

ISSN (Print) 2616-7182
ISSN (Online) 2663-1326



EURASIAN
NATIONAL
UNIVERSITY

Л.Н.Гумилев атындағы
Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N.Gumilyov Eurasian
National University

№4 (125)/2018

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н.Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS
Series

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

bulmathmc.enu.kz



ISSN (Print) 2616-7182
ISSN (Online) 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of the L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№4(125)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2018
Astana, 2018

БАС РЕДАКТОРЫ
ф.-м.ғ.д., проф
Темірғалиев Н. (Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары **Жұбанышева А.Ж.**, PhD
(Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD
(Қазақстан)

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Алимхан Килян	PhD, проф. (Жапония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Қытай)
Бекенов М.И.	ф.-м.ғ.к., доцент (Қазақстан)
Голубов Б.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Зунг Динь	ф.-м.ғ.д., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Иванов В.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Калиев И.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Кобельков Г.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Курина Г.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Марков В.В.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Мейрманов А.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Смелянский Р.Л.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Умирбаев У.У.	ф.-м.ғ.д., проф. (АҚШ)
Холщевникова Н.Н.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. докторы, проф. (Германия)

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген
А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БЖҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу қуәлігі.
Тиражы: 25 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,
тел: (7172)709-500 (ішкі 31-428).

EDITOR-IN-CHIEF
Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences
Temirgaliyev N. (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Zhubanysheva A.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Nauryzbayev N.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Editorial board

Abakumov E.V.	PhD, Prof. (France)
Alexeyeva L.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Alimhan Keylan	PhD, Prof. (Japan)
Bekzhan Turdybek	PhD, Prof. (China)
Bekenov M.I.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assoc.Prof. (Kazakhstan)
Golubov B.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Dũng Dinh	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Vietnam)
Ibrayev A.G.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Kazakhstan)
Ivanov V.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kaliev I.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kobel'kov G.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kurina G.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Markov V.V.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Meirmanov A.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Smelyansky R.L.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Umirbaev U.U.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(USA)
Kholshchevnikova N.N.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Schmeisser Hans-Juergen	Dr. habil., Prof. (Germany)

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Astana, Kazakhstan, 010008
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible secretary, computer layout:
A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.

Circulation: 25 copies

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;

tel: (7172) 709-500 (ext.31-428).

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
профессор, д.ф.-м.н.
Темиргалиев Н. (Казахстан)

Зам. главного редактора **Жубанышева А.Ж.**, PhD (Казахстан)

Зам. главного редактора **Наурызбаев Н.Ж.**, PhD (Казахстан)

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Алимхан Килян	PhD, проф. (Япония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Китай)
Бекенов М.И	к.ф.-м.н., доцент (Казахстан)
Голубов Б.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Зунг Динь	д.ф.-м.н., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Иванов В.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Калиев И.А.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Кобельков Г.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Курина Г.А.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Марков В.В.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Мейрманов А.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Смелянский Р.Л.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Умирбаев У.У.	д.ф.-м.н., проф. (США)
Холщевникова Н.Н.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. доктор, проф. (Германия)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz

Ответственный секретарь, компьютерная верстка
А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.

Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 25 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,

тел.: (7172)709-500 (вн.31-428).

**Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ,
№4(125)/2018**

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА	
<i>Темірғалиев Н.</i> Компьютерлік (есептеуіш) диаметр және функциялар теориясының ішкі мәселелері мәнмәтініндегі жуықтау және енгізу теориясы	8
<i>Кобельков Г.М.</i> Интегро-дифференциалдық теңдеулерді сандық шешудің бір әдісі жөнінде	69
<i>Малыхин В.И., Нұртазина Қ.Б.</i> Айқынсыздық жағдайдағы инвестициялық процесстерді математикалық талдау	75
<i>Оспанова А.Б., Тулеуов Б.И.</i> Raspberry Pi микрокомпьютерін Қазақстанды цифрландыруда тиімді пайдалану мүмкіндіктері	95
<i>Солодов А.П.</i> Синустар бойынша қатар қосындысының нөл маңайындағы асимптотикалық өзгерісі	108
<i>Холщевникова Н.Н.</i> Қосындылаудың регулярлық әдісі үшін жалғыздық жиыны	113
<i>Фарайзаде А.П., Шафи А.</i> Векторлық кеңістіктердегі Куратовский проблемасы туралы	117
МЕХАНИКА	
<i>Афонина Н.Е., Сметхов Г.Д., Хмелевский А.Н.</i> Метанның жоғары температуралы тұтануы мен жануы	120

