ISSN 2616-7182

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of the L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА**

№1(122)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2018
Astana, 2018

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Сәтпаев к-сі, 2, 408 бөлме.
Тел: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген
А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.
27.03.2018ж. № 17000-ж тіркеу куәлігі.
Тиражы: 30 дана
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,
тел: (7172)709-500 (ішкі 31-428).

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 408, Astana, Kazakhstan, 010008
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: *vest_math@enu.kz*

Responsible secretary, computer layout:
A. Nurbolat

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.
MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series
Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan
Periodicity: 4 times a year
Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.
Registration certificate №17000-ж from 27.03.2018.
Circulation: 30 copies
Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;
tel: (7172) 709-500 (ext.31-428).

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408
Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА
Собственник: РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год.
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казакстан.
Регистрационное свидетельство №17000-ж от 27.03.2018г.
Тираж: 30 экземпляров. Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: (7172)709-500 (вн.31-428).

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА СЕРИЯСЫ

№1(122)/2018

МАЗМҰНЫ

МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS SERIES

№1(122)/2018

CONTENTS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. СЕРИЯ МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. МЕХАНИКА

№1(122)/2018

СОДЕРЖАНИЕ

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2018, 1(122), 90-98 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

А.Б. Утесов, А.Т. Абдыкулов

Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан
(E-mail: adilzhan_71@mail.ru)

Полное К(В)П-исследование задачи восстановления функций из анизотропных классов Соболева по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье

Аннотация: В случае, когда числовая информация снимается с тригонометрических коэффициентов Фурье – одного из основных линейных функционалов – в полном объеме решена К(В)П-задача оптимального восстановления функций из анизотропных классов Соболева $W_2^{r_1,\dots,r_s}(0,1)^s$. Именно, выписан неулучшаемый порядок $\delta_N(0;\Phi_N)_{L^2} \asymp N^{-(r_1^{-1}+\dots+r_s^{-1})^{-1}}$ восстановления функций по точным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье. На основе этого построен оптимальный вычислительный агрегат, являющийся тригонометрическим полиномом и найдена величина $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-(r_1^{-1}+\dots+r_s^{-1})^{-1}-\frac{1}{2}}$ предельной погрешности вычисления коэффициентов Фурье, сохраняющая неулучшаемый порядок восстановления по точной информации. Затем показано, что вычислительных агрегатов восстановления по тригонометрическим коэффициентам Фурье с лучшей (порядковой) погрешностью не существует.

Ключевые слова: Компьютерный (вычислительный) поперечник, анизотропный класс Соболева, предельная погрешность, оптимальный вычислительный агрегат, восстановление по неточной информации, массивность предельной погрешности.

Постановка задачи. Задача восстановления по точной и по неточной информации ставится в различных постановках (см., напр., [1] и имеющуюся в ней библиографию). Исходным в наших рассмотрениях является

$$\delta_N(\varepsilon_N;\, D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N;\, T;\; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)},\,\varphi_N)\in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N; (l^{(N)},\,\varphi_N)\right)_Y \qquad (1)$$

где

$$\delta_N\left(\varepsilon_N; (l^{(N)},\,\varphi_N)\right)_Y \equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; T; F; (l^{(N)},\,\varphi_N)\right)_Y \equiv$$
$$\equiv \sup_{\substack{f\in F \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\le 1 (\tau=1,\dots,N)}} \left\| T\,f(\cdot) - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\varepsilon_N,\dots,l_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N;\,\cdot\right)\right\|_Y .$$

Здесь математическая модель задается посредством оператора $T: F \mapsto Y$, где X и Y нормированные пространства функций, заданных соответственно на Ω_X и Ω_Y, $F\subset X-$ класс функций. Числовая информация $l^{(N)} \equiv l^{(N)}(f) = \left(l_N^{(1)}(f),\dots,l_N^{(N)}(f)\right)$ объема $N(N=1,2,\dots)$ об f из класса F снимается с функционалов $l_N^{(1)}: F\mapsto C$, $\dots$, $l_N^{(N)}: F\mapsto C$. Алгоритм переработки информации $\varphi_N(z_1,\dots,z_N;\cdot) : C^N\times\Omega_Y \mapsto C$ есть соответствие, которое при всяком фиксированном $(z_1,\dots,z_N)\in C^N$ как функция от $(\cdot)$ есть элемент Y. Запись $\varphi_N \in Y$ означает, что φ_N удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, а $\{\varphi_N\}_Y$ будет обозначать множество, составленное из всех $\varphi_N\in Y$.

Далее $\left(l^{(N)},\varphi_N\right)$ есть вычислительный агрегат восстановления по точной информации для функции $f\in F$, действующий по правилу $\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f),\dots,l_N^{(N)}(f);\,\cdot\right)$.

Восстановление по неточной информации проводится следующим образом. Сначала точные значения $l_N^{(\tau)}(f)$ заменяются с заданной точностью $\varepsilon_N \ge 0$ на приближенные значения

$z_\tau \equiv z_\tau(f), |z_\tau(f) - l_N^{(\tau)}| \le \varepsilon_N(\tau = 1, ..., N)$, затем числа $z_\tau \equiv z_\tau(f)$ перерабатываются посредством алгоритма φ_N до функции $\varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)$, которая и будет составлять вычислительный агрегат $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \equiv \varphi_N(z_1(f), ..., z_N(f); \cdot)$, построенный по информации точности ε_N.

Пусть D_N есть данный набор комплексов $\left(l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}; \varphi_N\right) \equiv \left(l^{(N)}; \varphi_N\right)$, подчеркнем, операторов восстановления «по точной информации».

