhubanyshevaA. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2015. -Vol. 55. -N. 9. -P. 1432-1443.

2 Temirgaliev N., ZhubanyshevaA. Zh. Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery // Iz.Vuz. -2019. -Vol. 63. -N. 1. -P. 79-86.

3 Шангиреев Е.И. О восстановлении решений волнового уравнения: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Караганда. 2002.

4 Выск Н.Д. О решении волнового уравнения при неточно заданных коэффициентах Фурье функции, задающей начальную форму струны // Владикавк. матем. журн., -2006. -Т. 8. -N. 4. -С. 13–18.

5 Выск Н.Д, Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Матем. заметки. -2007. -Т. 81. -N. 6. -С. 803-815.

6 Абикенова Ш.К., Темиргалиев Н. О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения // Дифф. уравн., -2010. -Т. 46. -N 8. -С. 1201-1204.

7 Абикенова Ш. К., Утесов А., Темиргалиев Н. Т. О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем. Заметки. -2012. -Т. 91. -N 3. -С. 459-463.

8 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. -Москва, 1963. -112 с.

9 Абикенова Ш.К. Дискретизация периодических решений волнового уравнения с начальными условиями из классов $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ и E_s^r . дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Астана. 1998.

Бірқалыпты метрикада толқындық теңдеу үшін Коши есебінің шешімдерін дәл емес мәлімен бойынша жуықтау

А.Арыстанғалиқызы

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ә. Молдағұлова даңғ., 34, Ақтөбе, Қазақстан

Аңдатпа. Мақалада бастапқы шарттары Коробов кластарынан алынған толқындық теңдеу үшін Коши есебінің шешімдерін бірқалыпты метрикада дискретизациялау есебі зерттеледі. Қарастырылып отырған қойылымда Коши есебінің шешімі абсолютті жинақталатын тригонометриялық Фурье қатарының қосындысы түрінде айқын түрде өрнектеледі және жалпы жағдайда бастапқы мәліметтердің Фурье коэффициенттерінің шексіз жиынтығымен толық анықталады. Осыған байланысты, шешімді — шексіз объектіні бастапқы мәліметтердің

Фурье коэффициенттері бойынша құрылған есептеуіш агрегат арқылы алынатын, берілген N көлемді ақырлы сандық мәлімет негізінде жуықтау мәселесі туындайды. Зерттеу қателіктермен берілген мәліметтер жағдайында оңтайлы есептеуіш агрегаттарды құрудан тұратын Компьютерлік (есептеуіш) диаметр теориясы аясында жүргізіледі. Дәл мәлімет бойынша қателіктің кемуінің оңтайлы реттері белгілі болған жағдайда, дәл емес мәлімет үшін қателіктің жақсартылмайтын шектік реттері анықталады, әрі олар дәл мәлімет бойынша қателіктің дұрыс кему ретін сақтайтыны көрсетіледі және сәйкес оңтайлы есептеуіш агрегаттар беріледі. Алынған шектік қателіктің дәл мәлімет бойынша жуықтаудың тиімді ретін қамтамасыз ететін және тригонометриялық Фурье коэффициенттерінің кез келген шекті спектрін пайдаланып құрылған оңтайлы жуықтау ретін қамтамасыз ететін барлық есептеу агрегаттары үшін алынған шектік қателік мүмкін болатын ең үлкені екені көрсетілген.

Түйін сөздер: толқындық теңдеу, Коши есебі, тиімді есептеу агрегаты, дәл емес мәлімет бойынша жуықтау, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, шектік қателік, Коробов класстары.

Approximation of the solutions to Cauchy problem for wave equation in uniform metric by inaccurate information

A.Arystangalikyzy
K. Zhubanov Aktobe Regional University, ave. A.Moldagulova 34, Aktobe, Kazakhstan

Abstract. On the article is considered problem of discretization of solutions to the Cauchy problem for the wave equation with initial information from the Korobov classes in a uniform metric. In the studied formulation, the Cauchy problem has an explicit representation of the solution as the sum of an absolutely convergent trigonometric Fourier series, which is generally completely determined by an infinite set of Fourier coefficients of the initial information. This raises the problem of approximating the solution—an infinite object—using finite numerical information of a given volume N , obtained from values of the Fourier coefficients of the initial information. The study is conducted within the framework of the Computational (Numerical) Diameter problem, the purpose of which is to construct optimal computational aggregate under conditions of inaccurate information. Given previously obtained orders of limiting errors by accurate information, unimprovable orders of inaccurate information are established, preserving the orders of decreasing errors for accurate information, with the optimal computational aggregates specified. It is shown that the found limiting error is the largest possible for all computational aggregates that provide the optimal order of approximation based on precise information and constructed based on an arbitrary finite spectrum of trigonometric Fourier coefficients.

Keywords: wave equation, Cauchy problem, optimal computational aggregate, approximation by inaccurate information, Computational (numerical) diameter, limiting error, Korobov classes.

References

1 Temirgaliev N., ZhubanyshevaA. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2015. Vol. 55. N. 9. P. 1432-1443.

2 Temirgaliev N., ZhubanyshevaA. Zh. Computational (Numerical) Diameter in a Context of General Theory of a Recovery, Iz.Vuz. 2019. Vol. 63. N. 1. P. 79-86.

3 Shangireev E.I. O vosstanovlenij reshenij volnovogo uravnenija. diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. Karaganda. 2002. [in Russian]

4 Vysk N. D. O reshenij volnovogo uravnenija pri netochno zadannykh koefficientax Furije funkcij, zadaiushei nachal'nuju formu strunij, Vladislavk. matem. j., 2006. T. 8. N. 4. C. 13–18. [in Russian]

5 Vysk N. D., Osipenko K. Yu.,Optimal Reconstruction of the Solution of the Wave Equation from Inaccurate Initial Data, Math. Notes, 2007. Vol. 81. N.6, pp. 723–733.

6 Abikenova Sh. K., Temirgaliev N. On the exact order of the information power of all possible linear functionals in the discretization of solutions of the wave equation, Dif. eq., 2010. Vol. 46. N 8. p. 1201-1204.

7 Abikenova Sh. K., UtesovA., Temirgaliev N. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes, Math. Notes, 2012. Vol. 91. N. 3. p. 430–434.
8 Korobov N.M. Teoretiko – chislovye metody v priblizhennom analize [Numerical – theoretic methods in approximate analysis]. M., 1963. 112 p. [in Russian]
9 Abikenova Sh. K. Diskretizasij periodicheskich reshenij volnovogo uravnenija s nachal'nymi uslovijami iz klassov $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ i E_s^r . diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. Astana. 1998. [in Russian]

Сведения об авторе:

Акмарал Арыстанғаликызы – PhD докторант, Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, пр. А.Молдагуловой 34, Актобе, Казахстан.

Akmaral Arystangalikyzy – PhD student, K. Zhubanov Aktobe Regional University, ave. A.Moldagulova 34, Aktobe, Kazakhstan.

Поступила: 26.03.2025. После редакции: 23.06.2025.
Одобрена: 27.06.2025. Доступна онлайн: 30.06.2025.