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

<i>Temirgaliyev N.</i> Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions	8
<i>Kobel'kov G.M.</i> On a Method for the Numerical Solution of Integro-Differential Equations	69
<i>Malykhin V.I., Nurtazina K.B.</i> Mathematical Analysis of Investment Processes In Uncertainty	75
<i>Ospanova A., Tuleuov B.</i> Perspectives of Use of Microcomputer Raspberry Pi in Effective Kazakhstan Digitalization	95
<i>Solodov A.P.</i> Asymptotic Behavior of the Sum of Sines Series in the Zero Neighborhood	108
<i>Kholshchevnikova N.N.</i> Sets of Uniqueness for Regular Methods of Summation	113
<i>Farajzadeh A.P., Shafie A.</i> On Kuratowski's Problem in Vector Spaces	117

MECHANICS

<i>Afonina N.E., Smekhov G.D., Hmelevskii A.N.</i> High-temperature Ignition and Combustion of Methane	120
--	-----

**ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
МЕХАНИКА, №4(125)/2018**

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

<i>Темиргалиев Н.</i> Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций	8
<i>Кобельков Г.М.</i> Об одном методе численного решения интегро-дифференциальных уравнений	69
<i>Малыхин В.И., Нуртазина К.Б.</i> Математический анализ инвестиционных процессов в условиях неопределенности	75
<i>Оспанова А.Б., Тулеуов Б.И.</i> Перспективы использования микрокомпьютера Raspberry Pi в эффективной цифровизации Казахстана	95
<i>Солодов А.П.</i> Асимптотическое поведение суммы ряда по синусам в окрестности нуля	108
<i>Холщевникова Н.Н.</i> Множества единственности для регулярных методов суммирования	113
<i>Фарайзаде А.П., Шафи А.</i> О проблеме Куратовского в векторных пространствах	117

МЕХАНИКА

<i>Афонина Н.Е., Сметов Г.Д., Хмелевский А.Н.</i> Высокотемпературное воспламенение и горение метана	120
--	-----

МРНТИ: 27.25.17

А.П. Солодов

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
(E-mail: apsolodov@mail.ru)

Асимптотическое поведение суммы ряда по синусам в окрестности нуля¹

Аннотация: Работа посвящена уточнению асимптотики суммы ряда по синусам с выпуклыми, медленно меняющимися коэффициентами, полученной С. Алянчицем, Р. Бояничем и М. Томичем [1] и усиленной С. А. Теляковским [2] и А. Ю. Поповым [3].

Ключевые слова: ряды по синусам с монотонными коэффициентами, медленно меняющаяся функция.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182-2018-125-4-108-112>

Рассмотрим невозрастающую и стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функцию

$$g(\mathbf{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Хорошо известно, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ сходится всюду и сумма этого ряда, функция $g(\mathbf{b}, x)$, непрерывна на $(0, 2\pi)$. Нас будет интересовать поведение функции $g(\mathbf{b}, x)$ в правой окрестности нуля в сравнении с более просто устроенной функцией. Наиболее принципиальной является ситуация, когда последовательность коэффициентов \mathbf{b} медленно меняется ($\lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k}/b_k = 1$). В этом случае последовательность частичных сумм ряда по синусам сходится очень медленно, а его сумма $g(\mathbf{b}, x)$ не интегрируема по Лебегу.

В случае медленно меняющейся последовательности коэффициентов при дополнительном условии выпуклости ($b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$) С. Алянчицем, Р. Бояничем и М. Томичем получен главный член асимптотического поведения функции $g(\mathbf{b}, x)$.

Теорема А ([1], [4, гл. V, §2, теорема 2.17]). Пусть \mathbf{b} — выпуклая, медленно меняющаяся, стремящаяся к нулю последовательность. Тогда верна асимптотика

$$g(\mathbf{b}, x) \sim \frac{b\left(\frac{1}{x}\right)}{x}, \quad x \rightarrow 0. \quad (1)$$

Другое направление исследований связано с получением двусторонних оценок при помощи функции, зависящей от коэффициентов последовательности \mathbf{b} . В качестве таковой Р. Салем предложил функцию

$$v(\mathbf{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} kb_k, \quad (2)$$

где $m(x) = [\pi/x]$, $0 < x \leq \pi$. Им установлен следующий результат.