Записи $A \ll B\,(B \ge 0)$ и $A \asymp B\,(A \ge 0, B \ge 0)$ для $A \equiv \{A_n\}$ и $B \equiv \{B_n\}$ соответственно означают $|A| \le cB\,(c > 0, \forall n = 1, 2, ...)$ и одновременное выполнение $A \ll B$ и $B \ll A$.

Величину (1) будем называть *информативной мощностью набора вычислительных агрегатов (комплексов)* D_N *точности* ε_N. В целях сокращения речи будем говорить *вычислительный агрегат* $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right) \in D_N$ *поддерживает оценку снизу* $\vartheta_N \ll \delta_N(0; T; F; D_N)$, если выполнены неравенства $\delta_N\left(0; \left(\bar{l}^N, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y \ll \vartheta_N$.

При заданных F, Y, T, D_N (фиксированных всюду по последующему контексту) в рамках приведенных обозначений и определений, проблема оптимального восстановления по неточной информации, оформленная под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» (в сокращении – К(В)П), заключается, в собирательном смысле, в последовательном решении трех задач:

К(В)П-1. Находится порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y \equiv \delta_N(0; T; F; D_N)_Y$, – *информативная мощность набора вычислительных агрегатов* D_N;

К(В)П-2. Производится построение конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)$ из D_N, поддерживающего порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$, для которого исследуется задача существо – вания и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N > 0$ (предельной погрешности, соответствующей вычислительному агрегату $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$) такой, что

$$\delta_N(0;\, D_N)_Y \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; (\bar{l}^{(N)},\, \bar{\varphi}_N))_Y \equiv$$

$$\equiv \sup\left\{\| T\, f(\cdot) - \bar{\varphi}_N(z_1(f), ..., z_N(f);\,)\|_Y \,:\, f \in F,\, \left| l_N^{(\tau)} - z_\tau \right| \le \tilde{\varepsilon}_N(\tau = 1, ..., N),\right.$$

с одновременным выполнением $\forall \eta_N \uparrow +\infty\,(0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \to +\infty)$:

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\, \left(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\right)\right)_Y}{\delta_N(0;\, D_N)_Y} = +\infty\,;$$

К(В)П-3. Устанавливается массивность предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N$: находится как можно большое множество вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$ (обычно связанных со структурой исходного $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$), построенных по всевозможным функционалам $l_N^{(1)}, ..., l_N^{(N)}$ таких, что для каждого из которых выполнено

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty\,(0 < \eta_N < \eta_{N+1}, \eta_N \to +\infty)\,:\, \overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\, \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y}{\delta_N(0;\, D_N)_Y} = +\infty\,.$$

В работах [1] – [5] полностью решены К(В)П - задачи при различных конкретизациях D_N, F, Y и T. В настоящей статье эта задача решена в следующих конкретизациях: $Tf = f$, $F = W_2^{r_1,...,r_s}(0,1)^s$ – анизотропный класс Соболева (определение класса дано ниже), $Y = L^2(0,1)^s$, $D_N = \Phi_N \equiv \left\{l_N^{(1)}(f) = \hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., l_N^{(N)}(f) = \hat{f}\left(m^{(N)}\right)\right\} \times \{\varphi_N\}_{L^2(0,1)^s}$,

где $m^{(1)} \in Z^s, ..., m^{(N)} \in Z^s$ и $\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx\,(m \in Z^s)$ – тригонометрические коэффициенты Фурье – Лебега.

Формулировка полученного результата. Сначала напомним некоторые известные определения и условимся об используемых обозначениях. Для конечного множества E через $|E|$ обозначим количество его элементов. Как обычно, $[a]$ есть целая часть числа a. Всюду $m = (m_1, ..., m_s) \in Z^s$.

Пусть $s = 2, 3, ...$ и $r = (r_1, ..., r_s)$ – вектор с положительными компонентами. Анизотропный класс Соболева $W_2^r(0,1)^s \equiv W_2^{r_1,...,r_s}(0,1)^s$ есть, по определению, множество всех суммируемых 1– периодических по каждой переменной функций $f(x) =$

$f(x_1,...,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье – Лебега которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m\in Z^s} |\hat{f}(m)|^2(\bar{m}_1^{2r_1}+...+\bar{m}_s^{2r_s})\le 1, \text{ где } \bar{m}_j=\max\{1;\,|m_j|\}\,(j=1,...,s).$$

Справедлива

Теорема. Пусть $s=2,3,...$ и $\lambda\equiv\lambda(r_1,...,r_s)=(r_1^{-1}+...+r_s^{-1})^{-1}>1/2$. Тогда для $N\equiv\ N(K)=\prod_{i=1}^{s}\left(2\left[K^{\lambda/r_i}\right]+1\right)$, $K=1,2,...$ справедливы следующие утверждения:

К(В)П -1. $\delta_N(0;\Phi_N)_{L^2}\underset{s,r_1,...,r_s}{\asymp}\frac{1}{N^{\lambda}}$;

К(В)П -2. Для вычислительного агрегата

$$(\bar{l}^{(N)},\ \bar{\varphi}_N)=\sum_{m\in A_K}\hat{f}(m)e^{2\pi\, i(m,x)},\, A_K=\left\{m\in Z^s:\ |m_1|\ \le\left[K^{\lambda/r_1}\right],\ ...,\ |m_s|\ \le\left[K^{\lambda/r_s}\right]\right\}$$

величина $\tilde{\varepsilon}_N=\frac{1}{N^{\lambda}\sqrt{N}}$ является предельной погрешностью: во– первых,

$$\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\left(\bar{l}^{(N)},\ \bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^2}\underset{s,r_1,...,r_s}{\asymp}\delta_N\left(0;\Phi_N\right)_{L^2}\underset{s,r_1,...,r_s}{\asymp}\frac{1}{N^{\lambda}};$$

во– вторых, для любой возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}_{N\ge 1}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\ \left(\bar{l}^{(N)},\ \bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^2}}{\delta_N\left(0;\ \Phi_N\right)_{L^2}}=+\infty;$$

К(В)П - 3. Всякий вычислительный агрегат $\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right);\cdot\right)$, построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N гармоник, не может иметь погрешность большую (по порядку) предельной погрешности $(\bar{l}^{(N)},\ \bar{\varphi}_N)\in\Phi_N$: для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N\ge 1}$ и для любого $(l^{(N)},\ \varphi_N)\in\Phi_N$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right)\ ;\cdot\right)\right)_{L^2}}{\delta_N\left(0;\ \Phi_N\right)_{L^2}}=+\infty.$$

Замечание. Здесь в изотропном случае $r_1=...=r_s$ задача К(В)П-1 при восстановлении по всем функционалам решена Н. Темиргалиевым и Ш. Ажгалиевым в [6], а анизотропном случае при восстановлении по всем ортонормированным системам В.Н. Темляковым [7].

Доказательство теоремы. Нам понадобится следующая

Лемма. Пусть дан вектор $(r_1,...,r_s)$ с положительными компонентами удовлетворяющих условию $\lambda=(1/r_1+...+1/r_s)^{-1}>1/2$. Тогда тригонометрический ряд Фурье каждой функции $f\in W_2^r(0,1)^s$ сходится абсолютно (и равномерно при любом методе суммирования).

Доказательство. В силу неравенства Гельдера и определения класса $W_2^r(0,1)^s$ для всякого $x\in(0,1)^s$ имеем

$$\sum_{m\in Z^s}\left|\hat{f}(m)e^{2\pi\, i\,(m,x)}\right|\le\sum_{m\in Z^s}\left|\hat{f}(m)\right|\le$$

$$\le\left(\sum_{m\in Z^s}\left|\hat{f}(m)\right|^2\left(\bar{m}_1^{2r_1}+...+\bar{m}_s^{2r_s}\right)\right)^{12}\left(\sum_{m\in Z^s}\left(\bar{m}_1^{2r_1}+...+\bar{m}_s^{2r_s}\right)^{-1}\right)^{12}\le$$

$$\le\left(\sum_{m\in Z^s}\left(\bar{m}_1^{2r_1}+...+\bar{m}_s^{2r_s}\right)^{-1}\right)^{12}. \qquad (2)$$

Из курса математического анализа известно (см., напр. [8, стр. 421]), что необходимым и достаточным условием сходимости кратного ряда $\sum_{m\in Z^s}\left(\bar{m}_1^{2r_1}+...+\bar{m}_s^{2r_s}\right)^{-1}$ является выполнение неравенства $\lambda>1/2$.

Следовательно, согласно (2), при $\lambda > 1/2$ тригонометрический ряд Фурье каждой функции $f \in W_2^r(0,1)^s$ сходится абсолютно. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Сначала отметим легко устанавливаемые свойства множества $A_K = \left\{m \in Z^s: \ |m_1| \ \le \left[K^{\lambda/r_1}\right], ..., \ |m_s| \ \le \left[K^{\lambda/r_s}\right]\right\}$:

1. $|A_K| = N = \prod_{i=1}^s \left(2\left[K^{\lambda/r_i}\right]+1\right)$;

2. $|A_K| \underset{s}{\asymp} K$, поскольку $\frac{3}{2}K^{\lambda/r_i} < 2\left[K^{\lambda/r_i}\right]+1 < 3K^{\lambda/r_i}$ для каждого $i = 1, ..., s$ и $\sum_{i=1}^s \frac{\lambda}{r_i} = 1$;

3. $|A_K| > 2K$, ибо $|A_K| = \prod_{i=1}^s \left(2\left[K^{\lambda/r_i}\right]+1\right) > \prod_{i=1}^s \left(\frac{3}{2}K^{\lambda/r_i}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^s K > 2K$.

Оценим сверху величину $\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \ \bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^2}$.

Если $A_K = \left\{m^{(1)}, m^{(2)}, ..., m^{(N)}\right\}$, то по условию теоремы

$$(\bar{l}^{(N)}, \ \bar{\varphi}_N) = \sum_{\tau=1}^{N} \hat{f}(m^{(\tau)})\, e^{2\pi i\,(m^{(\tau)},\,x)}.$$

Поэтому для произвольно заданных чисел $\gamma_N^{(\tau)}$ таких, что $\left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1\,(\tau = 1, ..., N)$ при $\bar{l}_N^{(\tau)}(f) = \hat{f}\left(m^{(\tau)}\right)$ $(\tau = 1, ..., N)$ имеем

$$\bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N, ..., \bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N; \ x\right) =$$

$$= \sum_{m \in A_K} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i\,(m,\,x)} + \sum_{\tau=1}^{N} \gamma_N^{(\tau)}\tilde{\varepsilon}_N\, e^{2\pi i\,(m^{(\tau)},\,x)}.$$

Следовательно, согласно вышеприведенной лемме, имеет место равенство

$$f(x) - \bar{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N, ..., \bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N; x\right) =$$

$$= \sum_{m \in Z^s \setminus A_K} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i\,(m,\,x)} + \sum_{\tau=1}^{N} (-\gamma_N^{(\tau)})\, \tilde{\varepsilon}_N\, e^{2\pi i\,(m^{(\tau)},\,x)}. \tag{3}$$

Далее, применяя равенство Парсеваля оценим сверху L^2- норму каждой суммы в правой части (3).

