

ISSN 2616-7182

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN

of the L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК

Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№2(123)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2018

Astana, 2018

БАС РЕДАКТОРЫ
ф.-м.ғ.д., проф
Темірғалиев Н. (Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары

Жұбанышева А.Ж., PhD
(Қазақстан)

Бас редактордың орынбасары

Наурызбаев Н.Ж., PhD
(Қазақстан)

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Алимхан Килан	PhD, проф. (Жапония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Қытай)
Бекенов М.И.	ф.-м.ғ.к., доцент (Қазақстан)
Голубов Б.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Зунг Динь	ф.-м.ғ.д., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
Иванов В.И.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Кобельков Г.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Курина Г.А.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Марков В.В.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Мейрманов А.М.	ф.-м.ғ.д., проф. (Эквадор)
Смелянский Р.Л.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Умирбаев У.У.	ф.-м.ғ.д., проф. (АҚШ)
Холщевникова Н.Н.	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. докторы, проф. (Германия)

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген
А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.

27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.

Тиражы: 20 дана

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,

тел: (7172)709-500 (ішкі 31-428).

EDITOR-IN-CHIEF

Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences
Temirgaliyev N. (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Zhubanysheva A.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Deputy Editor-in-Chief **Nauryzbayev N.Zh.**, PhD (Kazakhstan)

Editorial board

Abakumov E.V.	PhD, Prof. (France)
Alexeyeva L.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
Alimhan Keylan	PhD, Prof. (Japan)
Bekzhan Turdybek	PhD, Prof. (China)
Bekenov M.I.	Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assoc.Prof. (Kazakhstan)
Golubov B.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Dŭng Dinh	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Vietnam)
Ibrayev A.G.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Kazakhstan)
Ivanov V.I.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kobel'kov G.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Kurina G.A.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Markov V.V.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Meirmanov A.M.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Ecuador)
Smelyansky R.L.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(Russia)
Umirbaev U.U.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof.(USA)
Kholshchevnikova N.N.	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
Schmeisser Hans-Juergen	Dr. habil., Prof. (Germany)

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Astana, Kazakhstan, 010008
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible secretary, computer layout:
A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.

Circulation: 20 copies

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;

tel: (7172) 709-500 (ext.31-428).

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
профессор, д.ф.-м.н.
Темиргалиев Н. (Казахстан)

Зам. главного редактора

Жубанышева А.Ж., PhD (Казахстан)

Зам. главного редактора

Наурызбаев Н.Ж., PhD (Казахстан)

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.	PhD, проф. (Франция)
Алексеева Л.А.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Алимхан Килан	PhD, проф. (Япония)
Бекжан Турдыбек	PhD, проф. (Китай)
Бекенов М.И	к.ф.-м.н., доцент (Казахстан)
Голубов Б.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Зунг Динь	д.ф.-м.н., проф. (Вьетнам)
Ибраев А.Г.	д.ф.-м.н., проф. (Казахстан)
Иванов В.И.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Кобельков Г.М.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Курина Г.А.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Марков В.В.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Мейрманов А.М.	д.ф.-м.н., проф. (Эквадор)
Смелянский Р.Л.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Умирбаев У.У.	д.ф.-м.н., проф. (США)
Холщевникова Н.Н.	д.ф.-м.н., проф. (Россия)
Шмайссер Ханс-Юрген	Хабилит. доктор, проф. (Германия)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: vest_math@enu.kz

Ответственный секретарь, компьютерная верстка
А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.

Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 20 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1,
тел.: (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ
ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ

№2(123)/2018

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

<i>Темиргалиев Н.</i> Ковэю мен Макферсонның спектралды тесті кездейсоқтық талаптарын қандай мөлшерде қанағаттандырса, сондай дәрежеде кездейсоқ болатын Лехмердің сызықты конгруэнтті тізбегінің элементарлы құрылуы	8
<i>Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Айнакеева Н.Ж.</i> Термосерпімді стерженьдердің стационарлы емес динамикасы теңдеулерінің фундаментальді және жалпыланған шешімдері	56
<i>Волосивец С.С., Голубов Б.И.</i> Герц және Морри-Герц кеңістіктерінде бөлшектік модификацияланған Харди және Харди-Литтлвуд операторлары	66
<i>Илолов М., Рахматов Дж.Ш.</i> Айқын емес жылжыткізгіштік теңдеуі үшін бастыпқы-шектік есеп туралы	71

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES

№2(123)/2018

CONTENTS

MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

<i>Temirgaliyev N.</i> Elementary construction of the linear congruent Lehmer sequence with the degree of randomness that is required by the spectral test of Coveyou and MacPherson	8
<i>Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh.</i> Fundamental and generalized solutions of the equations of the non-stationary dynamics of thermoelastic rods	56
<i>Volosivets S.S., Golubov B.I.</i> Hardy and Hardy-Littlewood fractional modified operators in the Hertz and Morrey-Hertz spaces	66
<i>Ilov M., Rahmatov J.Sh.</i> On initial-boundary problem for fuzzy heat equation	71

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

<i>Темиргалиев Н.</i> Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона	8
<i>Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Айнакеева Н.Ж.</i> Фундаментальные и обобщенные решения уравнений нестационарной динамики термоупругих стержней	56
<i>Волосивец С.С., Голубов Б.И.</i> Дробные модифицированные операторы Харди и Харди-Литтлвуда в пространствах Герца и Морри-Герца	66
<i>Илолов М., Рахматов Дж.Ш.</i> О начально-граничной задаче для нечеткого уравнения теплопроводности	71

МРНТИ: 27.39.19, 27.39.15

С.С. Волосивец¹, Б.И. Голубов²

¹ Саратовский государственный университет, Саратов, Россия

² Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Московская область, Россия
(E-mail: ¹ volosivetsss@mail.ru, ² golubov@mail.mipt.ru)

Дробные модифицированные операторы Харди и Харди-Литтлвуда в пространствах Герца и Морри-Герца

Аннотация: Для модифицированных дробных операторов Харди и Харди-Литтлвуда и их коммутаторов с символом из пространства функций ограниченной центральной осцилляции мы изучаем условия их ограниченности при действии из одного модифицированного пространства Герца в другое. Устанавливается точность результата, связанного с коммутаторами дробного оператора Харди-Литтлвуда.

Ключевые слова: модифицированные операторы Харди и Харди-Литтлвуда, коммутатор, модифицированное пространство Герца, пространство $СМО^q$.

Введение. Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, таких что $2 \leq p_n \leq N$, $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $p_{-n} = p_n$, $m_{-n} = m_n^{-1}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in \mathbb{R}_+$ записывается в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n / m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Здесь первая сумма конечна и для $x = l/m_k$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, мы выбираем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, положим $|x|_{\mathbf{P}} = m_n$, а $|0|_{\mathbf{P}} = 0$, тогда $N^{-1}|x|_{\mathbf{P}} \leq x \leq |x|_{\mathbf{P}}$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Для x, y , записанных в виде (1), по определению

$$x \oplus y = z := \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} z_n / m_n,$$

где $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$. В случае, когда $z_n = p_n - 1$ при $n \geq n_0$ (это возможно для счетного числа y при фиксированном x), считаем, что $x \oplus y$ не определено. Для функций из используемых ниже классов это не существенно. Аналогично определяется $x \ominus y$. Подробнее см. [1, § 1.5].

Классические операторы Харди и Харди-Литтлвуда для функций f , определенных на \mathbb{R}_+ , задаются формулами

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{\infty} t^{-1} f(t) dt \quad \text{и} \quad \mathcal{B}(f)(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt$$

соответственно. Известно, что первый оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, а второй — в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 < p \leq \infty$ (см. [2, теоремы 327 и 328]). В ряде работ изучались дробные операторы Харди и Харди-Литтлвуда (см., например, [4] и [5]).

Можно рассмотреть операторы $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(x) = |x|_{\mathbf{P}}^{-1} \int_{|t|_{\mathbf{P}} \leq |x|_{\mathbf{P}}} f(t) dt$ и сопряженный к нему $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(x) = \int_{|t|_{\mathbf{P}} \geq |x|_{\mathbf{P}}} |t|_{\mathbf{P}}^{-1} f(t) dt$, называемые модифицированными операторами Харди-Литтлвуда и Харди соответственно. В случае $p_i \equiv 2$ такие операторы ввел второй из авторов [6, 6], который доказал тождества типа Титчмарша для этих операторов и \mathbf{P} -ичного преобразования Фурье, а также ограниченность $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ в двоичных пространствах $ВМО$ и VMO на полупрямой и ограниченность $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ в двоичном пространстве Харди на \mathbb{R}_+ . На случай произвольной ограниченной последовательности \mathbf{P} эти результаты были перенесены первым автором [7]. Ряд свойств модифицированных операторов Харди-Литтлвуда

и Харди в пространствах Гельдера-Бесова, локальных пространствах bmo , vmo и Харди был установлен в работе [8]. Там же было установлено, что удобно изучать действие указанных модифицированных операторов в \mathbf{P} -ичных пространствах Герца, в частности, оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $K_r^{\alpha,q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ при $\alpha < 1 - 1/r$ и это свойство нарушается при $\alpha = 1 - 1/r$, аналогичное свойство верно для $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда по определению $|\mathbf{x}|_{\mathbf{P}} := \max(|x_1|_{\mathbf{P}}, \dots, |x_n|_{\mathbf{P}})$, $B_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} \leq m_k\}$ и $S_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} = m_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Через B_k и S_k обозначаем $B_k(\mathbf{0})$ и $S_k(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0}$ — нуль \mathbb{R}^n . Ясно, что $|B_k(\mathbf{a})| = m_k^n$ и $|S_k(\mathbf{a})| = m_k^n - m_{k-1}^n$, где $|\cdot|$ — мера Лебега в \mathbb{R}^n .

Будем рассматривать дробные операторы типа Харди-Литтлвуда и Харди (при $0 \leq \beta \leq n$)

$$B_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} \int_{|\mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \leq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} f(\mathbf{t}) dt; \quad H_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \geq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} |\mathbf{t}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} f(\mathbf{t}) dt$$

и, для $b \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^n)$, их коммутаторы

$$B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})B_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - B_\beta(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x}),$$

$$H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})H_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - H_\beta(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x}).$$

Пусть для $f \in L^1(B_k(\mathbf{a}))$ по определению $f_{B_k(\mathbf{a})} = |B_k(\mathbf{a})|^{-1} \int_{B_k(\mathbf{a})} f(\mathbf{t}) dt$. Функция $f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq q < \infty$, принадлежит классу $CMO^q(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, если

$$\|f\|_{CMO^q} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(|B_k(\mathbf{0})|^{-1} \int_{B_k(\mathbf{0})} |f(\mathbf{t}) - f_{B_k(\mathbf{0})}|^q dt \right)^{1/q} < \infty.$$

Классическое пространство $CMO^q(\mathbb{R}^n)$ было введено одновременно Й.Ченом и К.Лау [9] и Х. Гарсиа-Куэрва [10], одними из первых предложили использовать его в задачах, связанных с коммутаторами, С. Лонг и Ж.Ванг [11].

Далее пусть X_E обозначает индикатор множества E . Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $q, r \in (0, \infty)$ функция $f \in L_{loc}^r(\mathbb{R}_+^n)$ принадлежит пространству Герца $K_r^{\alpha,q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, если

$$\|f\|_{K_r^{\alpha,q}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q} \|f X_{S_k}\|_r^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Здесь, как обычно, $\|f\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(\mathbf{t})|^r dt \right)^{1/r}$ — норма или квазинорма в пространстве $L^r(\mathbb{R}_+^n) = K_r^{0,r}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$. Пространство Герца было введено К.Герцем [12], а его модификация для групп Виленкина, соответствующая нашему определению при $n = 1$ — К.Онневиром [13].

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q, r < \infty$, $\lambda \geq 0$. Тогда пространство Морри-Герца $MK_{q,r}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ состоит из функций $f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\})$, для которых

$$\|f\|_{MK_{q,r}^{\alpha,\lambda}} := \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^s m_k^{\alpha q} \|f X_{S_k}\|_r^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Ясно, что $MK_{q,r}^{\alpha,0}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) = K_r^{\alpha,q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$. Пространство Морри было введено Ч.Морри [14], определение же модифицированного пространства Морри-Герца $MK_{q,r}^{\alpha,\lambda}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ аналогично p -адическому определению Н.М.Чуонга и Д.В.Дуонга [15].

Рассмотрим весовую функцию $w(x)$, измеримую и п.в. положительную на \mathbb{R}_+^n . Тогда $L_w^q(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq q < \infty$, состоит из функций с конечной нормой $\|f\|_{q,w} =$

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(\mathbf{t})|^q w(\mathbf{t}) dt \right)^{1/q}.$$

Целью нашей работы является получение достаточных условий ограниченности операторов $B_\beta(\mathbf{P}, f)$ и $H_\beta(\mathbf{P}, f)$ (теорема 3) и их коммутаторов (теорема 1), действующих из одного модифицированного пространства Герца в другое. Теорема 3 обобщается также на случай модифицированных пространств Морри-Герца (теорема 4). Доказывается неулучшаемость

условия из теоремы 1 для коммутатора $B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)$ (теорема 2). В p -адическом случае некоторые близкие к данной работе результаты можно найти в статье Г.Гао и Й.Жонга [16].

Результаты.

Теорема 1. Пусть $\beta \geq 0$, $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1 < r_1 < \infty$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$, $1/r_1 + 1/r'_1 = 1$, $\gamma = \max(r'_1, r_2)$ и $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$. Тогда

- 1) если $\alpha < n/r'_1$, то $\|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha,q_2}} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha,q_1}}$;
- 2) если $\alpha > -n/r_2$, то $\|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha,q_2}} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha,q_1}}$.

Поскольку $K_q^{0,q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) = L^q(\mathbb{R}_+^n)$, приведем следствие из теоремы 1 для этого случая.

Следствие 1. Пусть $0 \leq \beta < n$, $1 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1/q_1 - 1/q_2 = \beta/n$, $1/q_i + 1/q'_i = 1$, $i = 1, 2$, $\gamma = \max(q'_1, q_2)$. Тогда для $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ справедливы неравенства

$$\|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q_2} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{q_1}, \quad \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q_2} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{q_1}.$$

Так как $K_q^{\alpha/q,q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) = L_{w_\alpha}^q(\mathbb{R}_+^n)$, где $w_\alpha(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_\mathbf{P}^\alpha$, то для соблюдения условий теоремы 1 требуется равенство $\alpha/q_1 = \alpha/q_2$, т.е. $q_1 = q_2 = q$ и в этом случае $\beta = 0$. Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. Пусть $1 < q < \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, $\gamma = \max(q', q)$. Тогда для справедливости неравенства

- 1) $\|B_{0,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q,w_\alpha} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{q,w_\alpha}$, $\alpha < n(q-1)$;
- 2) $\|H_{0,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q,w_\alpha} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{q,w_\alpha}$, $\alpha > -n$.

Следующая теорема показывает, что условие $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ в п. 1) теоремы 1 нельзя ослабить.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$ и $1 < r'_1 < r < r_2$ (т.е. $\gamma = r_2$ в обозначениях теоремы 1) и выполняются другие условия теоремы 1. Тогда существуют $b \in CMO^r(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) \setminus CMO^{r_2}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ и $f \in K_{r_1}^{\alpha,q_1}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, такие что $B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f) \notin K_{r_2}^{\alpha,q_2}$.

Следующая теорема доказывается тем же методом, что и теорема 1.

Теорема 3. Пусть $\beta \geq 0$, $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$, $1 < r_1 < \infty$, $1/r_i + 1/r'_i = 1$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы неравенства:

- 1) $\|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha,q_2}} \leq C \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha,q_1}}$, $\alpha < n/r'_1$;
- 2) $\|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha,q_2}} \leq C \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha,q_1}}$, $\alpha > -n/r_2$.

Теорема 4 обобщает теорему 3.

Теорема 4. Пусть $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1 < r_1 \leq r_2 < \infty$, $0 \leq \beta \leq n$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$, $1/r_1 + 1/r'_1 = 1$ и $\lambda \geq 0$. Тогда

- 1) если $\alpha < n/r'_1 + \lambda$, то $\|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2,r_2}^{\alpha,\lambda}} \leq C \|f\|_{MK_{q_1,r_1}^{\alpha,\lambda}}$;
- 2) если $\alpha > -n/r_2 + \lambda$, то $\|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{MK_{q_2,r_2}^{\alpha,\lambda}} \leq C \|f\|_{MK_{q_1,r_1}^{\alpha,\lambda}}$.

Список литературы

- 1 Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша*. -М.: Наука, -1987.
- 2 Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г., *Неравенства*. М.: ИЛ, - 1948. 2-е изд.: М.: Ком. книга, - 2006.
- 3 Andersen K.F., Muckenhoupt B. *Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maxim functions*// Studia Math. -1982. -Т.72. -№1. С. 9-26.
- 4 Волосивец С.С. *Тождества типа Титчмарша для обобщенных операторов Харди и Харди-Литтлвуда*// Изв. Саратовского ун-та, сер. Математика. Механика. Информатика. -2013. - Т.13. -№1 (часть 2). -С. 28-33.
- 5 Голубов Б.И. *О двоичных аналогах операторов Харди и Харди-Литтлвуда*// Сиб. матем. журнал. -1999. -Т.40. -№6. -С. 1244-1252.
- 6 Голубов Б.И. *Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди-Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO*// Analysis math. -2000. -Т.26. -№4. -С. 287-298.
- 7 Volosivets S.S. *On P-adic analogs of Hardy and Hardy-Littlewood operators*// East J. Approximations. -2005. - Т.11. -№1. -Р. 57-72.
- 8 Волосивец С.С., *Модифицированные операторы Харди и Харди-Литтлвуда и их поведение в различных пространствах*// Известия РАН. Сер. матем. -2011. -Т.75. -№1. -С. 29-52.
- 9 Chen Y.Z., Lau K.S. *Some new classes of Hardy spaces*// J. Functional Anal. 1989. -Т.84. -№2. -Р. 255-278.
- 10 Garcia-Cuerva J. *Hardy spaces and Beurling algebras*// J. London Math. Soc. -1989. -Т.39. -№3. -Р. 499-513.

- 11 Long S., Wang J. *Commutators of Hardy operators*// J. Math. Anal. Appl. -2002. -Т.274. -№2. -P. 626-644.
- 12 Herz C. *Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms*// J. Math. Mech. -1968. -Т.18. -№4. -P. 283-324.
- 13 Onneweer C.W. *Generalized Lipschitz spaces and Herz spaces on certain totally disconnected groups*// Martingale theory in harmonic analysis and Banach spaces, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, -1981. -P. 106-121.
- 14 Morrey C. *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*// Trans. Amer. Math. Soc. -1938. -Т.43. -P. 126-166.
- 15 Chuong N.M., Duong D.V. *Weighted Hardy-Littlewood operators and commutators on p-adic functional spaces*, p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl., -2013. -Т.5. -P. 65-82.
- 16 Gao G., Zhong Y. *Some estimates of Hardy operators and their commutators on Morrey-Herz spaces*// J. Math. Ineq. -2017. -Т.11. -№1. -P. 49-58.

С.С. Волосивец¹, Б.И. Голубов²

¹ Саратов мемлекеттік университеті, Саратов, Ресей

² Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет), Долгопрудный, Ресей

Герц және Морри-Герц кеңістіктерінде бөлшектік модификацияланған Харди және Харди-Литтлвуд операторлары

Аннотация: Харди және Харди-Литтлвудтың бөлшек модификацияланған операторлары мен олардың шенелген центрлі осцилляциялы функциялар кеңістіктерінде символдары жататын коммутаторлары үшін олардың бір Герц модификацияланған кеңістігінен екінші кеңістігіне бейнеленгендегі шенелгендігі зерттеледі. Харди-Литтлвуд бөлшек операторларының коммутаторларымен байланысқан нәтижелердің дәлдігі анықталды.

Түйін сөздер: Харди және Харди-Литтлвудтың модификацияланған операторлары, коммутатор, Герц модификацияланған операторы, СМО кеңістігі.

S.S. Volosivets¹, B.I. Golubov²

¹ Saratov State University, Saratov, Russia

² Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudnyi, Moscow Region, Russia

Hardy and Hardy-Littlewood fractional modified operators in the Hertz and Morrey-Hertz spaces

Abstract: We consider the conditions for boundedness of the modified fractional Hardy and Hardy-Littlewood operators and their commutators acting from one function space of bounded central oscillation to an other. The sharpness of the result associated to commutators of the fractional Hardy-Littlewood operators is established.

Keywords: modified Hardy and Hardy-Littlewood operators, commutator, modified Hertz space, CMO^q space.

References

- 1 Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. *Walsh series and transforms* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1991).
- 2 Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Neravenstva [Inequalities]* (IL, Moscow, 1948; 2-nd ed.: Kom. Kniga, Moscow, 2006).
- 3 Andersen K.F., Muckenhoupt B. *Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maxim functions*, Studia Math. **72**(1), 9-26(1982).
- 4 Volosivets S.S. *Identities of Titchmarsh Type for Generalized Hardy and Hardy-Littlewood*, Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., **13**(1(2)), 28-33 (2013). [in Russian]
- 5 Golubov B.I. *On dyadic analogues of Hardy and Hardy-Littlewood operators*, Siberian Math. J., **40**(6), 1051-1058 (1999). [in Russian]
- 6 Golubov B.I. *Ob ogranichennosti dvoichnykh operatorov Hardy i Hardy-Littlewooda v dvoichnykh prostranstvakh H i BMO* [On the boundedness of the binary Hardy and Hardy-Littlewood operators in binary spaces H and BMO], Analysis math., **26**(4), 287-298 (2000). [in Russian]
- 7 Volosivets S.S. *On \mathbf{P} -adic analogs of Hardy and Hardy-Littlewood operators*, East J. Approximations, **11**(1), 57-72(2005).
- 8 Volosivets S.S. *Modified Hardy and Hardy-Littlewood operators and their behaviour in various spaces*, Izv. RAN. Ser. Mat., **75**(1), 29-52 (2011). [in Russian]
- 9 Chen Y.Z., Lau K.S. *Some new classes of Hardy spaces*, J. Functional Anal., **84**(2), 255-278(1989).
- 10 Garcia-Cuerva J. *Hardy spaces and Beurling algebras*, J. London Math. Soc., **39**(3), 499-513(1989).
- 11 Long S., Wang J. *Commutators of Hardy operators*, J. Math. Anal. Appl., **274**(2), 626-644(2002).
- 12 Herz C. *Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms*, J. Math. Mech., **18**(4), 283-324(1968).
- 13 Onneweer C.W. *Generalized Lipschitz spaces and Herz spaces on certain totally disconnected groups*, Martingale theory in harmonic analysis and Banach spaces, Lecture Notes in Math., 1981, **939** Springer, Berlin, 106-121.
- 14 Morrey C. *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **43**, 126-166(1938).

- 15 Chuong N.M., Duong D.V. *Weighted Hardy-Littlewood operators and commutators on p -adic functional spaces*, *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.*, **5**, 65–82(2013).
- 16 Gao G., Zhong Y. *Some estimates of Hardy operators and their commutators on Morrey-Herz spaces*, *J. Math. Ineq.*, **11**(1), 49–58(2017).

Сведения об авторах:

Волосивец С.С. - кандидат физико-математических наук, доцент, Саратовский государственный университет, Саратов, Россия.

Голубов Б.И. - доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская область, Россия.

Volosivets S.S. - Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assoc.Prof, Saratov State University, Saratov, Russia.

Golubov B.I. - Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof., Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudnyi, Moscow Region, Russia.

Поступила в редакцию 13.04.2018

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex-пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды *bulmathmc.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні XҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теоремадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

**Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"**

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website *bulmathmc.enu.kz*.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "... see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2]"; a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубаньшева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева.
Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Тех- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилиевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz*.

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохраняя структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикинова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.