Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, computer science, mechanics series, 2024, Vol. 148, №3, P. 18-25.
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: 27.17.19

ЯДРО ТРЕУГОЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ РАНГА 3 [1]

Ш.У.Абуталипова
Университет Астана IT, проспект Мангилик Ел 55/11, Бизнес-центр ЭКСПО, блок С1, Астана, 010000, Казахстан
(E-mail: abutalipova.sh@gmail.com)

Аннотация. Пусть $k[x_1, x_2, x_3]$ — алгебра многочленов от переменных x_1, x_2, x_3 над произвольным полем k характеристики 0. В настоящей работе рассматриваются треугольные дифференцирования вида $D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3$, где $\alpha, \beta, \gamma \in k$, алгебры $k[x_1, x_2, x_3]$. Хорошо известно, что треугольные дифференцирования алгебры $k[x_1, x_2, x_3]$ являются локально нильпотентными. Алгоритм А. Ван ден Эссена для вычисления ядра локально нильпотентного дифференцирования алгебры многочленов $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем k характеристики 0 использует отображение Ж. Диксмье. Теорема М. Маяниши утверждает, что ядро локально нильпотентного дифференцирования алгебры многочленов от трех переменных над полем характеристики 0 является алгеброй многочленов от двух переменных. В данной работе построен совершенно новый алгоритм для вычисления ядра треугольного дифференцирования алгебры многочленов ранга 3 над полем характеристики 0.

Ключевые слова: кольцо многочленов, алгебра, алгебраическая независимость, локально нильпотентные дифференцирования, ядро.

DOI: https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2024/3.2

2000 Mathematics Subject Classification: 13N15

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференцирование встречается во всех разделах математики и имеет особое значение благодаря своим приложениям в естественных науках, экономике и других сферах. Общеизвестно, что множество дифференцирований любой алгебры относительно операции коммутирования $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ образует алгебру Ли, где D_1, D_2 - произвольные дифференцирования этой алгебры. Пусть $A = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над произвольным полем k.

Определение 1. *Дифференцированием алгебры A назовем линейное отображение D, удовлетворяющее правилу Лейбница, т.е. для любых $a, b \in A$ выполняется следующее равенство*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант №AP23487886)

Определение 2. *Ядром дифференцирования D называется множество $KerD = \{a \in A, D(a) = 0\}$.*

Известно, что [1] ядро дифференцирования алгебры A является подалгеброй алгебры A и порождающее множество ядра этого дифференцирования исследовано Х. Дерксеном [2]. Более того Х. Дерксен связывает эту задачу с 14-й проблемой Гильберта. М. Нагата и А. Новицкий [3] доказали, что в случае поля характеристики 0 ядро ненулевого дифференцирования кольца многочленов от двух переменных является кольцом от одной переменной.

Определение 3. *Дифференцирование D алгебры A называется локально нильпотентным, если для любого $a \in A$ существует натуральное число n такое, что $D^n(a) = 0$.*

Отметим, что в случае поля характеристики 0 ядро локально нильпотентного дифференцирования алгебры A вычисляется по алгоритму А. Ван ден Эссена [1]. Данный алгоритм использует слайс дифференцирования и отображение Ж. Диксмье [4].

Пусть D - произвольное локально нильпотентное дифференцирование алгебры A. Известно [5], что экспоненциальное отображение

$$expD(g) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p(g), g \in A,$$

является автоморфизмом алгебры A. Например, известный автоморфизм М. Нагаты является экспоненциальным отображением, соответствующий локально нильпотентному дифференцированию $D = -2x_2\partial_1 + x_3\partial_2$ алгебры многочленов $k[x_1, x_2, x_3]$ над полем k характеристики 0, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, 2$ и напоминаем, что дикость этого автоморфизма была доказана У.У. Умирбаевым и И.П. Шестаковым в [6].

Определение 4. *Два многочлена f и g над полем k называются алгебраически независимыми, если не существует многочлен от двух переменных h с коэффициентами из поля k такой, что $h(f, g) = 0$.*

М. Маяниши описал ядро локально нильпотентного дифференцирования алгебры $A = k[x_1, x_2, x_3]$, точнее ими была доказана следующая

Теорема 1 (см. [7]). *Пусть D - ненулевое локально нильпотентное дифференцирование алгебры $A = k[x_1, x_2, x_3]$. Тогда $KerD = k[f, g]$ для некоторых алгебраически независимых многочленов f и g над полем k.*

Например, дифференцирование $D = \alpha x_i^l x_j^m \partial_k$, где i, j, k различные числа множества $\{1, 2, 3\}$, является локально нильпотентным и его ядро есть $k[x_i, x_j]$. По сути здесь алгебраическая независимость x_i и x_j очевидна, доказать алгебраическую независимость более сложных многочленов требует немало усилий. Обычно в таких случаях применяются различные алгоритмы, например, основанные на методе базисов Гребнера [8]. Существует широкий класс локально нильпотентных дифференцирований колец многочленов, так называемые треугольные дифференцирования, то есть дифференцирования вида

$$D = a_1(x_2, \ldots, x_n)\partial_1 + ... + a_{n-1}(x_n)\partial_{n-1} + a_n\partial_n$$

где $a_{i-1} \in k[x_i, \ldots, x_n]$ для всех $2 \leq i \leq n$, $a_n \in k$ и ∂_i - обычное частное дифференцирование по переменной x_i.

2. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Сначала рассмотрим пример треугольного дифференцирования алгебры многочленов от трех многочленов. Пусть

$$D = x_2^2 x_3^3 \partial_1 + 4x_3^4 \partial_2 + 3\partial_3 \tag{1}$$

— дифференцирование алгебры многочленов $Q[x_1, x_2, x_3]$ над полем Q. Найдем порождающие ядра дифференцирования (1) используя обычное частное производное и интегрирование. Осуществим следующие вычисления:

$$D(x_1) = x_2^2x_3^3\partial_1(x_1) + 4x_3^4\partial_2(x_1) + 3\partial_3(x_1) = x_2^2x_3^3 = f_1,$$

$$\frac{1}{3}\int f_1 dx_3 = \frac{1}{3}\int x_2^2x_3^3 dx_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}{x_2}^2x_3^4 + C = g_1,$$

$$D(x_1 - g_1) = D(x_1) - D(g_1) = f_1 - \frac{2}{3}x_2x_3^8 - f_1 = -\frac{2}{3}x_2x_3^8 = -f_2,$$

$$\frac{1}{3}\int f_2 dx_3 = \frac{1}{3}\int \frac{2}{3}x_2x_3^8 dx_3 = \frac{2}{81}x_2x_3^9 + C = g_2,$$

$$D(x_1 - g_1 + g_2) = D(x_1 - g_1) + D(g_2) = -f_2 + f_2 + \frac{8}{81}x_3^{13} = \frac{8}{81}x_3^{13} = f_3,$$

$$\frac{1}{3}\int f_3 dx_3 = \frac{1}{3}\int \frac{8}{81}x_3^{13} dx_3 = \frac{4}{1701}x_3^{14} + C = g_3,$$

где $C \in Q$. Как видно в каждом шаге вычисления добавляется член для снижения степени x_2. Заметим, что

$$D(x_1 - g_1 + g_2 - g_3) = 0.$$

Это значит, что многочлен

$$f = x_1 - g_1 + g_2 - g_3 = x_1 - \frac{1}{12}x_2^2x_3^4 + \frac{2}{81}x_2x_3^9 - \frac{4}{1701}x_3^{14} + C$$

лежит в ядре дифференцирования (1) и он является претендентом для одного порождающего этого ядра. Теперь с помощью аналогичных вычислений находим еще один многочлен $g = x_2 - \frac{4}{15}\ x_3^5 + C$, который тоже лежит в ядре дифференцирования (1). Используя Теорему М. Маяниши можем утверждать, что кольцо $Q[f, g]$ ядром дифференцирования (1). Заметим, что выше использованный метод можно обобщать для всех треугольных дифференцирований определенного вида кольца многочленов от трех переменных.

Пусть $A = k[x_1, x_2, x_3]$ — алгебра многочленов от переменных x_1, x_2, x_3 над полем k характеристики 0 и пусть

$$D = a_1(x_2, x_3)\partial_1 + a_2(x_3)\partial_2 + a_3\partial_3$$

— треугольное дифференцирование алгебры A, где многочлены $a_1(x_2, x_3) \in k[x_2, x_3]$, $a_2(x_3) \in k[x_3]$ и $a_3 \in k$. В этой работе мы ограничимся рассмотрением треугольных дифференцирований вида

$$D = \alpha x_2^l x_3^m\partial_1 + \beta x_3^n\partial_2 + \gamma\partial_3, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in k$ и не все равные нулю. Очевидно, что если D содержит только одно частное дифференцирование ∂_i, тогда $KerD = k[x_j, x_k]$ для различных индексов $i, j, k \in 1, 2, 3$.

Далее рассмотрим другие случаи.

Случай 1: Предположим, что все коэффициенты в (2) отличны от нуля. Тогда вычисляя образ x_1 относительно отображения (2), получим

$$D(x_1) = \alpha x_2^l x_3^m. \tag{3}$$

Далее образ $D(x_1)$ попытаемся представить через интеграл

$$\frac{1}{\gamma}\int \alpha x_2^l x_3^m dx_3 = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{1}{m+1}x_2^l x_3^{m+1} + C, \tag{4}$$

где константу C нам удобно будет рассматривать как элемент поля чтобы дополнительные элементы не появлялись. Используя (3) и (4) вычислим

$$D(x_1 - \frac{\alpha}{\gamma}\frac{1}{m+1}x_2^l x_3^{m+1} + C) = -\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+1}. \tag{5}$$

Теперь, чтобы получить $\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+1}$, нам нужно будет рассмотреть его как следующий интеграл

$$\frac{1}{\gamma}\int\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+1}dx_3=\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{\alpha\beta}{m+n+2}\cdot\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+2}+C. \tag{6}$$

Получим равенство аналогично (5)

$$D(x_1-\frac{\alpha}{\gamma}\frac{1}{m+1}x_2^lx_3^{m+1}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{\alpha\beta}{m+n+2}\cdot\frac{l}{m+1}x_2^{l-1}x_3^{m+n+2}+C)=$$

$$\frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2}\frac{l}{m+1}\frac{l-1}{m+n+2}x_2^{l-2}x_3^{m+2n+2},$$

Таким образом можем продолжить, пока образ D не получится 0. Если обозначить правые части равенств (3) и (4) через $f_1,g_1,$ а правые части равенства (5) и (6), соответственно, через $f_2,g_2,$ то имеем

$$D(x_1)=f_1,\quad \frac{1}{\gamma}\int f_1dx_3=g_1,$$

$$D(x_1-g_1)=f_2,\quad \frac{1}{\gamma}\int f_2dx_3=g_2.$$

Более того

$$deg(f_1)=m+l,\ \ deg(g_1)=deg(f_1)+1,\ \ deg_{x_2}(f_1)=deg_{x_2}(g_1)=l$$

$$deg(f_2)=m+l+n,\ \ deg(g_2)=deg(f_2)+1,\ \ deg_{x_2}(f_2)=deg_{x_2}(g_2)=l-1.$$

Теперь, сохраняя все эти обозначения, можем определить следующее рекуррентное соотношение

$$D(x_1)=f_1,\ \ \frac{1}{\gamma}\int f_idx_3=g_i, i=1,2,\ldots \tag{7}$$

где

$$deg(g_i)=m+l+(i-1)n+1, deg_{x_2}(g_i)=l-(i-1),$$

и

$$D(x_1+\sum_{r=1}^{i}(-1)^rg_r=(-1)^if_{i+1},\ \ deg(f_{i+1})=m+l+in, \tag{8}$$

Отметим, что этот процесс будет продолжаться, пока не получится $deg_{x_2}(g_(l+1))=0,$ то есть

$$\frac{1}{\gamma}\int f_{l+1}dx_3=g_{l+1},\ \ deg(g_{l+1})=m+l(n+1),$$

и причем $deg(g_{l+1})=deg_{x_3}(g_{l+1})$. Следующая лемма описывает свойства многочленов f_i,g_i из соотношений (7)-8).

Лемма. *Пусть D — дифференцирование вида (2) и f_i,g_i — многочлены, определенные в (7)-(8). Тогда*

$$D(x_1+\sum_{r=1}^{l+1}(-1)^rg_r)=0, \tag{9}$$

где $deg(x_1+\sum_{r=1}^{l+1}(-1)^rg_r)=m+l(n+1)$.

Доказательство. Из линейного свойства дифференцирования D и соотношении (7)-8) следует справедливость равенства (9). В действительности оно означает $x_1+\sum_{r=1}^{l+1}(-1)^rg_r\in KerD$. Вдобавок можно отметить, что

$$f_{l+1}=f_{l+2}=\ldots=0,\ \ g_{l+2}=g_{l+3}=\ldots=C, C\in k.$$

Лемма доказана.

Теперь вычислим образ x_2 относительно дифференцирования (2).

$$D(x_2) = \beta x_3^n = f_1, \tag{10}$$

и

$$\frac{1}{\gamma}\int f_1 dx_3 = \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{n+1}x_3^{n+1} + C = h_1, \tag{11}$$

причем $D(x_2 - h_1) = 0$, то есть $x_2 - g_1$ лежит в ядре дифференцирования (2). Таким образом, претендентами для порождающих кольца $KerD$ дифференцирования (2) являются многочлены

$$f = x_1 + \sum_{r=1}^{l+1}(-1)^r g_r, \quad g = x_2 - h_1, \tag{12}$$

где все g_i как многочлены не зависят от переменной x_1, а h_1 от переменных x_1, x_2.

Теперь нам остается показать, что полученные многочлены f и g являются алгебраически независимыми. Обычно при доказательстве алгебраической независимости используется алгоритм Б. Бухбергера [7]. Здесь нам требуются автоморфизмы колец многочленов из [5], а именно

Определение 5. *Полиномиальный автоморфизм*

$$F = (F_1, \ldots, F_n) : k[x_1, \ldots, x_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]$$

называется треугольным, если его компоненты $F_i \in k[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n]$, *для любого* $1 \leq i \leq n$.

Также известно, что в действительности компоненты F_i имеют следующий вид

$$F_i = \lambda_i x_i + a_i,$$

где λ_i ненулевой элемент поля k и $a_i \in k[x_{i+1}, \ldots, x_n]$.

Рассмотрим отображение $\phi : k[x_1, x_2, x_3] \to k[x_1, x_2, x_3]$ такое, что

$$\phi(x_1) = f, \quad \phi(x_2) = g, \quad \phi(x_3) = x_3, \tag{13}$$

где f и g вида (12). Заметим, что ϕ является треугольным автоморфизмом кольца $k[x_1, x_2, x_3]$ и x_1, x_2, x_3 алгебраически независимые элементы, то их образы тоже являются алгебраически независимыми. Более того, любая подсистема алгебраически независимой системы является алгебраически независимой.

Теорема 2. *Пусть* $A = k[x_1, x_2, x_3]$ *–– кольцо многочленов от переменных* x_1, x_2, x_3 *над полем* k, *характеристики* 0 *и пусть* D *–– дифференцирование вида (2). Тогда* $KerD = k[f, g]$, *где* f *и* g *– многочлены вида (12).*

Доказательство. Выше Теорема 2 была доказана для двух случаев:

1) Когда только один коэффициент дифференцирования (2) не равен нулю.

2) Когда все коэффициенты дифференцирования (2) отличны от нуля.

Для полного доказательства Теоремы 2 мы рассмотрим еще несколько случаев. Отметим, что виды многочленов f и g будут отличаться от (12) в каждом отдельном случае. И каждый раз мы воспользуемся Теоремой М. Маяниши и автоморфизмами вида (13), чтобы указать порождающие ядра конкретного рассматриваемого вида дифференцирования (2).

Случай 2: Пусть в (2) $\alpha = 0$, то есть

$$D = \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3, \quad \beta, \gamma \in k. \tag{14}$$

Легко заметим, что $x_1 \in KerD$ дифференцирования (14). Далее аналогично соотношениям (10), (11) получим,

$$D(x_2 - \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{n+1}x_3^{n+1}) = 0,$$

то есть ниже следующие многочлены

$$f = x_1, \quad g = x_2 - \frac{\beta}{\gamma}\frac{1}{n+1}x_3^{n+1}$$

являются порождающими ядра дифференцирования (14).

Случай 3: Пусть в (2) $\beta = 0$, то есть
$$D = \alpha x_3^l \partial_1 + \gamma \partial_3, \quad \alpha, \gamma \in k. \tag{15}$$
Как в Случае 1, получим соответственно равенства (3) и (4). Но в отличие от него процесс сразу прервется, то есть мы имеем $D(x_1 - g_1) = 0$. Учитывая то, что $x_2 \in KerD$, мы можем утверждать, что многочлены
$$f = x_1 - g_1, \quad g = x_2$$
являются порождающими ядра дифференцирования (15). *Случай 4:* Пусть в (2) $\gamma = 0$, то есть
$$D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2, \quad \alpha, \beta \in k. \tag{16}$$
Снова, как в Случае 1, получим равенство (3), но вместо (4) рассмотрим
$$\frac{1}{\beta} \int \alpha x_2^l x_3^{m-n} dx_2 = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{l+1} x_2^{l+1} x_3^{m-n} + C, \tag{17}$$
где константу C, как в предыдущих случаях, нам удобно рассматривать как элемент основного поля. Обозначая правую часть (17) через g_1 и учитывая то, что $x_3 \in KerD$, получим, что многочлены
$$f = x_1 - g_1, \quad g = x_3$$
являются порождающими ядра дифференцирования (16). Чтобы показать алгебраическую независимость этих многочленов, сперва нам надо перенумеровать переменные, а затем построить соответствующие автоморфизмы вида (13). Теорема доказана.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пусть $k[x_1, x_2, x_3]$ — алгебра многочленов от переменных x_1, x_2, x_3 над произвольным полем k характеристики 0. В настоящей работе были рассмотрены треугольные дифференцирования вида $D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3$, где $\alpha, \beta, \gamma \in k$, алгебры $k[x_1, x_2, x_3]$. Хорошо известный алгоритм А. Ван ден Эссена предназначен для вычисления ядра локально нильпотентного дифференцирования алгебры многочленов $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем k характеристики 0, где используется отображение Ж. Диксмье. В данной работе построен совершенно новый алгоритм для вычисления ядра треугольного дифференцирования алгебры многочленов ранга 3 над полем характеристики 0. Для вычисления ядра треугольного дифференцирования составлены рекуррентные соотношения, явно описывающие многочлены каждого шага алгоритма. Построенный алгоритм учитывает то, что дифференцирование треугольное и кольцо от трех переменных. Алгебраическая независимость порождающих ядра дифференцирования доказана с помощью треугольного автоморфизма, хотя обычно для этого используется метод базисов Гребнера. Стоит отметить, что алгоритм не работает, когда основное поле положительной характеристики. Его легко можно реализовать с помощью программных языков и математических пакетов.

Список литературы

1 Van den Essen A. Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows and polynomial morphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 1992. Vol.152. №10. P. 861-871.

2 Derksen H. The kernel of a derivation, J. of Pure and Applied Algebra. 1993. Vol.84. P.13-16.

3 Nagata M., Nowicki A. Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, J. Math. Kyoto Univ. 1988. Vol.28. №1. P.111-118.

4 Dixmier J. Sur les algèbres de Weyl, Bull. Soc. Math. France. 1968. Vol.96. P. 209–242.

5 Van den Essen A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Boston: Birkhauser. 2000. P. 329.

6 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, Jour. Amer. Math. Soc. 2004. Vol.17. P. 197-227.

7 Miyanishi M. Normal affine subalgebras of a polynomial ring, Algebraic and topological Theories - to the memory of Dr. Takehiko Miyata. Kinokuniya, Japan, 1985. P.37-51.

8 Adams W., Loustaunau P. An Introduction to Gröbner bases. Providence: American Mathematical Society. 1994. P. 306.

Рангісі үшке тең көпмүшелер сақинасының үшбұрышты дифференциалдауларының өзегі

Ш.У. Абуталипова

Астана IT Университеті, Мәңгілік Ел 55/11 даңғылы, ЭКСПО бизнесс орталығы, Блок С1, Астана, 010000, Қазақстан

Аңдатпа. Айталық $k[x_1, x_2, x_3]$ - нөл сипаттамалы кез келген k өрісі үстіндегі x_1, x_2, x_3 айнымалыларына тәуелді көпмүшелер алгебрасы. Жұмыста $k[x_1, x_2, x_3]$ алгебрасының $D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3$ $(\alpha, \beta, \gamma \in k)$ түріндегі үшбұрышты дифференциалдануы қарастырылады. $k[x_1, x_2, x_3]$ алгебрасының үшбұрышты дифференциалдаулары локальді нильпотент болатындығы белгілі. Нөл сипаттамалы k өрісі үстіндегі x_1, x_2, x_3 айнымалыларына тәуелді көпмүшелердің $k[x_1, x_2, x_3]$ көпмүшелер алгебрасының локальді нильпотентті дифференциалдауының ұйтқысын табуға арналған А. Ван ден Эссен алгоритмі Ж. Диксмье бейнелеуін қолданады. М. Маянишидің теоремасы нөл сипаттамалы өрістегі үш айнымалылы көпмүшелер алгебрасының локальді нильпотент дифференциалдауының ұйтқысы екі айнымалыдан тәуелді көпмүшелер алгебрасы болады деп тұжырымдайды. Бұл жұмыста нөл сипаттамалы өріс үстіндегі үш айнымалылы көпмүшелер алгебрасының үшбұрышты дифференциалдау ұйтқысын табудың жаңа алгоритмі ұсынылған.

Түйін сөздер: көпмүшелер сақинасы, алгебра, алгебралық тәуелсіздік, локальді нильпотент дифференциалдаулар, ядро.

Kernel of triangular derivation of the ring of polynomial of rank 3

Sh.U.Abutalipova

Astana IT University, Mangilik El avenue, 55/11, Business center EXPO, block C1 Astana, 010000, Kazakhstan

Abstract. Let $k[x_1, x_2, x_3]$ be an algebra of polynomials in variables x_1, x_2, x_3 over an arbitrary field k of characteristic 0 In this paper we consider triangular derivations of the form $D = \alpha x_2^l x_3^m \partial_1 + \beta x_3^n \partial_2 + \gamma \partial_3$, where $\alpha, \beta, \gamma \in k$, of the algebra $k[x_1, x_2, x_3]$. It is well known that triangular derivations of the algebra $k[x_1, x_2, x_3]$ are locally nilpotent. The algorithm of A. van den Essen for computing the kernel of locally nilpotent derivation of the polynomial algebra $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ in variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ over a field k of characteristic 0 uses the map of J. Dixmier. M. Mayanishi's theorem states that the kernel of locally nilpotent derivation of the algebra of polynomials in three variables over the field of characteristic 0 is the algebra of polynomials in two variables. In this paper, a completely new algorithm for computing the kernel of triangular derivation of the algebra of polynomials of rank 3 over a field of characteristic 0 is constructed.

Keywords: polynomial ring, algebra, algebraic independence, locally nilpotent derivations, kernel.

References

1 Van den Essen A. Locally finite and locally nilpotent derivations with applications to polynomial flows and polynomial morphisms, Proc. Amer. Math. Soc. 1992. Vol.152. №10. P. 861-871.

2 Derksen H. The kernel of a derivation, J. of Pure and Applied Algebra. 1993. Vol.84. P.13-16.

3 Nagata M., Nowicki A. Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, J. Math. Kyoto Univ. 1988. Vol.28. №1. P.111-118.

4 Dixmier J. Sur les algèbres de Weyl, Bull. Soc. Math. France. 1968. Vol.96. P. 209–242.

5 Van den Essen A. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Boston: Birkhauser. 2000. P. 329.

6 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, Jour. Amer. Math. Soc. 2004. Vol.17. P. 197-227.

7 Miyanishi M. Normal affine subalgebras of a polynomial ring, Algebraic and topological Theories - to the memory of Dr. Takehiko Miyata. Kinokuniya, Japan, 1985. P.37-51.

8 Adams W., Loustaunau P. An Introduction to Gröbner bases. Providence: American Mathematical Society. 1994. P. 306.

Сведения об авторе:

Абуталипова Шынар Узбековна – кандидат физико-математических наук, ассистент профессор департамента вычисления и науки о данных, Университет Астана IT, проспект Мангилик Ел 55/11, Бизнес-центр ЭКСПО, Блок С1, Астана, 010000, Казахстан.

Abutalipova Shynar Uzbekovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Department of Computing and Data Science, Astana IT University, Mangilik El Avenue 55/11, EXPO Business Center, Block C1, Astana, 010000, Kazakhstan.

Поступила: 10.09.2024. После редакции: 24.09.2024.

Одобрена: 28.09.2024. Доступна онлайн: 30.09.2024.