Для любого $m \in Z^s \setminus A_K$ найдется номер $\nu \in \{1, ..., s\}$ такой, что $|m_\nu| \ > \left[K^{\lambda/r_\nu}\right]$, откуда

$$\frac{1}{\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s}} \le \frac{1}{\bar{m}_\nu^{2r_\nu}} \le \frac{1}{\left[K^{\lambda/r_\nu}\right]^{2r_\nu}} \le \frac{2}{K^{2\lambda}}.$$

Стало быть, по свойствам 1 и 2 множества A_K и определению класса Соболева

$$\left\| \sum_{m \in Z^s \setminus A_K} \hat{f}(m)\, e^{2\pi i\,(m,\,\cdot)} \right\|_{L^2} = \left(\sum_{m \in Z^s \setminus A_K} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{m \in Z^s \setminus A_K} \frac{\left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s}\right)}{\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s}} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{2}{K^\lambda} \left(\sum_{m \in Z^s \setminus A_K} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \left(\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \underset{s, r_1, ..., r_s}{\ll} \frac{1}{N^\lambda}. \tag{4}$$

Из неравенств $\left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \le 1\,(\tau = 1, ..., N)$ и равенства $\tilde{\varepsilon}_N = \frac{1}{N^\lambda \sqrt{N}}$ получим требуемую оценку сверху для второй суммы правой части (3):

$$\left\| \sum_{\tau=1}^{N} \left(-\gamma_N^{(\tau)}\right)\, \tilde{\varepsilon}_N\, e^{2\pi i\,(m^{(\tau)},\,\cdot)} \right\|_{L^2} = \left(\sum_{\tau=1}^{N} \left|\, \gamma_N^{(\tau)}\, \tilde{\varepsilon}_N \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq \tilde{\varepsilon}_N \left(\sum_{\tau=1}^{N} 1 \right)^{12} = \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N} = \frac{1}{N^{\lambda}}. \quad (5)$$

Следовательно (см. (4) и (5)),

$$\left\| f(\cdot) - \bar{\varphi}_N \left(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \tilde{\varepsilon}_N, ..., \bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \tilde{\varepsilon}_N; \cdot \right) \right\|_{L^2} \underset{s,r_1,...,r_s}{\ll} \frac{1}{N^{\lambda}},$$

откуда, в силу произвольности чисел $\gamma_N^{(\tau)}(\tau = 1, ..., N)$ и функции f , имеем

$$\delta_N \left(\tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)},\ \bar{\varphi}_N \right) \right)_{L^2} \underset{s,r_1,...,r_s}{\ll} \frac{1}{N^{\lambda}}. \quad (6)$$

Теперь оценим снизу величину $\delta_N(0; \Phi_N)_{L^2}$.

Пусть задано число $N (N = 2, 3, ...)$ и $B_N = \left\{ m^{(1)}, m^{(2)}, ..., m^{(N)} \right\}$ произвольное конечное подмножество Z^s, соответствующий набор функционалов $l_N^{(1)}(f) = \hat{f}\left(m^{(1)}\right)$, ..., $l_N^{(N)}(f) = \hat{f}\left(m^{(N)}\right)$ и функция $\varphi_N(z_1, ..., z_N; \cdot)-$ алгоритм переработки числовой информации объема N.

Рассмотрим функцию

$$p_N(x) = \frac{1}{N^{\lambda} \sqrt{N} \sqrt{s} \cdot 2^s} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} e^{2\pi i (m,x)},$$

$C_N = \left\{ m \in Z^s : \ |m_1| \leq \left[N^{\lambda / r_1} \right] , ..., \ |m_s| \leq \left[N^{\lambda / r_s} \right] \right\}$ и убедимся в том, что имеет место включение $p_N \in W_2^r(0,1)^s$.

Действительно, с учетом неравенств $\sum_{m \in C_N \setminus B_N} 1 \leq \sum_{m \in C_N} 1 < 3^s N$ (см. 2 - свойство множества A_K), имеем

$$\sum_{m \in C_N \setminus B_N} |\hat{p}_N(m)|^2 \left(\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s} \right) =$$

$$= \sum_{m \in C_N \setminus B_N} \frac{\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s}}{N^{2\lambda} N \cdot s \cdot 4^s} = \frac{1}{N^{2\lambda} N \cdot s \cdot 4^s} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} \left(\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{N^{2\lambda} N \cdot s \cdot 4^s} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} \left(\left[N^{\lambda / r_1} \right]^{2r_1} + ... + \left[N^{\lambda / r_s} \right]^{2r_s} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{N^{2\lambda} N \cdot s \cdot 4^s} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} s \cdot N^{2\lambda} = \frac{1}{N \cdot 4^s} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} 1 < \frac{3^s}{4^s} < 1\,.$$

Учитывая неравенство $\sum_{m \in C_N \setminus B_N} 1 > N$ (см. 3 - свойство множества A_K) , оценим снизу L^2- норму функции p_N :

$$\| p_N(\cdot) \|_{L^2} = \left(\frac{1}{N^{2\lambda} N \cdot s \cdot 4^s} \sum_{m \in C_N \setminus B_N} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{1}{N^{2\lambda} N \cdot s \cdot 4^s} N \right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\| p_N(\cdot) \|_{L^2} \underset{s,r_1,...,r_s}{\gg} \frac{1}{N^{\lambda}} \quad (7)$$

Из определения функции p_N непосредственно вытекают следующие равенства:

$$l_N^{(1)}(p_N) = \hat{p}_N \left(m^{(1)} \right) = 0\,, ..., \ l_N^{(N)}(p_N) = \hat{p}_N \left(m^{(N)} \right) = 0.$$

Поэтому, в силу включений $p_N \in W_2^r(0,1)^s$ и $(-p_N) \in W_2^r(0,1)^s$, имеем

$$\sup_{f \in W_2^r(0,1)^s} \left\| \ f(\cdot) - \varphi_N(\ l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f); \ \cdot) \right\|_{L^2} \geq$$

$$\geq \max \left\{ \| \, p_N(\cdot) - \varphi_N(0, ..., \, 0; \, 0) \, \|_{L^2} \, , \| \, (-p_N) \, (\cdot) - \varphi_N(0, ..., \, 0; \, 0) \, \|_{L^2} \, \right\} \geq$$

$$\geq \frac{\|\, p_N(\cdot) - \varphi_N(0, ..., 0;\, 0)\,\|_{L^2} + \|\,(-p_N)\,(\cdot) - \varphi_N(0, ..., 0;\, 0)\,\|_{L^2}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\|\, p_N(\cdot) - \varphi_N(0, ..., 0;\, 0) - ((-p_N)\,(\cdot) - \varphi_N(0, ..., 0;\, 0))\,\|_{L^2}}{2} = \|p_N(\cdot)\|_{L^2}\,. \tag{8}$$

Сопоставляя неравенства (7) и (8), имеем

$$\sup_{f \in W_2^r(0,1)^s} \left\| \, f(\cdot) - \varphi_N(\, l_N^{(1)}(f), ..., l_N^{(N)}(f);\ \cdot) \, \right\|_{L^2} \underset{s, r_1, ..., r_s}{\gg} \frac{1}{N^\lambda}\,.$$

И, наконец, в силу произвольности множества $B_N = \left\{ m^{(1)}, m^{(2)}, ..., m^{(N)} \right\}$ и функции φ_N, заключаем

$$\delta_N(0; \Phi_N)_{L^2} \underset{s, r_1, ..., r_s}{\gg} \frac{1}{N^\lambda}. \tag{9}$$

Так как $\delta_N(0; \Phi_N)_{L^2} \leq \delta_N\left(0;\ \left(\bar{l}^{(N)},\, \bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^2} \leq \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N;\ \left(\bar{l}^{(N)},\, \bar{\varphi}_N\right)\right)_{L^2}$, то из (6) и (9) вытекает доказательства К(В)П-1 и первой части К(В)П-2.

Теперь убедимся в том, что для всех $(\, l^{(N)},\ \varphi_N) \in \Phi_N$ при любой возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}_{N \geq 1}$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N \to +\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N;\ \left(l^{(N)},\ \varphi_N\right)\right)_{L^2}}{\delta_N\left(0;\ \Phi_N\right)_{L^2}} = +\infty. \tag{10}$$

Заметим, что установив справедливость этого равенства, мы завершаем доказательство теоремы, так как вторая часть К(В)П-2 следует из равенства (10).

Пусть дана возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность $\{\eta_N\}_{N \geq 1}$. Положим $\beta_N = \min\{\eta_N,\ \ln N\}$ и для каждого $N = 2, 3, ...$ определим множество

$$H_N = \left\{ m \in Z^s:\ |m_1| \ \leq \left[N^{\lambda/r_1} \beta_N^{-1/r_1}\right], ...,\ |m_s| \ \leq \left[N^{\lambda/r_s} \beta_N^{-1/r_s}\right] \right\}.$$

Поскольку $|\, H_N| = \prod_{i=1}^s \left(2\left[N^{\lambda/r_i} \beta_N^{-1/r_i}\right] + 1\right)$ и для каждого $i = 1, ..., s$ выполнены неравенства $N^{\lambda/r_i} \beta_N^{-1/r_i} < 2\left[N^{\lambda/r_i} \beta_N^{-1/r_i}\right] + 1 < 3 N^{\lambda/r_i} \beta_N^{-1/r_i}$, то, с учетом равенства $\lambda \cdot \left(\frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_s}\right) = 1$, имеем

$$N \cdot \beta_N^{-1/\lambda} < |\, H_N| < 3^s N \cdot \beta_N^{-1/\lambda}. \tag{11}$$

Так как $\lim\limits_{N \to +\infty} \beta_N = +\infty$, то существует номер N_0 такой, что для всех $N \geq N_0$ имеет место неравенство $\beta_N \geq 1$.

Проверим, что для каждого $N \geq N_0$ функция $h_N(x) = \frac{\beta_N \tilde{\varepsilon}_N}{\sqrt{s \cdot 3^s}} \sum_{m \in H_N} e^{2\pi\, i\, (m, x)}$ принадлежит классу $W_2^r(0,1)^s$.

Сначала убедимся в том, что для каждого $N = 2, 3, ...$ справедливо неравенство

$$\sum_{m \in Z^s} \left|\hat{h}_N(m)\right|^2 \left(\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s}\right) \leq \frac{|\, H_N|}{3^s N}. \tag{12}$$

Действительно,

$$\sum_{m \in Z^s} \left|\hat{h}_N(m)\right|^2 \left(\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s}\right) = \sum_{m \in H_N} \frac{\beta_N^2 \tilde{\varepsilon}_N^2}{s \cdot 3^s} \left(\bar{m}_1^{2r_1} + ... + \bar{m}_s^{2r_s}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\beta_N^2 \tilde{\varepsilon}_N^2}{s \cdot 3^s} \sum_{m \in H_N} \left(M_1^{2r_1} + ... + M_s^{2r_s}\right) \leq \frac{\beta_N^2 \tilde{\varepsilon}_N^2}{s \cdot 3^s} \sum_{m \in H_N} \left(\left(N^{\lambda/r_1} \beta_N^{-1/r_1}\right)^{2r_1} + ... + \left(N^{\lambda/r_s} \beta_N^{-1/r_s}\right)^{2r_s}\right) =$$

$$= \frac{\beta_N^2 \tilde{\varepsilon}_N^2}{s \cdot 3^s} \sum_{m \in H_N} s \cdot N^{2\lambda} \beta_N^{-2} = \frac{\beta_N^2}{s \cdot 3^s N^{2\lambda} N} \left(s \cdot N^{2\lambda} \beta_N^{-2}\right) \sum_{m \in H_N} 1 = \frac{1}{3^s N} \sum_{m \in H_N} 1 = \frac{|H_N|}{3^s N}.$$

Из неравенств (11) и (12) получим

$$\sum_{m\in Z^s}\left|\hat{h}_N(m)\right|^2\left(\bar{m}_1^{2r_1}+...+\bar{m}_s^{2r_s}\right)<\frac{1}{\beta_N^{1/\lambda}}. \qquad (13)$$

Так как при всех $N\geq N_0$ выполнено неравенство $\beta_N\geq 1$, то в силу (13) имеет место включение $h_N\in W_2^r(0,1)^s$.

Учитывая неравенство $|H_N|>N\cdot\beta_N^{-1/\lambda}$ (см. (11)) оценим снизу L^2- норму функции h_N:

$$\|h_N(\cdot)\|_{L^2}=\frac{\beta_N\tilde{\varepsilon}_N}{\sqrt{s\cdot 3^s}}\left(\sum_{m\in H_N}1\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\beta_N\tilde{\varepsilon}_N}{\sqrt{s\cdot 3^s}}|H_N|^{\frac{1}{2}}\gg_s\beta_N\tilde{\varepsilon}_N\sqrt{N}\cdot\beta_N^{-\frac{1}{2\lambda}}=$$

$$=\beta_N\frac{1}{N^\lambda\sqrt{N}}\sqrt{N}\cdot\beta_N^{-\frac{1}{2\lambda}}=\frac{1}{N^\lambda}\beta_N^{1-\frac{1}{2\lambda}},$$

откуда,

$$\|h_N(\cdot)\|_{L^2}\gg_s\delta_N\left(0;\Phi_N\right)_{L^2}\beta_N^{1-\frac{1}{2\lambda}}, \qquad (14)$$

ибо $\delta_N\left(0;\Phi_N\right)_{L^2}\asymp\frac{1}{N^\lambda}$.

Теперь, полагая $g_N\equiv -h_N$ $(N\geq N_0)$ определим числа $\tilde{\gamma}_N^{(\tau)}$ и $\tilde{\omega}_N^{(\tau)}$ $(\tau=1,...,N)$:

$$\tilde{\gamma}_N^{(\tau)}=\begin{cases}-\frac{\hat{h}_N(m^{(\tau)})}{\tilde{\varepsilon}_N\eta_N},\ \text{если } m^{(\tau)}\in H_N\\ 0,\ \ \text{если } m^{(\tau)}\notin H_N\end{cases}\quad\text{и}\quad\tilde{\omega}_N^{(\tau)}=\begin{cases}-\frac{\hat{g}_N(m^{(\tau)})}{\tilde{\varepsilon}_N\eta_N},\ \text{если } m^{(\tau)}\in H_N\\ 0,\ \ \text{если } m^{(\tau)}\notin H_N.\end{cases}$$

Поскольку для каждого $\tau=1,...,N$ выполнены неравенства $\left|\tilde{\gamma}_N^{(\tau)}\right|\leq 1$, $\left|\tilde{\omega}_N^{(\tau)}\right|\leq 1$ и равенства $\hat{h}_N\left(m^{(\tau)}\right)+\eta_N\tilde{\gamma}_N^{(\tau)}\tilde{\varepsilon}_N=0$, $\hat{g}_N\left(m^{(\tau)}\right)+\eta_N\tilde{\omega}_N^{(\tau)}\tilde{\varepsilon}_N=0$, то для всякой пары $(l^{(N)},\varphi_N)\in\Phi_N$ имеем

$$\sup_{\substack{f\in F\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leq 1(\tau=1,...,N)}}\left\|f(\cdot)-\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right)+\gamma_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right)+\gamma_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2}\geq$$

$$\geq\left\|h_N(\cdot)-\varphi_N\left(\hat{h}_N\left(m^{(1)}\right)+\tilde{\gamma}_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,...,\hat{h}_N\left(m^{(N)}\right)+\tilde{\gamma}_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2}=$$

$$=\|h_N(\cdot)-\varphi_N(0,...,\ 0;0)\|_{L^2},$$

$$\sup_{\substack{f\in F\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leq 1(\tau=1,...,N)}}\left\|f(\cdot)-\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right)+\gamma_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right)+\gamma_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2}\geq$$

$$\geq\left\|g_N(\cdot)-\varphi_N\left(\hat{g}_N\left(m^{(1)}\right)+\tilde{\omega}_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,...,\hat{g}_N\left(m^{(N)}\right)+\tilde{\omega}_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2}=$$

$$=\|g_N(\cdot)-\varphi_N(0,...,\ 0;0)\|_{L^2}.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f\in F\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leq 1(\tau=1,...,N)}}\left\|f(\cdot)-\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right)+\gamma_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right)+\gamma_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2}\geq$$

$$\geq\max\left\{\|h_N(\cdot)-\varphi_N(0,...,0;0)\|_{L^2};\ \|g_N(\cdot)-\varphi_N(0,...,0;0)\|_{L^2}\right\}\geq\|h_N(\cdot)\|_{L^2} \qquad (15)$$

Сопоставляя неравенства (14) и (15), имеем

$$\sup_{\substack{f\in F\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leq 1(\tau=1,...,N)}}\left\|f(\cdot)-\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right)+\gamma_N^{(1)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right)+\gamma_N^{(N)}\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\cdot\right)\right\|_{L^2}\gg_s$$

$$\gg_s\delta_N\left(0;\Phi_N\right)_{L^2}\beta_N^{1-\frac{1}{2\lambda}},$$

откуда

$$\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;(l^{(N)},\,\varphi_N)\right)_{L^2}\underset{s}{\gg}\delta_N\left(0;\Phi_N\right)_{L^2}\beta_N^{1-\frac{1}{2\lambda}}.$$

Поскольку $\lambda > 1/2$ то из последнего неравенства следует равенство (10).
Теорема доказана.

Список литературы

1 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, том 55, №9, стр. 1474– 1985.

2 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника. Известия ВУЗов. Математика. 2013, №8, стр. 86 – 93.

3 Темиргалиев Н., Шерниязов К. Е., Берикханова М. Е. Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна – Гордона по коэффициентам Фурье // Современные проблемы математики / Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – М.: МИАН, 2013. Вып. 17: Математика и информатика, 2. К 75 – летию со дня рождения А. А. Карацубы. С.179 –207.

4 Таугынбаева Г.Е. О предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении, PhD диссертация. Алматы, 2014.

5 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения// Известия ВУЗов. Математика - 2017, №3, -С. 89 – 95.

6 Ажгалиев Ш., Темиргалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов// Матем. заметки - 2003. -Т. 73. Вып. 2. -С. 803 - 812.

7 Темляков В.Н. О приближении элементами конечномерного подпространства функций из различных классов Соболева или Никольского // Матем. заметки -1988. -Т.43. №6. -С. 770- 785.

8 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1984.

А.Б. Утесов, А.Т. Абдыкулов

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Тригонометриялық Фурье коэффициенттерінен алынған дәл емес мәліметтер бойынша анизотропты Соболев кластарының функцияларын жуықтау мәселесінің толық К(Е)Д-зерттеуі

Аннотация: Негізгі сызықтық функционалдар қатарына жататын тригонометриялық Фурье коэффициенттерінен сандық мәліметтер алынған жағдайда $W_2^{r_1,\ldots,r_s}(0,1)^s$ анизотропты Соболев класы функцияларын оптималды жуықтау К(Е)Д-есебі толығымен шығарылған. Дәл айтқанда, функцияларды олардың тригонометриялық Фурье коэффициенттерінің дәл мәндерімен жуықтаудың жақсармайтын реті $\delta_N(0;\Phi_N)_{L^2}\asymp N^{-(r_1^{-1}+\ldots+r_s^{-1})^{-1}}$ анықталған. Осыған сүйеніп, тригонометриялық полином болатын оптималды жуықтау агрегаты құрылған және оның Фурье коэффициенттерін есептеудің қателігі дәл мәліметтер бойынша жуықтаудың жақсармайтын ретін сақтайтындай табылған. Содан кейін аталмыш сандық мәлімет қателігі $\tilde{\varepsilon}_N=N^{-(r_1^{-1}+\ldots+r_s^{-1})^{-1}-\frac{1}{2}}$ қателігінен рет мағынасында төмен болатындай тригонометриялық полиномдар арасынан жуықтау агрегаты табылмайтыны дәлелденген.

Түйін сөздер: Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, анизотропты Соболев класы, шектік қателік, оптималды есептеу агрегаты, дәл емес мәліметтер бойынша жуықтау, шектік қателіктің массивтілігі.

A.B. Utessov, A.T. Abdykulov

K. Zhubanov University, Aktobe, Kazakhstan

The complete C(N)D-solution of the problem recovery of functions from anisotropic Sobolev classes by their unexact trigonometric Fourier coefficients

Abstract: In the case, when numerical information is removed from Fourier trigonometric coefficients - one of the basic linear functionals in the full volume is solved C(N)D – problem of optimal restoration of functions from $W_2^{r_1,\ldots,r_s}(0,1)^s$ anisotropic Sobolev classes. Exactly, are written $\delta_N(0;\Phi_N)_{L^2}\asymp N^{-(r_1^{-1}+\ldots+r_s^{-1})^{-1}}$ unimproved order of restoration of functions by their exact values of Fourier trigonometric coefficients. Based on this is constructed computing unit, which is trigonometric polynomial and is found amount $\tilde{\varepsilon}_N=N^{-(r_1^{-1}+\ldots+r_s^{-1})^{-1}-\frac{1}{2}}$ of error calculating Fourier coefficients, saving unimproved order of restoration by accurate information. Then is shown that computing unit by Fourier trigonometric coefficients with better error do not exist.

Keywords: computational (numerical) diameter, anisotropic Sobolev class, limiting error, optimal computing unit, recovery by unaccurate information, massive of limiting error.

References

1 Temirgaliev N., Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **55**(9), 1432–1443(2015).

2 Temirgaliev N., Abikenova Sh. K., Zhubanysheva A. Zh., Taugynbaeva G. E. Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ), **57**(8), 75-80(2013).

3 Temirgaliev N., Sherniyazov K. E., Berikhanova M. E. Exact Orders of Computational Cross-Sections in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein-Gordon Equation from Fourier Coefficients, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 282, suppl. 1, 165-191(2013).

4 Taugynbaeva G. E. O predel'noj pogreshnosti netochnoj informacii pri optimal'nom vosstanovlenii [About limiting error of unexact information under optimal reconstruction], PhD-thesis. Almaty, 2014.

5 Temirgaliev N., Zhubanisheva A.Zh. Order Estimates of the Norms of Derivatives of Functions with Zero Values on Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics, **61**(3), 77–82(2017).

6 Azhgaliev Sh., Temirgaliev N. Informativeness of Linear Functionals, Mathematical Notes, 73(6), 759-768(2003).

7 Temlyakov V.N. Approximation by elements of a finite-dimensional subspace of functions from various Sobolev or Nikol'skii spaces, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 43(6), 444-454 (1988).

8 Bugrov Y.S., Nikolsky S.M. Differencial'noe i integral'noe ischislenie [Differential and Integral Calculus] (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian]

Сведения об авторах:

Утесов А.Б. – кандидат физико-математических наук, доцент Актюбинского регионального государственного университета имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан.

Абдыкулоа А.Т. – магистрант Актюбинского регионального государственного университета имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан.

Utessov A.B. – Candidate of Phys.-Math. Sciences, associate professor K. Zhubanov University, Aktobe, Kazakhstan.

Abdykulov A.T. – Master student of K. Zhubanov University, Aktobe, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 01.02.2018

«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы» журналына жіберілетін жұмыстарға қойылатын талаптар

Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.

1. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақала авторының басып шығарушы, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіне мақаласын басуға келісімін және кез келген шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісімін білдіреді.

2. Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқасында) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Тех-пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды ***bulmathmc.enu.kz*** журнал сайтынан жүктеп алуға болады.

3. Мақаланың көлемі 6 беттен кем және 18 беттен артық болмауы тиіс. Талап деңгейінен асқан жұмыстар редакциялық алқа отырысында қаралып, баспаға ерекше жағдайда ғана рұқсат етіледі.

4. Жұмыстың мәтіні ХҒТАР (Халықаралық ғылыми-техникалық ақпарат рубрикаторы) кодының көрсеткішімен басталып, кейін автор(лар)дың аты және тегі, жұмыс орнының толық атауы, қаласы, мемлекеті, E-mail-ы, мақаланың толық атауы, аннотациясы көрсетіледі. Аннотация 150-200 сөз көлемінде болуы тиіс, сонымен қатар мәтінде күрделі есептік формулалар болмауы, мақаланың толық аты қайталанбауы, жұмыстың мәтіні мен әдебиеттер тізімінде көрсетілетін сілтемелер болмауы керек. Аннотация мақаланың ерекшеліктерін көрсететін және оның құрылымын (кіріспе, есептің қойылымы, мақсаты, тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер және олардың талқылаулары, қорытынды) сақтайтын мақаланың қысқаша мазмұны болуы тиіс.

5. Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

6. Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға тиым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың номері (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: «... қараңыз . [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамадағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

7. Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографикалық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

8. *Редакцияның мекенжайы*: 010008, Қазақстан, Астана қаласы, Қ.Сәтпаев көшесі, 2, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Бас ғимарат, 408-кабинет. Телефоны: (7172) 709-500 (ішкі 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Provision on articles submitted to the journal
"Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
Mathematics. Computer Science. Mechanics Series"

The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.

1. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website ***bulmathmc.enu.kz***.

3. The volume of the article should not exceed 18 pages(from 6 pages). The article, exceeding this volume is accepted for publication in exceptional cases by a special decision of the journal Editorial Board.

4. The text of the article begins with the IRSTI (International Rubricator of Scientific and Technical Information), then followed by the Initials and Surname of the author (s); full name of organization, city, country; E-mail of the author (s); the article title; abstract. Abstract should consist of 150-250 words, it should not contain cumbersome formulas, the content should not repeat the article title, abstract should not contain references to the text of the article and the list of literature), abstract should be a brief summary of the article content, reflecting its features and preserving the article structure - introduction, problem statement, goals, history, research methods, results with its discussion, conclusion.

5. Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

6. The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "..., see [3, § 7, Lemma 6]"; "..., see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

7. At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

8. *Address:* 010008, Republic of Kazakhstan, Astana, Satpayev St., 2., L.N. Gumilyov Eurasian National University, Main Building, room 408). E-mail: *vest_math@enu.kz*. Сайт: *bulmathmc.enu.kz*.

Правила представления работ в журнал
"Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика"

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

1. Отправление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статьи в журнале и переиздания их на любом иностранном языке.

2. В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилевой файл можно скачать со сайта журнала *bulmathmc.enu.kz.*

3. Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц). Работы, превышающие указанный объем, принимаются к публикации в исключительных случаях по особому решению Редколлегии журнала.

4. Текст работы начинается с рубрикатора МРНТИ (Международный рубрикатор научно-технической информации), затем следуют инициалы и фамилия автора(ов), полное наименование организации, город, страна, E-mail автора(ов), заглавие статьи, аннотация. Аннотация должна состоять из 150-250 слов, не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию не должна повторять название статьи, не должна содержать ссылки на текст работы и список литературы, должна быть кратким изложением содержания статьи, отражая её особенности и сохранять структуру статьи - введение, постановка задачи, цели, история, методы исследования, результаты с их обсуждением, заключение, выводы.

5. Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

6. Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "..., см. [3; § 7, лемма 6]"; "..., см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

Примеры оформления списка литературы

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

7. После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

8. *Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, учебно-административный корпус, каб. 408. Тел: (7172) 709-500 (вн. 31-428). E-mail: *vest_math@enu.kz.* Сайт: *bulmathmc.enu.kz.*