Теорема В ([5], [6, гл. X, §7, теорема 1]). Пусть $\mathbf{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность, а $\{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность. Тогда найдется такое x_0 , что

$$C_1(\mathbf{b})v(\mathbf{b}, x) \leq g(\mathbf{b}, x) \leq C_2(\mathbf{b})v(\mathbf{b}, x), \quad 0 < x < x_0,$$

для некоторых величин $C_1(\mathbf{b})$ и $C_2(\mathbf{b})$.

¹Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6222.2018.1)

Как показано в [2], [3], ввиду медленного изменения последовательности \mathbf{b} при $x \rightarrow 0$ справедливо порядковое соотношение

$$\frac{b\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \sim \frac{b_{m(x)}}{x} \sim \frac{1}{\pi^2} x m^2(x) b_{m(x)} \sim \frac{2}{\pi^2} x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k. \quad (3)$$

Следовательно, асимптотику в теореме А можно переписать в следующей эквивалентной форме $g(\mathbf{b}, x) \sim 2\pi^{-2}v(\mathbf{b}, x)$, $x \rightarrow +0$. Таким образом, функция Салема $v(\mathbf{b}, x)$ удобна для получения как двусторонних оценок, так и точных порядковых соотношений.

С. А. Теляковский [2] усилил результаты Р. Салема и С. Алянчица, Р. Боянича, М. Томича. Он показал, что разность между суммой ряда по синусам и главным членом ее асимптотического разложения удобно сравнивать с функцией

$$\sigma(\mathbf{b}, x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2 (b_k - b_{k+1}). \quad (4)$$

А именно, С. А. Теляковским были установлены следующие результаты.

Теорема С ([2]). Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности \mathbf{b} найдутся такие не зависящие от \mathbf{b} положительные постоянные C_1 и C_2 , что выполняется неравенство

$$C_1 \sigma(\mathbf{b}, x) \leq g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \leq C_2 \sigma(\mathbf{b}, x), \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{11}.$$

Теорема D ([2]). Для любой невозрастающей и стремящейся к нулю последовательности \mathbf{b} найдется такая не зависящая от \mathbf{b} постоянная C_3 , что выполняется неравенство

$$g(\mathbf{b}, x) \leq C_3 v(\mathbf{b}, x), \quad 0 < x \leq \pi. \quad (5)$$

Теорема E ([2]). Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности \mathbf{b} найдется такая не зависящая от \mathbf{b} положительная постоянная C_4 , что выполняется неравенство

$$g(\mathbf{b}, x) \geq C_4 v(\mathbf{b}, x), \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{11}. \quad (6)$$

Если последовательность \mathbf{b} медленно меняется, то имеет место (см. [7, гл. II, §2, теорема 2.4]) порядковое соотношение $b_k - b_{k+1} = o(b_k/k)$, $k \rightarrow \infty$, из которого, как отмечено в [2], немедленно выводится (см. (3)) асимптотика

$$\sigma(\mathbf{b}, x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2 \Delta b_k = o\left(\frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k b_k\right) = o(v(\mathbf{b}, x)) = o\left(\frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right).$$

Таким образом, теорема С является усилением теоремы А, а теоремы D и E — усилением теоремы В.

А. Ю. Попов вычислил точные значения постоянных в неравенствах (5) и (6). Им доказаны следующие утверждения.

Теорема F ([3]). Для любой невозрастающей и стремящейся к нулю последовательности \mathbf{b} выполняется неравенство

$$g(\mathbf{b}, x) \leq v(\mathbf{b}, x), \quad 0 < x \leq \pi. \quad (7)$$

Теорема G ([3]). Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности \mathbf{b} выполняется неравенство

$$g(\mathbf{b}, x) \geq \frac{2}{\pi^2} v(\mathbf{b}, x) - \frac{1}{\pi} b_{m(x)} - b_{m(x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right), \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

Сравнение оценки (8) с порядковым соотношением (1) доказывает точность постоянной $2\pi^{-2}$ в теореме G. Точность же постоянной 1 в (7) очевидна. Другими словами, имеют

место равенства

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{b}} \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{g(\mathbf{b}, x)}{v(\mathbf{b}, x)} &= 1, \\ \min_{\mathbf{b}} \underline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{g(\mathbf{b}, x)}{v(\mathbf{b}, x)} &= \frac{2}{\pi^2}, \end{aligned}$$

причем максимум берется по всем монотонным и стремящимся к нулю последовательностям \mathbf{b} , а минимум — по всем выпуклым.

