ISSN 2616-7182

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of the L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№3(124)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2018
Astana, 2018

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген
А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 20 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: (7172)709-500 (ішкі 31-428).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Astana, Kazakhstan, 010008
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible secretary, computer layout:
A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 20 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;
tel: (7172) 709-500 (ext.31-428).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 20 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,
тел.: (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ, №3(124)/2018

МАЗМҰНЫ

**BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES, №3(124)/2018**

CONTENTS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА, №3(124)/2018

СОДЕРЖАНИЕ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2018, том 124, №3, 95-100 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **28.29.15**

Р.А. Хачатрян

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
(E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com)

Метод проекции градиентов и непрерывные селекции многозначных отображений

Аннотация: Рассматривается параметрическая задача оптимизации следующего типа:

$$f(x,y) \longrightarrow min,\ y \in M \subseteq R^m,$$

где x параметр из $E \subseteq R^n$.

Для этой задачи определено множество ε- оптимальных точек:

$$a_\varepsilon(x) = \{y \in M : f(x,y) \leq \inf_{y \in M} f(x,y) + \varepsilon\}.$$

Изучается вопрос построения непрерывной селекции для отображения a_ε. Методом проекции градиентов построены непрерывные селекции для этого многозначного отображения.

Ключевые слова: Многозначное отображение, ε- оптимальные точки, проекция, выпуклые множества.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/2018-124-3-95-100

1. Введение. Задача о существовании непрерывных селекций, восходящая кклассической теореме Э.Майкла [1], получила в дальнейшем многочисленные приложения в самых различных областях математики. Отметим лишь обзор [2], посвященный этому вопросу.

Однако во всех этих работах доказывается существование непрерывных селекций и не указываются алгоритмы построения этих отображений.

В настоящей статье показано, что обычные методы градиентного спуска являются удобными способами построения непрерывных селекций для многозначных отображений, связанных с задачами минимизации функций.

В дальнейшем, через $\Pi_M(a)$ будем обозначать проекцию точки a на выпуклое замкнутое множество M , а через $B_r(x)-$ замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в x .

Отображение a, которое каждому $x \in R^n$ сопоставляет множество $a(x) \subseteq R^m$ есть многозначное отображение из R^n в R^m. *Селекция* для a определяется как однозначное отображение $y(.) : R^n \to R^m$ такое, что $y(x) \in a(x)\ \forall x \in R^n$.

Пусть функция $f(x,y)$ выпукла по $y \in R^m$ при фиксированном x и непрерывна по $x \in R^n$ при каждом фиксированном $y \in R^m$. Известно (см. [3], Лемма 4.1, стр. 207), что f непрерывна по совокупности переменных.

Имеет место следующий результат, доказательство которого мы проводить не будем, поскольку оно совершенно аналогично доказательству леммы 3.1 [4], (замечание 2, стр.329).

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных (x,y) и имеет непрерывное частное производное $f'_y(x,y)$ по y на R^m . Пусть $E \subset R^n$ и $F \subset R^m-$ компактные множества.

Тогда найдется такое $\alpha_0 > 0$, что для фиксированных x и y будем иметь

$$f(x, y + \alpha h) = f(x,y) + \alpha < f'_y(x,y), h > +o(x,y,h,\alpha),$$

где $o(x,y,h,\alpha)/\alpha$ стремится к нулю равномерно по $x \in E,\ y \in F$ и $h \in B_1(0)$ при $\alpha \to 0$.

Рассмотрим многозначное отображение вида

$$a_\varepsilon(x) \equiv \{y \in M : f(x,y) \leq V(x) + \varepsilon\},$$

где ε некоторое фиксированное неотрицательное число, а $V(x) = \inf_{y\in M} f(x,y)$. Непрерывность многозначного отображения такого вида расмотрена во многих работах [5–8]. В частности в статье [7] доказан следующий результат (см. Лемму 1.3).

Теорема 2 Пусть $f(x,y)$ непрерывна по $x \in R^n$ при фиксированном $y \in R^m$ и выпукла по y на R^m при фисированном x. Пусть $E \subset R^n-$ компакт, а $M \subset R^m-$ выпуклый компакт.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ многозначное отображение $a_\varepsilon(x)$ полунепрерывно снизу, т.е. если $x_0 \in E$ фиксированная точка, то для любого $\delta > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$\forall x \in U(x_0) \bigcap E : a_\varepsilon(x_0) \subseteq a_\varepsilon(x) + \delta B_1(0).\,.$$

2. Основной результат. Здесь мы расмотрим вопрос построения непрерывных селекций отображения $a_\varepsilon(x)$.

Как оказалось, метод проекции градиентов решает этот вопрос. Именно, справедлива

Теорема 3. Пусть $E \subset R^n-$ компакт, а $M \subset R^m$ - выпуклый компакт, функция $f(x,y)$ выпукла по y и непрерывна по x.

Предположим также, что существует производная $f'_y(x,y)$ по y, которая непрерывна по совокупности переменных x и y.

Далее, построим последовательность отображений методом проекции градиентов:

$$y_0(x) \equiv \overline{y_0},\ \overline{y}_0 \in a_0(\overline{x}_0),\ y_{j+1}(x) = \Pi_M(y_j(x) - \lambda_j f'_y(x, y_j(x)),$$

$$j = 0, 1, \ldots,$$

причем λ_j произвольные числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_j > 0,\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \infty,\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер K, что

$$\forall x \in E, \forall j \geq K:\ y_j(\overline{x}_0) = \overline{y}_0,\ y_j(x) \in a_\varepsilon(x).$$

Доказательство. Сначала покажем,что $\rho(y_j(x), a_{\varepsilon/2}(x)) \equiv \inf_{u\in a_{\varepsilon(x)}} \parallel y_j(x) - u \parallel$ сходится к нулю равномерно относительно $x \in E$, когда $j \to \infty$.

Допустим противное. Тогда существует положительное число $\delta > 0$ и бесконечное множество индексов J такие, что для любого $j \in J$ существует элемент $x_j \in E$ такой, что

$$\rho(y_j(x_j), a_{\varepsilon/2}(x_j)) \geq \delta. \tag{1}$$

Так как E компакт, то, не нарушая общности, можно предположить, что последовательность $\{x_j\}$ сходится к некоторому элементу $\overline{x} \in E.$ Поскольку многозначное отображение $a_{\varepsilon/2}$ полунепрерывно снизу, то для достаточно больших индексов $j \in J$ имеет место включение

$$a_{\varepsilon/2}(\overline{x}) \subseteq a_{\varepsilon/2}(x_j) + \frac{\delta}{2} B_1(0). \tag{2}$$

Из соотношений (1)-(2) непосредствено следует, что

$$\rho(y_j(x_j), a_{\varepsilon/2}(\overline{x})) \geq \delta/2 > 0. \tag{3}$$

Обозначим $\nu_j = y_j(x_j)$. Заметим, что существует такое число $\Delta > 0$, что $\nu_j \notin a_{\varepsilon/2+\Delta}(\overline{x})$. Действительно, если это не так, то существуют такие последовательности $\Delta_i \to 0,\ j_i \in J$ такие, что $\nu_i \in a_{\varepsilon/2+\Delta_i}(\overline{x})$. Поскольку $M-$ компакт и $\nu_{j_i} \in M$, то не нарушая общности, можно считать, что

$$\nu_{j_i} \to \overline{\nu} \in a_{\varepsilon/2}(\overline{x}). \tag{4}$$

Но из (3) следует $\overline{\nu} \notin a_{\varepsilon/2}(\overline{x})$, что противоречит соотношению(4). Итак, существует положительное число Δ такое, что

$$\text{для достаточно больших} j \in J:\ f(\overline{x}, \nu_j) > V(\overline{x}) + \varepsilon/2 + \Delta.$$

Теперь, если $\nu \in a_\varepsilon(\overline{x})$, то в силу выпуклости функции $f(x,y)$ по y имеем

$$< f'_y(\overline{x},\nu_j), \nu - \nu_j > \leq f(\overline{x},\nu) - f(\overline{x},\nu_j) \leq -\Delta < 0. \tag{5}$$

Обозначим

$$A_j(x,\nu) =< f'(x,\nu_j),\ \nu - \nu_j >,\ \nu \in a_{\varepsilon/2}(\overline{x}).$$

Так как по предположению отображение $f'_y(x,\nu)$ непрерывно по совокупности переменных (x,ν) и множество $a_\varepsilon(\overline{x})$ есть компакт, то в силу равномерной непрерывности $f'_y(x,\nu)$ для любого $\gamma > 0$ существует окрестность $U(\overline{x})$ точки $\overline{x}$ такая, что

$$\forall x \in U(\overline{x}) \bigcap E,\ \forall \nu \in a_\varepsilon(\overline{x}) : \| f'_y(x,\nu) - f'_y(\overline{x},\nu) \| \leq \gamma.$$

Так как множество $a_{\varepsilon/2}(\overline{x})$ и последовательность $\{\nu_j\}$ ограничены , то существуют такие числа $C_1 > 0,\ C_2 > 0$, что

$$\forall \nu \in a_{\varepsilon/2}(\overline{x}) : \| \nu_j \| \leq C_1,\ \| \nu \| \leq C_2.$$

Отсюда и из (5) следует, что

$$A_j(x,\nu) \leq A_j(\overline{x},\nu) + < f'_y(x,\nu) - f'_y(\overline{x},\nu),\ \nu - \nu_j > \leq$$
$$\leq -\Delta + \| f'_y(x,\nu) - f'_y(\overline{x},\nu) \| \| \nu - \nu_j \| \leq$$
$$\leq -\Delta + \gamma(\| \nu \| + \| \nu_j \|) \leq -\Delta + \gamma(C_1 + C_2).$$

Поэтому, если $\gamma < \Delta/(2(C_1 + C_2)$, то

$$\forall \nu \in a_{\varepsilon/2}(\overline{x}),\ x \in U(\overline{x}) \bigcap E :\ A_j(x,\nu) < -\frac{\Delta}{2}.\ .$$

Пусть $u_j = -f'_y(x_j,\nu_j)$. Так как последовательности $\{x_j\}, \{\nu_j\}$ ограничены, то ограничена и последовательность $\{u_j\}$, т.е. существует число $m > 0$ такое, что $\| u_j \| \leq m$.

Теперь, если $\hat{\nu} \in a_{\varepsilon/2}(\overline{x})$, то

$$\| \nu_{j+1} - \hat{\nu} \|^2 = \| \Pi_M(\nu_j + \lambda_j u_j) - \hat{\nu} \|^2 \leq \| \nu_j + \lambda_j u_j - \hat{\nu} \|^2 \leq$$
$$\leq \| \nu_j - \hat{\nu} \|^2 + 2\lambda_j < u_j, \nu_j - \hat{\nu} > + \lambda_j^2 m^2. \tag{6}$$

Стало быть,

$$\| \nu_{j+1} - \hat{\nu} \|^2 \leq \| \nu_1 - \hat{\nu} \|^2 - \Delta \sum_{i=1}^{j} \lambda_i + m^2 \sum_{i=1}^{j} \lambda_i^2. \tag{7}$$

Так как по предположению

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = +\infty,\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 < +\infty,$$

то правая часть неравенства (7) становится отрицательной при достаточно больших j , что невозможно.

Итак, показано, что последовательность $y_j(x)$ непрерывных отображений, определенная на компактном множестве E равномерно сходится к множеству $a_\varepsilon(x)$. Это означает, что для любого β существует такой номер N , что начиная с этого номера имеет место включение

$$\forall x \in E : y_j(x) \in a_{\varepsilon/2}(x) + \beta B_1(0).$$

Стало быть существуют элементы $\tilde{y}_j(x) \in a_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ и $e_j(x) \in B_1(0)$ такие, что

$$y_j(x) = \tilde{y}_j(x) + e_j(x).$$

Отсюда, по предположению теоремы, имеем

$$f(x, \tilde{y}_j(x) + \beta e_j(x)) = f(x, \tilde{y}_j(x)) +$$
$$+\beta < f'_y(x, \tilde{y}(x)), e_j(x) > + o(x, e_j(x), \beta) \leq$$
$$\leq V(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \beta \| f'_y(x, e_j(x) \| + o(x, e_j(x), \beta).$$

Поскольку отображение $f'_y(x,y)$ непрерывно, то существует такое число C_3 , что

$$\forall x \in E,\ j \geq N : \| f'_y(x, \tilde{y}_j(x)) \| \leq C_3.$$

Теперь согласно теореме 1 можно выбрать число $\beta > 0$ настолько малым, чтобы

$$\forall x \in E,\ j \geq N:\ \beta C_3 + o(x, e_j(x), \beta) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда получим $y_j(x) \in a_\varepsilon(x)$ $(\forall x \in E,\ j \geq N)$, т.е. отображения $y_j(x)$ являются непрерывными селекциями для $a_\varepsilon(x)$. Так как $\overline{y_0}-$ точка минимума выпуклой функции $f(\overline{x_0}, y)$ на выпуклом множестве M, то согласно лемме 2.2([9], стр.225)

$$\overline{y_0} = \Pi_M(\overline{y_0} - f'_y(\overline{x_0}, \overline{y_0})).$$

Откуда,

$$y_1(\overline{x_0}) = \Pi_M(y_0(\overline{x_0}) - f'_y(\overline{x_0}, y_0(\overline{x_0})) =$$
$$= \Pi_M(\overline{y_0} - f'_y(\overline{x_0}, \overline{y_0})) = \overline{y_0}.$$

Аналогично устанавливается, что $y_j(\overline{x_0}) = \overline{y_0}$ $(\forall j)$.

В итоге, все отображения $y_j(x)$ проходят через точку $(\overline{x_0}, \overline{y_0})$.

Теорема 3 доказана.

Следствие. *Пусть функция $f(x,y)$ строго выпукла по y при фиксированном $x \in E$. Тогда последовательность $y_j(x)$ равномерно сходится.*

Доказательство следствия. Поскольку функция $f(x,y)$ строго выпукла по y при фиксированном $x \in E$, то она на выпуклом замкнутом множестве M достигает своего минимального значения только в одной точке, которую обозначим через $y(x)$. Положим

$$\rho_\varepsilon(x) = \max_{y \in a_\varepsilon(x)} \rho(y(x), y).$$

Покажем, что $\rho_\varepsilon(x)$ равномерно относительно x сходится к нулю, когда ε стремится к нулю. Пусть это не так. Тогда найдется положительное число $\delta > 0$ и последовательности

$$\{x_j\} \subset E,\ \varepsilon_j \to 0,\ y_j \in a_{\varepsilon_j}(x_j)$$

такие, что

$$\| y_j - y(x_j) \| \geq \delta. \tag{8}$$

Поскольку $E-$ компакт, то можно считать, что

$$x_j \to \overline{x} \in E,\ y_j \to \overline{y}.$$

Но, с другой стороны, так как отображение $y(x)$ непрерывно (см. [10], Предложение 23, стр.125), то $\overline{y} = y(\overline{x})$, что противоречит соотношению (8), поскольку из него непосредственно следует, что $\overline{y} \neq y(\overline{x})$. Теперь, если $u \in a_\varepsilon(x)$, то

$$\| y_j(x) - y(x) \| \leq \| y_j(x) - u \| + \| u - y(x) \| \leq$$
$$\leq \| y_j(x) - u \| + \rho_\varepsilon(x) \leq \rho(y_j(x), a_\varepsilon(x)) + \rho_\varepsilon(x).$$

Поскольку $\rho_\varepsilon(x)$ равномерно сходится к нулю по x, когда $\varepsilon \to 0$, то для любого $\delta > 0$ существует такое $\delta_0 < \delta$, что

$$\forall \varepsilon \leq \delta_0:\ \rho_\varepsilon(x) < \delta.$$

Стало быть, начиная с некоторого номера K имеет место включение $y_j(x) \in a_{\delta_0}(x)$ $(\forall x \in E)$. Таким образом, для любого $\delta > 0$ существует такой номер K, что

$$\forall j \geq K, \forall x \in E: \| y_j(x) - y(x) \| < \delta.$$

Следствие доказано.

Пример. Пусть $f(x,y) = xy,\ M = E = [0,1]$. Очевидно, что $\min_{y \in M} f(x,y) = 0$ и поэтому многозначное отображение a_ε при $\varepsilon = 0$ имеет следующий вид:

$$a_0(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ [0,1], & x = 0, \end{cases}$$

а отображение a_ε при $\varepsilon > 0$ задается следующей формулой:

$$a_\varepsilon(x) = \begin{cases} [0,1], & x \in [0,\varepsilon] \\ [0, \frac{\varepsilon}{x}], & x \in [\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

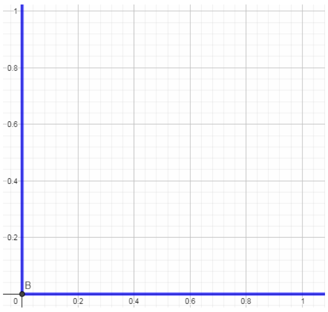

Рисунок 1.

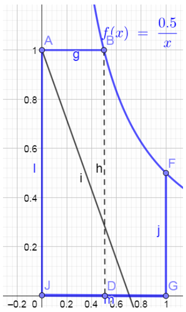

Рисунок 2.

На рисунках 1, 2 показаны графики многозначного отображения a_ε при $\varepsilon = 0$ и при $\varepsilon > 0$ соответственно. Как видно из этих рисунков, отображение a_0 не непрерывно и не существует непрерывная селекция, проходящая через точку $(0,1)$. В тоже время, отображение $a_\varepsilon(\varepsilon > 0)$ непрерывно и через точку $(0,1)$ проходят непрерывные селекции. Построим эти селекции методом проекции градиентов. Имеем $f'_y(x,y) = x$ и поэтому

$$f'_y(x,y) = x \Rightarrow y_1(x) = \Pi_M(y_0(x) - f'_y(x, y_0(x)) = \Pi_M(1 - \lambda_0 x) = 1 - \lambda_0 x \Rightarrow$$

$$y_2(x) = \Pi_M(y_1(x) - \lambda_1 x) = \Pi_M(1 - (\lambda_0 + \lambda_1)x) =$$
$$= 1 - (\lambda_0 + \lambda_1)x.$$
$$y_3(x) = 1 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)x,$$

т.е. если $\sum\limits_{k=1}^{j-1} \lambda_k \le 1,$ то

$$y_j(x) = 1 - \left(\sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k\right) x, x \in [0,1],$$

если $\sum\limits_{k=1}^{j-1} \lambda_k > 1,$ то

$$y_j(x) = \begin{cases} 1 - \left(\sum\limits_{k=1}^{j-1} \lambda_k\right) x, & x \in [0, a_j] \\ 0, & x \in [a_j, 1], \end{cases}$$

где $a_j = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{j-1} \lambda_k}$.

Отсюда поскольку $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \infty$, то начиная с некоторого номера K

$$\forall j \ge K, \ \forall x \in E: \ y_j(x) \in a_\varepsilon(x).$$

Графики этих отображений показаны на рисунке 2. Заметим также, что они проходят через точку $(0,1)$.

Список литературы

1 Michael E. Continuous selections 1// Ann.Math. -1956. -V.63. -№63. -pp. 361-381.
2 Michael E. A survey of continous selections, Lect. Notes in Math. 171, Berlin: Springer-Verlag. -1970. -pp. 54-58.
3 Демьянов В. Ф., Васильев В. В. Недифференцируемая оптимизация. -Москва: Наука. -1981.
4 Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. -Москва: Наука. -1972.
5 Бердышев В.И. Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала// Изв. АН СССР. Сер. Математика. -1980. -Т 44. -Выпуск 3, -С 534-539.
6 Хачатрян Р.А., Хачатрян А.Р. О непрерывности многозначных отображений// Ученые записки ЕГУ. -2003. -№2, -Стр. 3-13.
7 Хачатрян Р.А., Аветисян Р.А., Хачатрян А.Р. Непрерывность множеств ε-оптимальных стратегий// Изв. НАН Армении: Математика. -2003. -Т 38. -№1. -С 69-82.
8 Хачатрян А.Р. О непрерывности некоторых многозначных отображений// Докл. НАН Армении. Сер. Математика. -2004. -Т 104. -№2. -С 90-94.
9 Сухарев А. Г., Тимохов А.В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. -Москва: Наука. -1986.

10 Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. -Москва: Мир. -1988.

Р. А. Хачатрян

Ереван Мемлекеттік университеті, Ереван, Армения

Градиенттерді проекциялау әдісі және көпмәнді бейнелеулердің үзіліссіз селекциялары

Аннотация: Келесі түрдегі параметрлік оптимизациялау есебі қарастырылады:

$$f(x,y) \longrightarrow min,\ y \in M \subseteq R^m,$$

мұндағы $x \quad E \subseteq R^n$ жиынынан алынған параметр.

Бұл есеп үшін ε -оптималды нүктелер жиыны анықталды:

$$a_\varepsilon(x) = \{y \in M : f(x,y) \leq \inf_{y\in M} f(x,y) + \varepsilon\}.$$

a_ε бейнелеуі үшін үзіліссіз селекция құру есебі зерттеледі. Бұл көпмәнді бейнелеу үшін гридиентті проекциялау әдісімен үзіліссіз селекция құрылды.

Түйін сөздер:көпмәнді бейнелеу, оптималды нүктелер, проекция, дөңес жиындар.

R.A. Khachatryan

Yerevan State University, Yerevan, Armenia

Gradient projection method and continuous selections of multivalued mappings

Abstract. We consider the parametric optimization problem of the following type

$$f(x,y) \longrightarrow min,\ y \in M \subseteq R^m,$$

where x is a parametr from the subset $E \subseteq R^n$.

For this problem a set of ε - points is defined :

$$a_\varepsilon(x) = \{y \in M : f(x,y) \leq \inf_{y\in M} f(x,y) + \varepsilon\}.$$

The problem of constructing continuous selections of the mapping a_ε is considered. The gradient projection method is used to construct continuous selections for this multivalued mapping.

Keywords: Multivaled mapping, set of ε - optimal points, projection, convex set.

References

1 Michael E. Continuous selections 1, Ann.Math, **63**(63), 361-381(1956).

2 Michael E. A survey of continous selections, Lect. Notes in Math. 171, (Springer-Verlag, Berlin, 1970, pp. 54-58).

3 Demyanov V.F., Vasilyev L.V. Nedifferenciruemaja optimizacija [Non-differentiable optimization] (Nauka, Moscow, 1981).

4 Dem'janov V.F., Malozemov V.N. Vvedenie v minimaks [Introduction to minimax] (Nauka, Moscow, 1972).

5 Berdyshev V. I. Continuity of a multivalued mapping connected with the problem of minimizing a functional, Mathematics of the USSR-Izvestiya 16(3), 431 (1981).

6 Khachatryan R.A., Khachatryan A.R. O nepreryvnosti mnogoznachnyh otobrazhenij [On the continuity of multivalued mappings], Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical sciences, (2), 3-13(2003).

7 Khachatryan R.A., Avetis'jan R.A., Khachatryan A.R. Optimal'nost' mnozhestv $\varepsilon-$ optimal'nyh strategij [optimality of sets of $\varepsilon-$ optimal strategies],Izvestija NAN Armenii. Serija: Matematika[News of the National Academy of Sciences of Armenia. Series: Mathematics] **38**(1), 69-82(2003).

8 Khachatryan A.R. o nepreryvnosti nekotoryh mnogoznachnyh otobrazhenij [On the continuity of some multivalued mappings], Doklady NAN Armenii. Serija: Matematika[Reports of the National Academy of Sciences of Armenia. Series: Mathematics], **104**(2), 90-94(2004).

9 Suharev A.G., Timohov A.V., Fedorov V.V. Kurs metodov optimizacii [Course optimization methods] (Nauka, Moscow, 1986).

10 Oben Zh.-P., Jekland I. Prikladnoj nelinejnyj analiz [Applied nonlinear analysis] (Nauka, Moscow, 1988).

Сведения об авторах:

Хачатрян Р. А. - Доктор физико - математических наук, Ереванский государственный университет, факультет информатикии и прикладной математики, Ереван, Армения.

Khachatryan R. - Doctor of Phys.- Math. Siences, Yerevan State University, faculty of informatics and Applied Mahtematics, Yerevan, Armenia.

Поступила в редакцию 01.09. 2018

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex-пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz*.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Редакторы: Н. Темірғалиев

Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы.
- 2018. 3(124)- Астана: ЕҰУ. 114-б.
Шартты б.т. - 14,25. Таралымы - 20 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді

Редакция мекен-жайы: 010008, Қазақстан Республикасы, Астана қ.,
Сәтпаев көшесі, 2.
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
Тел.: (8-717-2) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды