Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2018, том 124, №3, 101-110 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.01.45**

Е.Ж. Айдос [1] , Э.С. Кадырова [2]

Satbayev University, Алматы, Казахстан
Nazarbayev University, Астана, Казахстан
(E-mail: elyusk@mail.ru)

О некоторых проблемных вопросах преподавания математики в средней и высшей школах

Аннотация: В статье соединены многодесятилетний опыт преподавания математики в ведущем техническом вузе страны со студенческим взглядом на потребности усвоения математических дисциплин в ведущем университете с международным составом преподавателей.

Ключевые слова: Преподавание математики, единичный отрезок, построение рациональных чисел на числовой прямой, кривая, гладкость кривой.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2018-124-3-101-110

Уже много-много лет тому назад в мировом образовательном пространстве сформировались основные темы школьной математики и математики вузовской, разумеется, различного содержания и глубины, в зависимости от специальности, но всегда включающей аналитическую геометрию, линейную алгебру и математический анализ.

В рамках данной статьи речь будет идти лишь об общих принципах преподавания с краткими иллюстрациями рекомендуемых решений поднимаемых вопросов.

В первой декаде мая месяца 1992 года выдающийся советский русский математик, член-корр. АН СССР и академик РАН П.Л. Ульянов по приглашению Казахского государственного университета находился в Алма-Ате.

С ним старший из авторов встретился в гостях у видного казахского математика, воспитанника Московской математической школы, ученика легендарного С.М.Никольского (что само по себе говорит о многом) Кабдоша Жумагазиевича Наурызбаева.

Казахи очень ценят «*дастархандас болдым*», и когда старший автор обратился к Петру Лаврентьевичу с просьбой «*Можно я расскажу своим друзьям, что с Вами чокался*», на что с присущей творческим личностям высшей пробы максимализмом был ответ «*Скажи всем, что я пьянствовал с Ульяновым*».

Все это к тому, что старший автор уникальную возможность в близком общении поговорить с самим Петром Лаврентьевичем Ульяновым использовал для обсуждения и тогда, и все время занимавих его проблем преподавания математики.

В контексте вопросов старшего автора Петр Лаврентьевич особое внимание обратил на аналитическое определение и на геометрическое изображение кривой как сосредоточение клубка исходных проблем преподавания математики, к освещению которых сейчас и перейдем.

По-Ульянову,во всяком случае как я понял, получалось, что здесь надо отчетливо понимать действительные числа и их геометрическое изображение – координатную прямую,и, уже на их основе, декартову систему на плоскости.

Затем определение функции со всеми деталями, с выходом на графики пяти основных элементарных функций. Далее переход на элементарные функции как результат четырех арифметических действий и замены аргумента одной функции другой (с неудачным названием «*сложной*»), выполненных в конечном числе раз над основными элементарными функциями.

Считаем наиболее подходящим одновременное восприятие фактически абстрактных действительных чисел и координатной прямой как визуально запечатляемого в сознании обучающегося их геометрического изображения. Особое внимание надлежит обратить на то обстоятельство, что есть числа и есть точки, в совокупности составляющие координатную прямую, с осознанием мысли *«число изображается точкой»,* что должно закрепляться *«геометрическими построениями циркулем и линейкой».*

Обозначим основные этапы реализации намеченного плана. Начнем с координатной прямой. Сначала линейкой проведем прямую, на ней стрелкой отметим положительное направление и нанесем две различные точки (см. Рис. 1).

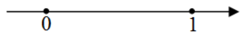

Рисунок 1

После этого обращаемся к числам и объявляем, что дальняя от стрелки точка изображает число 0 (в продвинутых курсах математики можно сообщить, что 0 есть особое число, нейтральное к действию сложения: $x+0=x$ для всякого числа x). И, далее, ближайшая из двух отмеченных к направлению прямой точка изображает число 1 (в продвинутых курсах математики можно сообщить, что 1 есть особое число, отличное от нуля, нейтральное относительно действия умножения: $x \cdot 1 = x$ для всякого числа x).

Думается, что для понимания действительных чисел наиболее приемлемым является переход к ним от геометрической прямой, т.е. *от точек к числам.* Для осуществления чего, пользуясь настроенным по точкам 0 и 1 циркулем, отложенные от точки 1 справа последовательные точки пронумеруем числами 2,3,... , а от точки 0 влево - числами -1,-2,... . Тем самым, получаем все целые числа $Z=\{0,\pm 1,...\}$ (см.Рис. 2).

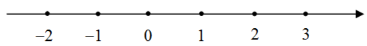

Рисунок 2

Теперь перейдем к рациональным числам, или, что то же самое, к обыкновенным дробям, как положительным, так и отрицательным.

Как известно из школьной геометрии, с помощью циркуля и линейки любой отрезок можно разбить на любое количество равных частей. Здесь мы не будем описывать эту процедуру, лишь отошлем к курсу Геометрии, а сразу же обратимся к самой задаче на координатной прямой изобразить положительную обыкновенную дробь $\frac{m}{n}$, где m и n натуральные (целые положительные) числа. Здесь исходным является отрезок, соединяющий точки, отвечающие особым числам 0 и 1, чем задается *единичный отрезок*, другими словами *масштаб.* Например, рациональное число $\frac{3}{7}$ (см. Рис.3), для чего надо единичный отрезок с концами в 0 и 1 разбить на 7 равных отрезков, тогда первая *справа от нуля* точка полученного разбиения (конец первого из полученных 7-ми отрезков) будет изображать число $\frac{1}{7}$, затем с циркулем раствора в точках 0 и $\frac{1}{7}$ повторяется та же процедура, что и с целыми числами: $\frac{3}{7}$ есть отложенное от нуля три раза, и, вообще, $\frac{m}{7}$ есть отложенное вправо от нуля целое положительное число m раз. Отрицательные обыкновенные дроби $-\frac{m}{n}$: та же процедура, только *влево от нуля* m раз, то есть построить симметричную числу $\frac{m}{n}$ относительно нуля точку, что и будет изображением числа $-\frac{m}{n}$.

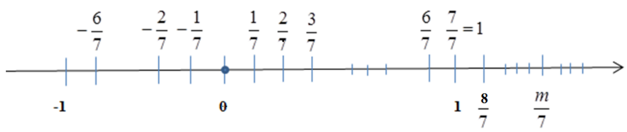

Рисунок 3

Конечно, и это надо донести до подсознания учащихся, построенные до сих пор точки вида $\frac{m}{n}$ (n - целые положительные, m из Z) не покроют всю прямую. Этот удивительный факт надо использовать как демонстрацию принципа математики *«Что бы с позиций здравого смысла ни казалось достоверным, в математике надо все доказывать».* В подтверждение чего надо опять же циркулем и линейкой построить точку, соответствующую *иррациональному,* то есть *не рациональному* числу, например, $\sqrt{2}$ (на доказательстве чего останавливаться не будем). Само же построение следующее (Рис. 4): от точки 1 строим перпендикулярный к координатной прямой единичный отрезок, затем один конец циркуля устанавливаем в точке 0, другой конец в конце построенного отрезка и полученную раствором циркуля длину откладываем на координатной прямой, - полученная точка изображает искомое число $\sqrt{2}$.

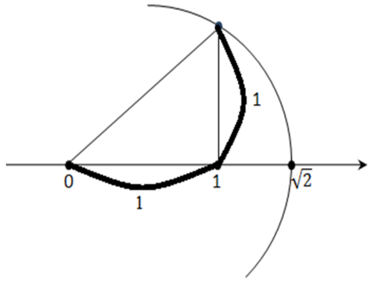

Рисунок 4

Занятия со студентами старшего автора и осмысление этого учебного материала младшим автором, с её коррективами в процессе усвоения, позволяют надеяться, что данная процедура воссоздаст на уровне подсознания в дальнейшем пожизненном активе учащихся и студентов исходные в математике понятия действительных чисел с их разбивкой на натуральные, целые, рациональные и иррациональные, вместе с их геометрической интерпретацией – координатной прямой.

Обычно наблюдается недостаточное понимание обыкновенных дробей, поэтому необходимо провести расширенное толкование процедуры построения обыкновенных дробей $\frac{m}{n}$: объект (например, торт или яблоко), принятый за единичный, разбивается на n равных частей, затем любой из них (любой, поскольку они все равные) берется целое положительное число m раз.

Следующий шаг на пути к кривой – это числовые функции и промежутки как числовые множества их определения, декартова система координат на плоскости как средство для геометрического изображения функций.

Исходя из своего опыта, старший из авторов пришел к выводу, что среди разнообразных способов определения функции самый эффективный – это самый прямой путь *«Функция – правило, закон, соответствие, применяемое к аргументу (или независимой переменной)»*, безо всяких *зависимых переменных*, которых вообще не существует.

Функция, без каких-либо ограничений, может быть определена на всяком множестве, но для обсуждаемого случая – это когда и аргумент, и значение функции есть действительные числа: множествами определения будут числовые промежутки, - интервалы, отрезки (или сегменты), полусегменты и полуинтервалы (ограниченные и неограниченные).

Здесь необходимо отчетливо отличать аналитическое определение интервала (a, b) и сегмента $[a, b]$ как множеств, составленных из всех действительных чисел x, таких что $a < x < b$ и $a \le x \le b$ соответственно, безо всяких *«концы входят»* и *«концы не входят»*, вызванных геометрическим изображением этих промежутков.

Итак, полусегмент $[0,1)$ по своей сути есть числовое множество, т.е. набор чисел, и, далее, всех чисел x, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам $0 \le x$ и $x < 1$. Только потом появляется название *«концы промежутка»*, здесь это числа 0 и 1, со свойствами «Конец 0 промежутка $[0,1)$ *входит*» и «Конец 1 промежутка $[0,1)$ *не входит*», которые, конечно, никак не описывают полусегмент $[0,1)$.

Пусть теперь имеется числовая функция $f(x)$, определенная на промежутке с концами a и b. Требуется эту функцию изобразить геометрически, другими словами – наглядно, чтобы к восприятию подключить зрение, в помощь основной цели – внедрению в подсознание.

Для этого берутся два экземпляра координатных прямых с названиями *«ось абсцисс»* с обозначением точек - чисел буквой x и *«ось ординат»* с такого же смысла обозначением буквой y, которые на плоскости располагаются перпендикулярно друг к другу, с пересечением в начальной точке каждой из них (см. Рис. 5).

Тогда геометрическое изображение функции $f(x)$, определенной на промежутке с концами a и b, будет состоять из всех точек $(x, f(x))$. Здесь не будем давать словесного описания

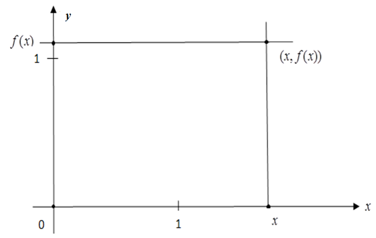

Рисунок 5

этой процедуры, а отошлем к их изображению по правилу из Рис. 5. Совокупность всех этих точек на плоскости образуют фигуру, которую называют *графиком* функции $f(x)$.

Непрерывную на промежутке (конечном или бесконечном) функцию, вместе с её геометрическим изображением – графиком называют *кривой.* Первая в этом ряду – это прямая как линейная функция, то есть функция вида $f(x) = kx + c$ в совокупности с её графиком (см. Рис. 6).

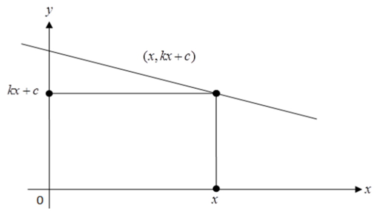

Рисунок 6

Теперь перейдем к общему определению кривой как математической модели веревки, брошенной на стол. Ясно, что даже самая простая из таких фигур - окружность с центром в начале координат и радиуса r уже не будет попадать под данное выше определение кривой, ибо функция в одной точке не может принимать два различных значения (см. Рис. 7).

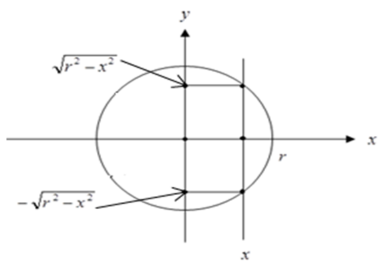

Рисунок 7.

Стало быть, нужно перейти к новому расширенному определению кривой, охватывающему уже рассмотренный случай. Здесь нам потребуется привлечь две непрерывные числовые функции, определенные на одном и том же промежутке, но с установлением порядка – первая и вторая функции. Хотя и понятна идея предлагаемой конструкции, но и в этом случае, и вообще в математике, очень важно ввести *«работающие»* обозначения. Так, в системе координат на Рис. 5 точки оси абсцисс обозначены буквой x, а точки оси ординат – буквой y. Далее, в качестве общего множества определения упорядоченной пары непрерывных функций возьмем промежуток с концами a и b. Тогда сами функции естественно обозначить соответственно $x(t)$ и $y(t)$, понятно, здесь буквой t обозначен их общий аргумент. Это будет первая, *аналитическая*, часть определения кривой – упорядоченная пара непрерывных функций на одном и том же промежутке. Вторая, геометрическая, часть определения кривой – это совокупность всех точек $(x(t), y(t))$, в совокупности образующих линию, для простоты речи коротко называемой *кривой.*

В условиях этих определений, окружность на Рис. 7 будет кривой как интерпретация двух функции в порядке $x(t) = r\sin t$ - первая и $y(t) = r\cos t$ - вторая, заданных на промежутке –

полусегменте $[0, 2\pi)$, составленном из всех чисел t таких, что $0 \le t < 2\pi$, с геометрическим изображением на Рис. 7.

В контексте приведенных определений кривой ещё раз взглянем на освещение этой темы в учебной литературе. Здесь сразу же сообщим, что аналитическое определение кривой как упорядоченной пары непрерывных функций заставит признать *квадрат* на плоскости в качестве кривой. Потому на определяющие кривую функции необходимо наложить ещё какие-то условия, – в общем курсе математического анализа это дифференцируемость и кусочная дифференцируемость. Тем самым, приходим к изучению *гладкости* кривой.

Получается опять же по-Ульянову: придется в действии пользоваться бесконечными производными с привлечением несобственных чисел $-\infty$ и $+\infty$ из расширенной числовой прямой, в отношении которых обычно ограничиваются лишь их определениями.

Таким образом, несмотря на невыполнение некоторых арифметических операций и базовых утверждений о пределах (они образуют тему «*Неопределенность*»), в разных ситуациях, например, в курсе теории вероятностей для функции распределения используются такие записи, как $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$, а для нормированной функции Лапласа $\Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$, поскольку эти функции задаются в виде:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = -\infty, \\ P(X < x), & -\infty < x < +\infty, \\ 1, & x = +\infty, \end{cases} u\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x = -\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, & -\infty < x < +\infty, \\ \frac{1}{2} & x = +\infty. \end{cases}$$

Вообще, несобственные числа $-\infty$ и $+\infty$ широко используется в литературе. Например если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, то говорят, что функция имеет бесконечный предел положительного знака, а если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, то функция в точке x_0 имеет бесконечную производную отрицательного знака и в этом случае пишут $f'(x_0) = -\infty$.

В данной статье мы покажем еще несколько употреблений несобственных чисел $-\infty$ и $+\infty$.

Задачи, которые подлежат уточнению. Мы рассмотрим такие классические понятия математического анализа, которые давно сложились в общепринятом изложении, но, наш взгляд, имеют потенциал уточнений. К ним можно отнести, например, известные определения гладких кривых (чтобы довести до читателя нашу основную идею, достаточно рассматривать такие кривые, которые представляются на некотором отрезке $[a, b]$ непрерывной фунцией: $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.)

В рамках приведенного выше аналитическо-геометрического определения кривой заметим, что одна геометрическая кривая имеет бесконечно много аналитических описаний: отрезок Γ как геметрическая кривая $f(x) = kx + c\,(a \le x \le b)$ имеет столько аналитических описаний, сколько имеется строго возрастающих от a до b непрерывных функций $\varphi(t)$ (см. Рис. 8), и тогда

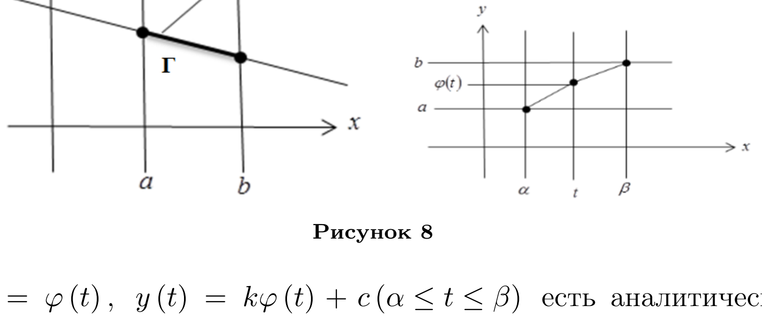

Рисунок 8

пара Γ и $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = k\varphi(t) + c\,(\alpha \le t \le \beta)$ есть аналитическо-геометрическая кривая.

Понятно, к таким $\varphi(t)$ относятся и кусочно-линейные функции со сколь угодно большим количеством точек излома, в которых производной нет.

Одно из определений гладкой кривой следующее:

Определение A. *Кривая* Γ *заданная параметрически уравнениями* $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a,b]$, *называется гладкой, если* $x(t)$, $y(t)$ *– непрерывные функции, имеющие на отрезке* $[a,b]$ *непрерывные производные, одновременно не равные нулю.*

Другое, более общее, определение гладкой кривой.

Определение B. *Кривая* Γ *называется гладкой на* $[a;b]$, *если ее можно задать при помощи уравнений* $\Gamma: \ x = x(t), \ y = y(t), \ t \in [a;b]$, *где* $x(t)$, $y(t)$ *– непрерывные функции, имеющие на отрезке* $[a,b]$ *непрерывные производные, одновременно не равные нулю.*

Мы считаем, что оба определения гладкой кривой не безупречны, хотя бы в смысле совмещенного аналитическо-геометрического определения.

Как об этом было сказано выше, одна и та же кривая может иметь как дифференцируемую параметризацию, так и параметризацию недифференцируемыми функциями. Примерами таких кривых могут служить полуокружность $\Gamma_1 : x(t) = t(-1 \leq t \leq 1), y(t) = \sqrt{1-t^2}$, кубическая парабола $\Gamma_2 : x = t(-\infty < t < +\infty), y = \sqrt[3]{t}$ и т.д. В таких случаях по определению А вопрос о гладкости кривой остается открытым, ибо функции, представляющие их, в указанных промежутках не дифференцируемы. Точнее говоря, в определении А понятие гладкой кривой непосредственно связано с гладкими функциями, представляющими ее.

Недостатком определения B является небходимость *поиска параметризации* кривой функциями с подходящими свойствами. Так как способ параметризации одной и той же кривой не единственный, то, вообще говоря, заранее нам не известно, существует ли параметризация кривой с нужными свойствами.

Здесь мы определяем гладкую кривую независимо от гладкости представляющей ее функции, т.е. без требования задания кривой гладкими функциями или недифференцируемыми функциями.

Другим примером математического анализа, требующего уточнения служит связь между касательной к графику функции и ее производной. Для графика дифференцируемой функции существование одной из них (касательной или производной) влечет сущестование другой. А для графика недифференцируемой функции такой связи нет. Этот вопрос также можно решить с помощью несобственных чисел $-\infty$ и $+\infty$.

Решения поставленных задач. Воспользуемся следующим известным результатом из курса математического анализа.

Теорема C. *Пусть функция* $f(x)$ *имеет производную* $f'(x)$ *при всех* x, *близких к точке* x_0, *за исключением, быть может самой точки* x_0. *Пусть существует конечный предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *и конечный или бесконечный предел* $\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. *Тогда существует* $f'(x_0) = \alpha$.

Например, для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при всех $x \neq 0$ существует конечная производная: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Существует также конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$ и бесконечный предел $\alpha = \lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$. Тогда по теореме С имеем $f'(0) = +\infty$.

Следовательно, производную можно задавать в виде: $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$ В связи с тем, что выполняются равенства $\lim\limits_{x \to 0+0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} f'(x) = +\infty = f'(0)$, мы такую производную назовем непрерывной в широком смысле в точке $x = 0$ и будем пользоваться данной терминологией в дальнейшем.

Мы выше отметили разные определения гладкости кривой (подчеркнем, что надо разделять определение кривой и определение её гладкости). По нашему мнению естественым и наглядным определением гладкой кривой является определение гладкости с помощью непрерывной касательной к кривой. Поскольку наш способ определения гладкой кривой тесно связан с геометрическим способом, мы приведем определение касательной к графику функции.

Пусть $A(x_0, f(x_0))$ – некоторая точка непрерывной кривой $: y = f(x), x \in [a,b]$. Возьмем точку $(x_0 + h) \in (a,b)$ и выберем направление прямой S,проходящей через точки $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$, так, чтобы угол β между положительным направлением оси x и направлением прямой S был бы острым: $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Полученную таким образом направленную прямую S назовем секущей, а $\beta = \beta(x_0, h)$ – её углом наклона.

Определение 1. *Если существует предел* $\lim\limits_{h\to 0}\beta(x_0,h)$, *то направленная прямая* T, *проходящая через точку* $A(x_0;\ f(x_0))$, *с углом наклона* $\alpha(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\beta(x_0,h)$ *(предельное положение секущей) называется касательной к кривой в этой точке.*

Другими словами, существование касательной в точке x кривой $: y=f(x), x\in[a,b]$, с углом наклона $\alpha(x)$ равносильно существованию предела

$$\alpha(x)=\lim_{h\to 0}\beta(x,h),\qquad x\in[a,b]\,. \tag{1}$$

Учитывая равенство $\beta(x,h)=arctg\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, в силу обобщенной непрерывности $arctgv$ на "‘бесконечном сегменте"’ $[-\infty,+\infty]$, равенство (1) можно переписать в виде

$$\alpha(x)=\lim_{h\to 0}\beta(x,h)=\lim_{h\to 0}arctg\frac{f\,(x+h)-f\,(x)}{h}=arctg\lim_{h\to 0}\frac{f\,(x+h)-f\,(x)}{h},\quad x\in[a,b]\,.$$

Причем, если существует предел (1), что равносильно существованию предела в правой части равенства, то получаем

$$\alpha(x)=arctg\ f'(x), x\in[a;b]\,,\quad -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Отсюда следует утверждение: «Для того чтобы непрерывная функция $y=f\,(x)$ имела производную в точке x в широком смысле, необходимо и достаточно, чтобы в соответствующей точке ее графика существовала касательная с угловым коэффициентом $tg\alpha=f'\,(x)$, $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$.» Отметим, что в этом утверждении функция $y=f\,(x)$ может быть и недифференцируемой, так как ее производная рассматривается в широком смысле.

Назовем, $\alpha(x)=arctg\ f'(x)$ *угловой функцией* для f на отрезке $[a,b]$.

Теперь покажем, что из непрерывности в широком смысле в точке x производной f' следует непрерывность (*в обычном смысле*) в этой точке угловой функции α, и обратно, из непрерывности (в обычном смысле) в точке x угловой функции α следует непрерывность (в широком смысле) в этой точке производной f'. Действительно, в точке x_0 производная f' непрерывна (*в широком смысле*), т.е. $\lim x\to x_0 f'(x)=f'(x_0)$, где $f'(x)\in[-\infty,+\infty]$. Тогда в случае $f'(x_0)\in(-\infty,+\infty)$ угловая функция $\alpha(x)$ непрерывна в точке x_0 как композиция двух непрерывных функций. Если же, например, $f'(x_0)=+\infty$, то $\alpha(x_0)=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2}$ и, в силу непрерывности $arctg$ функции на $[-\infty,+\infty]$ получим

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}arctg\ f'(x)=arctg\lim_{x\to x_0}f'(x)=arctgf'(x_0)=\frac{\pi}{2}=\alpha(x_0).$$

Обратно, пусть угловая функция α непрерывна в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\alpha(x_0)$, где $\alpha(x_0)=arctgf'(x_0)$. Тогда, учитывая неравенства $-\frac{\pi}{2}\le\alpha(x)\le\frac{\pi}{2}$, для всякого x из $[a,b]$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}tg\alpha(x)=tg\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=tg\alpha(x_0)=tg(arctgf'(x_0))=f'(x_0)$. Здесь надо учесть, что если, например, $\alpha(x_0)=arctg\ f'(x_0)=\frac{\pi}{2}$, т.е.если $f'(x_0)=+\infty$, то имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\frac{\pi}{2}-0$, и $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}tg\alpha(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\sin\alpha(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\cos\alpha(x)}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}=\frac{1}{+0}=+\infty=f'(x_0)$.

Таким образом, из непрерывности в точке угловой функции α следует непрерывность в этой точке производной f' (в широком смысле).

Теперь можно сформулировать следующие два равносильных определения гладкой кривой.

Определение 2 (на языке угловой функции). Н*епрерывная кривая* $\Gamma, y=f(x), a\le x\le b$ *называется гладкой, если* f *имеет непрерывную угловую функцию на* $[a,b]$.

Это на самом деле есть определение **на языке касательной**, ибо непрерывная угловая функция и есть непрерывное изменение направления касательной.

Определение 3 (на языке производной). *Непрерывная кривая* $\Gamma, y=f(x), a\le x\le b$, *называется гладкой, если* f *имеет непрерывную в широком смысле производную на* $[a,b]$.

С помощью этих определений сразу можно выяснить вопрос о гладкости кривых, независимо от того, заданы они дифференцируемыми или недифференцируемыми функциями.

Это можно проверить, в частности, на примере полуокружности $\Gamma, y = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$.

Действительно, ее угловая функция

$$\alpha(x) = \begin{cases} arctg \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| \neq 1, \\ \frac{\pi}{2}, & x = -1, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 1, \end{cases}$$

непрерывна на $[-1, 1]$.

Замечание. Приведенные здесь определения гладкой кривой без труда можно обобщить на случай кривой, заданной параметрическими уравнениями (см. [1] и [2]).

Теория кривых очень глубока и многостороння. Потому ограничимся приведенным определением, хотя есть определение кривой как множества точек на плоскости, составленное из всех решений уравнения, связывающих числа x и y (примером чего является окружность $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, изображенная на Рис.7).

Все изложенное выше показывает, что в математике всегда надо быть осторожным и предельно внимательным в обращении с казалось бы понятными в силу своей наглядности объектами из учебных школьных и вузовских программ, и не только.

В заключение приведем ещё один такой пример – это определение числовой последовательности. Много раз приходилось встречаться с ошибочным пониманием этого, относящегося к основным, математического объекта. Сама запись последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ создает обманчивое чувство понимания – *«Ничего сложного, просто надо написать числа одно за другим».* На самом деле, числовая последовательность есть *функция*, функция с множеством определения, составленного из всех целых положительных чисел – натурального ряда.

В процессе подготовки этой статьи мы пользовались большим количеством источников, иногда буквально следуя изложенным в них идеям как отечественных, так и зарубежных, среди которых особо отметим [3] и [4].

Можно провести следующую историческую параллель с целями данной статьи. Случилось так, что новейшие тогда знаменитые американские бомбардировщики B-29 совершили вынужденную посадку на территории СССР. Тогда И. В. Сталин приказал воспроизвести точную копию этих самолетов, что вызвало создание многих новых производств. Так и здесь авторы надеются, что приведенное здесь, по совету П.Л.Ульянова, обстоятельное построение теории кривых с подробными комментариями послужит руководящим принципом в понимании и освещении всей математики.

Список литературы

1 Aidos E. Zh. Addressing issues related to some Concerts of Mathematics // 13th International Congress on Mathematical Education 2016, Hamburg, Germany.

2 Айдос Е.Ж. Гладкие кривые, представленные недифференцируемыми функциями//Математика в высшем образовании. -2012. -№10. -С. 9-14.

3 Берс Л. Математический анализ. Перевод с англ. Л. И. Головиной. Под ред. И. М. Яглома. Учеб. Пособие для втузов. -М., «Высш. школа», 1975.

4 Образование, которое мы можем потерять. Сборник. Под общей редакцией ректора МГУ академика В.А. Садовничего. Изд. 2-е, дополненное. -Москва: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 стр.

ОТ РЕДАКЦИИ

Еркара Жолдыбайұлы Айдос после тяжелой болезни скончался 9 ноября с.г. в Алматы. Всю свою творческую жизнь он посвятил математике и её преподаванию, внес существенный вклад в развитие технического образования в Казахстане.

Е. Айдоса отличала исключительная порядочность, при этом он не понимал и не принимал, что можно поступать по-другому. Поэтому в общении с ним все люди как-то подтягивались, стараясь показать свои лучшие качества. Е. Айдос выделялся предельной ответственностью по отношению к своим служебным обязанностям, – не отошел от преподавания, пока позволяло ему физическое состояние.

Быть может, достоин распространения как факт примерной научной честности путь к опубликованию представленной здесь его последней статьи. Присланный им текст статьи отличался прямотой и категоричностью, что, учитывая его физическое состояние, без его ведома было несколько смягчено силами Редколлегии.

Так вот, за 10 дней (!!!) до своей кончины Еркара Жолдыбайұлы со словами «Здесь нет того, что я хотел сказать» отказался от опубликования, получается, ухудшенный вариант своей статьи. Через день Редколлегия получила уже одобренный им самим (подчеркнем за неделю до ухода из жизни!) вариант, что и предлагается вниманию естественно-научной общественности. Это показывает, что Е. Айдос до конца дней придерживался своих жизненных принципов.

Хотелось бы, чтобы этот последний высочайшего нравственного значения поступок Еркара Жолдыбайұлы Айдоса был примером для подражания всех.

Е.Ж. Айдос [1] **, Э.С. Кадырова** [2]

[1] *Satbayev university, Алматы, Қазақстан*
[2] *Nazarbayev university, Астана, Қазақстан*

Орта және жоғары мектептерде математиканы оқытудың кейбір проблемалық сұрақтары жөнінде

Аннотация. Мақалада еліміздің жетекші техникалық университетінде математиканы оқытудағы онжылдықтар тәжірибесі мен халықаралық құрамды оқытушылары бар жетекші университеттегі студенттің математикалық пәндерді игерудегі көзқарастар біріктірілген.

Түйін сөздер. Математиканы оқыту, бірлік кесінді, сандық кесіндіде рационал сандарды бейнелеу, қисық.

РЕДАКЦИЯДАН

Ерқара Жолдыбайұлы Айдос ауыр дерттен осы жылдың қараша айынның 9 жұлдызында Алматыда өмірден өтті. Өзінің ғылыми-методологиялық ғұмырын толығымен математиканың әртүрлі мәселелеріне арнап, Қазақстандағы техникалық білімнің дамуына елеулі үлесін қосты. Ерқара адал ниеттілігі және рухани тазалығымен ерекшеленетін, ол тіпті басқаша болуы мүмкін екендігін түсінбейтін де, қабылдамайтын да. Сондықтан да онымен араласқандар жинақталып, өздерінің жақсы жақтарын көрсеткілері келетін. Ерқара өзінің қызметтік міндеттеріне аса жауапкершілікпен қарайтын - ауырып жүрген кезінің өзінде де күйі әбден кеткенше сабақ беріп өтті. Мүмкін, тіпті ұсынған ақырғы мақаласының жариялау жолы оның ғылыми тазалығының мысалы ретінде кең мөлшерде таратуға тұрарлық шығар.

Ерқара жіберген мақала мәтіні дұрыс айтылған болса да, аса сынды және «айттым-біті, кестім-үзілді» деген кесіммен жазылған. Сондықтан оның сырқат жағдайына байланысты, Редакция мүшелерінің араласуымен біраз өзгертілген еді. Әйткенмен, қайтыс болардан 10 күн (!!!) бұрын Ерқарадан "Бұнда мен айтқым келген негізгі жәйттер жоқ, мақаламды қайтарыңыз" деген сөздерді естуге мәжбүр болдық, демек, өте нашарландырып -төмендетіп жібергенімізді білдіргені ғой. Бір күннен кейін (өмірден өтуіне бір-ақ апта ғана уақыт қалғанда!) өзі құптаған мақала Редакцияға түсті де, сол ғылым-білім көпшілігінің назарына ұсынылып отыр. Бұл болса, Ерқара демі үзілгеніне дейін өзінің өмірлік қағидаларын берік ұстанғанын көрсетеді.

Әрине, Ерқара Жолдыбайұлы Айдостың осы соңғы аса жоғары рухани ерлігі баршаға үлгі тұтарлық болады деген сенімдеміз.

Ye. Aidos [1] **, E. Kadyrova** [2]

[1] *Satbayev University, Almaty, Kazakhstan*
[2] *Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan*

On some problematic issues of teaching mathematics in secondary and high schools

Abstract. The article combines the decades of experience in teaching mathematics at a leading technical university of the country with a student's view on the needs of mastering mathematical disciplines at a leading university with an international composition of teachers.

Keywords. Teaching mathematics, a single segment, the construction of rational numbers on the number line, curve.

References

1 Aidos E. Zh. Addressing issues related to some Concerts of Mathematics. 13th International Congress on Mathematical Education 2016, Hamburg, Germany.

2 Aidos E. Zh. Gladkie krivye, predstavlennye nedifferenciruemymi funkciyami [Smooth curves represented by non-differentiable functions], Matematika v vysshem obrazovanii[Mathematics in higher education], (10), 9-14(2012).

3 Bers L. Matematicheskij analiz. Perevod s angl. L. I. Golovinoj. Pod red. I. M. Jagloma. Ucheb. Posobie dlja vtuzov [Mathematical analysis. Translation from English L. I. Golovina. Ed. I.M. Yagloma. Training Manual for technical colleges] («Vyssh. shkola», Moscow, 1975).

4 Obrazovanie, kotoroe my mozhem poterjat' [Education that we can lose. Collection]. Sbornik. Pod obshhej redakciej rektora MGU akademika V. A. Sadovnichego. Izd. 2-e, dopolnennoe [Under the general editorship of the rector of Moscow State University, academician V. A. Sadovnichy. Ed. 2nd, supplemented] (Moskovskij gosudarstvennyj universitet im. M. V. Lomonosova. Institut komp'juternyh issledovanij, Moscow, 2003, 368 p.).

Сведения об авторах:
Айдос Е.Ж. – Кандидат физико-математических наук, професор Satbayev University, Алматы, Казахстан.
Кадырова Э.С. – студент Nazarbayev University, Астана, Казахстан.

Aidos Ye. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor Satbayev University, Almaty, Kazakhstan
Kadyrova E. – Student Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 11.08.2018