В данной работе получены точные постоянные в теореме С. Более того, мы исправим функции Салема (2) и Теляковского (4) так, чтобы полученные асимптотически точные на классе выпуклых и медленно меняющихся последовательностей мажоранта и миноранта как можно меньше отклонялись от суммы ряда по синусам. Рассмотрим модификации функций $v(\mathbf{b}, x)$ и $\sigma(\mathbf{b}, x)$:

$$\begin{aligned} v_0(\mathbf{b}, x) &= x \left(\sum_{k=1}^{m(x)-1} kb_k + \frac{m(x)}{2} b_{m(x)} \right), \\ \sigma_0(\mathbf{b}, x) &= x \sum_{k=1}^{m(x)-1} \frac{k(k+1)}{2} (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

Доказаны следующие результаты.

Теорема 1. Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности \mathbf{b} выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \frac{b_{m(x)}}{x} + \frac{6(\pi-1)}{\pi^3} \sigma_0(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)} - b_{m(x)+1}}{\pi} - b_{m(x)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{x} \right) \\ < g(\mathbf{b}, x) < \frac{b_{m(x)}}{x} + \sigma_0(\mathbf{b}, x), \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{11}. \end{aligned}$$

Замечание. Два последних слагаемых в оценке снизу отрицательны и суммарно не превышают $O(xb_{m(x)}) = o(x), x \rightarrow +0$.

Теорема 2. Существуют выпуклые, медленно меняющиеся и стремящиеся к нулю последовательности $\underline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, для которых найдутся последовательности точек $\{\underline{x}_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\underline{x}_l \rightarrow +0$, и $\{\overline{x}_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\overline{x}_l \rightarrow +0$, такие, что

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{g(\overline{\mathbf{b}}, \overline{x}_l) - \frac{b_{m(\overline{x}_l)}}{\overline{x}_l}}{\sigma_0(\overline{\mathbf{b}}, \overline{x}_l)} &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(\underline{\mathbf{b}}, \underline{x}_l) - \frac{b_{m(\underline{x}_l)}}{\underline{x}_l}}{\sigma_0(\underline{\mathbf{b}}, \underline{x}_l)} &= \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, на классе всех выпуклых, медленно меняющихся последовательностей \mathbf{b} решена следующая экстремальная задача, уточняющая теорему С:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{b}} \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{x}}{\sigma_0(\mathbf{b}, x)} &= 1, \\ \min_{\mathbf{b}} \underline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{g(\mathbf{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{x}}{\sigma_0(\mathbf{b}, x)} &= \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть \mathbf{b} — положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Тогда для некоторого $x_0 > 0$ при всех x , $0 < x < x_0$, выполняется неравенство

$$\frac{2}{\pi^2} v_0(\mathbf{b}, x) < g(\mathbf{b}, x) < \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{m(x)-1} \frac{k(k+1)}{2} (b_k - b_{k+1}).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют выпуклые, медленно меняющиеся и стремящиеся к нулю последовательности \underline{b} и \bar{b} , для которых найдутся последовательности точек $\{\underline{x}_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\underline{x}_l \rightarrow +0$, и $\{\bar{x}_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\bar{x}_l \rightarrow +0$, такие, что

$$g(\underline{b}, \underline{x}_l) < \frac{2}{\pi^2} v_0(\underline{b}, \underline{x}_l) + o(\sqrt[3]{\underline{x}_l}),$$

$$g(\bar{b}, \bar{x}_l) > \frac{\bar{b}_{m(\bar{x}_l)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\bar{x}_l}{2} + 2 \sin \frac{\bar{x}_l}{2} \sum_{k=1}^{m(\bar{x}_l)-1} \frac{k(k+1)}{2} (\bar{b}_k - \bar{b}_{k+1}) - o(\bar{x}_l^{3-\varepsilon}).$$

В частности, на классе выпуклых, медленно меняющихся и стремящихся к нулю последовательностей \mathbf{b} имеют место равенства

$$\min_{\mathbf{b}} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{g(\mathbf{b}, x) - \frac{2}{\pi^2} v_0(\mathbf{b}, x)}{\sqrt[3]{x}} = 0,$$

$$\min_{\mathbf{b}} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{m(x)-1} \frac{k(k+1)}{2} (b_k - b_{k+1}) - g(\mathbf{b}, x)}{x^{3-\varepsilon}} = 0.$$

References

- 1 Aljančić S., Bojanić R., Tomić M. Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. -1956. 10. -P. 101–120.
- 2 Telyakovskii S. A. On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients, Publ. Inst. Math. Nouvelle série. -1995. -Vol. 58. -№ 72. -P. 43–50.
- 3 Popov A. Yu. Estimates of the sums of sine series with monotone coefficients of certain classes // Mathematical Notes. -2003. -Vol. 74. -№ 6. -P. 829–840.
- 4 Зигмунд А. Тригонометрические ряды. -М.: Мир, 1965.
- 5 Salem R. Determination de l'ordre de grandeur à l'origine de certaines séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. -1928. 186. -P. 1804–1806.
- 6 Бари Н. К. Тригонометрические ряды. -М.: ГИФМЛ, 1961.
- 7 Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. -М.: Наука, 1985.

А.П. Солодов

М.В. Ломоносо автындагы Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей

Синустар бойынша қатар қосындысының нөл маңайындағы асимптотикалық өзгерісі

Аннотация: Мақала С. Алянчич, Р. Боянич және М. Томич [1] алғаш зерттеп, сонан соң С.А. Теляковский [2] мен А.Ю. Попов [3] күшейткен дөңес, коэффициенттері баяу өзгеретін синустар бойынша алынған қатар қосындысының асимптотикасын нақтылауға арналған.

Түйін сөздер: синустар бойынша монотонды коэффициентті қатарлар, баяу өзгеретін функция.

A.P. Solodov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Asymptotic behavior of the sum of sines series in the zero neighborhood

Abstract: The work is devoted to the refinement of the asymptotics of the sum of a series in sines with convex, slowly varying coefficients, obtained by S. Alancic, R. Boyanic and M. Tomich [1] and enhanced by S.A. Telyakovsky [2] and A. Yu. Popov [3].

Keywords: sine series with monotone coefficients, slowly varying function.

References

- 1 Aljančić S., Bojanić R., Tomić M. Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones, Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math., 1956, 10, 101–120.
- 2 Telyakovskii S. A. On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients, Publ. Inst. Math. Nouvelle série, 1995, 58:72, 43–50.
- 3 Popov A. Yu. Estimates of the sums of sine series with monotone coefficients of certain classes, Mathematical Notes, 2003, 74:6, 829–840.
- 4 Zigmund A. Trigonometric series (Mir, Moscow, 1965). [in Russian]

- 5 Salem R. *Determination de l'ordre de grandeur à l'origine de certaines séries trigonométriques*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1928, 186, 1804–1806.
- 6 Bari N.K. *Trigonometricheskie rjady*[Trigonometric series] (GIFML, Moscow, 1961). [in Russian]
- 7 Seneta E. *Pravil'no menjajushhiesja funkicii*[Correctly changing functions] (Nauka, Moscow, 1985).[in Russian]

Сведения об авторах:

А.П. Солодов – Кандидат физико-математических наук, доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

A.P. Solodov – Candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia.

Поступила в редакцию 01.11.2018

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды *bulmathmc.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теоремадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz. Сайт: bulmathmc.enu.kz.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website *bulmathmc.enu.kz*.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages (from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). *E-mail:* *vest_math@enu.kz*. *Сайт:* *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилиевой файл можно скачать со сайта журнала *bul-mathmc.enu.kz*.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубризатора МРНТИ (Международный рубризатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нургазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Редакторы: Н. Темірғалиев

Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2018. 4(125)- Астана: ЕҰУ. 128-б.
Шартты б.т. - 16. Таралымы - 25 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: (8-717-2) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды